

ÉVALUATION DE LA DEUXIÈME SÉQUENCE

Classe :  $T^{le}C$  Coef : 5 Durée : 4h Examineur : Takam Takougoum Clovis-C

**Exercice 1 : 3pts**

- A) Soit  $n$  un entier naturel non nul.  $f$  une fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
- 1) Montrer que la dérivée d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}^*$  de la fonction  $f$  est  $f^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ . 0.75pt
  - 2) Montrer que pour tout entier naturel  $m$ ,  $10^{2m} \equiv 1[9]$ . 0.5pt
- B) On considère l'équation (E) :  $13x + 7y = 16$ .
- 1) Déterminer une solution particulière de (E). 0.25pt
  - 2) Déterminer tous les couples  $(x; y)$  d'entiers tel que  $13x + 7y = 16$ . 0.5pt
  - 3) En déduire dans  $\mathbb{Z}$ , les solutions du système :  
$$\begin{cases} x \equiv -5[7] \\ x \equiv 11[13] \end{cases}$$
 0.5pt

**Exercice 2 : 5pts**

- A) On considère  $g$  une fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = \sqrt{x+1}$ .
- 1) Déterminer les dérivées première et seconde de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ . 0.5pt
  - 2) Montrer que  $\forall x \in [0; 1]; \frac{\sqrt{2}}{4} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ . 0.75pt
  - 3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g$  sur  $[0; x]$  ;  
démontrer que  $\frac{\sqrt{2}}{4}x \leq g(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x$  avec  $x \in ]0; 1[$ . 0.75pt
- B) On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $Q$  défini par :  $Q(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1$ .
- 1) Montrer que  $Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$  et en déduire que si  $z_0$  est une solution l'équation  $Q(z) = 0$ , alors  $\bar{z}_0, \frac{1}{z_0}$  et  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  sont aussi des solutions de cette équation. 1pt
  - 2) Montrer que  $-1 + i$  est une solution de l'équation  $Q(z) = 0$ . 0.75
  - 3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Q(z) = 0$ . 1.25pt

**Problème : 12pts**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ .

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Le but de ce problème l'étudier de la fonction  $f$ .

**Partie A : Étude de la fonction auxiliaire 3.5pts**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$ .

- 1) Étudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation. 1pt

- 2) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ . 0.75pt
- 3) Justifier que  $\alpha \in [2; 3]$ , et utiliser la méthode de dichotomie pour déterminer la valeur de  $\alpha$  à  $10^{-21}$  près. 1pt
- 4) Étudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . 0.75pt

**Partie B : Étude de la fonction  $f$  6.5pts**

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ . 0.25pt
- 2-a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de  $f$ . 1pt
- b) Montrer que la droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . 0.5pt
- c) Déterminer d'autres asymptotes (si existe) de  $(C_f)$ . 0.5pt
- 3-a) Montrer que  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  et déterminer le signe de  $f'$ . 1pt
- b) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1}$ . 0.5pt
- c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . 0.5pt
- 4) Étudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à son asymptote oblique. 0.5pt
- 5) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$ . 0.5pt
- 6) Tracer la courbe de la fonction  $f$ , ses asymptotes la tangente  $(T)$ . 1.25pt

**Partie C : 2pts**

Soit l'intervalle  $I = ]-\infty; -1[$ .

- 1) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. 1pt
- 2) Résoudre sur  $I$  l'équation  $f(x) = 0$ . 0.5pt
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  sur  $I$ . 0.5pt

**Bonne chance**