Préparation des concours 2021

Niveau terminale scientifique

Cette fiche propose une série d'exercices très abordables pour débuter la préparation des concours 2021. Bonne chance à tous.

EXERCICE 1

1. Calculer $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_{n-k}^{p-k}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

2. Soit D_n le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ n'ayant pas de point fixe. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{D}_{n-k} = n!$ (on pose $\mathrm{D}_0 = 1$).

3. Montrer que $\mathrm{D}_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$.

EXERCICE 2 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}.$$

A : $\mathcal{D} = \mathbb{R}_*^+$

B : $\mathcal{D} =]1; e[\cup]e; +\infty[$

C : $\mathcal{D} =]2; +\infty[$

D : $\mathcal{D} =]1; +\infty[$

E : $\mathcal{D} =]1; 2[\cup]2; +\infty[$

EXERCICE 3 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Dans une population adulte d'une ville, il y a 55 % d'inactifs ; 80 % des actifs sortent le dimanche et 20 % le samedi ; 90 % des inactifs sortent le samedi et 20 % le dimanche.

a) 47 % des adultes de cette ville sortent le dimanche.

b) 48,5 % des adultes de cette ville sortent le samedi.

Un habitant est choisi au hasard. On constate qu'il sort le samedi.

c) La probabilité pour qu'il soit inactif est d'environ 0,85.

d) La probabilité pour qu'il soit actif est d'environ 0,80.

EXERCICE 4 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille et que, lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants.

Pour une famille de deux enfants :

a) La probabilité pour que les enfants soient deux garçons est $\frac{1}{2}$.

b) La probabilité pour qu'il y ait au moins une fille est $\frac{3}{4}$.

c) La probabilité pour que les enfants soient de même sexe est $\frac{1}{2}$.

d) La probabilité pour que les enfants soient de sexes différents est $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 5 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Un détaillant vend des ampoules en provenance de deux usines dans les proportions suivantes : 60 % des ampoules proviennent de l'usine Alpha ; 40 % des ampoules proviennent de l'usine Béta.

7 % des ampoules de l'usine Alpha et 4 % de l'usine Béta sont défectueuses.

Un client achète une ampoule chez ce détaillant.

a) La probabilité pour que l'ampoule provienne de l'usine Alpha et soit défectueuse est 0,042.

b) La probabilité pour que l'ampoule provienne de l'usine Béta et ne soit pas défectueuse est 0,384.

c) La probabilité pour que l'ampoule soit défectueuse est 0,058.

d) Sachant que l'ampoule achetée est défectueuse, la probabilité pour qu'elle provienne de l'usine Alpha est d'environ 0,7.

EXERCICE 6 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

On considère dans le plan deux points distincts A et B. Soit C le symétrique du point A par rapport à B, et D le symétrique du point B par rapport à A.

a) Le point C est le barycentre du système pondéré $\{(A,1);(B,2)\}$.

b) Le point D est le barycentre du système pondéré $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$.

c) Si I est le milieu du segment $[AB]$, le point D est le barycentre du système pondéré $\{(I,2);(C,-1)\}$.

d) Le point I est le barycentre du système pondéré $\{(C,2);(D,2)\}$.

EXERCICE 7 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Dans un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, soit $A(1,1)$, $B(-1,2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x + 2y = 1$.

a) La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ au point A a pour équation cartésienne : $2x + y = 3$.

b) Le cercle de centre A et de rayon 2 a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 4.$$

c) La médiatrice du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne : $-2x + y = \frac{3}{2}$.

d) Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 3y = -1$.

EXERCICE 8 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; i, j, k)$. On considère les points $A(-1;2;4)$, $B(0;-2;3)$, $C(7;1;-1)$ et $D(-2;-2;-13)$.

On appelle $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[AB]$, c'est-à-dire le plan contenant les points équidistants de A et de B, ou aussi le plan perpendiculaire à $[AB]$ contenant le milieu de $[AB]$.

On appelle $\mathcal{Q}$ le plan médiateur de $[CD]$.

a) Le vecteur de coordonnées $(8;-1;-5)$ est normal à $\mathcal{Q}$.

b) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x + 4y + z + 4 = 0$.

c) A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre $\Omega(-1;2;-5)$.

d) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

EXERCICE 9 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Soit X la variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

a) $P(3 < X \leqslant 5) = \frac{1}{2}$

b) $P(X > 3) = \frac{5}{8}$

c) $P\left[(3 < X) \cup (4 < X \leqslant 6)\right] = \frac{3}{4}$

d) $E(X) = \frac{33}{8}$

EXERCICE 10 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

On tire au hasard une boule dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la boule tirée.

Donner la valeur de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

A : $E(X) = 1$ **B** : $E(X) = \frac{11}{2}$ **C** : $E(X) = 11$

D : $E(X) = \frac{1}{10}$ **E** : $E(X) = 5$

EXERCICE 11 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

a) La suite de terme général $(-1)^n\dfrac{n-1}{n+3}$ converge vers 0.

b) La limite de la suite de terme général $\dfrac{\cos n}{e^n+1}$ n'existe pas.

c) La suite de terme général $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$ diverge.

d) La suite de terme général $\dfrac{e^{-n^3+1}}{n+1}$ converge vers 0.

EXERCICE 12 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante telle que $u_n \leqslant 1-\dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est :

a) une suite majorée.

b) une suite minorée.

c) une suite divergente.

d) une suite convergente vers 1.

EXERCICE 13 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier n, $w_n = \dfrac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$ vérifie :

A : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

B : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

C : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

D : La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

E : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$.

EXERCICE 14 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 3-\dfrac{4}{x+2}$.

On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}.$$

On admettra que les suites u et v sont bien définies.

a) La suite v est géométrique de raison 4.

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5 \times \frac{4^{10}-1}{3}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2v_n+1}{v_n-1}$.

d) La suite u converge vers -1.

EXERCICE 15 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

On définit la suite (I_n) pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n}\,dx$.

a) $I_1 = \frac{1}{2}$.

b) La suite (I_n) est croissante.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{e^{n-1}}\right).$$

d) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, une intégration par parties sur I_n donne $(n-1)^2 I_n = 1 - n\,e^{1-n}$.

EXERCICE 16:

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

a) Calculer S_n et T_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

4. On admet que, pour tout $x \geqslant 0$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n$.

5. a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) On admet que la suite (u_n) est convergente et on désigne par l sa limite.

Déduire des questions précédentes que : $\frac{5}{6} \leqslant l \leqslant 1$.

EXERCICE 17 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ la courbe représentant la fonction exponentielle et (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - e^a(x+1-a)$ et Γ sa courbe représentative dans le même repère.

a) Une équation de (T) est : $y = e^a(x+1-a)$.

b) La dérivée f' de f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\mathcal{C}$ est au-dessous de (T) avant le point $A\left(a; e^a\right)$ et au-dessus de (T) après A.

d) À tout réel x_0 on associe les points M_0 de $\mathcal{C}$ et N_0 de Γ d'abscisse commune x_0.
x_0 étant fixé, il existe une valeur de a telle que $\mathcal{C}$ et Γ possèdent des tangentes parallèles respectivement en M_0 et N_0.

EXERCICE 18 :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \qquad f'(x) - 3f(x) = \frac{3}{1+e^{-3x}}$$

et qui vérifient : $f(0) = 0$.

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E). On désigne par f' sa dérivée.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-3x} f(x).$$

On désigne par h' la dérivée de h.

1. a) Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$, pour tout réel x.

b) Expliquer pourquoi la dérivée h' de h vérifie, pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{3e^{-3x}}{1+e^{-3x}}.$$

2. Déterminer alors toutes les fonctions h possibles. On justifiera la réponse.

3. En déduire toutes les fonctions f solutions de (E).

4. Déterminer la fonction f_0, solution de (E), qui vérifie $f_0(0) = 0$.

EXERCICE 19 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x}\, dx$.

Une intégration par parties permet de trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

Quelle est cette relation ?

A : $I_n = \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{n}{2} I_{n-1}$; **B :** $I_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$

C : $I_n = 2e^2 - 2nI_{n-1}$; **D :** $I_n = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{n-1}{2} I_{n-1}$

E : $I_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

EXERCICE 20 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle A le point d'affixe 2, B le point d'affixe $-3-\mathrm{i}$ et C le point d'intersection de (OB) avec la médiatrice de $[OA]$.
On considère dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (E_1) et (E_2) :

$$(E_1) : \quad |z| = |z-2| \qquad ; \qquad (E_2) : \quad \arg(z) = \arg(z+3+\mathrm{i}).$$

a) L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie (E_1) est la médiatrice de $[OA]$.

b) L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie (E_2) est le segment $[OB]$, exclusion faite de O et B.

c) L'affixe du point C vérifie simultanément (E_1) et (E_2).

d) Le point C a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 21 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

On considère deux réels a et b et l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^4 + a z^3 + b z^2 + a z + 1 = 0. \qquad (E)$$

a) Si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ le sont aussi.

b) Si $1+2\,\mathrm{i}$ est solution de (E) alors $\dfrac{1}{1-2\,\mathrm{i}}$ aussi.

c) Le changement de variable $Z = z + \dfrac{1}{z}$ conduit à résoudre :

$$Z^2 + a Z + b = 0. \qquad (E)'$$

d) On peut factoriser l'expression $z^4 + a z^3 + b z^2 + a z + 1$ par deux polynômes de degré deux à coefficients réels.

EXERCICE 22 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Soit f une fonction continue et positive sur $[0; +\infty[$.
Soit F et G les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ respectivement par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = x \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On désigne par Γ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

a) $G(0) = G(1)$.

b) G est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $G'(x) = F(x) + x f(x)$.

c) On ne peut pas prévoir le sens de variation de G sur $[0; +\infty[$ avec les seules hypothèses de l'énoncé.

d) L'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2) + F(0)$.

EXERCICE 23 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Pour tout nombre complexe z, $\arg(z)$ désigne un argument de z. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z. On pose $Z = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z - 1}$ ·

a) L'ensemble des points M tels que Z soit réel est une droite.

b) L'ensemble des points M tels que $|Z| = 1$ est un cercle.

c) L'ensemble des points M tels que $Z\,\overline{Z} = 4$ est une droite.

d) L'ensemble des points M tels que $\arg(Z) = 0$ (modulo π) est un cercle.

e) L'ensemble des points M tels que $Z - \overline{Z} = 0$ est une droite.

EXERCICE 24 : REPONDRE PAR VRAI OU FAUX

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = -\sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{15}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Un argument de a^n est $\dfrac{2n\pi}{3}$ ·

b) O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

c) OAB est un triangle rectangle en O.

d) Le cercle circonscrit à OAB a pour rayon 3.

SOLUTION EXERCICE 1

1. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(p-k)!(n-p)!} \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^p C_p^k \\ &= C_n^p(1-1)^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p \geqslant 1 \\ 1 \text{ si } p = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. Notons P_k l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes. Il est clair que $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une partition de $\mathcal{S}_n$. En particulier $n! = \sum^{n} \text{Card}(P_k)$. Nous allons montrer que $\text{Card}(P_k) = C_n^k D_{n-k}$ pour tout k. On a par définition $\text{Card}(P_0) = D_n$ et $\text{Card}(P_n) = 1 = C_n^n D_0$, car seule l'identité possède n points fixes. Pour $k \geqslant 1$, un élément de P_k est parfaitement déterminé par le choix de ses points fixes (C_n^k possibilités) et par le choix de la permutation induite sur les $n-k$ éléments restants (D_{n-k} possibilités puisque cette permutation est un dérangement d'un ensemble à $n-k$ éléments). Remarquons en passant que $D_1 = 0$ et que effectivement P_{n-1} est vide : une permutation ne peut avoir exactement $n-1$ points fixes ! On a donc

$$\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k}.$$

3. On part du membre de droite de l'égalité demandée. On a

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sum_{p=0}^{n-k} C_{n-k}^p D_p$$

en remplaçant le terme $(n-k)!$ par la formule obtenue dans la question 2. En échangeant l'ordre de sommation, on obtient grâce à la question 1.

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^p\right) D_p = D_n. \lhd$$