Préparation au concours des Ingénieurs des travaux Statistiques
Test N°1 de Mathématiques Durée 2h

EXERCICE 1 : Répondre par vrai ou faux (sauf la question f. où il « suffit » de prouver). 6pts

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in]0 ; +\infty[$. On note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Alors

a. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.
b. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 2$.
c. Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
d. Si $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.
e. Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$.
f. Démontrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2$.

EXERCICE2 : Répondre par vrai ou faux 4pts

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

EXERCICE 3 : Répondre par vrai ou faux 4pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère dans ce repère les points A(1 ; −1), B(5 ; 3) et I le milieu de [AB]. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :
* $G_0 = O$,
* Pour n entier naturel, G_{n+1} est le barycentre de {(G_n ; 2), (A ; 1), (B ; 1)}.
On appelle $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de G_n.
a. G_1, G_2 et G_3 sont alignés.
b. Quel que soit n, G_{n+1} est l'image de G_n par l'homothétie de centre I et de rapport 2.
c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = x_n - 3$ est une suite géométrique de premier terme −3 et de raison $\frac{1}{2}$
d. Pour tout n, $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 4 : Répondre par vrai ou faux 16pts

a. Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
b. si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
c. Toute suite croissante majorée par M converge vers l avec $l \leq M$.
d. Toute suite décroissante minorée par m converge vers l avec $l \geq m$.
e. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
f. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.

g. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
h. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.
i. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier n, $v_n > u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.
j. Toute suite bornée est convergente.
k. Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.
l. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
m. deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
n. si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \le v_n$;
o. toute suite croissante et majorée est convergente ;
p. toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exercice 5 : Répondre par vrai ou faux 4pts

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

EXERCICE 6 : 16pts

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.
2. Justifier par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. a. Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}$, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit n on a $u_n - v_n \ge 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
5. a. Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \ge \frac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \le \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.