ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NB : *La clarté de la copie et la précision dans la rédaction seront prises en compte.*

L'épreuve comporte deux exercices et un problème tous obligatoires.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $n^7 - n$ est divisible par 42. **0,75 pt**
2. Démontrer que $4^{28} - 1 \equiv 0[29]$. **0,5 pt**
3. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$.
   (a) Donner une solution particulière de (E). **0,5 pt**
   (b) Résoudre (E). **0,5 pt**
4. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) d'entiers vérifiant $\begin{cases} N &= 8a+1 \\ N &= 5b+2 \end{cases}$
   (a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E). **0,5 pt**
   (b) Quel est le reste de la division de N par 40 ? **0.5 pt**
5. (a) Résoudre $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x + 5y = 100$ **0.5 pt**
   (b) Pour apprêter le menu de la soirée de clôture des activités du Club scientifique, les membres du Club ont cotisé au total 100 pièces de 100F, soit 8 pièces par garçon et 5 par fille. combien pouvait-il avoir de garçons et de fille dans le Club. . **0,75pt**

Exercice 2 (4,5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. On pose : $f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$.

1. (a) Montrer que qu'il existe un réel r tel que $f(r) = 0$. **0,5pt**
   (b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $f(z) = (z-r)(z^2 + az + b)$ **0,5pt**
   (c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation f(z) = 0. **0,5pt**
2. A, B, Csont les points d'affixes respectives $-1 + 3i, 1 + i, -4$. Pour tout point M, on pose : $h(M) = \vec{MA}.\vec{MB} + 2\vec{MB}.\vec{MC} + 3\vec{MC}.\vec{MA}$.
   (a) Déterminer l'affixe du barycentre G du système $(A, 4), (B, 3), (C, 5)$ **0,5 pt**
   (b) Calculer $h(G)$. **1 pt**
   (c) Exprimer h(M) en fonction de MG^2 et $h(G)$. **0,75 pt**
   (d) Déterminer alors l'ensemble (Γ) des points M tels que $h(M) = 18$. **0,75pt**

Problème 11 points

Le problème comporte deux parties A et B indépendantes.

Partie A (3,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O,I,J). Soient A, B *et* C les points d ?affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$ et $z_C = -2 + 3i$

1. On considère la droite (D) d'équation $8x + 5y = 1$. Déterminer l'ensemble des points de (D) dont les coordonnées sont entières.(on pourra utiliser les résultats de l'exercice 1) **0,5 pt**
2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en C **0,5 pt**
3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2}{3}iz + \frac{5}{3}i - \frac{1}{3}$. Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s. **1 pt**
4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.
   (a) Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n **0,5 pt**
   (b) À partir de quel entier n le point Bn, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ? **0,5 pt**
   (c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés. **0,5pt**

Partie B (7,5 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$ *et* $g(x) = x^3 + 6x - 2$.

1. (a) Étudier les variations de g. **0,75 pt**
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$. **0,25 pt**
   (c) Monter que $\lambda \in]0, 1[$ puis donner une encadrement de λ à 10^{-1} près. **0,75 pt**
   (d) Donner le tableau de signe de la fonction g. **0,5 pt**
2. (a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de f. **0,5pt**
   (b) Étudier les branches infinies de f **0,75 pt**
   (c) Vérifier que $f(\lambda) = \frac{3}{2}\lambda$ puis déduire un encadrement de $f(\lambda)$. **1 pt**
   (d) Montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **0,5 pt**
   (e) Déduis de (d) le tableau signe de f' puis son tableau de variation. **1 pt**
   (f) Montrer que la restriction h de f à $[\lambda, \infty]$ réalise une bijection sur un intervalle qu'on précisera. **0,5 pt**
   (g) Construire (C_f) et (C_h), courbes de f et de h dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **1 pt**

Bonne chance ! ! !