ECOLES DE STATISTIQUES AFRICAINES

Anciens sujets du concours de recrutement des élèves Ingénieurs Statisticiens Economistes (ISE) et leurs corriges

Option mathématiques

- **MÉTIERS DE LA DE LA**
  - UN SECTEUR À DÉCOUVRIR
- LES STRATÉGIES DE FORMATION
- DES CONSEILS D'EXPERT

Hugues SILA, Ingénieur Statisticien Economiste

Lumbrozo Publishing

3ème édition
décembre 2019

PREFACE

Ce recueil de sujets corrigés est pratiquement destiné aux étudiants titulaires d'une licence en Mathématiques désirant présenter le concours de recrutement des élèves ***Ingénieurs statisticiens économistes****, concours CAPESA.* ***Il est mis gratuitement à la disposition de ceux-ci.***

Après avoir présenté les écoles de statistiques africaines, les débouchés des statistiques, une brève présentation du métier de l'Ingénieur statisticien/Economiste est faite dans le document.

Des énoncés ainsi que les corrigés de tous les sujets proposés de 19980 à 2019 permettront aux étudiants de bien maitriser le type de sujets proposés à ce concours.

Je n'insisterai jamais sur le bon mode d'emploi de ce livre de sujets corrigés. Il serait parfaitement vain de se contenter de lire, même très attentivement, la solution à la suite de l'énoncé. On n'apprend pas à faire du vélo dans un manuel ! Ce n'est qu'après avoir cherché longuement chaque question avec ou sans succès, mais du moins avec persévérance que la lecture du corrigé pourra devenir fructueux et profitable.

Avec ce livre, j'espère mettre à la disposition des étudiants un ensemble d'exercices et de problèmes leur permettant d'acquérir des méthodes et des pratiques qu'ils pourront réinvestir en d'autres circonstances. Je leur souhaite de réussir les concours et examens qu'ils préparent avec courage.

Hugues SILA. Ingénieur Statisticien Economiste d'Etat, décembre 2019

Pour toute information supplémentaire, bien vouloir m'écrire à silhu06@yahoo.fr

ZOOM SUR La Statistique

L'origine, la statistique permettait à l'État de disposer d'outils pour mener à bien ses politiques publiques. Ainsi, l'étymologie reflète bien cette mission : le "stat" de statistique a la même racine que "état". Dans le monde d'aujourd'hui, l'apparition croissante de nouvelles sources d'informations (recensement, réseaux sociaux, sondages, etc.) produit des masses de données importantes. La place de la statistique en entreprise ne cesse de se développer tout autant dans les domaines où elle était déjà présente que dans des champs nouveaux d'application. Ainsi, des questions inédites apparaissent et la place de cette discipline pour la recherche académique ou industrielle est en forte croissance (recherche médicale, imagerie, prévision, etc.). Les débouchés en statistique sont donc à la fois nombreux et variés. Nous espérons que ce document permettra à chacun(e), à travers quelques exemples, de s'identifier à une ou plusieurs trajectoires et donc viser un travail épanouissant qui lui corresponde.

La statistique, pour quoi faire ?

Quel est le risque qu'un emprunteur soit un jour défaillant ?
Comment prévoir la demande et ainsi d'évaluer la production nécessaire d'électricité au cours du mois ?
Quel est l'impact de la consommation quotidienne de tabac sur la santé ?
Quelle tranche d'âge sera intéressée par un tel produit ?
y'aurait-il dans le futur plus ou moins d'avalanches dans les alpes françaises ?
Quel est le canal le plus approprié pour susciter un acte d'achat chez un client ?

La statistique répond à de nombreuses questions. C'est pourquoi les entreprises et les administrations ne peuvent pas se passer d'elle. En analysant des données chiffrées, elles obtiennent des informations stratégiques.

Le métier d'ingénieur statisticien varie énormément suivant le secteur dans lequel il évolue et son niveau au sein de la hiérarchie d'une organisation. Dans tous les cas, son métier nécessite une très bonne maitrise de l'informatique et des mathématiques.

L'Ingénieur Statisticien Economiste est un spécialiste des chiffres. Il fournit une vision globale de l'évolution économique et apporte une aide à la décision. Il doit avoir une double compétence en statistiques et en économie.

Son travail consiste à collectionner des données qualitatives et quantitatives pertinentes et cohérentes dans le contexte économique dans lequel il se situe. Toutes ces données seront traitées avec des outils informatiques avant que le statisticien-économiste n'effectue un travail d'analyse et de synthèse des résultats. Ces résultats, représentés sous forme de courbes ou de graphiques, retracent l'évolution économique et permettent d'établir des prévisions économiques. Ainsi, son travail peut servir de **support pour justifier une décision, de conseil pour pouvoir anticiper la future évolution, ou tout simplement de veille.** Dans certains cas, ses analyses et projections dans le futur peuvent favoriser une certaine décision ou influencer l'orientation des priorités définies par son employeur. Le statisticien économiste peut donc avoir une grande responsabilité pour garantir la pertinence et l'exactitude de ses statistiques.

Dans la finance, le rôle du statisticien est prépondérant. Il fait parler les chiffres et l'historique d'une entreprise ou d'un produit afin d'en faire ressortir une évolution, positive ou négative, et ainsi préjuger de ce que réserve l'avenir. Cela concerne aussi bien des chiffres de ventes ou des coûts de production, que des éléments de satisfaction clients.

Les compétences pour devenir statisticien/ statisticiens Economiste

Le statisticien ne croit qu'en des informations vérifiées :

- être mathématicien dans l'âme
- posséder l'esprit d'analyse et de synthèse
- savoir communiquer avec des interlocuteurs variés
- maîtriser la gestion de données sur poste informatique
- parler anglais est un atout

Débouchés

Tous les statisticiens camerounais formés dans l'une des quatre écoles à vocation sous régionales (ISSEA, ENSEA, ENEAM et ENSAE) sont automatiquement recrutés à la fonction publique.

Par ailleurs beaucoup décident de travailler dans les multinationales (MTN, ORANGE), les banques, les organisations internationales (PNUD, BAD, CEA, FMI, BANQUE MONDIALE, BEAC. Etc.)

Déroulement de la Formation

L'accès aux écoles de statistiques à vocation régionale se fait par concours. Le concours commun pour les quatre écoles se déroule dans les différents pays au mois d'avril et les copies sont acheminées en France (Malakoff) pour Correction et publication des résultats par le CAPESA. Les étudiants reçoivent une bourse au cours de leurs formations.

Comment devenir Statisticien Economiste au Cameroun ?

1. Cycles de formation

La formation des statisticiens au Cameroun et en Afrique subsaharienne comprend trois cycles (correspondant à trois diplômes).

- Le cycle de Technicien Supérieur de la Statistique sanctionné par l'obtention du diplôme de **Techniciens Supérieur de la Statistique** (TSS) ; (BAC+2)
- Le cycle **d'Ingénieur Statisticien Economiste cycle long** (ISE) **/Analyste Statisticien (AS)** (sanctionné par l'obtention du diplôme d'**Analyste Statisticien (AS)** en troisième année et du diplôme **d'Ingénieur Statisticien Economiste** (ISE) pour une formation de 5 ans ; (BAC+5)
- Le cycle d'Ingénieur Statisticien Economiste sanctionné par l'obtention du diplôme **d'Ingénieur Statisticien Economiste** (ISE) ; (LICENCE+3).

2. Ecoles de formation des statisticiens

En Afrique subsaharienne, quatre écoles à vocation sous régionale forment les Statisticiens. Il s'agit de :

- Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA), Abidjan ;
- Institut Sous-régional de Statistique et d'Economie Appliquée (ISSEA), Yaoundé ;
- Ecole Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA), Abidjan
- Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE) , Dakar
- Ecole Nationale D'Economie Appliquée et de Management (ENEAM) à Cotonou classée école du CAPESA depuis 2019.

Héritières d'une tradition française de formation d'ingénieurs polyvalents, ces écoles offrent des enseignements combinant un socle théorique consistant, statistique, économie, démographie, informatique et des spécialisations (en particulier, des cours pratiques) conduisant à des applications professionnelles dans le champ des statistiques officielles pour l'essentiel.

Elles facilitent une bonne osmose entre le monde de la production statistique et celui de l'enseignement, une proportion élevée des professeurs exerçant le métier de statisticien ou d'économiste dans le privé ou dans le secteur public.

Ces quatre écoles organisent un **concours commun** d'admission de leurs élèves.

Les écoles et les critères de recrutement au concours 2019 sont les suivants :

Concours ISE cycle long / Analyste Statisticien (AS)

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique de Dakar

Pour se présenter, les candidats doivent être nés **après le 31 décembre 1997**[1] et être :

- titulaires d'un baccalauréat scientifique (C, D, E ou S)
- ou inscrits en terminale scientifique (sous réserve de l'obtention du baccalauréat)
- Les fonctionnaires doivent être nés après le 31 décembre 1979, et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national

Grâce à un cycle préparatoire intégré très sélectif, la filière ISE cycle long /AS permettra de recruter les meilleurs bacheliers scientifiques pour les amener à un diplôme d'ingénieur ou d'analyste statisticien, en garantissant ce niveau d'excellence propre au parcours ISE.

Attention : Il faudra impérativement indiquer sur le dossier d'inscription la formation souhaitée.

Préparation au diplôme ITS par la voie B (dernière année où ce concours sera lancé)

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique de Dakar

[1] Pour les Camerounais, la fonction publique leur accorde regulierement jusqu'à 23 ans, c'est-à-dire être né après le 31 décembre 1996

Les candidats doivent être nés après le 31 décembre 1995[2] et :

- pour l'option Mathématiques, être inscrits en 2ème année de Licence de Mathématiques ou en classe de Mathématiques Spéciales
- pour l'option Economie, être inscrits en 2ème année de Licence de Sciences Economiques ou dans une classe préparatoire aux écoles de commerce

Les fonctionnaires doivent être être nés après le 31 décembre 1979, et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national

Préparation au diplôme ISE

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique de Dakar
- ENEAM, École Nationale d'Économie Appliquée et de Management de Cotonou

Un candidat ne peut pas se présenter plus de trois fois au concours.

Les candidats doivent avoir être nés après le 31 décembre 1993 et :

- pour l'option Mathématiques, être inscrits en 3ème année de Licence de Mathématiques ou en classe de Mathématiques Spéciales (les titulaires d'un diplôme ITS, ou en dernière année d'études ITS, sont admis à concourir)
- pour l'option Economie, être inscrits en 3ème année de Licence de Sciences Economiques (les titulaires d'un diplôme ITS, ou en dernière année d'études ITS, sont admis à concourir)

Les fonctionnaires doivent être nés après le 31 décembre 1979 et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national.

[2] 2 Pour les Camerounais, la fonction publique leur accorde regulierement jusqu'à 23 ans, c'est-à-dire être né après le 31 décembre 1994

Cette formation, de haut niveau théorique, dure 3 ans ou 5ans, que ce soit à l'ENSEA, à l'ISSEA ou à l'ENSAE. Elle est sanctionnée par le diplôme d'Ingénieur Statisticien Économiste. Depuis l'année universitaire 2018/2019 le CAPESA permet aux étudiants admis en troisième année ISE de terminer la troisième année soit dans son école de départ, soit dans une des deux autres écoles du CAPESA, soit à l'ENSAE de Paris (l'ENSAE *Paris est la grande école de la Data science, de l'Économie, de la Finance et de l'Actuariat*), soit à l'ENSAI de Paris. Ainsi un étudiant camerounais admis à l'ISSEA au cycle ISE peut étudier les deux premières années à Yaoundé et la suite de sa formation à l'ENSAE de Paris. Il sera ainsi diplômé des deux écoles.

Modalités pratiques

Des dossiers d'inscription pour les concours ISE cycle long / AS, ITS voie B et ISE sont disponibles auprès :

- des Directions de la Statistique de la plupart des pays africains francophones
- des Ecoles et Instituts de Formation Statistique
- du CAPESA
- Au ministère de la Fonction publique et de la réforme administrative pour le Cameroun

Les dates des concours figurent dans les Avis de concours :

- les 2 et 3 avril 2020 pour le concours ISE

- les 8 et 9 avril 2020 pour le concours ITS voie B et ISE cycle long/AS

Des brochures d'information décrivent les modalités de recrutement et détaillent les programmes des connaissances requises dans les principales matières pour se préparer aux épreuves. Il existe cinq brochures, correspondant chacune à un concours, une voie ou une option.

ORGANISATION DES CONCOURS

Les concours d'entrée dans les écoles de formation d'Ingénieurs Statisticiens Économistes (ISE) et d'Analystes Statisticiens (AS) accueillent chaque année environ 200 candidats répartis dans une vingtaine de pays. Ils sont communs à tous les pays participants – pour la plupart, d'Afrique subsaharienne – et permettent l'accès aux écoles de Dakar, Abidjan et Yaoundé. Chaque année, environ 150 lauréats rejoignent ces quatre établissements. Des centres d'examen sont ouverts dans presque tous les pays d'Afrique francophone et, certaines années, en Guinée Équatoriale.

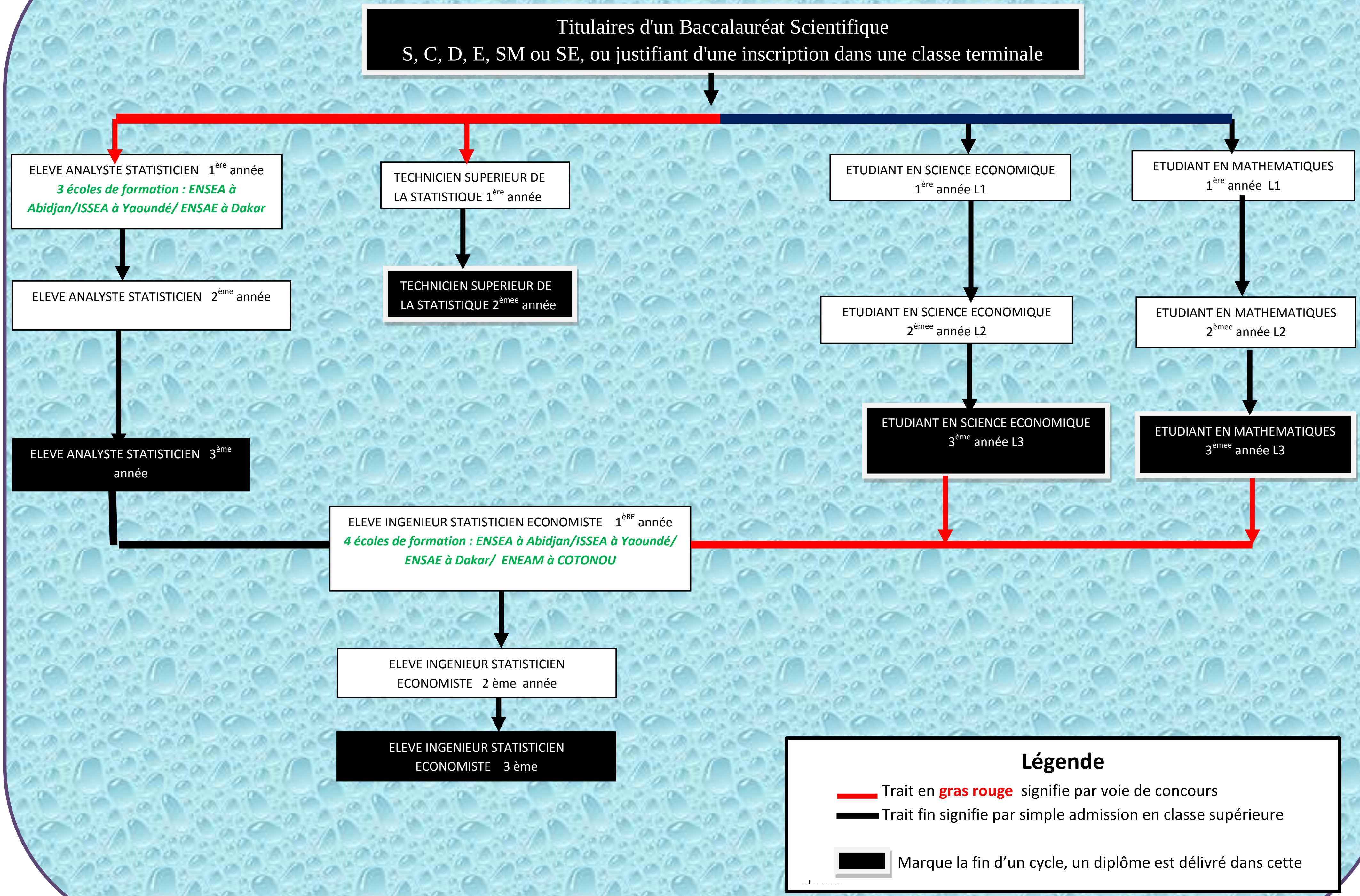
L'organisation des concours communs par l'intermédiaire du CAPESA, structure interne rattachée au GENES.

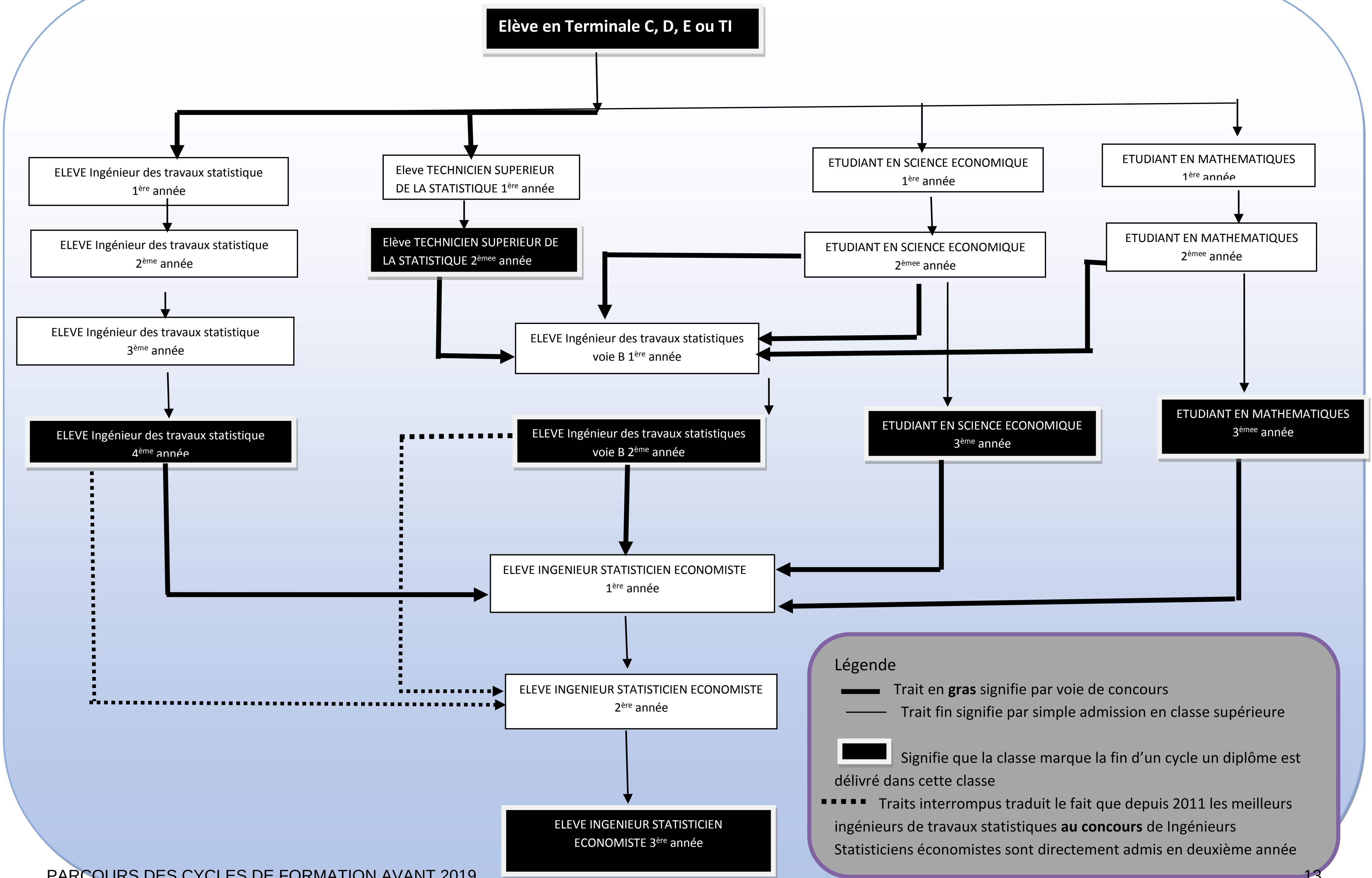
Le CAPESA a la responsabilité de l'organisation d'ensemble des concours et s'en acquitte en collaboration étroite avec les quatre écoles, AFRISTAT, les responsables des centres d'examen des pays – généralement, les directeurs des Instituts Nationaux de Statistique (INS) – et avec les professeurs qui conçoivent les sujets puis corrigent les copies.

Les jurys d'admission se tiennent à la fin du mois de juin à Malakoff en France.

Le schéma de la page suivante décrit le parcours de l'élève Ingénieur statisticien Economiste

Parcours de cycle à partir de 2020/2021




Elève en Terminale C, D, E ou TI
ELEVE Ingénieur des travaux statistique 1ère année
Eleve TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 1ère année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 1ère année
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 1ère année
ELEVE Ingénieur des travaux statistique 2ème année
Elève TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 2èmee année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 2èmee année
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 2èmee année
ELEVE Ingénieur des travaux statistique 3ème année
ELEVE Ingénieur des travaux statistiques voie B 1ère année
ELEVE Ingénieur des travaux statistique 4ème année
ELEVE Ingénieur des travaux statistiques voie B 2ème année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 3ème année
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 3èmee année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 1ère année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 2ère année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 3ère année
Légende
Trait en gras signifie par voie de concours
Trait fin signifie par simple admission en classe supérieure
Signifie que la classe marque la fin d'un cycle un diplôme est délivré dans cette classe
Traits interrompus traduit le fait que depuis 2011 les meilleurs ingénieurs de travaux statistiques au concours de Ingénieurs Statisticiens économistes sont directement admis en deuxième année

ENSEA
–
ABIDJAN

ENSAE
–
DAKAR

ISSEA
–
YAOUNDÉ

ENEAM
-
COTONOU

BROCHURE D'INFORMATION

SUR LE CONCOURS DE RECRUTEMENT D’ÉLÈVES

INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

(I S E)

Option Mathématiques

CAPESA

CENTRE D’APPUI AUX ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINES
ENSAI – Campus de Ker Lann
51 Rue Blaise Pascal - BP 37203
35172 Bruz Cedex - France
☎ 33 (0)2 99 05 32 17
e-mail : **capesa@ensai.fr**
site web : **capesa.ensai.fr**

Version mise à jour en octobre 2019 (concours 2020)

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES
INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES (ISE)
OPTION MATHEMATIQUES

I - ÉCOLES CONCERNÉES PAR CE CONCOURS

Le concours de recrutement d'élèves Ingénieurs Statisticiens Économistes Option Mathématiques est organisé pour les écoles suivantes :

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ENSEA)
08 BP 03 - ABIDJAN 08 (CÔTE-D'IVOIRE)
☎ : (225) 22 48 32 00 ou (225) 22 44 08 42 – Fax : (225) 22 44 39 88
e-mail : ensea@ensea.ed.ci – Site : www.ensea.ed.ci

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ISSEA)
Rue Pasteur
BP 294 YAOUNDÉ (CAMEROUN)
☎ : (237) 22 22 01 34 – Fax : (237) 22 22 95 21
e-mail : isseacemac@yahoo.fr – Site : www.issea-cemac.org

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE (ENSAE)
Immeuble ANSD
Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant
BP 116
DAKAR RP (SÉNÉGAL)
☎ : (221) 33 859 43 30 – Fax : (221) 33 867 91 65
e-mail : secretariat.ensae@orange.sn – Site : www.ensae.sn

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ET DE MANAGEMENT (ENEAM)
03 BP 1079
COTONOU (BÉNIN)
☎ : (229) 21 30 41 68 – Fax : (229) 21 30 41 69
e-mail : eneam.uac@eneam.uac.bj – Site : www.eneam.uac.bj

II - OBJET DE LA FORMATION ISE

L'ENSEA d'Abidjan, l'ISSEA de Yaoundé, l'ENSAE de Dakar et l'ENEAM de Cotonou forment en trois ans des Ingénieurs statisticiens économistes dont le rôle consiste à créer, gérer et utiliser l'information statistique pour la préparation des décisions de nature économique ou sociale concernant la nation, la région ou l'entreprise.

L'Ingénieur statisticien économiste est appelé à organiser et réaliser des enquêtes, à dépouiller et analyser les résultats de ces enquêtes, plus généralement à rassembler les matériaux nécessaires à l'élaboration des comptes nationaux et des programmes de développement, et enfin à organiser, administrer et diriger un service à compétence statistique et économique.

Le diplôme d'Ingénieur Statisticien Economiste sanctionne un cycle d'enseignement d'un haut niveau théorique, qui comporte une double formation, statistique et économique.

III - MODE DE RECRUTEMENT

Le recrutement se fait par voie de concours.

Aucun candidat ne peut se présenter plus de trois fois au concours.

Le concours Option Mathématiques est ouvert aux candidats justifiant d'une inscription en 3$^{\text{ème}}$ année de Licence de Mathématiques, ou bien dans une classe de Mathématiques Spéciales.

Les titulaires d'un diplôme d'Ingénieur des Travaux Statistiques (ou en dernière année de leurs études ITS) peuvent se présenter au concours Option Mathématiques.

L'admission d'un lauréat est soumise à l'obtention, selon le cas, de la Licence ou du diplôme ITS.

IV - CONDITIONS D'ÂGE

Les candidats doivent être nés après le 31 décembre 1993 et les candidats fonctionnaires ou assimilés être nés après le 31 décembre 1979 et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national.

V - ORGANISATION DU CONCOURS

Des centres d'examen sont ouverts dans la plupart des pays d'Afrique subsaharienne. Les principales informations relatives au concours figurent dans l'Avis de concours diffusé au quatrième trimestre de l'année précédant le concours.

VI - DATES DU CONCOURS

Le concours ISE Option Mathématiques ne comporte que des épreuves écrites qui auront lieu les 2 et 3 avril 2020. En voici les durées et coefficients :

ÉPREUVE	COEFFICIENT
ORDRE GÉNÉRAL Durée : 4 Heures	15
1ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES Durée : 4 Heures	40
2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES Durée : 4 Heures	30
CONTRACTION DE TEXTE Durée : 3 Heures	15

Les épreuves de mathématiques et de calcul numérique portent sur le programme des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (Mathématiques Spéciales M'). Le programme du concours est développé au point X.

Les convocations sont adressées par le responsable du centre d’examen aux candidats relevant de son centre.

VII - DOSSIER D'INSCRIPTION

Les candidats au concours doivent constituer un dossier d'inscription.

Ce dossier est disponible dans les Directions de la Statistique de la plupart des pays d’Afrique subsaharienne, dans les Écoles ou Instituts de formation statistique et au CAPESA. Il devra être déposé au plus tard le 31 janvier, complet et parfaitement renseigné, au centre d’examen où le candidat passera les épreuves.

VIII - PROCLAMATION DES RÉSULTATS

Les copies d'examen sont envoyées dès la fin du concours au CAPESA qui en assure la correction.

Le jury du concours se réunit au plus tard le 30 juin. Les candidats reçus sont informés de leur succès par courriel au cours de la première quinzaine de juillet. Les résultats sont affichés dans les écoles et présentés sur le site web du CAPESA au plus tard une semaine après les délibérations du jury ou le premier jour ouvrable suivant cette réunion. Aucune note n'est communiquée aux candidats.

IX - BOURSES D'ÉTUDES

Les lauréats pourront adresser des demandes de bourse à leurs gouvernements en sollicitant l'appui des Directions nationales de la Statistique ou, par leur intermédiaire, à l'organisation des Nations Unies, à ses agences spécialisées ou à d'autres organismes de coopération multilatéraux ou bilatéraux.

X - PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DU CONCOURS ISE OPTION MATHÉMATIQUES

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

A - Algèbre général

A.1 Groupes, anneaux

Définition d’un groupe, définition du produit de deux groupes.

Définition d'une partie génératrice d'un groupe ; groupes cycliques.

Groupes de permutations (groupes symétriques).

Définition d’un anneau (*les notions d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme).*

Définition d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme.

Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs. Définition d'un idéal d'un anneau commutatif A.

Idéaux de $K\left[X\right]$ (*on suppose que le corps de base K est un sous-corps de C).*

Structure des idéaux de $K\left[X\right]$. Application au théorème de Bézout et au théorème de Gauss.

A.2 Corps

Structure de corps.

Corps des nombres réels, corps des nombres complexes.

B - Algèbre linéaire et géométrie affine

B.1 Espaces vectoriels et applications linéaires

Espace vectoriel sur un corps commutatif. Application linéaire d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel ; application linéaire composée. Espace vectoriel *L(E, F)* des applications linéaires d'un espace vectoriel *E* dans un espace vectoriel *F*. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel. Groupe linéaire *GL(E).*

Sous-espaces vectoriels : combinaisons linéaires.

Intersection de sous-espaces vectoriels ; sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel ; somme de sous-espaces.

Noyau et image d'une application linéaire.

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Espace vectoriel quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Familles libres, familles génératrices.

Espace vectoriel dual d'un espace vectoriel. Orthogonalité d'un vecteur et d'une forme. Application linéaire transposée.

Espace vectoriel engendré par une partie finie : dimension et bases. Existence de supplémentaires pour un sous-espace.

Relation entre les dimensions de deux sous-espaces vectoriels, de leur intersection et de leur somme.

Base de $L(E, F)$ associée à une base de E et une base de F. Dimension de $L(E, F)$.
Rang d'une application linéaire. Base duale d'une base donnée ; dimension du dual. Égalité des rangs d'une application linéaire et de sa transposée.

Bidual. Isomorphisme canonique entre un espace vectoriel de dimension finie et son bidual.

B.2 <u>Matrices</u>

Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux.

Opérations sur les matrices et transposition. Espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps commutatif K. Algèbre des matrices carrées d'ordre n.

Groupe des matrices inversibles d'ordre n.

Rang d'une matrice. Rang de la matrice transposée.

Matrice de changement de base. Matrices équivalentes. Matrices carrées semblables.

Déterminants : définition d'une application multilinéaire. Application multilinéaire antisymétrique (le corps de base n'est pas de caractéristique 2).

Droite vectorielle des formes n-linéaires antisymétriques sur un espace vectoriel E de dimension n. Déterminant, relatif à une base de E, d'un n-uplet de vecteurs.

Déterminant d'un endomorphisme ; déterminant d'un endomorphisme composé. Déterminant d'une matrice carrée.

Calcul des déterminants ; cofacteurs et mineurs.

Application des déterminants à la détermination du rang d'une matrice.

Application des déterminants à l'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie.

Systèmes d'équations linéaires : cas de Cramer. Cas général, Application au calcul d'une matrice inverse.

B.3 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel réel. Espace vectoriel des formes quadratiques associées.

Forme positive, inégalité de Cauchy-Schwartz, inégalité triangulaire, théorème d'inertie dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

Vecteurs orthogonaux (ou conjugués) par rapport à ces formes ; noyau ; formes non dégénérées. Groupe orthogonal.

C - Réduction des endomorphismes

C.1 Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

Définition d'un sous-espace stable, propriétés.

Polynômes d'un endomorphisme, théorème de décomposition des noyaux.

C.2 Valeurs propres, vecteurs propres

Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Polynôme caractéristique ; sous-espace propre, sous-espace stable correspondant à une valeur propre.

Réduction d'un endomorphisme en dimension finie : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres. Sur C toute matrice carrée est semblable à une matrice triangulaire et, si ses valeurs propres sont distinctes, à une matrice diagonale.

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable dans R.

D - Espaces vectoriels normés réels ou complexes

Norme sur un espace vectoriel. Distance associée à une norme, normes équivalentes.

Équivalence de deux normes sur un même espace vectoriel de dimension finie *(la démonstration ne sera pas demandée).*

Topologie d'un espace vectoriel normé.

Définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé.

Suites, suite convergente ; suite de Cauchy ; espace métrique complet ; espace de Banach ; exemple de R^n.

Définition de la continuité.

Applications linéaires continues ; image d'un compact par une application continue.

Définition et propriétés des applications lipschitziennes.

Cas des espaces vectoriels de dimension finie.

E. Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, norme et distance associées.

Orthogonalité, sous-espaces supplémentaires, somme directe.

Projecteurs orthogonaux.

Cas d'un espace vectoriel E de dimension finie ; matrice, relative à une base de E, d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme quadratique ; changement de base ; discriminant, rang, existence d'une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux. Groupe des matrices orthogonales d'ordre n.

Espace vectoriel euclidien, propriétés.

Isomorphisme, défini par le produit scalaire, d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie n sur son dual.

Projections orthogonales.

Endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné ; endomorphisme auto-adjoint, forme quadratique associée ; représentation d'un endomorphisme auto-adjoint par une matrice symétrique.

Forme sesquilinéaire hermitienne sur un espace vectoriel complexe. Vecteurs orthogonaux ; noyau ; forme non dégénérée.

Matrice, relative à une base de *E*, d'une forme sesquilinéaire hermitienne sur un espace vectoriel E de dimension finie.

Forme hermitienne ; forme positive, inégalité de Cauchy-Schwartz, inégalité triangulaire.

Produit scalaire hermitien ; espace vectoriel hermitien ; groupe unitaire. Existence de bases orthonormées dans un espace vectoriel hermitien de dimension finie. Groupe des matrices unitaires d'ordre n.

Endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné ; endomorphisme auto-adjoint, forme sesquilinéaire associée ; représentation d'un endomorphisme auto-adjoint par une matrice hermitienne.

Valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint, réalité et existence d'une base orthonormée de vecteurs propres.

ANALYSE

F - Fonctions d'une variable réelle

F.1 Dérivation des fonctions

Dérivabilité en un point, sur un intervalle.

Fonctions de classe C^1, espace vectoriel des applications de classe C^1.

Calcul des dérivées (fonction composée, fonction réciproque).

Fonctions de classe C^k.

Théorèmes de Rolle, des accroissements finis, de Taylor-Lagrange. Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle. Primitives.

Étude locale d'une fonction. Développements limités. Formule de Taylor-Young.

Fonctions convexes.

F.2 Intégration d'une fonction numérique d'une variable réelle

Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Fonction intégrable, au sens de Riemann, sur un segment : les fonctions continues, les fonctions monotones sont intégrables. La valeur absolue d'une fonction intégrable, le produit de deux fonctions intégrables, sont intégrables.

Linéarité de l'intégrale, relation de Chasles.

Intégration sur un segment des suites de fonctions continues.

Inégalité de Schwarz. Première formule de la moyenne.

Valeur moyenne d'une fonction.

Intégrale sur la réunion de deux segments adjacents.

Changement de variable. Intégration par parties.

Intégration de fractions rationnelles.

Intégrale considérée comme fonction de sa borne supérieure.

Définition de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle fermé non borné, sur un intervalle borné ouvert.

Critères de convergence des intégrales de fonctions positives, de fonctions quelconques.

Convergence absolue.

Fonction Gamma.

F.3 Dérivation et intégration

Primitives et intégrale d'une fonction continue.

Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange.

Formule de Taylor-Young.

Suites et séries de fonctions.

Intégrales dépendant d'un paramètre, fonction gamma.

Convergence en moyenne et convergence quadratique.

Théorème de convergence monotone, de convergence dominée.

F.4 Courbes d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Étude des courbes planes.

Étude des courbes paramétrées.

G - Suite, Séries, séries entières, séries de Fourier

G.1 Suites

Etude de la convergence, suites de Cauchy.

Suites récurrentes.

Suites adjacentes.

G.2 <u>Séries</u>

Sommation des relations de comparaison.

Comparaison d'une série à une intégrale.

Suites doubles sommables, inversion de sommations.

Suites et séries de fonctions : convergence simple, convergence uniforme et convergence normale.

G.3 <u>Séries entières</u>

Disque de convergence. Dérivation et intégration. Produit de deux séries entières.

Développements en série entière, pour x réel, de :

$(1+x)^{\alpha}$, Arctg$x$, Log$(1+x)$, e^x, ch$x$, sh$x$, sin$x$, cos$x$

Définition de $e^z, shz, chz, \sin z, \cos z, tgz$; propriétés de sin$x$ et cos$x$ pour x réel ; argument d'un nombre complexe non nul.

<u>N.B</u>. : Suivant le point de vue adopté, les développements en série entière de $\cos x$ et de $\sin x\,(x \in \mathrm{R})$ seront, soit donnés comme une définition, soit obtenus comme un résultat.

G.4 <u>Séries de Fourier</u>

Coefficients de Fourier : définition, expression.

Convergence en moyenne quadratique.

Convergence ponctuelle.

H - <u>Équations différentielles</u>

Généralités sur les équations différentielles : équations différentielles du premier ordre ; courbes intégrales. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz : $y' = f(x, y)$ pour $x \in R$ et $y \in R^n$.

Équations linéaires à coefficients constants.

Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

Système d'équations différentielles linéaires du premier ordre : méthode de variation des constantes. Système d'équations à coefficients constants avec et sans second membre ; on utilisera la diagonalisation et éventuellement, la triangularisation des matrices.

Cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre quelconque avec et sans second membre.

I - <u>Fonctions de plusieurs variables réelles</u>

I.1 <u>Calcul différentiel</u>

Application d'un ouvert de R^n dans R^p.

Applications partielles en un point. Continuité partielle (condition nécessaire de continuité). Dérivées partielles.

Dérivées partielles d'ordre supérieur. Théorème sur l'interversion de l'ordre des dérivations.

Application d'un ouvert d'un espace affine réel de dimension finie dans un espace affine réel de dimension finie.

Application linéaire tangente (ou différentielle) en un point.

Différentielle (ou dérivée) sur un ouvert.

Les espaces étant rapportés à des repères : matrice jacobienne, jacobien.

Différentiabilité et continuité.

Composition d'applications différentiables.

Théorème des fonctions implicites *(les démonstrations ne seront pas exigées).*

Application réciproque d'une application.

I.2 <u>Calcul intégral</u>

Coordonnées polaires.

Intégrales doubles : construction, formule de changement de variables. Fonction bêta.

J - Divers

La formation, tant du futur chercheur que du futur ingénieur, doit le préparer à savoir appliquer pratiquement toute question donnant lieu à présentation théorique. On exigera, dans les épreuves pratiques proposées aux concours, que les questions posées soient conduites jusqu'à leur fin et que les résultats en soient contrôlés, cela avec tout le soin nécessaire.

Les candidats aux grandes écoles doivent, en particulier, savoir :

- user de toute espèce de tables numériques ; ils n'ont pas à y faire d'autre interpolation que l'interpolation linéaire, ni à savoir la formule qui permet de majorer l'erreur commise ainsi ;
- traduire, par une représentation graphique, les résultats de l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle ;
- construire des courbes données paramétriquement ;
- résoudre une équation à une inconnue par les méthodes dites de Descartes et de Newton ou par la méthode des approximations successives ;
- calculer une intégrale définie par la méthode des trapèzes, calculer la somme d'une série.

Pour ces derniers problèmes, aucune "formule d'erreur" n'est demandée.

XI - CONSEILS POUR LES AUTRES ÉPREUVES

A - Ordre général

L'épreuve d'ordre général consiste dans le développement d'un sujet d'ordre général n'impliquant pas la connaissance d'œuvres littéraires déterminées. Elle demande une excellente maîtrise de la langue française écrite (orthographe, expression, concision et clarté).

Cette épreuve nécessite de procéder avec méthode et rigueur, tant du point de vue du fond que de la forme. Les conseils qui suivent reflètent les lacunes et défauts les plus couramment observés dans les copies des candidats.

- Analyser avec soin le sujet afin d'en comprendre correctement le sens et de saisir l'étendue du domaine concerné.

- Rassembler les idées à développer, s'assurer de leur cohérence et préparer un plan structuré.

- Rédiger en prenant soin d'expliquer et de fournir des arguments, ce qui va bien au-delà d'un simple catalogue d'idées.

- Veiller à la qualité de l'expression : justesse du vocabulaire, syntaxe des phrases correcte, expression précise et concise, orthographe soignée.

- Relire et corriger les fautes éventuelles.

B - Contraction de texte

L'épreuve de contraction de texte est destinée à faire apparaître la précision et la densité de style du candidat ainsi que son aptitude à la synthèse.

Elle impose notamment la contrainte de résumer le texte en un nombre de mots fixé, à 10 % près. Elle demande aussi une bonne compréhension et un travail pour dégager les idées importantes puis en faire une synthèse équilibrée. Voici quelques conseils.

- Lire attentivement le texte pour relever les idées les plus importantes, sans se perdre dans les détails. Cela nécessite une bonne compréhension des thèses présentées et du fil conducteur du texte.

- Construire et rédiger le résumé sans tomber dans l'erreur qui consiste à recopier et juxtaposer des passages du texte.

- Veiller à la qualité de l'expression : syntaxe, vocabulaire adapté, mots de liaison (entre les phrases ou les idées exprimées) bien choisis, orthographe soignée.

- Relire la copie afin de remédier aux erreurs les plus grossières : mots oubliés, phrases incorrectes, fautes d'orthographe.

SUJETS ISE OTION MATHEMATIQUES 1998-2019

NIVEAU LICENCE EN MATHEMATIQUES

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

Un écrivain écrit à propos de l'immigration ceci : «L'immigration quelle que soit sa couleur et sa saveur, est une injection de vie, d'énergie et de culture et que les pays devraient la recevoir comme une bénédiction».

Appréciez cette affirmation.

SUJET n° 2

Le développement rapide du nombre d'abonnés à INTERNET dans le monde et en particulier en Afrique aura-t-il des conséquences sur la vie politique, sociale, économique des pays africains.

Dans l'affirmative lesquelles ? et pourquoi ? Etayez votre raisonnement par des exemples précis.

SUJET n° 3

EL HADJ OMAR, fondateur du royaume théocratique Toucouleur du Soudan Occidental (1797-1864) parlant de la prévoyance a dit ce qui suit:

«C'est quand on est au sommet de la puissance qu'on doit se frayer une route pour la défaite»

Est-ce toujours d'actualité ? Quelles réflexions vous inspire cette phrase ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

On note *IR* l'ensemble des nombres réels et *IN* l'ensemble des entiers naturels.

a et b sont deux éléments de *IR* tels que $a<b$. *E* désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans *IR*, et pour tout p appartenant à *IN*, F_p désigne le sous-espace vectoriel de *E* constitué par les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Il est rappelé que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire, de toute suite $(a_n)_{n\in IN}$ telle que $(\|a_n\|)_{n\in IN}$ soit bornée, une suite convergente.

PARTIE n° 1

❶ A tout élément g de *E*, on associe le nombre : $\|g\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$

Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur *E*.

Dans tout le problème, *E* sera muni de cette norme.

❷ Soient p un élément de *IN* et f un élément de *E*. On pose : $d = \inf\limits_{g\in F_p} \|g-f\|$

Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in IN}$ d'éléments de F_p convergeant vers un élément de F_p et telle que la suite $(\|g_n - f\|)_{n\in IN}$ converge vers d.

En déduire qu'il existe un élément P de F_p tel que l'on ait : $\|P-f\| = d$
On dira que P est un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p.

PARTIE n° 2

Dans cette partie, on se propose de montrer qu'il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p, et d'en donner une approximation.

❶ Dans quel cas a-t-on $d = 0$? Montrer que, dans ce cas, il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p, et indiquer quel est ce polynôme.

❷ **Dans toute la suite de cette partie**, on suppose $d \neq 0$ et l'on désigne par P un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p. On pose :

$$\alpha = \sup_{x \in [a,b]} \left[P(x) - f(x) \right] \qquad \beta = \inf_{x \in [a,b]} \left[P(x) - f(x) \right]$$

On désigne par A_1 l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $P(x) - f(x) = d$ et par A_{-1} l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $P(x) - f(x) = -d$.

Montrer que l'on a $\alpha = d$ (on pourra, en considérant le polynôme $P + \dfrac{d - \alpha}{2}$, montrer que l'on aboutit à une contradiction si on suppose $\alpha \neq d$). Montrer que l'on a aussi $\beta = -d$.

Montrer que A_1 et A_{-1} ne sont pas vides.

❸ Montrer qu'il existe une suite finie $(x_0, \ldots, x_m)$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, telle que l'on ait $x_0 = a$ et $x_m = b$ et que, quels que soient $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ et $y \in [x_{i-1}, x_i]$, on ait

$$\left| \left[P(x) - f(x) \right] - \left[P(y) - f(y) \right] \right| \leq \frac{d}{2}$$

❹ On choisit une suite $(x_0, \ldots, x_m)$ satisfaisant aux conditions précédentes. Montrer que, quels que soient les éléments $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ tels que $[x_{i-1}, x_i] \cap A_1$ et $[x_{j-1}, x_j] \cap A_{-1}$ ne soient pas vides, j est différent de i, de $i+1$ et de $i-1$.

Dans la suite, pour $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, on désigne par I_ε l'ensemble des intervalles de la forme $[x_{i-1}, x_i]$ (avec $i \in \{1,...,m\}$) dont l'intersection avec A_ε n'est pas vide et par I l'ensemble des $i \in \{1,...,m\}$ tels que $[x_{i-1}, x_i]$ appartienne à $I_1 \cup I_{-1}$.

Montrer que le nombre r d'éléments de I est au moins égal à 2, et que l'on a $m \geq 3$.

❺ On pose : $I = \{i_1,...,i_r\}$,

la suite $(i_1,...,i_r)$ étant strictement croissante et, pour tout $j \in \{1,...,r\}$, $B_j = \left[x_{i_j-1}, x_{i_j}\right]$.

Montrer qu'il existe une et une seule suite $\left((j_1,\varepsilon_1),...,(j_q,\varepsilon_q)\right)$ d'éléments de $\{1,...,r\} \times \{-1,+1\}$ telle que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

① la suite $(j_1,...,j_q)$ est strictement croissante et $j_q = r$;

② si l'on pose $j_0 = 0$, alors, quels que soient les entiers k et j tels que $1 \leq k \leq q$ et $j_{k-1} < j \leq j_k$, B_j doit appartenir à I_{ε_k} ;

③ quel que soit l'entier k compris entre 1 et $q-1$, ε_k et ε_{k+1} sont de signes contraires.

Montrer que l'on a $q \geq 2$.

❻ Pour tout $k \in \{1,...,q\}$, on pose : $C_k = \bigcup_{j_{k-1} < j \leq j_k} B_j$

montrer que, quel que soit $k \in \{1,...,q-1\}$ il existe $u_k \in [a,b]$ tel que, quels que soient $x \in C_k$ et $y \in C_{k+1}$, on ait $x < u_k < y$.

❼ On choisit, pour tout $k \in \{1,...,q-1\}$, un élément u_k satisfaisant la condition de la question précédente. On désigne par Q la fonction polynôme :

$$x \mapsto (x-u_1)...(x-u_{q-1}).$$

Montrer que $(P-f)Q$ ne s'annule pas sur $C_1 \cup ... \cup C_q$ et garde un signe constant sur cet ensemble.

❽- Montrer qu'il existe $\lambda \in IR$ tel que l'on ait $\|P+\lambda Q-f\|<d$. En déduire que $q \geq p+2$.

Montrer qu'il existe une suite $(y_1,...,y_{p+2})$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, et un élément η de $\{-1,+1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1,...,p+2\}$, $y_i \in A_{(-1)^i \eta}$.

❾ Soit P_1 un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p. Montrer que $\frac{1}{2}(P+P_1)$ en est un aussi et que, quel que soit $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $\frac{1}{2}\left[P(x)+P_1(x)\right]-f(x)=\varepsilon d$ est contenu dans A_ε .

Montrer alors que l'on a $P_1 = P$.

❿ Soit R un élément de F_p. On suppose qu'il existe une suite $(z_1,...,z_{p+2})$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, et $\zeta \in \{-1,+1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1,...,p+2\}$, on ait :

$$R(z_i)-f(z_i)=(-1)^i \zeta \|R-f\|$$

Montrer que l'on a $R = P$.

PARTIE n° 3

❶ Pour tout élément f de *E*, expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0.

❷ Dans cette question, on prend pour f l'application $x \mapsto e^x$, de $[a,b]$ dans *IR*.

Explicier le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1.

❸ Dans cette question, on suppose $b>0$ et $a=-b$. On définit f par :

$$f(x)=x^2+x \text{ pour } -b\leq x\leq 0$$
$$f(x)=x^2-x \text{ pour } 0\leq x\leq b$$

Expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_2.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❶ Montrer que M est définie positive.

❷ Soit $F = Vect\{e_2, e_3\}$ le sous-espace vectoriel engendré par $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On note P_F la projection orthogonale sur F au sens du produit scalaire défini par M. Déterminer $P_F(u)$ pour $u \in \mathbf{R}^3$

EXERCICE n° 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, où $n \geq 4$.

❶ Déterminer la signature de la forme quadratique ϕ définie sur une base de E par :

$$\phi(x) = 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_2x_3 + 4x_1x_4$$

❷ Ecrire $\phi(x)$ dans une base ϕ -orthogonale de E.

EXERCICE n° 3

Soient E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. on note S_F la symétrie orthogonale par rapport à F et P_F le projecteur orthogonal sur F

❶ Exprimer S_F en fonction de P_F

❷ En déduire $S_F(x)$, pour $x \in E$, lorsque $F = Vect(a)$ et lorsque $F = a^{\perp}$. ($Vect(a)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur a, non nul, de E et $a^{\perp}$ le sous-espace orthogonal à a). $S_F(x)$ sera exprimé en fonction de x, a et (x,a).

❸ Donner les matrices de S_F et P_F dans une base orthonormée de E, pour $F = Vect(a)$ et $F = a^{\perp}$.

EXERCICE n° 4

On considère D_n le déterminant d'ordre n de terme général $d_{i,j}$ défini par :

$d_{i,i} = a+b, d_{i,i+1} = ab, d_{i+1,i} = 1$ et sinon $d_{i,j} = 0$, où a et b sont des réels.

❶ Etablir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}, pour $n \geq 3$

❷ Calculer D_n.

PROBLEME

Soit $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle .,. \rangle$ et de la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$

Pour toute famille de vecteurs $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ de $\mathbf{R}^n$, on note :

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i \qquad X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ . \\ . \\ x_{nj} \end{pmatrix} \qquad X = (X_1, \dots, X_p) = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On désigne par $G(x_1, \dots, x_p)$ la matrice carrée d'ordre p dont le terme général est $\langle x_i, x_j \rangle$ et on suppose que $p < n$.

❶ Vérifier que $G(x_1,\dots,x_p) = X^{'}X$, où $X^{'}$ désigne la transposée de X

❷ Soit $\{x_1,\dots,x_p\}$ une famille libre, montrer qu'il existe $\{x_{p+1},\dots,x_n\}$ tels que : $G(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} G(x_1,\dots,x_p) & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{'}X & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$

On note $\hat{X} = (X_1,\dots,X_p,X_{p+1},\dots,X_n)$ la matrice carrée d'ordre n. Montrer que $(\det \hat{X})^2 = \det G(x_1,\dots,x_p)$ et en déduire que $\det G(x_1,\dots,x_p) > 0$.

Montrer que pour toute famille libre $\{x_1,\dots,x_p\}$, on a :

$$\det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p) = \det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i)$$

❸ Soit $\{x_1,\dots,x_p\}$ une famille libre et $F = Vect\,(x_1,\dots,x_p)$ le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Pour tout y de $\mathbf{R}^n$, on note $P_F(y)$ la projection orthogonale de y sur F.

Montrer que $\det G(x_1,\dots,x_p,y-P_F(y)) = \det G(x_1,\dots,x_p,y)$

Déterminer $\det G(x_1,\dots,x_p,y-P_F(y))$ en fonction de $\det G(x_1,\dots,x_p)$ et de $\|y-P_F(y)\|$

En déduire que : $(d(y,F))^2 = \dfrac{\det G(x_1,\dots,x_p,y)}{\det G(x_1,\dots,x_p)}$

❹ Pour $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Z = (X_1,\dots,X_p,Y)$

On a donc $G(x_1,\dots,x_p,y) = Z^{'}Z$. Retrouver le résultat précédent en utilisant le calcul matriciel par blocs et les propriétés de la matrice de projection orthogonale sur F.

Rappel : Si A est une matrice carrée inversible et si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est une matrice carrée, alors $\det M = \det A \times \det(D - CA^{-1}B)$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Les trois parties sont très largement indépendantes.

Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Il sera tenu le grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

Dans tout le problème :

n désigne un entier naturel strictement positif,

$x = \left(x_i\right)_{i \in (1,\ldots,n)}$ un élément de $\mathbb{R}^n$,

$\|.\|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$,

M_n ($\mathbb{R}$) l'ensemble des matrices carrées de taille (n,n), à coefficients réels, muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel réel,

$A = \left(\left(a_{ij}\right)\right)_{i,j \in (1,\ldots,n)}$ un élément de M_n ($\mathbb{R}$)

A^t la matrice transposée de A,

et trA la trace de A

PARTIE n° 1

❶ On définit $\|\!|.|\!\|: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|\!| A |\!\| = \inf \{\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \alpha \|x\| \quad (S)$$

Montrer que ($M_n(\mathbb{R}), \|\!|.|\!\|$) est un espace vectoriel normé.

Dans tout le reste du problème, on dira qu'une norme $N(.)$ de M_n (ℝ) est subordonnée si l'on peut trouver une norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $N(.)$ se construit à partir de $\|.\|$ en utilisant la formule (S). On dira aussi que $N(.)$ est subordonnée à $\|.\|$.

❷ Soit $\|\!|.|\!\|$ une norme subordonnée de M_n (ℝ). Montrer que :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|.\|\!|B|\!\|$$

❸ Soient $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les trois normes de $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_1|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On note $\|\!|.|\!\|_1, \|\!|.|\!\|_2$ et $\|\!|.|\!\|_\infty$ les trois normes de M_n (ℝ) subordonnées à $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ respectivement

Montrer que :

① $\|\!|A|\!\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$

② $\|\!|A|\!\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}|$

❹ Montrer que l'application $\left\| . \right\|_E : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\| A \right\|_E = \left(\sum_{i,\,j} a_{i\,j}^2 \right)^{1/2}$$

munit M_n ($\mathbb{R}$) d'une structure d'espace vectoriel normé.

Montrer que $\left\| A \right\|_E = \left(tr\left(A^t\ A \right) \right)^{1/2}$. Cette norme est-elle subordonnée ?

PARTIE n° 2

Dans toute cette partie, on suppose que A est inversible

Soit $\left\| . \right\|$ une norme de M_n ($\mathbb{R}$) subordonnée à la norme $\| . \|$ de $\mathbb{R}^n$, et $\Delta A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\left\| \Delta A \right\| < \left\| A^{-1} \right\|^{-1}$.

❶ Montrer que $A + \Delta A$ est inversible.

❷ Soient b et Δb deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On définit x et $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$Ax = b \text{ et } (A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b).$$

① Montrer l'existence et l'unicité de x et Δx.

② On définit : $x(A) = \left\| A \right\| . \left\| A^{-1} \right\|$.

On notera que $x(A)$ dépend à priori du choix de la norme subordonnée $\left\| \cdot \right\|$.

$x(A)$ est appelé coefficient de conditionnement de la matrice A

Montrer que $x(A) \geq 1$

③ Montrer que $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{x(A)}{1 - x(A) \left\| \Delta A \right\| / \left\| A \right\|} \left(\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\left\| \Delta A \right\|}{\left\| A \right\|} \right)$

Lorsque l'on cherche à résoudre numériquement le système $Ax = b$, le meilleur cas de figure est-il d'avoir une matrice au coefficient de conditionnement faible ou élevé ?

PARTIE n° 3

❶ Calculer, à 10^{-2} près, les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{array}{lllllllll}
10u_1 & + & 7u_2 & + & 8u_3 & + & 7u_4 & = & 32 \\
7u_1 & + & 5u_2 & + & 6u_3 & + & 5u_4 & = & 23 \\
8u_1 & + & 6u_2 & + & 10u_3 & + & 9u_4 & = & 33 \\
7u_1 & + & 5u_2 & + & 9u_3 & + & 10u_4 & = & 31
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
10v_1 & + & 7v_2 & + & 8v_3 & + & 7v_4 & = & 32{,}1 \\
7v_1 & + & 5v_2 & + & 6v_3 & + & 5v_4 & = & 22{,}9 \\
8v_1 & + & 6v_2 & + & 10v_3 & + & 9v_4 & = & 33{,}1 \\
7v_1 & + & 5v_2 & + & 9v_3 & + & 10v_4 & = & 30{,}9
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
10w_1 & + & 7w_2 & + & 8{,}1w_3 & + & 7{,}2w_4 & = & 32 \\
7{,}08w_1 & + & 5{,}04w_2 & + & 6w_3 & + & 5w_4 & = & 23 \\
8w_1 & + & 5{,}98w_2 & + & 9{,}89w_3 & + & 9w_4 & = & 33 \\
6{,}99w_1 & + & 4{,}99w_2 & + & 9w_3 & + & 9{,}98w_4 & = & 31
\end{array}$$

❷ Calculer $x(A), A$ étant la matrice de M_4 ($\mathbb{R}$) associée au premier système étudié dans la question précédente, lorsque l'on prend $\|.\|_2$ comme norme. Vérifier la majoration obtenue dans la question ❷ de la Partie 2 lorsque l'on considère le second système comme une perturbation du premier.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Cette épreuve a pour objet de faire apparaître l’aptitude des candidats à discerner les idées essentielles et à en présenter un exposé synthétique, sans discussion ni commentaire.

Les candidats ne doivent pas seulement découper et regrouper les phrases jugées les plus significatives ; ils doivent repenser ce texte et le résumer en usant d’un style personnel. Le texte résumé doit pouvoir être compris par tout lecteur ignorant le texte original.

Résumer en 200 mots environ ce texte extrait de «L’Afrique noire» de T. PUJOLLE .

✶✶✶

L’Africanité : Les sociétés précaires entre tradition et modernité

A la fin du vingtième siècle, l’Afrique noire offre encore la singularité d’un continent rural où, à l’exception de quelques villes anciennes - marchés et carrefours de grands réseaux commerçants -, l’urbanisation est un processus récent. Des millions d’Africains vivent hors de la civilisation industrielle et technologique qui domine une bonne partie de la planète. Du Sahara au tropique du Capricorne, il existe partout des paysanneries agricoles sédentaires ou itinérantes, parfois des éleveurs nomades, des sociétés de chasseurs ou de pêcheurs. Partager, attribuer et contrôler les terroirs d’établissement et les territoires de parcours demeure l’enjeu de toute l’organisation sociale.

En occident, nous vivons dans un monde fortement dominé par l'avancement technologique des puissances industrielles où l'agriculture est le produit de la chimie (engrais et pesticides), du génie mécanique (machines) et de la génétique (sélection des variétés). Elle ne permet qu'à une minorité «compétitive» d'en vivre ; la vie citadine, dans l'aisance ou la pauvreté, est le lot de la majorité. Les civilisations rurales africaines peuvent donc apparaître comme la survivance de modes de vie «primitifs» , ainsi que les qualifient les ethnologues du XIXè siècle. Or, en Afrique, l'agriculture et l'élevage ne sont pas seulement des fonctions productives mais constituent un socle de civilisation. On a pu parler de la civilisation du mil et des greniers au Sahel, ou de la vache et du bananier en Ouganda et au Rwanda, ou encore de la civilisation des troupeaux des peuples peuls.

Le monde africain rural est, bien sûr, traversé par la modernité : un dispositif d'exploitation des ressources s'est juxtaposé ou imposé aux sociétés rurales - villes administratives, appareil d'Etat centralisé, infrastructures de transport et ports de commerce, pôles miniers et surtout une nouvelle agriculture de plantation destinée à l'exportation. Les Etats africains indépendants reposent toujours sur ce dispositif d'emprise. Partout où l'agriculture d'exportation (arachide, coton, huile de palme, café, cacao...) a créé des revenus, les paysanneries africaines ont pris le risque d'opter pour la modernité. Elles ont assimilé les nouvelles pratiques agricoles (engrais, pesticides) liées au souci de productivité. De même le monde paysan a intégré trois apports majeurs de l'Etat moderne : l'école, le centre de santé et la radiodiffusion. Il serait donc simpliste de décrire les paysanneries africaines comme archaïques ou bloquées par la tradition. La rationalité par laquelle se construit leur rapport à la nature doit être comprise...

Le génie des sociétés rurales africaines est d'avoir inventé des modes de vie - et de survie - dans des milieux naturels «défavorables»...

Le milieu impose aux sociétés africaines trois contraintes majeures : une pluviométrie aléatoire, la fragilité des sols, l'insalubrité due aux insectes et aux parasites. Survivre en milieux extrêmes ou contraignants, tel est le défi des sociétés rurales africaines qui, selon l'expression de Basil Davidson, «ont apprivoisé un continent». L'efficacité technique ne cherche pas à modifier le milieu ni «à s'en rendre maître et possesseur». Les pratiques culturales visent à préserver les ressources naturelles, les sols d'abord. L'essartage, la jachère et l'itinérance limitent le prélèvement, laissent un temps de restauration à des sols à fertilité précaire (à l'exception des sols volcaniques) et toujours menacés de latérisation. Culture de décrue, digues filtrantes, billons de marais, lignes antiérosives, échanges de fumure avec les éleveurs, l'ingéniosité rurale n'a cessé de perfectionner les techniques de retenue des deux ressources, l'eau et les sols.

Les civilisations du Sahel vivent dans l'attente de la pluie : elles ont sélectionné les mils et les sorghos les plus résistants à la sécheresse. Les paysans du Rwanda sèment à chaque saison près de trente variétés de haricots ; ils sont ainsi assurés d'une récolte, quelle que soit la pluviosité. Les sociétés de zone humide ont adopté très anciennement le manioc, qui se conserve en terre pendant des mois, et des maïs résistants aux parasites - tous deux importés d'Amérique ; l'igname constitue une réserve alimentaire permanente. Pour préserver les récoltes des rongeurs et du pourrissement, le Sahel a perfectionné ses greniers ; on sait conserver le poisson séché ; on boucane la viande ; on extrait les corps gras des végétaux (karité) ; on récolte feuilles, baies, fruits et graines de tout arbre nourricier ; d'un tropique à l'autre, en zone sèche ou humide, les chèvres, qui se nourrissent de tout et de rien (déchets), habitent l'espace domestique, apportant autant que nécessaire viande et cuir ou un revenu monétaire de soudure, dans l'attente d'une prochaine récolte. Seule la forêt humide reste, comme l'est le bassin amazonien en Amérique latine, une zone de basse pression démographique tant la végétation est indomptable, bloquant tout horizon, impénétrable, aux sols marécageux.

On mesure mieux le génie inventif des paysanneries africaines lorsqu'on analyse les avatars et les échecs des projets de développement conçus par des ingénieurs, hydrauliciens et agronomes, armés de sciences et techniques occidentales (grands barrages, cultures coûteuses en engrais et pesticides). Les civilisations rurales d'Afrique n'ont poussé la technicité que pour survivre en préservant des écosystèmes fragiles...

Si les sociétés africaines ont pu faire de l'agriculture et de l'élevage le socle de leurs civilisations, elles n'ont pu opposer aux multiples maladies transmises par les insectes et les parasites que des réponses «d'évitement» peu efficaces. Le continent africain, massivement sub-tropical, subit la pullulation de tous les parasites de l'animal et de l'homme que favorisent la chaleur et l'humidité.

L'immense domaine de la mouche tsé-tsé n'épargne, entre le dixième parallèle au nord et le vingtième au sud, que quelques massifs montagneux et hauts plateaux, n'autorisant ainsi l'élevage bovin qu'en des zones délimitées, et frappant les humains de trypanosomiase (maladie du sommeil). La simulie, petite mouche qui vit le long des rivières à cours rapide, véhicule l'onchocercose (cécité due à des microfilaires), rendant inhabitables des vallées riches en eau. Le paludisme reste la première cause de mortalité et se répand sous des formes nouvelles (paludisme résistant) et parfois dans des zones encore épargnées. La bilharziose, provoquée par infestation de larves vivant dans l'eau des lacs et des rivières à cours lent, compromet l'agriculture d'irrigation, récente. Les sociétés africaines savent que la maîtrise de l'eau (grands barrages et digues) est une conquête ambiguë et que l'expansion des endémies accompagne les acquis possibles de l'agriculture irriguée. Les établissements humains évitent les zones à risque majeur et organisent l'espace en conciliant l'accès à l'eau et la nécessaire distance de salubrité.

La multiplicité des maladies tropicales est cause de la mortalité élevée des sociétés africaines où l'espérance de vie moyenne n'atteint pas cinquante ans (à l'exception de pays d'Afrique australe). La mortalité infantile et juvénile (de un à cinq ans) reste la plus élevée au monde...

Les sociétés africaines ont développé des pharmacopées considérables mais auxquelles échappent les endémies de forte morbidité. On trouve dans toutes ces civilisations des guérisseurs qui associent aux substances naturelles des thérapeutiques magiques. L'efficacité relative de ces techniques n'est pas à ignorer, mais elle ne modifie pas le taux de mortalité. C'est par une fécondité très élevée que ces sociétés compensent la mortalité imposée par un continent insalubre. En effet, les multiples civilisations africaines ont un socle commun : la valorisation de la fécondité, réponse fondatrice à la précarité humaine. La stérilité de la femme est une malédiction. La puissance virile est, s'il le faut, renforcée par la pharmacopée, la magie et les stimulants. Le prestige social repose sur une progéniture nombreuse, que les sociétés soient polygames ou monogames. Dans la majorité des pays africains subtropicaux, la fécondité est supérieure à six enfants par femme ; l'âge moyen au premier mariage varie, avec quelques exceptions, de seize à vingt ans pour les filles.

Ainsi, deux régulations profondes semblent régir les civilisations africaines : la préservation des écosystèmes par une agriculture extensive (à faible rendement), la compensation d'une forte mortalité par une procréation élevée. Or, depuis vingt ans environ, ces deux comportements culturels ont perdu sens et effet : la croissance démographique a rompu les équilibres.

On constate que le continent noir connaît des taux de croissance démographique de l'ordre de 2,5 à 3,7 % par an, ce qui fait doubler la population d'un pays en vingt à vingt cinq ans. Ainsi, en 1960, l'Afrique noire comptait environ deux cent dix millions d'habitants. En 1990, on en prévoit sept cents millions en l'an 2000 et 1,4 milliard en 2025, soit quatre fois la population de l'Europe des Douze d'aujourd'hui. Dans un peu plus de trente ans (2025), l'Afrique noire constituera, après l'Asie, le deuxième continent du monde.

Cette croissance démographique exceptionnelle vient en particulier de la réduction de la mortalité infantile, sans que la fécondité ait été modifiée. L'incursion de services de santé modernes dans les sociétés traditionnelles ne leur a pas laissé le temps de mettre en oeuvre de nouveaux comportements culturels limitant la natalité... La médecine préventive (vaccinations, lutte contre les insectes pathogènes) et, de quelque manière, la médecine curative ont réduit la mortalité infantile. Ainsi, s'est modifié l'équilibre entre mortalité et natalité sans qu'on ait su prévoir que les bienfaits de la médecine tropicale allaient engendrer des situations inédites.

Deux modifications majeures affectent les sociétés africaines du fait de la croissance démographique : le rapport entre les générations et l'expansion de l'Afrique des villes.

La moitié de la population a moins de vingt ans, parfois moins de quinze ans. Toutes les sociétés tentent de contrôler le passage de responsabilité d'une génération à l'autre : le vieillissement des sociétés industrielles a créé un déséquilibre entre personnes âgées et nouvelles classes d'âge. Inversement, en Afrique, l'explosion démographique fait partout surgir une jeunesse qui échappe au contrôle traditionnel des anciens et des aînés. Aucun encadrement éducatif ou social n'est encore en mesure de compenser l'incapacité économique des Etats à intégrer les jeunes par l'emploi. Les sociétés africaines connaissent ainsi une crise fondamentale puisque aucun ordre social nouveau ne s'est substitué à l'organisation traditionnelle selon l'âge (anciens, initiés, non-initiés). La jeunesse n'apparaît pas aujourd'hui en Afrique comme la promesse du futur, mais constitue une menace de violence sociale, en ville surtout.

L'autre mutation qu'apporte l'explosion démographique est l'expansion des villes sur un continent sans civilisation urbaine, sauf exception. En vingt ans, les afflux de migrants récents ont transformé le paysage urbain , juxtaposant aux quartiers construits par l'administration coloniale des aires d'habitat ou d'indigence comparables à celles des mégalopoles d'Asie ou d'Amérique latine. Le trop-plein des populations rurales arrive «en ville» , alors que celle-ci est d'abord un pôle administratif et de résidence institutionnelle et ne constitue pas, comme en Europe au XIXè et XXè siècles, un centre d'activité économique. L'urbanisation du continent africain, qui pourrait être le signe d'une modernisation sociale, n'a pour effet que de concentrer sur des faubourgs démunis de services urbains et sociaux des populations pauvres et jeunes, prêtes à saisir toute occasion de petit revenu, délictueux ou clandestin.

La conjonction de ces deux mutations aboutit à faire de la ville le lieu de confrontation entre les groupes restreints qui détiennent le pouvoir politique et la masse croissante de jeunes sans futur, voués aux échappatoires du football, de la musique commerciale ou du cinéma américain et asiatique et au rêve de consommations inaccessibles. De nouvelles précarités affectent ainsi les sociétés rurales dont les hommes et les jeunes migrent parfois sans retour. La déstructuration de la civilisation rurale est en oeuvre du fait de la croissance démographique, aggravée ici par la sécheresse, ailleurs par les guerres. La pression sur l'utilisation des terres cultivables et le prélèvement accru des ressources en bois mettent en péril les sols fragiles que l'agriculture africaine savait ménager. La désertification du Sahel est due tout autant à la sécheresse qu'à la charge démographique. Les besoins des villes en charbon de bois aggravent des concurrences sans réglementation entre villages et marchands charbonniers.

La croissance démographique atteint ainsi en profondeur l'organisation traditionnelle des sociétés autant que leur mode d'emprise sur l'environnement. Même si le continent noir est dit sous-peuplé en raison de l'immensité des milieux inhabitables, il est le continent promis, jusqu'au milieu du XXIè siècle, à des mutations, des déséquilibres sociaux et des migrations qui concerneront inévitablement les autres continents...

Ainsi la poussée démographique fait-elle bouger, en une germination inédite, tout le continent noir. N’en sont visibles pour le moment que les effets de détresse : migrations de misère vers la ville et hors du continent, accroissement des tensions ethniques, jeunesse sans futur, pauvreté accrue des paysanneries. Inéluctablement, dans les trente années à venir, toutes les sociétés africaines, traditionnelles ou modernisées, vont vivre des ébranlements dont peut naître une nouvelle Afrique. Pour aborder ce temps de mutation, dans quelle mémoire, dans quels héritages les Africains peuvent-ils ancrer leur identité ?

Comment dire l’africanité par-delà la fracture d’identité induite par la domination européenne ? Son expression écrite est récente ; la proclamation de la négritude, dans les années 20, s’inscrit dans le combat anticolonialiste. Le mouvement naît de la rencontre tricontinentale des écrivains noirs américains et antillais, et de la diaspora intellectuelle d’Europe. Aimé Césaire et Léopold Sédar Senghor définissent ainsi la négritude : «se revendiquer comme noir». Ils proposent un humanisme réhabilitant l’âme et l’intuition nègres. La littérature, la poésie en sont les voix. Dans les années 50, la revue Présence africaine fera évoluer le mouvement vers un engagement politique...

Les cultures africaines sont aussi multiples que les langues vernaculaires du continent : on en a recensé plus de deux mille. Depuis des décennies la linguistique africaine fait l’inventaire de langues parfois parlées par quelques milliers d’habitants seulement. La transcription des langues majeures, leur utilisation comme langue commune pour les Etats modernes entretiennent de longs débats à enjeux politiques et éducatifs au sein de l’Organisation des Nations unies pour l’éducation, la science et la culture. La plupart des Africains parlent au moins deux langues, leur langue maternelle et une langue véhiculaire, ou la langue de colonisation. Les langues africaines sont vivantes, survivent aux effets de domination, permettent aux immigrés de se reconnaître, comme si elles témoignaient d’une identité indéracinable.

Pour comprendre l’africanité, socle de multiples cultures, il faut parler une langue africaine. Il faut aussi «déplacer» la démarche scientifique et vivre une approche d’initiation et d’alliance. Car l’africanité s’exprime dans les codes sociaux, les rites religieux et la traditioin orale connue des sages, récitée et ransmise par les anciens aux lignées du groupe. L’africanité se partage à l’occasion des manifestations considérables que suscitent les événement majeurs de la vie : mariages, deuils, récoltes, initiations... La mémoire africaine dit l’histoire par la tradition orale. Cette variation, souvent épique, dit et donne son identité à un groupe; il s’agit toujours de désigner les ancêtres, rappeler la généalogie, les alliances intervenues ou rompues, raconter les diasporas d’un peuple, légitimer l’appropriation d’un terroir. Les mythes assignent un sens aux coutumes, aux règles de vie, aux techniques du travail rural ou artisanal ; ils légitiment l’organisation sociale, la répartition du commandement, des rôles et des biens. L’africanité est un ensemble de valeurs qui protègent l’individu de la précarité, le lient au groupe de solidarité essentiel, la «grande famille».

La famille donne à tout Africain ses repères fondateurs. Même immigré ou expatrié, un Africain se réfère au groupe familial et à ses alliances. Son identité ethnique est construite sur ce code premier. L'ethnicité s'ancre dans la mémoire familiale et classique.

La parenté reste l'ancrage fondateur malgré les mutations et fractures que l'histoire récente fait vivre aux groupes sociaux. Les civilisations africaines énoncent ainsi que l'essence de l'humanité s'exprime dans un ordre social où l'itinéraire individuel ne peut jamais délier un homme ou une femme de ses solidarités de sang et d'alliance, sauf à prendre le risque d'une dissidence.

T. PUJOLLE
«L'Afrique Noire»
(1994 - Flammarion)

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

«La technologie est la science de l'homme, en tant que créateur et porteur de culture».

Commentez cette assertion (Votre argumentation doit être soutenue par des exemples précis).

SUJET n° 2

Quelles réflexions vous suggèrent la phrase de Tristan Bernard (écrivain français 1866-1947) dans son dictionnaire humoristique A à Z ?

«Si un individu persiste à marcher droit au milieu d'une foule qui zigzague, c'est lui qui aura l'air de zigzaguer. Il faut suivre le roulis et ne pas lui résister».

SUJET n° 3

Evoquant le passé et l'avenir un proverbe bantou s'exprime ainsi :

«La route n'enseigne pas au voyageur ce qui l'attend à l'étape»

Quelles sont les réflexions que vous inspirent ce proverbe?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Dans tout ce qui suit J désigne un intervalle de ℝ inclus dans $\left[-1,1\right]$, de longueur non nulle et tel que, pour tout $x \in J,\ x^2 \in J$. On étudie l'ensemble E_J des applications dérivables de J dans ℝ telles que :

$$(*)\ \forall x \in J,\ f'(x) = f\left(x^2\right)$$

I - PRELIMINAIRES

❶ Soit $\left(a,b\right) \in \mathbb{R}^2, -\infty < a < b \leq +\infty$, et g une application n fois dérivable de $\left]a,b\right[$ dans ℝ. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$, la dérivée k-ième $g^{(k)}$ admet une limite λ_k quand la variable tend vers a. On définit alors la fonction $\tilde{g}$ de $\left[a,b\right[$ dans ℝ par :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(a) &= \lambda_0 ; \\ \forall x \in \left]a,b\right[,\ \tilde{g}(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Démontrer que la fonction $\tilde{g}$ est n fois dérivable sur $\left[a,b\right[$ et

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq n,\ \tilde{g}^{(k)}(a) = \lambda_k .$$

❷ Soit J un intervalle comme au début. Démontrer que E_J est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur ℝ des fonctions indéfiniment dérivables sur J.

❸ Soit g une fonction dérivable définie sur un intervalle borné $I =]a,b[(-\infty < a < b < +\infty)$ à valeurs dans ℝ.

a/ On suppose que g et sa dérivée g' sont toutes deux minorées sur I.

Montrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

b/ On suppose maintenant que g et sa dérivée g' sont toutes deux majorées sur I. Démontrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

❹ On définit une application θ de $[-1,1]$ dans ℝ par

$$\theta(-1) = \theta(1) = 0$$

$$\forall x \in]-1,1[, \theta(x) = e^{\omega(x)} \text{ avec } \omega(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

a/ Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.

b/ Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in ℕ$, $\theta^{(n)}(1) = \theta^{(n)}(-1) = 0$.

c/ Soit C^∞ l'espace vectoriel sur ℝ des fonctions indéfiniment dérivables de $[-1,1]$ dans ℝ et D le sous espace de C^∞ des fonctions s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées aux points 1 et -1. Démontrer que l'application linéaire, de C^∞ dans lui même, $f \mapsto \theta f$ (où θf est l'application définie par $\forall x \in [-1,1]$, $\theta f(x) = \theta(x) f(x)$) est injective et à valeurs dans D. En déduire que D est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

II - ETUDE DE $E_{[-1,1]}$

❶ On définit une suite d'entiers $(q_k, k \in \mathbb{N})$ par

$$q_0 = 0;$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ q_{k+1} = 2q_k + 1$$

a/ Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = 2^k - 1$

On note $Q = \left\{ q_k \ / \ k \in \mathbb{N} \right\}$.

Soit $(a_n, n \in \mathbb{N})$ la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 1;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{l=k} q_l}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \notin Q,\ a_n = 0$$

b/ Trouver la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum na_n$

c/ Déterminer, pour $x > 1, \lim_{k \to +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$

d/ Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 et que l'application

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur $[-1, +1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

e/ Démontrer que S est un élément de $E_{[-1,1]}$ tel que $S(0) = 1$.

❷ a/ Donner une majoration que l'on justifiera de $\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right|$ qui soit valable sur tout le segment $[0,1]$. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de $S(1)$.

b/ Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe $y = S(x)$; on précisera la concavité.

c/ Etablir la relation : $\int_0^1 S(x)dx = \frac{2}{3}S(1)$

❸ Soient $(a,b) \in [-1,1]^2$ tels que $a \le 0 \le b,\ a^2 \le b,\ J = [a,b]$ et $f \in E_J$.

a/ On suppose que $f(0) = 0$. On pose $M = \sup\{|f(t)| / t \in J\}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, |f(x)| \le M|x|^{q_n}$.

b/ En déduire que f est nulle.

c/ On ne suppose plus maintenant que $f(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in J, f(x) = f(0)S(x)$. En déduire que E_J est de dimension 1.

ETUDE DE $E_{]0,1[}$

Dans cette partie, le symbole J désigne l'intervalle $]0,1[$.

❶ Soient $f \in E_J, p \in J$ et ($p_n, n \in \mathbb{N}$) la suite définie par :

$$p_0 = p$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}$$

a/ Démontrer que la suite ($p_n, n \in \mathbb{N}$) est strictement croissante et déterminer sa limite.

b/ Démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n}(1+p_{k+1}-p_k), n \in \mathbf{N}\right)$ est convergente.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sup\{|f(x)| / x \in [p_n, p_{n+1}]\}$.

c/ A l'aide de la relation $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt$, démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1}\left(1 + p_{n+1} - p_n\right)$$

En déduire que la suite ($M_n, n \in \mathbb{N}$) est bornée.

d/ Etablir que, pour tout $\alpha \in J, f$ et f' sont bornées sur $[\alpha, 1[$. Montrer que $f(x)$ a une limite λ quand x tend vers 1 et que, si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée appartient à $E_{]0,1]}$.

❷ Soit $f \in E_J$

a/ On suppose qu'il existe $\beta \in J$ tel que f soit majorée dans $]0, \beta]$. Etablir que $f(x)$ et $f'(x)$ ont une même limite finie μ quand x tend vers 0. En déduire que f est la restriction de μS à J

b/ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante, on a alors les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in J,\ \sup\left\{ f(x) / x \in \left]0, \varepsilon\right] \right\} = +\infty \text{ et } \inf\left\{ f(x) / x \in \left]0, \varepsilon\right] \right\} = -\infty$$

c/ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante

$$Card\left\{ x / x \in \left]0, \varepsilon\right], f(x) = 0 \right\} = +\infty$$

La suite de cette partie est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de E_J qui ne soit pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❸ On pose $r_0 = \dfrac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}, r_{n+1} = \sqrt{r_n}$

a/ Démontrer que la suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est bien définie et expliciter r_n.

b/ Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}, I_n = \left[r_n, r_{n+1}\right]$. Déterminer $\bigcup_{n \in Z} I_n$.

Soit λ un élément de D où D est défini en I ❹ c/ Démontrer que les formules suivantes

$$\forall x \in I_0, \varphi_0(x) = \lambda(8x-3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_n, \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^{x} \varphi_{n-1}(t^2)dt$$

définissent pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application φ_n de I_n dans $\mathbb{R}$.

d/ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n admet dans I_n une dérivée continue et que $\varphi_n^{'}(r_{n+1}) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée à gauche de φ_{n-1} en r_n et la dérivée de φ_n en ce même point sont égales.

❹ a/ Démontrer que la formule suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_{-m}, \varphi_{-m}(x) = \varphi^{'}_{-\mathbf{m+1}}\left(\sqrt{x}\right)$$

définit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, une application φ_{-m} de I_{-m} dans $\mathbb{R}$.

b/ Etablir que pour tout $m \in \mathbb{N}^*, \varphi_{-m}$ est indéfiniment dérivable dans I_{-m} et que φ_{-m} et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de I_{-m} .

❺ Démontrer qu'il existe une application ψ_λ de J dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in I_n,\ \psi_\lambda(x) = \varphi_n(x)$$

et montrer que cette fonction ψ_λ appartient à E_J mais que, pour un choix convenable de λ, ψ_λ n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❻ Démontrer que l'application de D dans $E_J, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire et injective.

En déduire que E_J est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$.

❼ On pose ici $\lambda = \theta$ où θ a été défini au I ❹

a/ Donner le sens de variation de ψ_θ et celui de $\psi_\theta^{'}$ sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$, étudier le signe et le sens de variation de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right]$.

b/ Donner une minoration du nombre de racines de ψ_θ dans $\left]r_n, r_{n+1}\right[$ pour $n < 0$.

❽ Trouver une relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre $\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x)dx$ et $\int_{r_0}^{r_1} \psi_\theta(x)dx$.

Quelle est la nature de $\int_0^1 \psi_\theta(x)dx$?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

COMPOSITION DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Cette épreuve a pour objet de faire apparaître l'aptitude des candidats à discerner les idées essentielles et à en présenter un exposé synthétique, sans discussion ni commentaire.

Les candidats ne doivent pas seulement découper et regrouper les phrases jugées les plus significatives ; ils doivent repenser ce texte et le résumer en usant d'un style personnel. Le texte résumé doit pouvoir être compris par tout lecteur ignorant le texte original.

Résumer en 250 mots environ ce texte extrait de "Race et histoire" de Lévi-Strauss.

* *
*

Pour comprendre comment, et dans quelle mesure, les cultures humaines diffèrent entre elles, si ces différences s'annulent ou se contredisent, ou si elles concourent à former un ensemble harmonieux, il faut d'abord essayer d'en dresser l'inventaire. Mais c'est ici que les difficultés commencent, car nous devons nous rendre compte que les cultures humaines ne diffèrent pas entre elles de la même façon, ni sur le même plan. Nous sommes d'abord en présence de sociétés juxtaposées dans l'espace, les unes proches, les autres lointaines, mais, à tout prendre, contemporaines. Ensuite nous devons compter avec des formes de la vie sociale qui se sont succédées dans le temps et que nous sommes empêchés de connaître par expérience directe. Tout homme peut se transformer en ethnographe et aller partager sur place l'existence d'une société qui l'intéresse ; par contre, même s'il devient historien ou archéologue, il n'entrera jamais directement en contact avec une civilisation disparue, mais seulement à travers des documents écrits ou les monuments figurés que cette société - ou d'autres - auront laissés à son sujet. Enfin, il ne faut pas oublier que les sociétés contemporaines restées ignorantes de l'écriture furent, elles aussi, précédées par d'autres formes, dont la connaissance est pratiquement impossible, fût-ce de manière indirecte ; un inventaire consciencieux se doit de leur réserver des cases blanches sans doute en nombre infiniment plus élevé que celui des cases où nous nous sentons capables d'inscrire quelque chose. Une première constatation s'impose : la diversité des cultures humaines est, en fait dans le présent, en fait et aussi en droit dans le passé, beaucoup plus grande et plus riche que tout ce que nous sommes destinés à en connaître jamais.

Mais, même pénétrés d'un sentiment d'humilité et convaincus de cette limitation, nous rencontrons d'autres problèmes. Que faut-il entendre par cultures différentes ? Certaines semblent l'être, mais si elles émergent d'un tronc commun elle ne diffèrent pas au même titre que deux sociétés qui à aucun moment de leur développement n'ont entretenu de rapports. Ainsi l'ancien empire des Incas du Pérou et celui du Dahomey en Afrique diffèrent entre eux de façon plus absolue que, disons, l'Angleterre et les Etats-Unis d'aujourd'hui, bien que ces deux sociétés doivent aussi être traitées comme des sociétés distinctes. Inversement, des sociétés entrées récemment en contact très intime paraissent offrir l'image de la même civilisation alors qu'elles y ont accédé par des chemins différents, que l'on n'a pas le droit de négliger. Il y a simultanément à l'oeuvre, dans les sociétés humaines, des forces travaillant dans des directions opposées : les unes tendant au maintien et même à l'accentuation des particularismes ; les autres agissant dans le sens de la convergence et de l'affinité. L'étude du langage offre des exemples frappants de tels phénomènes : ainsi, en même temps que des langues de même origine ont tendance à se différencier les unes par rapport aux autres (tels : le russe, le français et l'anglais), des langues d'origines variées, mais parlées dans des territoires contigus, développent des caractères communs : par exemple, le russe s'est, à certains égards, différencié d'autres langues slaves pour se rapprocher, au moins par certains traits phonétiques, des langues finno-ougriennes et turques parlées dans son voisinage géographique immédiat.

Quand on étudie de tels faits - et d'autres domaines de la civilisation, comme les institutions sociales, l'art, la religion, en fourniraient aisément de semblables - on en vient à se demander si les sociétés humaines ne se définissent pas, en égard à leurs relations mutuelles, par un certain *optimum* de diversité au-delà duquel elles ne sauraient aller, mais en dessous duquel elles ne peuvent, non plus, descendre sans danger. Cet optimum varierait en fonction du nombre des sociétés, de leur importance numérique, de leur éloignement géographique et des moyens de communication (matériels et intellectuels) dont elle disposent. En effet, le problème de la diversité ne se pose pas seulement à propos des cultures envisagées dans leurs rapports réciproques ; il existe aussi au sein de chaque société, dans tous les groupes qui la constituent : castes, classes, milieux professionnels ou confessionnels, etc., développent certaines différences auxquelles chacun d'eux attache une extrême importance. On peut se demander si cette *diversification* interne ne tend pas à s'accroître lorsque la société devient, sous d'autres rapports, plus volumineuse et plus homogène ; tel fut, peut-être, le cas de l'Inde ancienne, avec son système de castes s'épanouissant à la suite de l'établissement de l'hégémonie aryenne.

On voit donc que la notion de la diversité des cultures humaines ne doit pas être conçue d'une manière statique. Cette diversité n'est pas celle d'un échantillonnage inerte ou d'un catalogue desséché. Sans doute les hommes ont-ils élaboré des cultures différentes en raison de l'éloignement géographique, des propriétés particulières du milieu et de l'ignorance où ils étaient du reste de l'humanité ; mais cela ne serait rigoureusement vrai que si chaque culture ou chaque société était liée et s'était développée dans l'isolement de toutes les autres. Or cela n'est jamais le cas, sauf peut-être dans des exemples exceptionnels comme celui des Tasmaniens (et là encore, pour une période limitée). Les sociétés humaines ne sont jamais seules ; quand elles semblent le plus séparées, c'est encore sous forme de groupes et de paquets. Ainsi, il n'est pas exagéré de supposer que les cultures nord-américaines et sud-américaines ont été coupées de presque tout contact avec le reste du monde pendant une période dont la durée se situe entre dix mille et vingt-cinq mille années. Mais ce gros fragment d'humanité détachée consistait en une multitude de sociétés, grandes et petites, qui avaient entre elles des contacts fort étroits. Et à côté des différences dues à l'isolement, il y a celles, tout aussi importantes, dues à la proximité : désir de s'opposer, de se distinguer, d'être soi. Beaucoup de coutumes sont nées, non de quelque nécessité interne ou accident favorable, mais de la seule volonté de ne pas demeurer en reste par rapport à un groupe voisin qui soumettait à un usage précis un domaine où l'on n'avait pas songé soi-même à édicter des règles. Par conséquent, la diversité des cultures humaines ne doit pas nous inviter à une observation morcelante ou morcelée. elle est moins fonction de l'isolement des groupes que des relations qui les unissent.

...

Et pourtant, il semble que la diversité des cultures soit rarement apparue aux hommes pour ce qu'elle est : un phénomène naturel, résultant des rapports directs ou indirects entre les sociétés ; il y ont plutôt vu une sorte de monstruosité ou de scandale ; dans ces matières, le progrès de la connaissance n'a pas tellement consisté à dissiper cette illusion au profit d'une vue plus exacte qu'à l'accepter ou à trouver le moyen de s'y résigner.

L'attitude la plus ancienne, et qui repose sans doute sur des fondements psychologiques solides puisqu'elle tend à réapparaître chez chacun de nous quand nous sommes placés dans une situation inattendue, consiste à répudier purement et simplement les formes culturelles : morales, religieuses, sociales, esthétiques, qui sont les plus éloignées de celles auxquelles nous nous identifions.

... Sans doute les grands systèmes philosophiques et religieux de l'humanité - qu'il s'agisse du bouddhisme, de christianisme ou de l'islam, des doctrines stoïciennes, kantienne ou marxiste - se sont-ils constamment élevés contre cette aberration. Mais la simple proclamation de l'égalité naturelle entre tous les hommes et de la fraternité qui doit les unir, sans distinction de races ou de cultures, a quelque chose de décevant pour l'esprit, parce qu'elle néglige une diversité de fait, qui s'impose à l'observation et dont il ne suffit pas de dire qu'elle n'affecte pas le fond du problème pour que l'on soit théoriquement et pratiquement autorisé à faire comme si elle n'existait pas. Ainsi le préambule à la seconde déclaration de l'Unesco sur le problème des races remarque judicieusement que ce qui convainc l'homme de la rue que les races existent, c'est l' "évidence immédiate de ses sens quand il aperçoit ensemble un Africain, un Européen, un Asiatique et un Indien américain".

Les grandes déclarations des droits de l'homme ont, elles aussi, cette force et cette faiblesse d'énoncer un idéal trop souvent oublieux du fait que l'homme ne réalise pas sa nature dans une humanité abstraite, mais dans des cultures traditionnelles où les changement les plus révolutionnaires laissent subsister des pans entiers et s'expliquent eux-mêmes en fonction d'une situation strictement définie dans le temps et dans l'espace. Pris entre la double tentation de condamner des expériences qui le heurtent affectivement, et de nier des différences qu'il ne comprend pas intellectuellement, l'homme moderne s'est livré à cent spéculations philosophies et sociologiques pour établir de vains compromis entre ces pôles contradictoires, et rendre compte de la diversité des cultures tout en cherchant à supprimer ce qu'elle conserve pour lui de scandaleux et de choquant.

Mais, si différentes et parfois si bizarres qu'elles puissent être, toutes ces spéculations se ramènent en fait à une seule recette, que le terme de *faux évolutionnisme* est sans doute le mieux apte à caractériser. En quoi consiste-t-elle ? Très exactement, il s'agit d'une tentative pour supprimer la diversité des cultures tout en feignant de la reconnaître pleinement. Car, si l'on traite les différents états où se trouvent les sociétés humaines, tant anciennes que lointaines, comme des *stades* ou des *étapes* d'un développement unique qui, partant du même point, doit les faire converger vers le même but, on voit bien que la diversité n'est plus qu'apparente. L'humanité devient une et identique à elle-même ; seulement, cette unité et cette identité ne peuvent se réaliser que progressivement et la variété des cultures illustre les moments d'un processus qui dissimule une réalité plus profonde ou en retarde la manifestation.

... Chaque société peut, de son propre point de vue, répartir les cultures en trois catégories : celles qui sont ses contemporaines, mais se trouvent situées en un autre lieu du globe ; celles qui se sont manifestées approximativement dans le même espace, mais l'on précédée dans le temps ; celles, enfin, qui ont existé à la fois dans un temps antérieur au sien et dans un espace différent de celui où elle se place.

On a vu que ces trois groupes sont très inégalement connaissables. Dans le cas du dernier, et quand il s'agit de cultures sans écriture, sans architecture et à techniques rudimentaires (comme c'est le cas pour la moitié de la terre habitée et pour 90 à 99%, selon les régions, du laps de temps écoulé depuis le début de la civilisation), on peut dire que nous ne pouvons rien en savoir et que tout ce qu'on essaie de se présenter à leur sujet se réduit à des hypothèses gratuites.

Par contre, il est extrêmement tentant de chercher à établir, entre les cultures du premier groupe, des relations équivalant à un ordre de succession dans le temps. Comment des sociétés contemporaines, restées ignorantes de l'électricité et de la machine à vapeur, n'évoqueraient-elles pas la phase correspondante du développement de la civilisation occidentale ? Comment ne pas comparer les tribus indigènes, sans écriture et sans métallurgie, mais traçant des figures sur les parois rocheuses et fabriquant des outils de pierre, avec les formes archaïques de cette même civilisation, dont les vestiges trouvés dans les grottes de France et d'Espagne attestent la similarité ? C'est là surtout que le faux évolutionnisme s'est donné libre cours. Et pourtant ce jeu séduisant, auquel nous nous abandonnons presque irrésistiblement chaque vois que nous en avons l'occasion (le voyageur occidental ne se complaît-il pas à retrouver le "moyen âge" en Orient, le "siècle de Louis XIV" dans le Pékin d'avant la guerre mondiale, l' "âge de la pierre" parmi les indigènes d'Australie et de la Nouvelle-Guinée ?), est extraordinairement pernicieux. Des civilisations disparues, nous ne connaissons que certains aspects, et ceux-ci sont d'autant moins nombreux que la civilisation considérée est plus ancienne, puisque les aspects connus sont ceux-là seuls qui ont pu survivre aux destructions du temps. Le procédé consiste donc à prendre la partie pour le tout, à conclure, du fait que *certains* aspects de deux civilisations, (l'une actuelle, d'autre disparue) offrent des ressemblances, à l'analogie de *tous* les aspects. Or non seulement cette façon de raisonner est logiquement insoutenable, mais dans bon nombre de cas elle est démentie par les faits.

Jusqu'à une époque relativement récente, les Tasmaniens, les Patagons possédaient des instruments de pierre taillée, et certaines tribus australiennes et américaines en fabriquent encore. Mais l'étude de ces instruments nous aide fort peu à comprendre l'usage des outils de l'époque paléolithique. Comment se servait-on des fameux "coups-de-poing" dont l'utilisation devait pourtant être si précise que leur forme et leur technique de fabrication sont restées standardisées de façon rigide pendant cent ou deux cent mille années, et sur un territoire s'étendant de l'Angleterre à l'Afrique du Sud, de la France à la Chine ? ... Quelle pouvait être la technologie des cultures tardenoisiennes qui ont abandonné derrière elles un nombre incroyable de minuscules morceaux de pierre taillée, aux formes géométriques infiniment diversifiées, mais fort peu d'outils à l'échelle de la main humaine ? Toutes ces incertitudes montrent qu'entre les sociétés paléolithiques et certaines sociétés indigènes contemporaines existe toujours une ressemblance : elle se sont servies d'un outillage de pierre taillée. Mais, même sur le plan de la technologie, il est difficile d'aller plus loin : la mise en oeuvre du matériau, les types d'instruments, donc leur destination, étaient différents et les uns nous apprennent peu sur les autres à ce sujet. Comment donc pourraient-ils nous instruire sur le langage, les institutions sociales ou les croyances religieuses ?

Une des interprétations les plus populaires, parmi celles qu'inspire l'évolutionnisme culturel, traite les peintures rupestres que nous ont laissées les sociétés du paléolithique moyen comme des figurations magiques liées à des rites de chasse. La marche du raisonnement est la suivante : les populations primitives actuelles ont des rites de chasse, qui nous apparaissent souvent dépourvus de valeur utilitaire ; les peintures rupestres préhistoriques, tant par leur nombre que par leur situation au plus profond des grottes, nous semblent sans valeur utilitaire ; leurs auteurs étaient des chasseurs : donc elles servaient à des rites de chasse. Il suffit d'énoncer cette argumentation implicite pour en apprécier l'inconséquence. Du reste, c'est surtout parmi les non-spécialistes qu'elle a cours, car les ethnographes, qui ont, eux, l'expérience de ces populations primitives si volontiers mises "à toutes les sauces" par un cannibalisme pseudo-scientifique peu respectueux de l'intégrité des cultures humaines, sont d'accord pour dire que rien, dans les faits observés, ne permet de formuler une hypothèse quelconque sur les documents en question.

Par l'état de ses civilisation, l'Amérique précolombienne, à la veille de la découverte, évoque la période néolithique européenne. Mais cette assimilation ne résiste pas davantage à l'examen : en Europe, l'agriculture et la domestication des animaux vont de pair, tandis qu'en Amérique un développement exceptionnellement poussé de la première s'accompagne d'une presque complète ignorance (ou, en tout cas, d'une extrême limitation) de la seconde. En Amérique, l'outillage lithique se perpétue dans une économie agricole qui, en Europe, est associée au début de la métallurgie.

Il est inutile de multiplier les exemples. Car les tentatives faites pour connaître la richesse et l'originalité des cultures humaines, et pour les réduire à l'état de répliques inégalement arriérées de la civilisation occidentale, se heurtent à une autre difficulté, qui est beaucoup plus profonde : en gros (et exception faite de l'Amérique), toutes les sociétés humaines ont derrière elles un passé qui est approximativement du même ordre de grandeur. Pour traiter certaines sociétés comme des "étapes" du développement de certaines autres, il faudrait admettre qu'alors que, pour ces dernières, il se passait quelque chose, pour celles-là il ne se passait rien - ou fort peu de choses -. Et en effet, on parle volontiers des "peuples sans histoire" (pour dire parfois que ce sont les plus heureux). Cette formule elliptique signifie seulement que leur histoire est et restera inconnue, mais non qu'elle n'existe pas. Pendant des dizaines et même des centaines de millénaires, là-bas aussi, il y a eu des hommes qui ont aimé, haï, souffert, inventé, combattu. En, vérité, il n'existe pas de peuples enfants ; tous sont adultes, même ceux qui n'ont pas tenu le journal de leur enfance et de leur adolescence.

On pourrait sans doute dire que les sociétés humaines ont inégalement utilisé un temps passé qui, pour certaines, aurait même été du temps perdu ; que les unes mettaient les bouchées doubles tandis que les autres musaient le long du chemin. On en viendrait ainsi à distinguer entre deux sortes d'histoires : une histoire progressive, acquisitive, qui accumule les trouvailles et les inventions pour construire de grandes civilisations, et une autre histoire, peut-être également active et mettant en oeuvre autant de talents, mais où manquerait le don synthétique qui est le privilège de la première. Chaque innovation, au lieu de venir s'ajouter à des innovations antérieures et orientées dans le même sens, s'y dissoudrait dans une sorte de flux ondulant qui ne parviendrait jamais à s'écarter durablement de la direction primitive.

Cette conception nous paraît beaucoup plus souple et nuancée que les vues simplistes dont on a fait justice aux paragraphes précédents. Nous pourrons lui conserver une place dans notre essai d'interprétation de la diversité des cultures et cela sans faire injustice à aucune.

Lévi-Strauss
Race et histoire
1952 UNESCO
(Denoël 1987)
(Flio-Essars 1985)

Concours CESD 1999

Epreuve de Calcul Numérique

Durée : 2 heures
Calculatrices permises

Soit f une fonction réelle égale à la somme d'une série entière de terme général $(a_n x^n)_{x\in\mathbb{N}}$; le rayon de convergence R est supposé strictement positif. Dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$ la valeur de $f(x)$ est donc donnée par la relation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Etant donné deux entiers naturels p et q, on dit que la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(C1) Il existe deux polynômes réels P et Q de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction rationnelle P/Q est irréductible.

(C2) Il existe deux réels α et M avec $0 < \alpha \leq R, M > 0$, tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}| \leq M|x|^{p+q+1}.$$

Première Partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1. Démontrer que, pour que la fonction f admette une approximation de Padé d'ordre (p, q), il faut et il suffit que la condition (C1) ci-dessus et la condition (C3) ci-après soient satisfaites :

   (C3) Il existe deux réels α et M avec $0 < \alpha \leq R, M > 0$, tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

   $$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq M|x|^{p+q+1}.$$

   En déduire que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q), il existe une fonction g somme d'une série entière telle que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$ les fonctions f, P, Q et g vérifient la relation :

   $$Q(x)f(x) - P(x) = x^{p+q+1}g(x).$$

2. Démontrer que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q), les polynômes P et Q sont définis de manière unique. La fraction rationnelle P/Q sera désignée par le symbole $[p/q]_f$ et sera appelée approximation de Padé d'ordre (p, q) de f.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel p, la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre $(p, 0)$. Préciser $[p/0]_f$.
4. Soient P et Q deux polynômes de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction rationnelle P/Q soit irréductible ; démontrer que, pour que la fraction rationnelle P/Q soit l'approximation de Padé d'ordre (p, q) de f, il faut et il suffit que les valeurs prises par la fraction rationnelle P/Q et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p+q$ en 0 soient égales respectivement aux valeurs prises par la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p + q$ en 0.
5. Supposons que la fonction f soit définie par la relation : $f(x) = 1 + x^2$. Existe-t-il une approximation de Padé d'ordre $(1, 1)$ de cette fonction f ?
6. Supposons que la fonction f soit définie par la relation :

   $$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1+3x}}.$$

   (a) Démontrer l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 ; déterminer son rayon de convergence et ses trois premiers termes.

   (b) Calculer les approximations de Padé $h_1 := [2/0]_f$, $h_2 := [0/1]_f$ et $h_3 := [1/1]_f$.

(c) Dresser le tableau des valeurs prises par les fonctions $f - h_3$ et $h_1 - f$ à 10^{-6} près lorsque la variable prend les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 et 10.

Deuxième Partie

Approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle.

1. Déterminer l'approximation de Padé d'ordre $(1, 1)$ de la fonction exponentielle
$$x \mapsto e^x.$$
2. Déterminer, pour tout entier $p \geq 2$ l'approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle. Soit R_p la fraction rationnelle obtenue. Préciser le plus grand intervalle ouvert centré en 0 dans lequel la fraction R_p est définie et continue. Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier N tel que la suite de réels $((R_p(x))_{p \geq N}$ soit convergente et de limite e^x.
Est-il possible de démontrer, de manière analogue, une convergence uniforme dans un intervalle $[-A, A]$, $A > 0$, vers la fonction exponentielle ?
3. (a) L'entier p étant fixé, déterminer un intervalle centré en 0 et une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels tels que la relation
$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
ait lieu pour tout x de cet intervalle. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_k x^k$.
(b) Démontrer que, pour tout intervalle $[0, A]$, $A > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $p > N$ l'inégalité
$$e^x \leq R_p(x)$$
ait lieu pour tous $x \in [0, A]$. En déduire, sous ces hypothèses sur p et x, une majoration de la différence $R_p(x) - e^x$.
(c) Il sera admis que, p étant toujours un entier, si x est un réel compris entre 0 et $p + 1$, la différence entre e^x et la somme $S_p(x)$ des $p + 1$ premiers termes de son développement en série entière dans un voisinage de 0 vérifie la double inégalité :
$$\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leq e^x - S_p(x) \leq \frac{x^{p+1}}{p!(p+1-x)}.$$
Est-ce que, en supposant maintenant x compris entre 0 et 1, le réel $R_p(x)$ est plus proche de e^x que $S_p(x)$?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

❶ Calculer $A'A$.

❷ En déduire, sans calculer le polynôme caractéristique de A, les valeurs propres de la matrice A.

EXERCICE n° 2

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

❶ Calculer M^2.

❷ Trouver un polynôme P du second degré tel que $P(M) = 0$.

❸ La matrice M est-elle diagonalisable?. Si oui, déterminer ses valeurs propres.

❹ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où $n \in N^*, n > 2$.

❺ En déduire M^n.

❻ Soit, pour $n>0$, $U_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$. Résoudre le système $U_{n+1}=MU_n$ de condition initiale $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE n° 3

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n\ (n\geq 1)$. On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E. Pour $f\in L(E)$, on pose :

$$\|f\|=\underset{x\neq 0}{Sup}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

❶ Vérifier que la notation précédente permet de définir une norme sur E.

❷ Soient P et Q deux projections définies sur E et telles que $\|P-Q\|<1$.

Montre que $I-(P-Q)$ est inversible.

Montrer que l'application P est une bijection de $\mathrm{Im}(Q)$ sur $\mathrm{Im}(P)$ (Im désigne l'image).

En déduire que $\dim\mathrm{Im}(P)=\dim\mathrm{Im}(Q)$.

EXERCICE n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur y de R^3 vérifiant :

$$\det(x_1,x_2,z)=y.z,\quad \forall z\in R^3$$

Ce vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2, et on note $y=x_1\wedge x_2$ (dans la relation précédente $y.z$ désigne le produit scalaire et $\det$ le déterminant).

❶ Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de $x_1\wedge x_2$ en fonction de celles de x_1 et x_2.

❷ On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x)=x\wedge w$.

Vérifier que $(x\wedge w)\wedge w=(w.x)w-x$

Montrer qu'il existe un réel k tel que $u^3=ku$

En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

❸ Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par

$$\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$$

Montrer que φ_α est un automorphisme de R^3.
Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

❹ En déduire qu'il existe $(a,b,c) \in R^3$ tel que $(\varphi_\alpha)^{-1} = a\,Id + bu + cu^2$ où Id désigne l'application identique. Calculer (a,b,c) en fonction de α.

EXERCICE n° 5

Déterminer l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec toutes les matrices de cet ensemble.

PROBLEME

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$f \circ f = \lambda f$, où λ est un réel non nul.

On note $L_\lambda = \{f | f \circ f = \lambda f\}$.

❶ Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

❷ Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E

❸ Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$

❹ Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2.

❺ Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à une famille de L_λ et vérifiant $(u - a \times Id) \circ (u - b \times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.

Montrer que $v = u - a \times Id$ et $w = u - b \times Id$ appartiennet à des familles de L_λ.

Ecrire u sous la forme $u = \alpha v + \beta w$ et en déduire u^n.

❻ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A - aI)(A - bI) = 0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.

SESSION D'AVRIL 2000

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Que pensez-vous de cette citation de MONTESQUIEU (écrivain Français 1689-1755).

«Si dans l'intérieur d'un pays vous n'entendez le bruit d'aucun conflit, vous pouvez être sûr que la liberté n'y est pas».

Est-elle toujours d'actualité ?

SUJET n° 2

NÄBÏ prosateur turc (mort en 1712) a écrit cette phrase :

«La nature, qui nous a donné qu'un seul organe pour la parole, nous en a donné deux pour l'ouïe afin de nous apprendre qu'il faut plus écouter que parler».

A l'aide d'exemples précis, quelles réflexions vous inspire-t- elle ?

SUJET n° 3

Albert EINSTEIN, physicien allemand (1879-1955) a écrit ce qui suit sur l’influence du milieu où l’on vit :

«Peu d’homme sont capable d’exprimer une opinion qui diffère des préjugés de leur milieu ambiant».

Etes-vous d’accord avec lui ? En ce temps des communications rapides, de l’Internet, est ce toujours aussi vrai ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Les parties I et II sont indépendantes.

I Etudes de suites

Pour un calcul célèbre Archimède considéra les relations de récurrence :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}},\ \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}}.$$

❶ Montrer que pour $c_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$, ces relations définissent deux suites $(c_n)_{n\geq 1}, (\lambda_n)_{n\geq 1}$ et qu'il existe deux autres suites $(\theta_n)_{n\geq 1}, (\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que pour tout $n \geq 1$:

$\theta_n \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]; \alpha_n \in \Re; c_n = \cos(\theta_n); \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n)$. $\Re$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge vers π

❷ En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $n \geq 1$, l'inégalité :

$$|\pi - \lambda_n| \leq \frac{\pi^3}{6\times 4^n}$$

En déduire un entier N_1 tel que $|\pi - \lambda_{N_1}| \leq 10^{-6}$

❸ Montrer que pour tout entier naturel p donné, λ_n admet, lorsque n tend vers l'infini, le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \ldots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right)$$

❹ On définit une nouvelle suite $\left(\lambda_n^{(1)}\right)_{n\geq 1}$ par $\lambda_n^{(1)} = \dfrac{-\lambda_n + 4\lambda_{n+1}}{3}$. Montrer que cette nouvelle suite converge aussi vers π et que l'on a quand n tend vers l'infini :

$$\lambda_n^{(1)} - \pi = o(\lambda_n - \pi)$$

Donner un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$.

❺ Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que la suite $\left(\lambda_n^{(2)}\right)_{n\geq 1}$ définie par

$\lambda_n^{(2)} = \alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)}$ vérifie

$\lambda_n^{(2)} - \pi = o\left(\dfrac{1}{16^n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

❻ Donner l'expression de $\lambda_n^{(2)}$ en fonction de $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}$ et montrer l'inégalité pour tout n :

$$\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \leq \frac{17\pi^7}{576\times 7!}\frac{1}{4^{3n}}$$

En déduire un entier N_2 tel que $\left|\pi - \lambda_{N_2}^{(2)}\right| \leq 10^{-6}$

II Polynômes de Bernoulli

❶ Soit f une fonction définie continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions ci-dessus définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f,\ \int_0^1 F(t)dt = 0$$

et exprimer F à l'aide de $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

❷ Montrer que les conditions :

$B_0 = 1, B_{n+1}' = B_n \text{ et } \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$ pour tout $n \geq 0$

définissent une unique suite de fonctions polynômes. Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré et expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.

❸ Montrer, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'égalité $B_n(0) = B_n(1)$.

❹ On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout n entier naturel :

$C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

Montrer que la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions du ❷ définissant la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ et en déduire que $(C_n)_{n\geq 0} = (B_n)_{n\geq 0}$.

Qu'en déduit-on pour les graphes de B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair $n \geq 3$, de $B_n(0)$, $B_n(\frac{1}{2})$ et $B_n(1)$?

❺ Montrer que les polynômes B_{2m+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ (On pourra procéder par récurrence sur m et utiliser le théorème de Rolle).

En déduire que les polynômes $B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ sont de signes constants sur $[0,1]$.

III Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

❶ Montrer pour tout N entier naturel non nul l'égalité :

$$\forall t \in \left]0,1\right[, 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

❷ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction φ_n définie sur $\left]0,1\right[$ par

$$\forall t \in \left]0,1\right[, \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$$

est prolongeable par continuité à $[0,1]$ et que le prolongement est continûment dérivable.

❸ Montrer que pour toute fonction f continûment dérivable sur $[0,1]$ on a :

$\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$ (On pourra utiliser une intégration par parties.)

❹ Pour k et n entiers strictement positifs, on définit :

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)dt$$

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$. En déduire selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k.

❺ En utilisant la formule établit au III❶, trouver, pour N entier naturel, une expression de

$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)dt$ en fonction de m,N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et $B_{2m}(0)$.

Donner les valeurs de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$.

❻ Montrer, pour tout m entier naturel non nul, la majoration :

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leq 2$. En déduire la majoration $|B_{2m}(0)| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$.

Pour toute la suite du problème les fonctions considérées seront définies sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivables.

IV Formule sommatoire d'Euler

❶ Montrer pour m entier strictement supérieur à 0 l'égalité :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} B_{2k}(0)\left[f^{(2k-1)}(t) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt$$

❷ Montrer, en utilisant II ❺, que pour tout m entier naturel, il existe c réel dans $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt = f^{(2m+2)}(c)B_{(2m+2)}(0)$$

En déduire une majoration de cette intégrale en fonction de

$\left\|f^{(2m+2)}\right\|$ où $\left\|f^{(2m+2)}\right\| = \sup_{x\in[0,1]}\left|f^{(2m+2)}(x)\right|$

❸ Notons $T(f) = \frac{1}{n}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $h = \frac{1}{n}$.

Expliciter la formule obtenue a la question IV ❶ lorsque m=2 pour les fonctions $f_i(t) = f(ih+ht)$ pour $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. En déduire l'existence des réels a_1, a_2 et d'une fonction r tels que :

$$\int_0^1 f(t)dt = T(f) + a_1h^2 + a_2h^4 - r(h)$$

avec $|r(h)| \leq \left\|f^{(6)}\right\|\frac{h^6}{16\pi^6}$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Trouver des conditions sur les réels *a, b, c, d* pour que la matrice *A* suivante soit diagonalisable dans l'ensemble des nombres réels.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ b & c & d & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n° 2

Soient *E* un espace vectoriel euclidien de dimension finie *n* et *f* une application linéaire de *E* dans *E* qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad < f(x), y > = - < x, f(y) >$$

où $<.,.>$ désigne le produit scalaire.

❶ Montrer que $f \circ f$, notée f^2, est symétrique et que :
$$\forall x \in E, \quad < f(x), x > = 0 \ \ et \ < f^2(x), x > \leq 0.$$

❷ Montrer que les valeurs propres de f^2 sont négatives.

❸ Que dire de la matrice de f dans une base orthonormale ?

❹ Si *P* et *Q* sont les polynômes caractéristiques respectivement de f et f^2. Comparer, pour *u* nombre complexe, $Q(u^2)$ et $\left(P(u)\right)^2$.

❺ Que dire des racines de *P* dans l'ensemble des nombres complexes?

EXERCICE n° 3

Soit $\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où *a, b, c* sont des nombres réels.

❶ Montrer que Ω est une matrice de rotation si et seulement si *a, b, c* sont les racines d'une équation de la forme :

$$t^3 - t^2 + k = 0$$

On précisera les conditions sur le nombre réel k.

❷ Préciser la nature de la rotation si $k = \dfrac{4}{27}\sin^2\varphi$, où $0 \le \varphi \le 2\pi$

EXERCICE n° 4

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

❶ Trouver un polynôme *P(x)* tel que *P(M)=0.*

❷ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par *P(X),* où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 2.

❸ Calculer M^n et résoudre le système $U_{n+1} = MU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE n° 5

On considère la matrice A_λ à coefficients réels, dépendante d'un paramètre réel λ, définie par :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda^2 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

❶ Donner une base de l'image de A_λ et déterminer le rang de cette matrice en fonction de λ.

❷ Donner une base du noyau de A_λ.

PROBLEME

On désigne par E_p l'espace euclidien défini par l'espace vectoriel R^p muni du produit scalaire défini relativement à sa base canonique par :

$$< u, v >_p = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i$$

où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E_p$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in E_p$

❶ Soit *A* l'opérateur linéaire de E_3 dans E_4 dont la matrice associée, notée aussi *A*, relativement aux bases canoniques de R^3 et R^4 est définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

- Déterminer le noyau $Ker\ A$ et l'image $\operatorname{Im} A$ de l'opérateur *A*.

- Montrer que les vecteurs $y_1 = (1,1,0,0); y_2 = (1,0,1,0); y_3 = (0,1,0,1)$ forment une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} A$ de E_4.

❷ Montrer que l'opérateur A permet de définir un isomorphisme $\tilde{A}$ de E_3 sur $\operatorname{Im} A$. Construire la matrice, notée aussi $\tilde{A}$, de cet isomorphisme relativement à la base canonique de R^3 et à la base $\{y_1, y_2, y_3\}$ de $\operatorname{Im} A$.

- Montrer qu'il existe un opérateur linéaire unique A^+ de E_4 dans E_3 tel que

$$A^+ y = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} y & si \quad y \in \operatorname{Im} A \\ 0 & si \quad y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp} \end{cases}$$

où $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{ z \in E_4 / < y, z >_4 = 0, \forall y \in \operatorname{Im} A \}$

- Construire la matrice, notée aussi A^+, associée à cet opérateur et relative aux bases canoniques de R^3 et R^4.

❸ Soit P_A l'opérateur linéaire qui projette orthogonalement l'espace E_4 sur $\operatorname{Im} A$; construire la matrice, notée aussi P_A, associée à cet opérateur et relative à la base canonique de R^4;

- Calculer les matrices $A^+ A$ et AA^+.

❹ On considère la fonction *f* de E_3 dans *R* définie par $f(x) = < Ax - b, Ax - b >_4$, où *b* est un point fixé de E_4. Montrer que cette fonction est différentiable sur E_3.

- On désignera par $A^{'}$ aussi bien l'opérateur linéaire transposé de l'opérateur A que sa matrice associée relativement aux bases canoniques de R^4 et R^3, montrer que la différentielle de la fonction *f* en un point quelconque *x* de E_3 est l'application linéaire de E_3 dans *R* définie par : $h \mapsto 2 < A^{'} Ax - A^{'} b, h >_3$

- Montrer que le système linéaire en *x* défini par $A^{'} Ax = A^{'} b$ admet une unique solution $\bar{x}$. En déduire que la fonction *f* admet, sur E_3, un minimum unique au point $\bar{x}$. Déterminer la matrice donnant $\bar{x}$ en fonction de *b*.

- Que conclure ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN
AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Les deux exercices sont indépendants. Aucun document n'est permis. Calculatrice élémentaire permise.

EXERCICE n° 1

Soit $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ la fonction $f(x) = |\sin x|$.

a) La fonction f, est-elle continue ? Est-elle dérivable ? Quelle est sa plus petite période ?

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable en $\pi/2$. Soit $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - \frac{\pi}{2})^k$ la série de Taylor de f en $\pi/2$. Calculer ses coefficients $c_0, c_1, \ldots$. Déterminer le rayon de convergence de la série $T(x)$. Déterminer le plus grand intervalle I de IR contenant $\pi/2$, tel que $T(x)$ converge en chaque point x de I vers $f(x)$.

c) Soit $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ la série de Fourier de f. Calculer ses coefficients $a_0, a_1, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$.

d) Soient $T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} c_k (x - \frac{\pi}{2})^k$ et $F_4(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{4} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ les séries tronquées à l'ordre 4. Calculer $T_4(\pi/4)$ et $F_4(\pi/4)$. Quelle valeur est plus proche de $f(\pi/4)$?

EXERCICE n° 2

Rappelons le *théorème du point fixe* :

Soit $I \subset \mathrm{IR}$ un intervalle fermé et $f : I \to \mathrm{IR}$ une fonction dérivable avec $f(I) \subset I$. On suppose qu'il existe un réel $q < 1$ tel que $|f'(x)| \leq q$ pour tout $x \in I$. Alors il existe une unique solution $\xi \in I$ de l'équation $f(x) = x$ et pour tout $x_0 \in I$ la suite $x_n = f(x_{n-1}),\ n \geq 1$, converge vers ξ. En plus on a la majoration

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Nous admettons ce théorème et allons l'appliquer pour calculer une approximation du maximum de la fonction

$$F : \mathrm{IR}_+^* \to \mathrm{IR}, t \mapsto t^{-5}\left(e^{1/t} - 1\right)^{-1}.$$

❶ Calculer $\lim_{t \to 0^+} F(t)$, $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ et prouver que F possède un maximum.

❷ Esquisser le graphe de F sur l'intervalle]0,1]. (On prendra 10 cm comme unité dans la direction horizontale et 1 cm comme unité dans la direction verticale). En déduire un maximum à une précision de $\pm 5 \times 10^{-2}$ près.

❸ Prouver que, si t est maximum de F alors $5t(e^{\frac{1}{t}} - 1) - e^{\frac{1}{t}} = 0$.

❹ Soit $f(x) = 5(1 - e^{-x})$. Montrer que, avec la substitution $t = x^{-1}$, l'équation $5t(e^{\frac{1}{t}} - 1) - e^{\frac{1}{t}} = 0,\ t > 0$, est équivalente à $f(x) = x$, $x > 0$.

❺ Prouver qu'il existe une unique solution $\xi \in [4,5]$ de $f(x) = x$.

❻ Montrer que $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $\mathrm{IR}_+^* - [4,5]$.

❼ Déduire que F possède un unique maximum τ.

❽ Calculer ξ avec une précision de 10^{-6}. En déduire τ avec une précision de 10^{-7}.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN
AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 2 HEURES

Cette épreuve a pour objet de faire apparaître l'aptitude des candidats à discerner les idées essentielles et à en présenter un exposé synthétique, sans discussion ni commentaire.

Les candidats ne doivent pas seulement découper et regrouper les phrases jugées les plus significatives ; ils doivent repenser ce texte et le résumer en usant d'un style personnel. Le texte résumé doit pouvoir être compris par tout lecteur ignorant le texte original.

Résumer en 250 mots au maximum le texte suivant de Georges Corm publié dans le Monde Diplomatique en septembre 1983.

✶ ✶ ✶

Une fructueuse renégociation des dettes

Les difficultés financières des pays en voie de développement continuent d'agiter la communauté bancaire internationale. Les explications de la crise, les remèdes à y apporter sous forme de plans divers fournissent une abondante matière à la presse économique internationale, cependant que les nouvelles des deux plus grands débiteurs en difficulté, le Brésil et le Mexique, sont suivies avec angoisse par les gouvernements occidentaux et les grandes banques créditrices.

Jusqu'à récemment, les analyses d'inspiration libérale ont nettement dominé le sujet. Dans cette optique, moratoires et renégociations de dettes des grands débiteurs du tiers-monde, en particulier ceux d'Amérique latine, ne témoignent pas d'une crise structurelle frappant le modèle de développement façonné par l'ordre économique international, dominé par les grands pays industrialisés. Les cessations de paiement qui affectent le système bancaire et financier mondial ne seraient que le résultat d'une crise de liquidités passagère, résultant de la déflation et de la contraction affectant l'économie des pays industrialisés, et donc déprimant le commerce international. La stagnation des échanges et la chute du prix des matières premières, résultat de la dépression des économies occidentales, sont responsables, dans le cadre de cette analyse, du manque passager de devises qui a amené une vingtaine de pays du tiers-monde à ne plus pouvoir assurer le service de leur dette extérieure[1]. Tout au plus, certains, aux Etats-Unis vont jusqu'à dénoncer l'imprudence des grandes banques internationales, en particulier les banques américaines, pour avoir prêté de façon irréfléchie des sommes aussi importantes à des pays encore suffisamment développés. Une mise au pas de la communauté bancaire sur le tiers-monde, un rôle accru pour le Fonds monétaire (F.M.I) finalement doté de ressources plus adéquates, ainsi que des financements intérimaires par la Banque des règlements internationaux (B.R.I.) : voici, dans l'optique libérale, des remèdes plus que suffisants qui vont permettre d'assurer une soudure harmonieuse en attendant la reprise générale de l'économie internationale; celle-ci pointe à l'horizon puisque la conjoncture américaine est déjà en nette amélioration.

En prime de ces analyses, de nombreux banquiers ou financiers ont proposé des " plans " pour résoudre le problème de la dette du tiers-monde (Zombanakis, Laulan, Rohatyn, Mackworth-Young, Nord Lever, etc.). La plupart de ces plans ne sont en réalité qu'un catalogue de mesures techniques plus ou moins réalistes visant à faire supporter le poids des dettes du tiers-monde par le plus grand nombre possible d'organismes, de façon à alléger le fardeau qui pèse actuellement sur les grandes banques commerciales des pays occidentaux. Il s'agirait, en fait, d'assurer une meilleure répartition des risques, en rendant attrayante, par divers procédés impliquant l'intervention accrue du F.M.I. ou la création de nouveaux organismes, la négociation de titres représentatifs des dettes contractées par les pays du tiers-monde auprès des banques commerciales.

[1] Il s'agit principalement du Brésil, du Mexique, de l'Argentine, du Chili, du Pérou, du Nicaragua, du Costa-Rica, de la Bolivie, de Cuba, du Nigéria, du Vénézuela, de la Yougoslavie, de la Jamaïque, de la République Dominicaine, de Madagascar, etc...

Ainsi, toute banque désirant se débarrasser d'au moins une partie de ses engagements sur des pays en difficulté pourrait trouver un acquéreur; de la sorte, pensent les auteurs de ces " plans " les banques, assurées de trouver une possibilité de négociation ou d'escompte de ces créances qui brûlent aujourd'hui les doigts, pourraient continuer de prêter au tiers-monde, soit pour refinancer ses dettes extérieures, soit pour en contracter de nouvelles. Ainsi serait apportée une contribution " fondamentale " à la reprise du commerce international qui souffre aujourd'hui non seulement de la dépression des économies occidentales, mais de la réduction drastique des importations du tiers-monde du fait des difficultés financières que connaissent la plupart des gros consommateurs de produits et d'équipements occidentaux.

Une dangereuse contradiction

Point de souci métaphysique, comme on le voit, dans toute cette approche. Ni la qualité de la croissance, ni celle de l'ordre économique international ne sont en cause. Tout n'est que conjoncture et tout peut se traiter par la technique financière et bancaire. Au passage, quelques mauvais esprits, non point chez les banquiers, relèveront qu'il y a malgré tout une contradiction majeure entre la nécessité d'une reprise vigoureuse du commerce international pour alléger le problème de la dette du tiers-monde et les programmes de déflation drastique qu'impose le F.M.I. aux débiteurs en difficulté, programmes qui peuvent de plus menacer la stabilité politique de ces pays, grands débiteurs et le plus souvent alliés privilégiés de grandes puissances libérales[2].

En réalité. Il va de soi que la dette des pays du tiers-monde (environ 700 milliards de dollars, dont 200 milliards immobilisés dans des moratoires partiels ou totaux) a pris une ampleur telle que les problèmes posés par sa gestion ne sont ni conjoncturels ni purement techniques. Toutefois, en dehors de l'appel radical et peu réaliste que l'on entend parfois en faveur d'un moratoire généralisé et volontaire de leurs dettes que les pays du tiers-monde mettraient en œuvre collectivement à l'encontre des pays industrialisés[3], il n'existe actuellement aucune vision de ce que pourrait être un aménagement rationnel des relations financières internationales, et en particulier entre le Nord et le Sud. Cette constatation ne peut cependant étonner outre mesure, quand on connaît la situation financière des grands pays occidentaux et en particulier celle des Etats-Unis où le niveau de la dette interne dépasse 7 000

---

[2] " Ce qui est pire, affirme un professeur de droit de l'université de Californie du Sud, le F.M.I. réclame une réduction dans les services sociaux comme moyen pour ces pays de déprimer leurs économies. Ceci est normalement répugnant et politiquement dangereux. Le problème essentiel d'un pays qui ne peut pas faire face à ses engagements est qu'il n'est pas assez riche. Il est ridicule de vouloir " l'aider " en le rendant plus " pauvre ". (Voir W. David Slawson, The Fund's Priorities are Reserved, article dans le Los Angeles Times, reproduit dans l'International Herald Tribune du 15 juillet 1983.)

[3] On peut citer à cet égard un appel pour un moratoire global de tous les pays d'Amérique Latine par la conférence sur la pensée politique en Amérique Latine, tenue à Caracas à l'occasion du bicentenaire de la naissance de Simon Bolivar.

milliards de dollars et où le déficit annuel du budget fédéral américain pèse lourdement sur les taux d'intérêt. Même sur le plan de l'endettement, il n'est pas inutile de rappeler que les pays de l'O.C.D.E. et leurs sociétés transnationales ont emprunté au cours des années 1980-1982 l'équivalent de 306.6 milliards de dollars, soit exactement le double de l'endettement des pays du tiers-monde au cours de ces mêmes années (153.7 milliards de dollars)[4].

Certes, les pays industrialisés ont des structures économiques et sociales autrement plus solides et, en conséquence, des capacités d'adaptation bien plus effectives économique mondial est caractérisé internationales - dont la plus grande part ne revient certainement pas au tiers-monde. Il était cependant normal que ce dernier, maillon faible de la chaîne, fût la principale victime de la crise actuelle, aux côtés toutefois de nombreuses grandes entreprises industrielles des pays développés, sans parler de certaines banques locales et des caisses d'épargne qui ont connu aux Etats-Unis les plus grandes difficultés.

Les activités de crédit, en particulier sur le plan international, constituent cependant de telles sources de profit à différents échelons, et sont à ce point un pilier fondamental du capitalisme contemporain (outre le fait qu'elles ont atteint des montants hors de toute proportion), que la solution qui s'impose consiste bien à continuer comme auparavant. Au demeurant, les renégociations de dettes avec les grands débiteurs du tiers-monde en difficulté sont des opérations d'une rentabilité extrêmement élevée pour les banques créancières. Elles portent d'une part sur des durées très limitées (cinq à sept ans au maximum) ; elles entraînent d'autre part le paiement de commissions bancaires très substantielles ; enfin et surtout, elles amènent le débiteur à payer des intérêts beaucoup plus élevés que sur les anciens crédits.

Ainsi, pour les dettes en dollars renégociées au cours des derniers mois, la moyenne des marges appliquées au-dessus d'un taux d'intérêt sur les dépôts en eurodollars à six mois (Libor) est de 2 % alors que, entre 1977 et 1982, du fait d'une concurrence accrue entre les grandes banques internationales disposant de surplus considérables de liquidités, cette marge était tombée pour la plupart des emprunteurs du tiers-monde à un niveau compris entre 0.5 % et 1 %. Une demande de moratoire avec renégociation de dettes est donc aujourd'hui une opération qui augmente considérablement les profits des banques créancières; probablement si bien que l'on en vient à oublier que les termes de ces rééchelonnements de dettes sont tellement défavorables aux pays débiteurs qu'ils risquent de se trouver à nouveau, aux premières échéances des emprunts renégociés, en état de cessation de paiement.

En fait, il apparaît désormais probable qu'une bonne partie du principal de ces dettes ne sera jamais remboursée, pas plus d'ailleurs que ne le sont les dettes intérieures considérables de la plupart des Etats. Les banques internationales, assistées du F.M.I., n'ont en effet aujourd'hui d'autre choix que de refinancer en permanence la dette extérieure du tiers-monde[5]. L'opération, qui immobilise des

[4] Chiffres extraits des Statistiques financières de l'O.C.D.E., février 1983, première partie.

[5] le F.M.I. et la B.R.I. ont effectivement obligé toutes les banques créditrices du Brésil à participer aux opérations de rééchelonnement des dettes et surtout à rétablir les lignes de

liquidités, redevient, par le jeu de la renégociation, extrêmement profitable pour les créditeurs. De plus, la tutelle du F.M.I. et des grandes banques occidentales sur la gestion des économies internes des pays du tiers-monde devient de plus en plus effective. Cela, on l'a déjà souligné, ne va pas sans aviver des tensions et créer de nouvelles contradictions dans l'économie mondiale. Ayant atteint l'ampleur que l'on sait (700 milliards de dollars) et se transformant progressivement en dette perpétuelle à l'instar des dettes étatiques internes, la dette extérieure du tiers-monde devient un élément central des rapports Nord-Sud, au profit exclusif des pays du Nord.

Au siècle passé déjà, les dettes des pays de l'Amérique Latine, de l'Empire Ottoman, de la Tunisie et de l'Egypte à l'égard de la France et de la Grande-Bretagne avaient fourni le prétexte à l'interventionnisme néocolonial dans les deux premiers cas et directement colonial dans les deux autres. Il est probable qu'au vingtième siècle on n'assistera pas à de nouvelles occupations militaires aux fins de sauvegarde d'intérêts financiers, mais bien plutôt à une banalisation de rééchelonnements de dettes dans des conditions de plus en plus désavantageuses, faute de solutions de rechange, pour les pays débiteurs. En effet, la dépendance multiforme du tiers-monde à l'égard des pays industrialisés, notamment sur les plans alimentaires et technologique, condamne les pays en voie de développement à maintenir des économies ouvertes à l'échange intensif avec le monde industrialisé.

Le pari actuel du libéralisme doctrinaire qui règne en matière d'ordre économique international consiste à ne voir dans le phénomène de l'endettement sous tous ses aspects et à tous les niveaux qu'une crise conjoncturelle que la relance de l'économie mondiale hors de la récession présente[6]. Il est d'ailleurs possible, si la reprise américaine se confirmait, que les prix des matières premières principales remontent, allégeant momentanément la crise extérieure de paiements qui affecte les grands débiteurs du tiers-monde. Quelques années de répit pourraient ainsi être gagnées sans que les blocages structurels du développement de beaucoup de pays du tiers-monde en soient pour autant résolus.

La seule formule possible

Le phénomène de l'endettement excessif du tiers-monde depuis le milieu du dix-neuvième siècle ne fait que refléter un mode de croissance tronqué et un

---

crédit à court terme accordées à la Banco do Brazil sur le marché monétaire international au même qu'avant l'état de cessation de paiement.

[6] " Au fond, il n'existe pas de problème de la dette des pays en développement en général…
Les traits principaux des tensions économiques et financières présentes sont en principe réversibles " (extraits de l'étude de l'O.C.D.E. intitulée Endettement extérieur des pays en développement, Paris, 1982.)

fonctionnement grinçant de l'économie internationale. Il s'accompagne actuellement d'un phénomène parallèle de surendettement des Etats industrialisés eux-mêmes, localement et internationalement. Seules des réformes financières en profondeur, répondant à des ajustements structurels économiques et sociaux concernés, au Nord comme au Sud, peuvent efficacement porter remède aux dangers que fait courir à l'économie mondiale la situation financière actuelle, non seulement du tiers-monde mais même de certains Etats industrialisés.

Pour ce qui est de la dette des pays en voie de développement, en tout cas, aucune des renégociations accompagnées des programmes de déflation du F.M.I. ne résoudra le problème à long terme. Au contraire, le risque d'aggravation est grand, car les termes de rééchelonnements de dettes ne feront qu'aggraver le poids de leur charge. La seule solution saine et économiquement orthodoxe serait un étalement de ces dettes sur vingt-cinq à trente ans à des taux d'intérêt ne comportant pas les surcharges actuelles par rapport aux taux interbancaires des marchés monétaires. Ce n'est qu'ainsi que la balance des paiements des pays du tiers-monde actuellement surendettés pourrait reprendre un profil normal, et qu'en conséquence les tensions financières internationales présentes pourraient être résorbées.

Nous sommes malheureusement très loin de ce genre de solution, car trop de profits sont tirés pour le moment des difficultés financières du tiers-monde pour y songer sérieusement.

Georges Corm,
Le Monde diplomatique, sept. 83.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Montesquieu (1689-1755) écrivain français en évoquant le bon sens, a écrit ceci ***«j'aime les paysans, ils ne sont pas assez savants pour raisonner de travers».***

Que pensez vous de cette phrase assez provocante ? Est-elle encore d'actualité ?

SUJET n° 2

A l'aide d'exemples précis expliquez ce proverbe EWE du Togo ?

«Un mauvais frère est comme une branche de rônier, on ne peut pas le refuser totalement car il faut penser aux jours de pluie».

SUJET n° 3

Que vous inspire ce proverbe Camerounais ?

«L'amitié est une trace qui disparaît dans le sable si on ne la refait pas sans cesse».

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

❶ Déterminer les valeurs et vecteurs propres de cette matrice A

❷ Montrer que A est semblable à une matrice M de la forme $M = \Delta + J$, où Δ est une matrice diagonale et J vérifie $J^3 = 0$. On précisera la matrice de changement de base.

❸ Calculer A^n pour tout entier naturel n.

❹ On considère la suite $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ définie par $u_0 = (1,1,1)$ et $u_{n+1} = Au_n$. Etudier la convergence de cette suite.

EXERCICE n° 2

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

❶ Calculer le produit $A' A$, où A' désigne la transposée de A.

❷ En déduire les valeurs propres de A.

EXERCICE n° 3

Soit f une application de R^3 dans R^2 définie par :

$$f(x,y,z)=(x+y-z,x-2y)$$

❶ Déterminer le noyau et l'image de f

❷ Déterminer la projection orthogonale p de $u=(1,1,1)$ sur le noyau de f

❸ Déterminer la transformée de u par la rotation vectorielle r d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe Oz

❹ Quelle est la transformée de u par la composée des deux applications précédentes, à savoir $p \circ r$ et $r \circ p$.

EXERCICE n° 4

Soit E l'espace vectoriel des polynômes, à coefficients réels, d'une variable réelle X et de degré inférieur ou égal à $2n$.
On note f l'application définie sur E par : $f(P)=(X^2-1)P'-2(nX+a)P$, où a est un réel non entier et P appartient à E.

❶ Vérifier que f est un endomorphisme de E

❷ Déterminer les valeurs et vecteurs propres f

❸ f est-elle diagonalisable ? f est-elle inversible ?

❹ En déduire que tout polynôme P de E s'écrit sous la forme

$P(X)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$, où α_k est un réel.

EXERCICE n° 5

Soit A une matrice d'ordre (n,p) à coefficients réels, de rang égal à p, où $p<n$. On note D une matrice diagonale d'ordre n et on pose: $M = AA' + D$.

❶ On suppose que D est la matrice nulle. Etudier la diagonalisation de M et montrer que $A = PD_1$ où P est une matrice orthogonale et D_1 une matrice diagonale.

❷ On suppose maintenant que $D = \sigma^2 I_n$. Etudier la diagonalisation de M et montrer que $A = P_1 D_2$ où P_1 est une matrice orthogonale et D_2 une matrice diagonale.

❸ On suppose maintenant que D est définie positive.
Montrer que M est inversible.
Exprimer M^{-1} en fonction de A, A', D et leurs inverses.

EXERCICE n° 6

Soient A et B deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre *n*.

❶ Montrer que la matrice $AB - BA$ n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

❷ On suppose de plus que A et B sont définies positives, montrer que $Tr(AB) > 0$, où Tr désigne la trace de la matrice.

❸ Soit M une matrice antisymétrique réelle.
Montrer que la matrice $I + M$ est inversible.
Montrer que $(I - M)(I + M)^{-1}$ est orthogonale.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

**ABIDJAN
AVRIL 2001**

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Sujet : Vous résumerez en 350 mots au maximum le texte suivant de Philippe Chalmin publié dans la revue du Comité national des conseillers du commerce extérieur en février 2000.

EN HAUSSE TOUTE !…SAUF LES PRODUITS DE L'AGRICULTURE.

Sur les marchés mondiaux, 1999 a été une bien curieuse année, particulièrement contrastée, marquée par une forte reprise de certains produits et la poursuite du marasme en affectant d'autres. Le clivage est d'ailleurs assez simple : d'un côté à la hausse l'énergie, les métaux et les produits industriels, de l'autre à la baisse l'agriculture qu'elle soit tempérée ou tropicale. Il y a donc eu deux conjonctures radicalement différentes en 1999 dans le monde des matières premières qui sont le reflet des tensions économiques mondiales : d'un côté, la fin de la crise et la reprise très vive des économies asiatiques, de l'autre la persistance du malaise agricole dont l'échec des négociations de Seattle est une des illustrations. Cependant, avant d'illustrer ces deux versants de la conjoncture, on ne peut éviter d'évoquer le cas du pétrole, le marché en valeur de loin le plus important dont la violente reprise est, sans conteste, l'événement le plus marquant de 1999.

Dans son dernier numéro de l'année, l'hebdomadaire anglais *The Economist* revenait sur sa " belle " erreur de prévision de l'année 1999. En mars 1999, la " une " annonçait en effet l'effondrement attendu du prix du pétrole et s'aventurait même à prédire un cours de 5 dollars le baril ! Sans aller jusque-là, la plupart des analystes anticipaient des prix moyens pour l'année dans la fourchette de 12 à 14 dollars le baril (pour un prix moyen 1998 du baril de Brent de 12,7 dollars). Notre propre prévision était de 13 dollars. Tout ceci se passait bien sûr avant la réunion de l'OPEP du 22 mars 1999. On connaît la suite : le pétrole termine 1999 autour de 26 dollars le baril, soit près de trois fois le point le plus bas atteint en février. Par l'importance de ce retournement peu ou pas anticipé, le pétrole aura été la " star " incontestée de l'année. Avec un peu de recul, la hausse s'explique assez bien, quoique son ampleur continue de surprendre : l'élément déclencheur en a été bien entendu la décision prise le 22 mars par les membres de l' OPEP et quelques-uns des principaux " nopeps ". Au total, ce sont plus de 2 millions de barils/jour (bj) qui devraient être retirés du marché dont 1,7 millions de bj pour les seuls membres de l'OPEP (585 000 bj pour l'Arabie Saoudite, 264 000 bj pour l'Iran). Depuis sa malheureuse décision de novembre 1997 d'augmentation de son quota (le baril valait alors 20 dollars), l'OPEP avait multiplié réunions et engagements sans parvenir à enrayer la chute des cours qui avaient même frôlé la barre des 9 dollars en décembre 1998 et étaient encore inférieurs à 10 dollars en février 1999. Même au lendemain de la décision de Vienne, si l'on ne parlait plus de cours de 5 dollars, les analystes affichaient un scepticisme certain et révisaient leurs prévisions d'un ou deux dollars à peine : la Banque mondiale, par exemple, anticipait au début de mai un prix moyen 1999 de 14, 5 dollars le baril (et de 16,5 dollars pour 2000). D'ailleurs, après une première réaction positive, les marchés rechutèrent brutalement en mai. Ce n'était là, en fait, qu'un repli technique puisque du début juin à la fin de l'année la hausse a été pratiquement continue, le baril passant de 15 à 26 dollars.

Un temps, on put penser que le déclenchement de la guerre au Kosovo avait un impact psychologique sur le marché, le pétrole remplaçant en quelque sorte l'or comme valeur refuge. Mais la guerre terminée, il fallut bien convenir que la hausse se poursuivait et en venir alors un peu aux fondamentaux.

Absence de défection des pays producteurs La première surprise fut que les pays producteurs, pour une fois, ont tenu leurs engagements. Il est vrai que la situation devenait pour eux dramatique : de janvier 1998 à mars 1999, les pays membres de l'OPEP ont perdu 82 milliards de dollars de manque à gagner. Ce n'était plus le moment de tricher, et comme bien souvent la solidarité est née de la misère, avec l'aide bienveillante des Etats-Unis, directement intéressés en tant que producteurs et gardiens de l'ordre international au Proche-Orient, à ce que le marasme des prix ne dure pas trop.

Dès avril 1999, l'Agence internationale de l'énergie (AIE) calculait un taux de réalisation des engagements de réduction des membres de l'OPEP de 83 %, soit d'un mois sur l'autre une diminution de 1,5 millions de bj de l'offre de l'organisation. Par la suite, le taux de réalisation de l'OPEP a évolué selon les mois entre 85 et 95 %. Même si l'on peut estimer que la Russie n'a pas tenu son modeste engagement (100 000 bj) et a même augmenté ses exportations, ce sont 1,8 à 2 millions de bj qui ont en quelque semaines disparu des bilans de l'offre. Ajoutons à cela, fin novembre, le retrait temporaire de l'Irak et nous avons une des explications de la tension du marché à la fin de 1999.

Une demande plus soutenue Mais la deuxième surprise est venue de la demande. Début 1999, celle-ci, d'après l'AIE, était inférieure à 74 millions de bj au niveau mondial. La remarquable santé des économies occidentales, et surtout la fin de la crise en Asie, se sont traduites par une forte poussée qui amène l'AIE à anticiper pour le premier trimestre 2000 une demande moyenne de 78 millions de bj, le gros de la consommation supplémentaire se trouvant en Asie.

Dès lors, l'arithmétique est simple : à peu près 2 millions de bj de production en moins et une demande qui aura progressé sur l'année de 3 millions de bj environ. Cela fait un mouvement de quelque 5 millions de bj à comparer à un excédent de 1,5 millions de bj en 1998. La hausse, la flambée même avec le zeste d'excitation propre à un marché aussi sensible et symbolique que celui du pétrole, devenaient évidentes, tellement évidentes que personne ne les avait anticipées. Où allons-nous maintenant ? Un premier constat s'impose : l'absence quasi totale de réaction inflationniste. Le pétrole a perdu de son pouvoir maléfique sur les économies ou du moins, en un temps de baisse des prix industriels et des services, le doublement du prix du baril est presque passé inaperçu. Cela veut donc dire que les autorités monétaires, surtout aux Etats-Unis, peuvent rester sans inquiétude et se réjouir au contraire de l'impact favorable de la hausse du pétrole sur l'humeur de l'électeur du Texas, ce qui en année électorale a son importance. En 2000, les Etats-Unis ne chercheront donc pas à jouer la baisse du prix du pétrole. La demande devant rester soutenue, tout dépendra de la stratégie de l'OPEP lors de sa prochaine réunion de mars 2000.

Les réductions de quotas sont en effet valables un an jusqu'au 22 mars. La hausse des prix a incontestablement cimenté la cohésion de l'organisation. Son intérêt à moyen terme est de " gérer " le prix à des niveaux moins tendus, la fourchette idéale restant celle des 15/20 dollars le baril qui limite l'intérêt de projets comme les pétroles de la Caspienne dont on sait l'importance des coûts logistiques.

Notre prévision 2000 (20 dollars le baril de Brent) intègre ce scénario raisonnable qui serait optimal pour les producteurs. Mais on peut avoir aussi une vision plus chaotique de prix tendus jusqu'à 30 dollars le baril, impliquant par la suite une rechute encore plus brutale. L'OPEP a une chance de prendre la main sur le marché et de gérer sa position de manière optimale à moyen terme. Saura-t-elle le faire, c'est là l'une des grandes interrogations sur les marchés mondiaux pour l'an 2000.

EUPHORIES INDUSTRIELLES

De manière moins spectaculaire que pour le pétrole, 1999 aura par ailleurs été marquée par le retournement des marchés des biens intermédiaires destinés aux filières industrielles : métaux non ferreux, acier, pâte à papier, chimie lourde, semi-conducteurs et, dans une moindre mesure, même caoutchouc et laine. Pour la plupart d'entre eux, la période charnière s'est située vers mai-juin 1999, ce qui correspond exactement à la perception de la fin de la crise économique qui, née en Thaïlande en juillet 1997, a ravagé pendant deux ans l'Asie et l'Amérique latine. En réalité, le creux de la crise fut atteint – en Asie au moins - en 1998, mais l'accélération de la reprise est éloquente à partir du deuxième trimestre 1999, se traduisant par une augmentation spectaculaire de la demande qui a rapidement asséché les surcapacités existantes, puis vers la fin de l'année augmenté les besoins à l'importation.

Plusieurs produits illustrent parfaitement ce sursaut de la demande : il s’agit en premier lieu du nickel, dont le prix est passé en quelques mois de 4 500 à 8 000 dollars la tonne sous le choc d’une forte croissance de la demande d’acier inoxydable. Plus spectaculaire encore, la flambée des grandes chimiques, dont le prix a doublé sous l’effet certes de la hausse du pétrole, mais surtout de la demande asiatique. Quant aux semi-conducteurs, dont la surproduction dès 1996 avait joué un rôle non négligeable dans le déclenchement de la crise asiatique de 1997, leur marché s’est brutalement retourné durant l’été grâce au développement des nouvelles applications de la téléphonie mobile. Sur le marché américain des ferrailles, c’est là aussi la demande asiatique (coréenne en l’occurrence) qui a provoqué le réveil du marché à partir de l’été. Il en est de même pour les produits de la pâte et du papier pour lesquels est même apparue une demande indienne. On pourrait citer aussi le cuir, avec la demande des tanneries asiatiques, et le caoutchouc.

C’est donc l’intensité de la demande qui explique cette inversion de tendance de 1999. Il faut aussi bien sûr tenir compte des réductions de production liées bien souvent aux restructurations en cours chez les grands acteurs internationaux. Qu’il s’agisse de l’aluminium et du cuivre, du papier et des semi-conducteurs, le mouvement de fusions/acquisitions s’est poursuivi à l’échelle mondiale et s’est traduit par nombre de fermetures de mines et d’usines. Enfin, tant la Chine que la Russie ont moins pesé sur les marchés, les incertitudes russes ayant même provoqué la flambée des prix du rhodium et du palladium (mais dans ce dernier cas, les besoins de l’industrie automobile pour les pots catalytiques ont joué un rôle essentiel).

Ce mouvement de reprise a été bien sûr fort inégal suivant les filières et les produits : parmi les métaux, le nickel, l’aluminium et le zinc en ont été les principaux bénéficiaires alors que les prix du plomb ne bougeaient guère et que le réveil du marché de l’étain en fin d’année était surtout dû à l’activité des fonds au LME (London Metal Exchange). Quant au cuivre, il est de tous les produits de base celui pour lequel le niveau d’investissement sur la dernière décennie a été le plus soutenu et dont le prix est resté bien au-dessus de la plupart des coûts de production. Ailleurs, la hausse se cantonne encore à l’aval des filières : ainsi, les ferrailles précèdent l’acier qui s’est surtout illustré en 1999 par le nombre record de procédures antidumping qui ont été déposées presque dans tous les pays du monde, à commencer par les Etats-Unis et l’Europe. De même, la hausse de la pâte à papier ne s’est-elle pas encore transmise à toutes les " sortes " de papier. Le marché de l’alumine (dont le prix est passé de 150 à 380 dollars la tonne) précède aussi celui de l’aluminium. Cela explique nos prévisions optimistes pour l’an 2000. Le mouvement de hausse est en effet à peine entamé et devrait se poursuivre dans un climat conjoncturel partout favorable (même peut-être au Japon…), se traduisant par une croissance soutenue de la demande : + 3,5 % pour l’aluminium, + 3,7 % pour le zinc, + 2,6 % pour l’étain par exemple. La hausse est à peu près partout à l’ordre du jour, sauf dans certains cas où l’on parlera plutôt de consolidation. Sur nombre de marché (pâte à papier, nickel), la principale crainte est que la flambée ne soit trop vive, la hausse trop violente et que tout ceci ne se termine comme une bulle spéculative. Voilà en tout cas un optimisme qui tranche avec le pessimisme agricole.

MARASMES AGRICOLES ET POLITIQUES

Qu'il est loin le temps où l'on célébrait, dans l'euphorie de prix mondiaux soutenus, la fin des politiques agricoles.1995-1997 fut une période euphorique sur les marchés alimentaires et les réformes tant de la politique américaine (le Fair Act de 1996) que la politique agricole commune (le projet d'Agenda 2000) permettaient de penser que l'époque du dirigisme politique en matière agricole était terminée. Avec plus ou moins de bonheur, on s'orientait vers un découplage des aides à l'agriculture, celles-ci n'étant plus liées directement à la production, mais rémunérant en fait les autres fonctions de l'agriculture vis-à-vis de la société, un concept développé sinon appliqué en Europe sous le nom de " multifoncionnalité ". C'est dans ce sens qu'allaient nombre de travaux d'études et de recherches et même quelques premières décisions législatives comme la loi d'orientation agricole française de 1999. Mais ce qui était possible en période de cours mondiaux soutenus est devenu une douce utopie lorsque l'effondrement des prix a commencé à peser sur un monde agricole qui, s'il a perdu beaucoup de son influence politique directe, demeure un enjeu électoral non négligeable.

La chute des cours à partir de 1997 était liée à deux facteurs : d'une part, la fin du phénomène climatique El Niño, et un rebond des productions mondiales, d'autre part la désolvabilisation de quelques-uns des grands débouchés agricoles en Asie, en Russie et même en Amérique latine. Du jour au lendemain, la Russie se mit à demander de l'aide alimentaire, l'Indonésie et même la Corée du Sud des crédits d'achat. De 250 dollars la tonne au plus haut en 1996, les prix du blé chutèrent à moins de 100 dollars.

Les marchés avaient déjà connu des périodes de ce type, mais c'était la première fois depuis 1933 que les agriculteurs américains subissaient de plein fouet la rigueur des prix. Jusque-là, ils avaient bénéficié de *deficiency payments*, c'est-à-dire de la différence entre le prix d'objectif et la réalité du marché. Certes, ils bénéficient maintenant d'une aide directe forfaitaire et ils n'ont plus à se soumettre aux contraintes du gel des terres. Mais la chute des prix des céréales, du soja, du coton ou de la viande porcine trouva un écho favorable dans le monde politique, surtout à une période où la Maison Blanche était fragilisée par l'affaire Lewinski et où les Républicains du Congrès, traditionnellement opposés aux cadeaux agricoles, étaient eux-mêmes affaiblis par la chute de Newt Gingricht. Dès 1998, ce sont 12 milliards de dollars qui allèrent en paiement direct à l'agriculture, près du double de ce qui était prévu initialement. Et en 1999, on doubla encore la mise à 22,5 milliards de dollars. Une de ces aides au moins a eu un effet très négatif sur les marchés : il s'agit du *loan deficiency payment* (LDP). La loi agricole de 1996 avait en effet conservé des prix d'intervention appelés *loan rate* et qui, depuis des décennies, jouaient un rôle de plancher pour le marché de Chicago et donc pour marché mondial. Mais au lieu de déclencher à ces niveaux des stockages publics, on avait prévu de payer directement la différence sous forme de LDP. En 1999, il y a eu 6,6 milliards de dollars de paiements sous forme de LDP et les prix ont crevé les planchers des *loan rate*, en particulier pour le maïs et le soja. Des mécanismes de même ordre ont eu un effet tout aussi dépressif sur les marchés d'exportation du riz et du coton.

Le facteur politique américain a été incontestablement l'élément dépressif des marchés d'agriculture tempérée en 1999. Jusque-là, les Etats-Unis avaient toujours joué un rôle modérateur. Le changement, dans un contexte de surenchère politique à l'approche d'échéances électorales majeures et incertaines, n'en a été que plus traumatisant pour des marchés qui ont perdu un de leurs repères.

En face des Etats-Unis, l'Europe en a profité pour faire de l'immobilisme. La nouvelle réforme de la PAC (Politique Agricole Commune) d'avril 1999 s'est certes prononcée pour la baisse des prix d'intervention des céréales et de la viande bovine (à compter du 1er juillet 2000), mais celle-ci est compensée par un système complexe d'aides directes. L'Europe a par ailleurs joué de l'outil classique de l'aide alimentaire pour désengorger certains de ses marchés en crise et exporter ses problèmes. Si la guerre agricole n'est pas ouvertement déclenchée entre Europe et Etats-Unis, on est en pleine phase d'escarmouches sur nombre de marchés, ce qui bien entendu pèse sur les prix. Ceux-ci ont été en 1999 tous orientés à la baisse, les chutes les plus fortes étant à mettre au compte du soja, et surtout de la composante huile qui a entraîné dans sa baisse tous les oléagineux, du coton aux céréales secondaires. Les marchés de viandes (porcine et de volailles) ont aussi souffert, la seule exception étant la viande bovine dans la zone " Pacifique " (c'est-à-dire le flux Etats-Unis et Océanie vers Asie) qui a bénéficié dans les derniers mois de 1999 de la reprise de la demande asiatique.

L'échec de Seattle n'est pas dû à l'agriculture, quoiqu'on ait voulu le faire croire. Il est en effet très probable qu'avec une nuit de négociations supplémentaire, Américains, groupe de Cairns(*). et Européens seraient parvenus à un texte suffisamment vague et ambigu pour satisfaire tout le monde. Mais en l'absence d'accord, et donc de négociations, 1999 risque fort de ressembler à cette année 2000 qui nous attend : des aides américaines au moins aussi importantes dans un climat envenimé par quelques conflits bien médiatisés avec l'Europe et donc des prix toujours aussi déprimés sauf si quelque aléa météorologique ne venait bouleverser la donne. Mais au vu de l'état des stocks chez les grands exportateurs, il faudrait autre chose qu'une simple sécheresse aux Etats-Unis (un classique sur le marché des grains) pour bouleverser des fondamentaux aussi déprimés. Les prix agricoles devraient donc en l'an 2000 rester pour l'essentiel à leurs faibles niveaux actuels, pour les plus optimistes n'attendant la reprise qu'en 2001 (pour le coton par exemple). Autrefois, on disait aux Etats-Unis : farm the programs, not the products ("cultivez les programmes publics et non les produits"). Convenons que la prévision en matière de politique agricole est toujours aussi aléatoire.

Philippe Chalmin (CCE International)

(*) Créé en 1986 à l'initiative de l'Australie, le groupe de Cairns regroupe une quinzaine de pays exportateurs de produits agricoles

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 HEURES

Calculatrice élémentaire permise.
Les 7 exercices sont indépendants.

1. Considérons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles
$$M_1 = \{(n, n^2, n^3) : n = 0, 1, 2, \ldots\},$$
$$M_2 = \{(n+1, 2n+1, 3n+1) : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$
Soit $V_k, k = 1, 2$, le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant M_k. Calculer la dimension de V_1 et celle de V_2.

2. Une entreprise prend un prêt de 100 000 FF pour un taux d'intérêt de 4%.
Le prêt est d'une durée de 5 ans et le montant du remboursement annuel est constant. Quel est ce montant ?

3. Soient c et a_0 deux réels strictement positifs. On définit une suite par récurrence :
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n}, n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer sa limite.

4. Soit D l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geq 0, y \geq 0$ et $x+y \leq \pi$. On définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$.
   (a) Dessiner l'ensemble D.
   (b) Déterminer tous les minima de f.
   (c) Prouver que f n'a qu'un seul maximum (a, b). Le déterminer et donner la valeur de f en ce point.
   (d) Donner la série de Taylor de f au maximum (a, b) jusqu'à l'ordre 2.

5. La fonction $f(x) = (\sin x \cos x)^{-1}$, est-elle intégrable sur l'intervalle $[\pi/6, \pi/3]$? Si oui, calculer l'intégrale
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}.$$

6. Les limites suivantes existent-elles ? Si oui, donner les valeurs.
   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)}$$
   (b)
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

7. Comment faut-il choisir le rayon r et la hauteur h d'un cylindre de volume donné V pour que sa surface S soit minimale ? (La surface S du cylindre inclut aussi les deux disques en bas et en haut.)

SESSION D' AVRIL 2001

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Les problèmes I et II sont indépendants, ils sont de longueurs équivalentes.

Probleme I

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$. Soit m un réel, on note h_m la fonction définie sur X par $h_m(x) = mx - f(x)$. On note X° l'ensemble des nombres réels m pour lesquels l'ensemble $\{h_m(x), x \in X\}$ est majoré. Lorsque X° est non vide, on associe au couple (X, f) le couple (X°, f°) où f° est une fonction définie sur X° par $f^\circ(m) = \sup\limits_{x \in X}(mx - f(x))$.

1. (a) Montrer que les deux inégalités suivantes sont vraies :

$$\forall x \in X,\ \forall m \in X^\circ,\ f(x) + f^\circ(m) \geq mx$$

$$\forall x \in X,\ f(x) \geq \sup_{m \in X^\circ} (mx - f^\circ(m))$$

   (b) Soient $m_1 \in X^\circ$ et $m_2 \in X^\circ$ tels que $m_1 \leq m_2$, montrer que l'intervalle $[m_1, m_2]$ est inclus dans X°.

   (c) Dans cette question on suppose que $X = [a, b]$ et que f est une fonction définie et continue sur X. Déterminer X° et montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$.

2. On note $X^{\circ\circ} = (X^\circ)^\circ$ et $f^{\circ\circ} = (f^\circ)^\circ$.

   (a) Déterminer (X°, f°) lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$. Dans ce cas, déterminer le couple $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ associé à (X°, f°).

   (b) Quel est l'ensemble X° lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^3}{3}$?

(c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer (X°, f°) puis $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \alpha x - \beta$.

(d) Déterminer (X°, f°) puis $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ lorsque $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.

3. Soient f une fonction définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur une partie Y non vide de $\mathbb{R}$. On notera $(X, f) \leq (Y, g)$ si et seulement si

$$Y \subset X, \ \ \forall x \in Y, \ f(x) \leq g(x).$$

(a) Montrer que si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (Z, h)$ alors $(X, f) \leq (Z, h)$. Montrer que si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (X, f)$ alors $(X, f) = (Y, g)$.

(b) Montrer que $(X, f) \leq (Y, g)$ implique $(Y^\circ, g^\circ) \leq (X^\circ, f^\circ)$ lorsque X° est non vide.

(c) Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^2$. On note $\phi_{m,p}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_{m,p}(x) = mx - p$. Montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$. Pour $m \in X^\circ$ on note φ_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx - f^\circ(m)$. Montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ implique $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. Quelle interprépation géométrique au graphe de la fonction f peut-on donner de ces propriétés?

4. (a) Montrer que pour tout couple (X, f) avec $X \neq \emptyset$ alors $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X, f)$

(b) Montrer que si $X \neq \emptyset$ et $X^\circ \neq \emptyset$ alors $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) = (X^\circ, f^\circ)$

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Notons $X = [-a, a]$. Soit f la fonction définie sur X par $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Déterminer la droite passant par le point $A = (-a, f(-a))$ est tangente en un point A' distinct de A à la courbe représentative de f. Donner les coordonnées de A'. Déterminer X°.

Probleme II

A $n \in \mathbb{N}$, on associe les fonctions y_n et z_n définies, pour $x \in [-1,1]$ par : $y_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $z_n(x) = \sin(n \arccos x)$.

1. (a) Etudier la parité de y_n et z_n suivant la valeur de n. Calculer $y_n(0)$, $z_n(0)$, $y_n(1)$ et $z_n(1)$.

   (b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, y_n et z_n sont dérivables sur $]-1,1[$. Donner l'expression de $y'_n(x)$ en fonction de x et $z_n(x)$, ainsi que l'expression de $z'_n(x)$ en fonction de x et $y_n(x)$.

   (c) les rapports
   $$\frac{\cos(n\theta)-1}{\cos\theta - 1};\ \frac{\sin(n\theta)}{\cos\theta - 1}$$
   ont-ils une limite finie lorsque θ tend vers 0? Etudier la dérivabilité de y_n et z_n aux points $x = 1$ et $x = -1$.

   (d) Calculer les racines des équations $y_n(x) = 0$ et $z_n(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

   Déterminer l'ensemble A_n des valeurs de $x \in [0,1]$ pour lesquelles $y_n(x) \geq 0$ ainsi que l'ensemble B_n des valeurs $x \in [0,1]$ pour lesquelles $z_n(x) \geq 0$.

   Etudier les variations de $y_n(x)$ et $z_n(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[0,1]$.

2. (a) Exprimer $y_0(x)$ et $z_0(x)$ ainsi que $y_1(x)$ et $z_1(x)$ sous une forme ne faisant pas intervenir de fonctions trigonométriques.

   (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2}(x) + y_n(x)$ en fonction de x et $y_{n+1}(x)$, puis $z_{n+2}(x) + z_n(x)$ en fonction de x et $z_{n+1}(x)$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est une fonction polynôme et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :
   $$z_n(x) = \sqrt{1-x^2}\, g_n(x)$$
   où g_n est une fonction polynôme. Préciser les degrés de y_n et g_n.

   (d) Retrouver ces derniers résultats en posant $\arccos x = \theta$ et en utilisant les formules de Moivre.

   (e) Intégrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation différentielle :
   $$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$
   où v est la fonction inconnue et θ la variable. En déduire que y_n et z_n sont deux solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
   $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$
   Donner les solutions générales sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle.

3. Dans la suite du problème on désigne par $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $]-1,1[$.

   (a) Soit n un entier naturel et f la fonction de trois variables réelles x, α, α' définie sur $\mathbb{R}^3$ par

   $$f(x,\alpha,\alpha') = (1-x^2)\alpha' + (2n-1)x\alpha$$

   Montrer que l'application notée F qui a toute fonction $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ associe la fonction $Y(x) = f(x, y(x), y'(x))$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$. Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$ l'équation $F(y) = g$ est une équation différentielle que nous noterons

   $$f(x, y(x), y'(x)) = g.$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle $f(x,y(x),y'(x)) = 0$. En déduire l'existence d'une fonction $u \in \mathrm{Ker}(F)$ telle que $u(0) = 1$. Donner l'expression de $u(x)$ pour $x \in]-1,1[$

   (c) Soit une fonction $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ et $Y = F(y)$ son image par F. Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$ la fonction $Y^{(k)}(x)$ (dérivée k^{ieme} de Y) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire à exprimer des dérivées $y^{(k+1)}(x), y^{(k)}(x), y^{(k-1)}(x)$ dont les coefficients dépendent de x. En déduire que pour tout entier $p \geq 1$

   $$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2p+1)$$

   et donner la valeur de $u^{(2p-1)}(0)$. Préciser la valeur de $u^{(2n)}(0)$.

   (d) Intégrer sur l'intervalle $]-1,1[$ l'équation différentielle $f(x,y,y') = \lambda y$ où λ est une constante. Déterminer les valeurs de λ telles que l'équation différentielle admet des solutions y qui sont des fonctions polynômes. Expliciter, pour chacune des valeurs de λ trouvées, le polynôme solution P_λ tel que $P_\lambda(0) = 1$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Qu'a voulu exprimer l'ancien Président du Sénégal Léopold Sédar SENGHOR dans cette phrase :

«Les hommes doivent s'accepter différents et se vouloir complémentaires». En 2002 cette phrase est-elle toujours d'actualité ?

SUJET n° 2

Est ce que vous êtes d'accord avec cette phrase de Jean Rostand biologiste français (1894-1977) ? Donnez des exemples précis.

«La faiblesse des démocraties, c'est qu'il leur faille, trop souvent se renier pour survivre».

SUJET n° 3

Oscar Wilde écrivain anglais (1854-1900) a écrit cette phrase :

«Les tragédies des autres sont toujours d'une banalité désespérante». Qu'a t-il voulu exprimer ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Soient deux nombres réels a et b strictement positifs fixés. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a+k}{b+k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

❶ Simplifier l'expression de u_n dans le cas $b = a+1$.

En déduire que, si $b \leq a+1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n{}^2$ diverge.

On suppose dans toute la suite que $b > a+1$

❷ Montrer que pour tout entier n, on a : $(b-a-1)\,S_n = a-(n+1+b)\,u_{n+1}$

❸ En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. On note S sa somme.

❹ Montrer que la suite $(n+b)u_n$ converge, puis que sa limite est nécessairement nulle. En déduire la valeur de S .

EXERCICE n° 2

Soit f une fonction réelle définie continue sur $[0,1]$. On pose : $a_n = \int_0^1 x^n\, f(x)\,dx$, pour tout entier naturel n. On suppose $a_n = 0$ pour tout entier naturel n.
On veut montrer que f est alors identiquement nulle sur $[0,1]$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant f non nulle.

❶ Montrer qu'il reste un intervalle fermé $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ sur lequel f garde un signe constant sans s'annuler.

On supposera dans la suite que f est strictement positive sur $[\alpha,\beta]$.

❷ Montrer qu'il existe un polynôme P défini sur l'ensemble des nombres réels tel que :

$$\begin{cases} P(x)\geq 0 & \forall\, x\in[0,1] \\ P(x)>1 & \forall\, x\in\left]\alpha,\beta\right[\\ P(x)<1 & \forall\, x\notin[\alpha,\beta] \end{cases}$$

❸ Montrer que ce polynôme vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\,(P(x))^n\,dx = +\infty$

❹ Montrer directement que : $\int_0^1 f(x)\,(P(x))^n\,dx = 0$ pour tout entier naturel n. Conclure.

EXERCICE n° 3

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction réelle f_n par la relation $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$

❶ Soit $a \in \left]0,1\right[$ un réel fixé. Montrer que , pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est dérivable et que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge normalement sur l'intervalle $[-a,a]$.

❷ En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$ vers une fonction f de classe C^1 sur $]-1,1[$, et que f' est la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

❸ Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

❹ En déduire que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x\cos x}\right)$

EXERCICE n° 4

Les deux questions sont indépendantes. R désigne l'ensemble des nombres réels, R_+^* celui des nombres réels strictement positifs et C^p les fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre p.

❶ Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \lim_{x\to 0} f(x)$ et que, dans un voisinage à droite de zéro, $f''(x) \geq -\frac{k}{x^2}$, où k est une constante. Montrer que $\lim_{x\to 0} x f'(x) = 0$

❷ Soit $f \in C^5(R, R)$ une fonction impaire vérifiant :

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists\, M > 0,\ \forall x \in R,\ \left|f^{5}(x)\right| \leq M$

Montrer que pour tout réel x, $\left|f(x) - \frac{x}{3} f'(x)\right| \leq \lambda M |x|^5$

Déterminer, la meilleure constante possible λ

EXERCICE n° 5

Soit (x_n) une suite réelle monotone telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = l$

❶ Montrer que la suite (x_n) est convergente vers l

❷ Montrer que le résultat n'est plus vrai si la suite n'est pas monotone

EXERCICE n° 6

Soit f une fonction numérique définie sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & si \ \ x \in I - Q \\ \dfrac{p}{p+q+1} & si \ \ x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où p et q sont premiers entre eux, $q > 0$, Q désigne l'ensemble des nombres rationnels et Q^* l'ensemble des nombres rationnels non nuls.

❶ Montrer que f est continue en 0.

❷ Etudier la continuité de f sur $Q^* \cap I$

❸ Etudier la continuité de f sur $I - Q$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN
AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Sujet : Vous résumerez en 150 mots (résumé au 10ème environ) le texte suivant de Jean-Marie Domenach sur le terrorisme. N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

DU TERRORISME

Le «terrorisme», c’est d’abord la guerre des autres. Le mot a été consacré par le vocabulaire de la propagande : *Terroristen*, ainsi les nazis avaient-ils baptisé les francs-tireurs ; *Terror-Angriff* (attaques de terreur) désignait les bombardements alliés sur les villes allemandes. A l’époque, nous avions pourtant la conviction que la véritable terreur était le fait d’une entreprise totalitaire de domination et d’asservissement plutôt que le fait d’actes isolés – si terrifiants fussent-ils – commis au service de la libération des peuples opprimés. De même, les commandos sionistes, il y a vingt cinq ans, étaient «*terroristes*» aux yeux des anglais ; de même aujourd’hui, aux yeux des israéliens, les commandos palestiniens… Il est donc nécessaire de se méfier d’un mot lui-même «piégé», et de se rappeler que les actes violents sont moins graves que les états violents, même s’ils sont plus spectaculaires. Une personne qui meurt dans la rue émeut plus que cent personnes qui meurent chez elles.

De grands Etats puissants et respectés, qui ont des siéges aux institutions internationales, font, sous une forme plus ou moins dissimulée, passer la terreur sur de larges parties de leurs populations. Mais, lorsque des groupes dépourvus d’Etats (Irlandais du Nord , Palestiniens, Noirs américains, etc…) en usent d’une manière qui ne peut-être que sporadique et plus ou moins incontrôlée, l’opinion publique est bouleversée et les condamnations pleuvent. A y bien regarder, c’est un paradoxe car l’usage de la terreur par un Etat constitué, reconnu et donc capable de se faire obéir, est beaucoup plus répréhensible que s’il s’agit de groupes irréguliers, plus ou moins clandestins et par là exposés aux risques d’anarchie et de surenchère qui guettent toutes les résistances. Mais la terreur est proscrite par le droit des gens. Les Etats qui la condamnent lorsqu’elle s’exerce à leurs dépens sont souvent mal fondés à en appeler à un droit international qu’ils ne se font pas faute de bafouer (ainsi Israël qui n’a jamais tenu compte des condamnations et recommandations de l’O.N.U.). C’est pourquoi, si l’on ne se résigne pas à la généralisation du terrorisme, qui conduirait à une sorte de jungle sans arbitrage, il faut en appeler à des arguments politiques et moraux ajustés à la pratique du terrorisme lui-même.

Faut-il tenir le langage de l’efficacité ? «Contrairement à l’illusion dangereuse, de plus en plus répandue dans notre société […] les moyens les plus violents ne sont pas les plus efficaces». Disons plutôt : «ne sont pas toujours les plus efficaces» car il arrive qu’ils le soient : le premier terrorisme du F.L.N. a conduit à l’indépendance de l’Algérie et certains détournements d’avion ont déjà arraché à des dictatures plusieurs centaines de détenus politiques ou d’individus persécutés.

Cependant, si réussies que puissent être de telles actions, elles portent en elles de graves contradictions. Par le système des otages, elles se trouvent en appeler à l'humanité de ceux dont elles dénoncent précisément les pratiques inhumaines. Menées au nom des masses, elles sont exécutées par de petits groupes qui se substituent aux organisations responsables et qui, pour ainsi dire, volent le peuple de son action libératrice et suscitent souvent chez lui, au lieu d'une conscience combative, la gène et même le dégoût. Menées pour un but politique, elles empruntent leurs méthodes aux criminels de droit commun. Avec raison les marxistes se méfient de ces actions anarchiques, toujours au bord de dégénérer en meurtres irresponsables et inutiles, de ces terroristes fascinés et en quelque sorte damné par leur violence. Malraux en a dessiné il y a longtemps l'inoubliable portrait.

Il faut donc modérer et encadrer le plus possible le terrorisme (La Résistance française était arrivée empiriquement à cette conclusion). Lié à une cause et à un peuple par une organisation responsable, limité dans ses objectifs, le terrorisme peut-être à l'avant-garde, l'appel d'une juste cause. Promu au rang d'une activité prioritaire, il tend à se refermer sur lui-même, à déposséder ses auteurs de leurs justifications et ses partisans de leur responsabilité et de leur vigueur. J'ajoute que l'apologie du terrorisme faite par ceux qui n'en prennent pas les risques est toujours ignoble.

Ces considérations éthiques et politiques ne touchent cependant pas le fond, c'est à dire la situation malsaine et ordinairement dissimulée, que révèle la prolifération actuelle du terrorisme. N'oublions pas que la paix mondiale résulte de «l'équilibre de la terreur» même si elle permet un essor inouï de l'industrie et du commerce. On reproche aux terroristes de tuer des non-combattants, mais qu'est-ce que la dissuasion atomique sinon une permanente menace de mort signifiée à des millions de civils. Or c'est précisément cet équilibre de la terreur, maintenant cimenté par la diplomatie et l'économie, qui autorise les plus grandes puissances à bloquer des évolutions qui, de plus en plus, explosent en terrorisme. Un gigantesque mécanisme, trop lourd pour être secoué et trop complexe pour être révisé, assure la tranquillité du désordre établi. Nous le voyons également fonctionner à une échelle réduite à l'intérieur des Etats où il produit des résultats analogues : le recours à des actes de rupture qui revêtent parfois des formes terroristes.

Allons plus loin. On s'indigne de ce que les terroristes – particulièrement les pirates de l'air – s'en prennent à des «innocents». Or il n'y a plus d'innocents en temps de guerre. Y en a-t-il en temps de paix ? Et de quoi sont donc coupables les enfants qui meurent de faim dans certains pays sous-développés ? Bénéficiaires d'un système qui fonde sur la menace permanente du massacre atomique et sur l'exploitation des pauvres son empire et sa prospérité, nous pouvons difficilement prétendre n'en être pas complices. Il est trop commode lorsque ce système est agressé de se réfugier dans la dénonciation vertueuse et les Israéliens ont raison lorsqu'ils constatent que cette indignation est à la mesure de la peur qu'inflige le terrorisme à des nations qui, jusqu'alors, ne se croyaient pas concernées. Oui, un jour ou l'autre, n'importe lequel d'entre nous peut devenir un otage.

L'esprit du temps travaille à diluer la culpabilité individuelle. Personne ne se veut responsable de rien. Mais alors naît une culpabilité collective bien difficile à cerner, comme on le voit à propos des accidents de la route. Peut-être la diffusion du terrorisme aura t-elle l'avantage de nous conduire à un examen de conscience sur notre responsabilité solidaire et politique. Ensuite – car il ne faut pas s'arrêter longtemps à l'accusation – nous devrions considérer que le terrorisme dénonce le blocage généralisé des sociétés et des institutions nationales et internationales. L'hypertrophie technique, comme le montre Jacques Berque, se paye de l'immobilisation et de la réduction des autres facteurs du développement humain. Il faut donc s'employer à assouplir et à diversifier les institutions, de sorte qu'elles puissent traduire les évolutions de la base et se plier à la revendication de ces différences qu'exacerbe la civilisation technique.

Si, demain chacun peut devenir une cible pour les tenants d'une cause qu'il méprise ou qu'il ignore, c'est le signe que nul n'échappe désormais à sa responsabilité à l'égard de l'ordre qui meurt et de celui qu'il est urgent de créer. Le terrorisme n'est pas un résidu de barbarie qu'on puisse évacuer à force de discours vertueux et de mesures policières, mais le symptôme d'un détraquement et d'une injustice essentielle, l'annonce de terreurs et de morts plus absurdes, qu'il reste en notre pouvoir d'éviter.

Jean-Marie Domenach.

SESSION D' AVRIL 2002

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie I

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, appartenant à $M_2(\mathbb{C})$, est hermitienne si et seulement si $M^\star = M$ (par définition $M^\star = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$). On notera Γ l'ensemble des matrices carrées d' ordre deux à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont le déterminant est égal à 1, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ hermitiennes.

1. Prouver que Γ, muni de la multiplication matricielle est un groupe et que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel réel dont une base, notée $\mathcal{B}$, est constituée par les quatre matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

On désignera dans la suite par $t(S), x(S), y(S), z(S)$ les composantes d'une matrice $S \in \mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$S = t(S)I + x(S)X + y(S)Y + z(S)Z.$$

2. Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donner l'expression de $t(S)$ et S^{-1} en fonction de a, b, c, d.

3. Quels que soient α appartenant à Γ et S appartenant à $\mathcal{S}$ montrer que $\alpha S \alpha^\star$ appartient à $\mathcal{S}$.

4. On note T_α l 'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, définie par $T_\alpha(S) = \alpha S \alpha^\star$. Montrer que T_α est un automorphisme de $\mathcal{S}$.

5. On se propose d'étudier, pour une matrice $S \in \mathcal{S}$ fixée, l'équation d'inconnu α :

$$T_\alpha(S) = I \tag{1}$$

   (a) Montrer que, si l'équation (1) a une solution, les conditions suivantes sont nécessairement satisfaites par S

$$\det(S) = 1, t(S) > 0 \tag{2}$$

   (b) Etablir que, si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est solution de (1), on a :

$$(a\ b) S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   Réciproquement, établir que, si ces deux relations (3) sont vérifiées avec $\det(S) = 1$, alors α est solution de (1).

   (c) On associe à la matrice S l'application Q_S de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, définie par :

$$Q_S(v) = (m\ n) S \begin{pmatrix} \overline{m} \\ \overline{n} \end{pmatrix} \quad \text{si } v = (m, n) \in \mathbb{C}^2$$

   Montrer que, si S vérifie les conditions (2), alors pour tout vecteur $v \in \mathbb{C}^2$ on a $Q_S(v) \geq 0$. Montrer que, si S vérifie les conditions (2), alors si $v \in \mathbb{C}^2$ et $Q_S(v) = 0$ on a $v = 0$.

   (d) En déduire que l'équation (1) a des solutions si et seulement si S vérifie les conditions (2).

Partie II

On définit sur $\mathcal{S}$ une forme bilinéaire symétrique, notée $\langle ., . \rangle$ par :

$$\forall S, S' \in \mathcal{S}, \langle S, S' \rangle = t(S)t(S') - x(S)x(S') - y(S)y(S') - z(S)z(S')$$

Dans la suite on dira que S est un vecteur de genre $+$ (Res. de genre $-$) si S vérifie la condition $\langle S, S \rangle = 1$ (Res. $\langle S, S \rangle = -1$). On dira que S est S' sont orthogonaux si $\langle S, S' \rangle = 0$.

1. Que représente le nombre $\langle S, S\rangle$ pour la matrice S?

2. Pour tous $S, S' \in \mathcal{S}$ $\alpha \in \Gamma$ comparer les nombres $\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S')\rangle$ et $\langle S, S'\rangle$.

3. Soit $S_1, S_2, S_3, S_4 \in \mathcal{S}$ deux à deux orthogonaux, et de genre $+$ ou $-$.

   (a) Prouver que le carré du déterminant suivant :

   $$\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}$$

   est égal à 1.

   (b) Les matrices S_1, S_2, S_3, S_4 sont-elles indépendantes?

   (c) Prouver que l'une au moins de ces matrices est de genre $+$.

   (d) Montrer que le déterminant de T_α a une valeur absolue égale à 1 quel que soit la matrice $\alpha \in \Gamma$.

4. Etant donné quatre matrices S_1, S_2, S_3, S_4 de $\mathcal{S}$ orthogonales deux à deux et de genre de $+$ ou $-$, démontrer qu'il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que T_α applique l'un des vecteurs sur I ou $-I$ et que, nécessairement, trois des matrices sont de genre $-$.

5. On définit une relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments $\alpha, \alpha' \in \Gamma$ par la condition

   $$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \;\; (1-t)\alpha + t\alpha' \in \Gamma$$

   Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   (a) A quelle condition sur α, a-t-on $\alpha \mathcal{R} I$?

   (b) Trouver les matrices $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ satisfaisant $\alpha \mathcal{R} \alpha'$.

   (c) Trouver les matrices $\alpha'' = \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$ satisfaisant $\alpha \mathcal{R} \alpha''$.

   (d) Prouver qu'il existe au moins un couple de matrices $\alpha', \alpha'' \in \Gamma$ telles que

   $$\alpha'' \mathcal{R} I \;\; \alpha \mathcal{R} \alpha' \;\; \alpha' \mathcal{R} \alpha''.$$

   (e) En déduire que pour toute matrice $\alpha \in \Gamma$ le déterminant de T_α vaut 1.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 HEURES

Calculatrice élémentaire permise.
Les six exercices sont indépendants.

1. (a) Considérons pour $0 < p < 1$ la matrice

$$M = \frac{1}{1+p}\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\lim_{n\to\infty} M^n$.

(b) Une bouteille de vin contient un litre de vin, et une bouteille de bière un litre de bière. On verse une partie de la première dans la seconde. Puis une partie de la seconde dans la première, de sorte qu'à l'issue de cette opération chacune des deux bouteilles contient un litre de mélange. La proportion de bière dans la bouteille de vin est-elle plus petite, égale ou plus grande que la proportion de vin dans la bouteille de bière ?

(c) On itère n fois l'opération décrite ci-dessus, en transvasant toujours la même quantité. Calculer la proportion de bière dans chaque bouteille lorsque n tend vers ∞.

2. Pour un bateaux le chemin direct entre l'Ile de la Réunion et l'Ile Maurice est de 150 km. Mais à cause de la courbure de la terre le chemin direct pour un sous-marin est plus court. Quelle est la profondeur maximale par laquelle le sous-marin doit passer en prenant ce chemin ? (On supposera dans cet exercice que la terre est un boule parfaite d'une circonférence de 40000 km.)

3. (a) Comment faut-il chosir les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ pour que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ soient des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$?

   (b) On considère l'équation différentielle :

$$(*) \qquad x(1-x)y' + (3x-2)y = x^3.$$

   Déterminer la solution générale de $(*)$ sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, \infty[$.

   (c) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui est solution de $(*)$ et qui vérifie $f(-1) = f(2) = 0$? Si oui, est-elle unique ? (On rappelle que C^k signifie k fois continument différentiable.)

   (d) Même question que la précédente, mais avec une fonction de classe C^2 !

4. On considère le système linéaire suivant en les inconnus $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et les paramètres (p, q, r) :

$$\begin{aligned} x + y + z - px &= 1, \\ x + y + z - qy &= 0, \\ x + y + z - rz &= 0. \end{aligned}$$

   Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres entiers ≥ 0 et ≤ 2 tels que l'espace de solutions de ce système est de dimension 1.

5. Est-ce que l'expression

$$\frac{\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \cdots + \sin((n-1)\pi/n)}{n}$$

   a une limite lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini ? Si oui, la calculer !

6. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos x}\, \mathrm{d}x.$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Expliquer et commenter ce proverbe «FANG» du Gabon :

«La vie est une branche de palmier que les vents inclinent à leur gré»

SUJET n° 2

En cette période où l'on parle de famines dans plusieurs pays du continent africain que signifie ce proverbe «Bariba» du Bénin ?

«Celui qui est rassasié ne sait pas qu'un autre a faim»

Est-ce qu'il est compris dans notre monde actuel ?

SUJET n° 3

Est-il toujours possible d'appliquer à la lettre ce proverbe «Baoulé» ?

«Il faut dire la vérité même si elle rougit les pupilles, elle ne les crève pas»

Expliquer à l'aide d'exemples précis.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère deux variables réelles discrètes X et Y définies par $X=(x_1,...,x_n)$ et $Y=(y_1,...,y_n)$.

❶ Trouver des valeurs de a et b qui minimisent la quantité suivante (on justifiera l'existence de telles valeurs) :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

❷ Calculer a et b pour les données suivantes :

x_i	y_i
8	43
6	35
9	45
15	48
16	50
20	60
21	62
17	57

EXERCICE n° 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

❶ Montrer que $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$

❷ On suppose que :

- La série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et
- $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = 0$

Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❸ On suppose que la série de terme général u_n converge, montrer alors que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est aussi convergente.

❹ On pose $u_n = (-1)^n$. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❺. Donner un exemple de suite (s_n) telle que :

- La série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et
- $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} \neq 0$

EXERCICE n° 3

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans A et un jeton dans B que l'on échange en les replaçant dans B et A (étape 1). Puis on recommence la même opération.
Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

❶ Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

❷ Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1} = k$ sachant que $X_n = i$.

❸ On pose $a_n = P(X_n = 0), b_n = P(X_n = 1), c_n = P(X_n = 2),$ puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$,

où P désigne la probabilité.
Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

❹ Etudier la suite vectorielle (V_n) et déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

EXERCICE n° 4

Soit f l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par R) par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

❶ Montrer que f est impaire et continue.

❷ Montrer que f' garde un signe constant sur R. On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.

❸ Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

❹ Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5, donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

EXERCICE n° 5

❶ Soient A et B deux parties non vides et bornées de R (ensemble des nombres réels).

On note $A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$. Montrer que :

$$Sup(A+B)=Sup(A)+Sup(B)$$

❷ Soient A et B deux parties non vides et bornées de R^+ (ensemble des nombres réels positifs).

On note $AB=\{x\times y \mid x\in A, y\in B\}$. Montrer que :

$$Sup(AB)=Sup(A)\times Sup(B)$$

EXERCICE n° 6

❶ Pour quelles valeurs de x, l'intégrale suivante est-elle définie : $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que f admet une application réciproque.

❷ Soit g la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt$$

- Etudier les variations et la convexité de g.
- Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq g'(x)\leq 1$ pour $0\leq x\leq 1$, et $g'(x)<\frac{2}{x^2}$ pour $x\geq 1$.
- En déduire un encadrement de $g(x)$ pour $x\geq 1$.
- Montrer que g admet une limite finie a quand $x\to +\infty$.

❸ Montrer que g est inversible et donner un développement limité de sa fonction réciproque, au voisinage de 0, à l'ordre 3.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Vous résumerez en 250 mots le texte suivant d'Anton BRENDER extrait de son dernier livre « Face aux marchés, la politique ». N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

*   *

*

Dans un roman à succès des années 1960 – *The Group* - l'une des héroïnes de Mary Mac Carthy explique : « mes parents étaient communistes. Ils m'ont toujours dit de ne pas donner d'argent aux mendiants : faire la charité ne peut que retarder le jour où le prolétariat opprimé renversera le régime capitaliste. » Le propos témoigne de cette attente confiante du Grand Soir qui, pendant des décennies, a animé de nombreux militants. Pour eux, composer durablement avec le capitalisme était impensable. Le progrès social passait nécessairement par son abolition. « La propriété, c'est le vol. Exproprions les Bourgeois ! Les usines au peuple !... » Ces slogans, porteurs d'un projet clair, ont servi de mots d'ordre à des luttes innombrables. Ceux qui les ont scandés ont souvent été férocement réprimés. Aujourd'hui, pourtant, ces propos paraissent d'un autre âge. Entre temps, beaucoup d'eau a coulé sous les ponts, beaucoup de sang aussi. Le rêve communiste a tourné au cauchemar…et pouvoir vivre en France – ou aux Etats-Unis - est devenu le rêve d'hommes du monde entier.

Certains n'en ont pas moins du mal à se résigner. Abattre le capitalisme ? La tâche est lourde et le cœur n'y est décidément plus. De là toutefois à accepter purement et simplement sa froide mécanique, il y a un pas. L'utopie révolutionnaire cède ainsi la place à d'autres moins radicales. On peut le comprendre. Ceux pour qui le capitalisme a été longtemps le diable ont du mal à s'en accommoder. Pourtant les faux-semblants et l'hypocrisie sont ici inutiles. Entre la finance et le capitalisme les relations sont étroites : ceux qui n'aiment pas la première, répugnent à regarder le second en face. Ce réflexe est dangereux. Accepter, *en toute lucidité*, le capitalisme et la finance force la société à plus d'audace et de détermination, à plus d'imagination et d'intelligence aussi. De la mesure dans laquelle nous saurons collectivement en faire la preuve dépendent aussi bien la survie du capitalisme que la poursuite du progrès social.

Une logique simple : accumuler

Le marché et l'entreprise privée sont maintenant familiers et largement acceptés. Plus grand monde, il est vrai, ne pense qu'une administration puisse, dans notre pays, décider du nombre de voitures, de télévisions, de brosses à dents, de boulons …à produire, une autre à fixer leurs prix et une troisième leurs lieux et dates de livraison. Ainsi, pourtant, fonctionnait le Plan qui pendant des décennies est apparu, dans les livres d'école, comme une alternative au marché. Va donc pour le marché. Laissons le régler la production, adapter l'offre à la demande. Va aussi pour l'entreprise privée ! A elle de fabriquer ces objets, de produire ces services dont l'usage est aujourd'hui profondément ancré dans nos vies quotidiennes. Voilà de sérieuses concessions, un grand pas en direction de la « modernité ». Mais, doit-on dans la même foulée, aller jusqu'à accepter le principe de la course au profit ? Autour de lui s'articule, depuis toujours, l'antagonisme entre capital et salariat. Oui à l'entreprise privée, soit. Reconnaître que l'un comme l'autre ne fonctionnent que pour et par le profit, est-il pour autant vraiment nécessaire ? Plutôt que de capitalisme, parlons donc d'économie de marché.

De bons et de mauvais profits

Il ne faut pas aller très profond pourtant pour découvrir que le marché ne serait rien sans commerçants pour le faire fonctionner. Toute leur activité s'organise autour d'une arithmétique simple : profit égale recettes moins dépenses. Le miracle, quand on y réfléchit, est que, par la force de ce seul calcul, les marchandises utilisées chaque jour dans notre société se trouvent à peu près là où il faut, quand il le faut. Quant à ces marchandises elles –mêmes, elles ne sortent bien sûr pas d'un chapeau. Elles sont produites par d'autres entreprises dont l'activité s'organise autour de la même arithmétique élémentaire. Le principe qui guide leurs décisions à toutes est unique : faire croître leurs profits. L'opposition entre salariat et capital peut, dès lors, être touchée du doigt : si rien ne change par ailleurs, plus de salaires pour l'un font moins de profit pour l'autre. Là se noue le problème.

Il y a bien sûr mille façons pour une entreprise d'augmenter ses profits. Certaines recueilleront facilement une approbation générale. Une nouvelle machine à laver est lancée, des milliers d'exemplaires sont vendus, des centaines d'emplois sont créés et des profits substantiels sont engrangés. Tout ceci est positif. Et il faudrait vraiment faire la fine bouche pour ne pas juger ces profits justifiés. Tel n'est toutefois pas toujours le cas. Une entreprise peut réduire ses coûts en faisant vieillir ses installations, au risque de polluer son environnement et de faire travailler son personnel dans des conditions dangereuses. Elle augmente ainsi, pour un temps au moins, ses profits. Est-ce acceptable ? Cette fois l'unanimité sera plus difficile à faire. Si en plus l'entreprise annonce des licenciements, un grondement réprobateur se fera entendre.

Si l'on pouvait éliminer les profits du second type pour ne garder que ceux du premier, tout irait pour le mieux. D'où des idées régulièrement renouvelées. On songera à de nouveaux critères de gestion, on demandera à l'entreprise de devenir citoyenne, on lui proposera de respecter des règles éthiques, de contribuer à un développement durable. Chacune de ces pistes suscite des enthousiasmes, donne lieu à débats et colloques, alimente une littérature spécialisée. Toutes pourtant relèvent de la même illusion : elles veulent ignorer que la recherche du profit est le ressort unique de l'entreprise capitaliste. *Les seuls idéaux qui peuvent influencer significativement la stratégie de cette dernière sont ceux qui, d'une manière ou d'une autre, affectent ses perspectives de profit.*

Ceci n'interdit bien sûr pas à nombre d'entreprises d'agir généreusement. Elles patronnent une épreuve sportive, parrainent des événements culturels, soutiennent les initiatives de collectivités locales ou de grandes causes nationales, voire internationales…De plus en plus nombreuses sont celles qui cherchent à faire preuve, au travers de leur culture d'entreprise, d'un véritable sens moral. Il n'empêche. La concurrence, caractéristique du capitalisme, reste une loi d'airain. Elle conduit implacablement à distinguer deux situations. Soit ces gestes généreux sont une façon habile de développer une image positive, cette culture une manière intelligente de mobiliser un personnel de haute qualité. Leur aspect citoyen est alors une coïncidence heureuse : loin de seulement coûter, ces actions rapportent aussi. Elles sont en fait rentables et les entreprises qui ne l'ont pas vu le regretteront demain. Soit ces pratiques et cette attitude sont parfaitement « gratuites » elles coûtent à la firme et ne lui rapportent rien. Les dépenses engagées et les surcoûts viendront alors purement et simplement amputer les profits de l'entreprise qui les adopte. Si les montants en jeu ne sont pas marginaux, si les actions sont durables, la pérennité de l'entreprise peut en être affectée (sans parler bien sûr, dans un premier temps, de celle de ses dirigeants).

Le nerf de la guerre est unique

Que va-t-il se passer en effet dans ce dernier cas ? L'entreprise citoyenne se verra décerner des brevets de civisme. Les journaux lui consacreront des articles élogieux, avec un peu de chance même, son dirigeant pourra être désigné « manager » de l'année. Mais sa firme a toutes chances de faire moins de profit que ses concurrentes. Elle ne pourra ni investir ni recruter autant qu'elles. Peu à peu, sa position s'affaiblira. Assez vite, il lui faudra renoncer à ses pratiques pourtant sympathiques. Le profit n'est en effet pas un indicateur de succès qui peut être mis sur le même plan que d'autres « critères de gestion » Son pouvoir est unique : *il permet d'accroître le montant des capitaux possédés en propre par chaque entreprise.*

Si l'on peut voir la concurrence comme une guerre, alors les profits sont le nerf de cette guerre. Aucune entreprise ne peut considérer leur montant comme un chiffre parmi d'autres : ses possibilités de développement en dépendent. Pour une part, ce développement peut certes s'appuyer sur des capitaux empruntés. Mais ceux qui prêtent à une société surveilleront étroitement le montant de ses capitaux propres. Qu'une perte vienne les amputer gravement et ils ne renouvelleront pas leurs prêts. Que ces capitaux propres augmentent au contraire et les prêteurs se bousculeront. L'argent va à l'argent ! Pour des raisons faciles à comprendre : un épais matelas de capitaux propres rassure les créanciers. Il dit en effet combien l'entreprise peut perdre tout en restant capable de les rembourser.

Quant au montant de ces capitaux propres, il ne peut s'accroître que de deux façons : grâce aux profits dégagés et conservés par l'entreprise ou par une « augmentation de capital ». Comment persuader les actionnaires de laisser une part importante des profits réalisées dans l'entreprise, voire de lui amener de l'argent frais en souscrivant de nouvelles actions ? La réponse est simple : ils le feront volontiers si l'entreprise est rentable. Si ça n'est pas le cas, il sera très difficile de les persuader de remettre de l'argent au pot. Ceux qui fournissent des capitaux à une entreprise ressemblent, par un trait, aux joueurs de casino : ils prennent le risque de perdre de l'argent avec l'espoir d'en gagner. Mais, à la différence des joueurs de casino, le frisson du jeu ne remplace pas, pour eux, la réalité du gain.

Accumuler du capital, telle est dans nos économies la finalité de la firme privée. Là réside le principe du capitalisme. Son unicité, sa simplicité font sa puissance. Elles font aussi son aveuglement. On trouvera bien sûr des patrons pour soutenir le contraire et des salariés pour le croire. Un chef d'entreprise expliquera avec conviction qu'il veut surtout contribuer au mieux-être de l'humanité. Un autre dira vouloir susciter l'enthousiasme de ses salariés, un troisième n'œuvrer que pour la satisfaction de ses clients…

Ces propos sont parfois creux, tenus au gré des circonstances. Ils sont parfois sincères. Sur le fond, cela n'a aucune importance. On en revient toujours à la même alternative : soit l'entreprise fait suffisamment de profits et tout va bien, soit cela n'est pas le cas… et très vite, elle reculera par rapport à ses concurrentes. Penser qu'une entreprise peut faire longtemps le bonheur de qui que ce soit aux dépens de la croissance de ses profits relève de l'illusion ! La réalité du capitalisme est plus brutale que ne l'aimeraient ceux qui ont fini par accepter à contrecoeur de ne pas le renverser. D'où cette tentation constante de lui insuffler un supplément d'âme, de l'appeler à faire preuve de sens civique. L'espoir est vain. Le capitalisme est un moteur, le profit est son carburant. La recherche du profit est la force qui anime aussi bien l'entreprise que les mouvements du marché. Il est temps d'en prendre pleinement son parti.

Anton BRENDER
«Face aux marchés, la politique» (p. 95 à 102)
La Découverte

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Soit n un entier naturel non nul. On pose $\alpha_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{(k^2)}$.

1. Calculer G_1, G_2, G_3, G_4. Calculer pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr}$.
2. Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, le polynôme $X^5 - 1$.
3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ en fonction de $\sqrt{5}$. Calculer G_5.
4. On considère la matrice $A_n \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \\ 1 & \alpha_n^2 & (\alpha_n^2)^2 & \cdots & (\alpha_n^2)^{n-1} \\ & & \cdots & & \\ 1 & \alpha_n^{n-1} & (\alpha_n^{n-1})^2 & \cdots & (\alpha_n^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Vérifier que $\mathrm{Tr}A_n = G_n$ (Tr désigne la trace de la matrice) et que $A_n^2 = nB_n$ avec $B_n = (b_s^r)$ définie par $b_s^r = 1$ si $r+s = 2$ ou $r+s = n+2$, sinon $b_s^r = 0$. Montrer que $B_n^2 = I_n$.
5. Montrer que si λ est valeur propre de A_n alors λ^p est une valeur propre de A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$. En déduire que A_n admet au plus quatre valeurs propres distinctes. Indiquer leurs valeurs possibles.

6. Soit $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que $U^2 = I_n$. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant U pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ établir

$$\mathbb{C}^n = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id).$$

En déduire que U est diagonalisable. Montrer que B_n est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$). Si v est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant pour matrice B_n dans la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, déterminer en fonction des vecteurs e_i une base de vecteurs propres de v et montrer que 1 et -1 sont respectivement valeurs propres de B_n d'ordre, respectivement , $p+1$ et p . Quel est le polynôme caractéristique de B_n?

8. Soit P un polynome de degré d de la forme $P(X) = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_d)$ avec pour tout $i \neq j$, $a_i \neq a_j$. Notons Q le polynôme tel que $P(X) = (X-a_1)Q(X)$. Montrer que $Q(X)$ et $(X-a_1)$ sont premiers entre eux. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit w un endomorphisme de E tel que $P(w) = 0$. Montrer que

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$

En déduire que

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker(w - a_2 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id).$$

En déduire que w est diagonalisable.

9. Montrer que A_n est semblable à une matrice diagonale du type

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_k \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$.

10. On suppose que $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On désigne par a, b, c, d le nombre de fois où les quatre valeurs $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ sont respectivement écrites dans la matrice D_n. Montrer que $a + b = p + 1$ et $c + d = p$.

11. Soit $T = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Montrer que l'on définit une bijection ϕ de $T \times T$ sur $T \times T$ par $\phi(k, s) = (k - s, s)$ si $k \geq s$ et $\phi(k, s) = (k + n - s, s)$ si $k < s$. En déduire que $G_n \overline{G}_n = \sum_{(r,s) \in T \times T} \alpha_n^{(r+s)^2 - s^2}$. Prouver que si n est impair alors $|G_n| = \sqrt{n}$.

12. En déduire que les coefficients de la question 8) vérifient $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$ si n est impair.

13. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Montrer en calculant $\det A_n$ que $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}$.

14. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b + d = p + 2m$. Calculer les valeurs de a, b, c, d .

15. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr} A_n$ pour n impair.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Calculatrice permise.
Tous les exercices sont indépendants et de difficultés diverses.

- **Exercice 1 :**

On dit que E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est convexe si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in [0;1], \quad \lambda\, x + (1-\lambda) y \in E$$

On dit que f, une application de E dans $\mathbb{R}$, est convexe si E est convexe et si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in [0;1], \quad f(\lambda\, x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Soit E un ensemble convexe de $\mathbb{R}$. On admet que pour toute fonction f continuement dérivable de E dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x, x_0 \in E, \quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Soit x et x_0 deux réels de E. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre deux de $f(x)$ en x_0 avec reste exact.
2. Montrer que, si E est convexe et f deux fois continuement dérivable sur tout E, on a $f'' > 0$ entraîne f convexe.
3. Application : montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^4 \leq 2^3 (x^4 + y^4)$$

- **Exercice 2 :**

1. Soit m un réel, et σ un réel strictement positif.
Sans utiliser la densité d'une loi gaussienne, calculer à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

(*on pensera par exemple à calculer le carré de cette intégrale*).

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.
Soit $\Phi_n(t) = \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$. Calculer pour tout t réel, la limite de $\Phi_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

- **Exercice 3 :**

Soit $\alpha > 0$ et pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$$

1. $xf(x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$? Dans l'affirmative, calculer cette intégrale, dans le cas contraire, préciser le type de divergence.
2. $xf(x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Dans l'affirmative, calculer cette intégrale, dans le cas contraire, préciser le type de divergence.

- **Exercice 4 :**

Pour toute fonction $f \in C([0,1])$ où $C([0,1])$ est l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur l'espace vectoriel $C([0,1])$.
2. On cherche à montrer que $C([0,1])$ muni de $\| \ \|_1$ n'est pas complet.
   (a) Exprimer la suite $f_n(x)$ définie par une suite de fonctions continues, affines par morceaux, nulles sur $[0,1/2]$ et valant 1 sur $[1/2+1/n,1]$.
   (b) Montrer que f_n est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_1$. On montrera au préalable que pour tout n et p entiers non nuls avec $n > p$, on a $|f_n - f_p| \leq 2$.
   (c) On suppose qu'il existe une fonction continue f limite, au sens de la norme $\| \ \|_1$, de f_n. Comparer
   $$\int_0^{1/2} |f(x)|dx \quad \text{et} \quad \int_{1/2+1/p}^1 |1 - f(x)|dx$$
   avec $\|f_n - f\|_1$ pour $n > p$.
   (d) Conclure.

- **Exercice 5 :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer les vecteurs propres engendrant les sous-espaces propres associés.
3. Exprimer ces vecteurs en fonction de $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. Exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire réelle de U et V.

- **Exercice 6 :**

Un entonnoir conique d'angle au sommet 60 degrés et de hauteur 10 cm présente une ouverture de 0,5 cm^2 à sa base. On place l'entonnoir verticalement, et on le remplit d'eau.
On note $h(t)$ la hauteur comprise entre l'ouverture de l'entonnoir et la surface du liquide au temps t.
La dynamique d'écoulement de l'eau s'exprime en fonction de $h(t)$ par la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad h'(t) = -C\sqrt{h(t)}$$

avec $C = \frac{a}{A(t)}\sqrt{2g}$, où $g = 9,8$, a est l'aire de l'ouverture de l'entonnoir et $A(t)$ est l'aire de la surface du liquide à l'instant t.
Calculer le temps T que l'entonnoir met à se vider complètement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Êtes-vous d'accord avec les termes de ce proverbe ewe du Togo ?

«Un mauvais frère est comme une branche de rônier, on ne peut pas le refuser totalement car il faut penser aux jours de pluie.»

Sujet n° 2

Êtes-vous prêt (prête) à suivre le conseil de ce proverbe peul ? Expliquez votre décision.

«Un village où ne conduit qu'un seul chemin est un mauvais village. N'y allez pas.»

Sujet n° 3

À votre avis le proverbe arabe suivant est-il justifié ? Analyser à l'aide d'exemples.

«Il y a cinq degrés pour arriver à être sage : se taire, écouter, se rappeler, agir, étudier.»

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

I. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Montrer que b est définie positive si et seulement si $\{\alpha > 0 \text{ et } \alpha\gamma - \beta^2 > 0\}$. *On rappelle que b est définie positive si et seulement si elle définit un produit scalaire* c'est à dire si $\forall u \in E - \{0\},\ b(u,u) > 0$ *ou si et seulement si*

$$\forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, \quad {}^tXAX > 0.$$

${}^tX$ désigne la transposée de X.

II. On considère désormais l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et la forme bilinéaire symétrique

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

définie par

$$B\left((x,y,z);(x',y',z')\right) = xx' + yy' - zz'.$$

Soit α un paramètre réel. On considère le plan P_α engendré par les vecteurs $u_\alpha = (1, 0, \alpha)$ et $v_\alpha = (0, 1, \alpha)$:

$$P_\alpha = \{\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Donner une équation cartésienne du plan P_α.
   On considère maintenant la restriction de B au plan P_α que l'on appelle b_α : si $U, V \in P_\alpha$, on a donc $b_\alpha(U,V) = B(U,V)$.

2. A quelle condition sur le paramètre α, la forme bilinéaire symétrique b_α est elle définie positive?
3. Dans ce cas, grâce au procédé de Gramm-Schmidt, donner une base orthonormale de l'espace euclidien (P_α, b_α).
4. Ecrire la relation que doit vérifier la matrice A dans la base canonique d'une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$B(f(x,y,z), f(x',y',z')) = B((x,y,z),(x',y',z'))$$

pour tout $(x,y,z);(x',y',z')$.

III. On suppose maintenant E (de dimension deux) muni d'un produit scalaire, que l'on notera, pour deux vecteurs $u, v \in E$: $\langle u, v\rangle$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E, on définit alors une forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $q(u) = \langle f(u), u\rangle$.

1. Montrer que q change de signe sur E (à savoir qu'il existe $u, v \in E$ tels que $q(u)q(v) < 0$) si et seulement si $\det f < 0$.
2. Montrer que q ne change pas de signe sur E si et seulement si l'ensemble $Z_q = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si q ne change pas de signe sur E, discuter alors en fonction de la dimension de Z_q le rang de f.
4. Peut-on généraliser la question 1. au sens suivant : Sur un espace F de dimension $n > 2$, a-t-on
   "q change de signe si et seulement si $\det f < 0$"?

IV. On considère ici l'espace

$$F = \{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

Tr A désigne la trace de la matrice A.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et vérifier que

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

   en est une base.
2. Montrer que si on définit $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, {}^tAB$, alors $(M_2(\mathbb{R}), \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien.
3. Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ exprimer le projeté orthogonal de A sur F.
4. Trouver une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de $(F, \langle .,. \rangle)$ en orthonormalisant la base (e_1, e_2, e_3).

5. L'application $A \to \det(A)$ est une forme quadratique sur F, montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u de E tel que

$$\forall A \in E,\ \det(A) = \langle u(A), A\rangle.$$

6. Déterminer la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) et déterminer les valeurs propres de u et la signature de la forme quadratique $A \in F \to \det(A)$.

V. On considère $G = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si on définit pour $A \in G$, $q(A) = \operatorname{Tr} A^2$, alors q est une forme quadratique sur E. Quelle est la forme bilinéaire associée?
2. Montrer que si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\operatorname{Tr} AB = 0.$$

3. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q.
4. Déterminer la signature de q pour $n = 2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique définie sur R^+ qui vérifie :

$$\exists b \geq 0,\ \exists a \in R \ /\ f(t) \leq a + b\int_0^t f(u)\,du.$$

Montrer que $f(t) \leq a\,e^{bt}$.

Exercice n° 2

Trouver toutes les fonctions numériques d'une variable réelle continues telles que :

$$\forall x \in R - \{0\},\qquad \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{3}\left[f(x) + 2f(0)\right].$$

Exercice n° 3

a,b,c étant trois nombres réels, pour que $\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation, il faut et il suffit que a,b,c soient les racines d'une équation de la forme : $t^3 - t^2 + k = 0,$ avec $0 \le k \le \frac{4}{27}$. Vérifier cette condition nécessaire et suffisante et préciser cette rotation pour $k = \frac{4}{27}\sin^2 j$ (on peut effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos q$).

Exercice n° 4

Soit f une fonction continue et bornée sur R^+.

❶ Montrer que $\underset{n\to\infty}{Lim} \int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx = f(0)$.

❷ Montrer que $\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{2}{p} \int_0^{+\infty} \frac{n\, f(x)}{1+n^2x^2}\, dx = f(0)$.

❸ Si f est en outre dérivable en 0, avec $f'(0) = a \neq 0$, trouver un équivalent de $\int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx - f(0)$ en $\frac{k}{n}$.

Exercice n° 5

Soit X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 \,/\, \exists (u_n) \in X, \exists (l_n) > 0, \underset{n\to\infty}{Lim}\, u_n = a, \underset{n\to\infty}{Lim}\, l_n (u_n - a) = u \right\}$$

❶ Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

❷ Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

a) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

b) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

c) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x \ge 0, -x^2 \le y \le x^2 \right\}$ et $a = (0,0)$

Exercice n° 6

On cherche à déterminer les fonctions $j_p(n)$ telles que :

$$j_p(n)=1^p+2^p+...+n^p$$

❶ Déterminer j_0 et j_1.

❷ Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie pour $x\neq 0$ par :

$$F_t(x)=\frac{e^{(1+t)x}-1}{e^x-1}$$

- Déterminer F_0 et F_1.

- Montrer que F_t est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t'(0)$?

❸ On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose :

$$F_t(x)=1+y_0(t)+\frac{y_1(t)}{1!}x+\frac{y_2(t)}{2!}x^2+....+\frac{y_p(t)}{p!}x^p+x^p e(t)$$

A l'aide de la précédente question, retrouver les valeurs de y_0 et y_1.

❹ Lorsque t est un entier, $t=n$, écrire la fonction F_n comme la somme de fonctions exponentielles , et montrer alors que $j_p(n)=\sum_{k=0}^{n}k^p$.

❺ En identifiant les développements limités des fonctions $F_t(x)(e^x-1)$ et $e^{(1+t)x}-1$, montrer que pour tout p, on a :

$$1+j_0(t)+c_{p+1}^1 j_1(t)+....+c_{p+1}^p j_p(t)=(1+t)^{p+1}$$

❻ En déduire les fonctions j_0, j_1, j_2, j_3 (on essaiera d'en donner une forme factorisée).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous résumerez en 200 mots le texte suivant extrait de l'ouvrage «*Les Politiques de l'emploi en France et aux Etats-Unis*» sous la direction de Jean-Claude BARBIER et Jérôme GAUTIÉ, Paris, Presses universitaires de France, 1998, pp, 424-426.
N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

Le rôle ambigu des politiques de l'emploi

Nulle part les politiques de l'emploi ne semblent avoir joué un rôle déterminant dans les performances en termes de création d'emplois, et au-delà dans les modifications des régimes d'emploi. Ainsi aux Etats-Unis et aux Pays-Bas où ces performances ont été les plus fortes et/ou ces modifications les plus importantes, il est généralement admis que ce sont des facteurs liés à la régulation macro-économique (politique monétaire) et aux ajustements sur le marché du travail (ajustements des salaires) qui ont été primordiaux.

On ne saurait cependant en rester à l'appréciation de facteurs purement quantitatifs, aussi bien au niveau des instruments des politiques de l'emploi (en termes de dépenses) que de leurs résultats (en termes de niveau et de taux d'emploi). Dans de nombreux pays, en effet, les politiques de l'emploi ont contribué à brouiller les catégories d'emploi, de chômage et d'activité/inactivité. Le déploiement massif de mesures reposant sur des formes particulières d'emploi (emplois publics temporaires, comme par exemple en Allemagne et en France, mesures d'insertion professionnelle pour les jeunes – en France, au Royaume-Uni, en Italie –, préretraites progressives, contrats de travail dérogatoires subventionnés – le cas le plus frappant étant l'Espagne –, etc.) ont grandement participé à la déstabilisation de la norme d'emploi «normal» (à plein temps, à durée indéterminée, couvert par des conventions collectives…). De même, la focalisation croissante, dans les comparaisons internationales, sur le repérage du «sous-emploi» - incluant les chômeurs découragés ou dispensés de recherche d'emploi, les travailleurs à temps partiel contraint, et les «faux» handicapés – est un indice de la remise en cause de la pertinence de la catégorie de chômage.

Cette dernière avait été «inventée» au tournant du siècle, notamment par des réformateurs sociaux, comme catégorie plus opératoire que la «pauvreté», et a connu son apogée dans le cadre du paradigme keynésiano-beveridgien avec la focalisation sur les politiques de plein emploi. Il semble qu'aujourd'hui on assiste au processus symétrique de «déconstruction» de la catégorie de chômage, à laquelle participent les politiques de l'emploi, notamment en Europe. Ainsi, le chômage n'est plus au cœur de la question sociale aux Etats-Unis. Il suffit de souligner dans ce pays la coexistence de ce qui est considéré comme le plein emploi (un taux de chômage de l'ordre de 5 % en 1998) et de problèmes sociaux importants. Cela découle du fait que, symétriquement, l'emploi n'est pas ou n'est plus la condition suffisante de l'intégration sociale, contrairement à ce que l'on pensait dans le paradigme keynésiano-beveridgien. Depuis le début des années quatre-vingt, les inégalités se sont fortement accrues, du fait de la baisse non seulement en termes relatifs, mais aussi réels, du revenu des moins qualifiés, entraînant, on l'a noté, une croissance du nombre des *working poor*. Symétriquement, de nombreux sans emploi ne sont pas recensés dans le chômage. Au total, aux Etats-Unis, chômage et pauvreté coïncident de moins en moins. Il est d'ailleurs symptomatique que les publics-cibles des politiques de l'emploi ne sont pas définis comme des catégories de chômeurs, mais comme des « désavantagés économiques» et que l'impact de ces politiques se mesure avant tout en termes de «gains» des bénéficiaires. Les catégories de *working poor* et de *welfare recipients* renvoient à des paradigmes qui rappellent, par de nombreux aspects, les représentations qui ont précédé l'invention du chômage. Ainsi avec le *working poor*, on retrouve la conjonction du travail et de la misère qui est au fondement du «paupérisme» (au cœur de la question sociale au dix-neuvième siècle) ; avec les programmes du *workfare,* on retrouve la dialectique traditionnelle «assistance-répression» qui caractérise le traitement de la pauvreté en Occident depuis le quatorzième siècle.

Etant donné la persistance d'un taux de chômage très élevé, la situation européenne apparaît à bien des égards très différente de celle des Etats-Unis. Plus que jamais le chômage semble être au cœur de la question sociale dans les pays d'Europe continentale. Pourtant, la permanence de la catégorie de «chômage» cache des évolutions très importantes des représentations et des modalités d'action, indissociablement liées, repérables dans un double glissement, par passage de la politique de régulation macro-économique de plein emploi aux *politiques spécifiques de l'emploi* – qui regroupent les interventions directes sur le marché du travail visant à en réduire les déséquilibres -, puis de plus en plus aux *politiques d'insertion*, qui dépassent la simple dimension professionnelle de l'intégration sociale. De façon corollaire, on est passé du *chômage*, pris dans sa globalité, aux *publics spécifiques de chômeurs* (les jeunes, les chômeurs de longue durée principalement), puis aux *exclus*. On voit que ce processus est inverse de celui qui a débouché sur «l'invention du chômage», celle-ci ayant notamment consisté à dépasser la typologie des individus en fonction de leurs caractéristiques propres, pour passer à un autre niveau d'analyse, et à une entité abstraite macro-sociale[1]. Le recours aux *groupes-cibles* de l'intervention publique au niveau central et, plus encore, la déconstruction même de ces groupes considérés comme trop hétérogènes au niveau local (les agents locaux de l'emploi recourant à leurs propres critères de classement pour identifier et orienter les chômeurs) marquent le retour de la *localisation* et de l'*individualisation* de l'intervention publique. Cela risque de déboucher sur une conception où se sont avant tout les caractéristiques des individus qui expliquent leur difficulté d'insertion, et non un dysfonctionnement du système économique et social. Le retour en force du concept d'*employabilité* comme référence de l'intervention publique est assez symptomatique de ce point de vue, et fait craindre le retour d'une certaine «handicapologie» dans le traitement de la question sociale.

[1] Avec la catégorie de « chômage », on passe en effet d'une collection d'individus – les pauvres, les «indigents» ou les «chômeurs» - à un phénomène macro-économique et social, dont les causes sont à rechercher du côté du dysfonctionnement du marché du travail ou de l'économie dans son ensemble. Le tout n'est pas égal à la somme des parties : ce n'est pas un hasard si en France à la même époque, c'est un durkheimien, Lazard, qui définit lui aussi le chômage comme un fait social irréductible aux individus qui le composent.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I :

Soient $E = \{f : [0;1] \to \mathbb{R},\ \textit{continue}\}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & x \in [0;\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Proposer deux normes $\|\ .\ \|_a$ et $\|\ .\ \|_b$ sur E telles que $(\|f_n\|_a)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(\|f_n\|_b)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

Exercice II :

Soit r un entier supérieur strictement à 2.

1. Déterminer $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$\int_0^{+\infty} \frac{r3^r x^k}{(3+x)^{r+1}}\, dx < +\infty$$
On note cette intégrale $M_{k;r}$
2. Exprimer $M_{k;r}$ en fonction de $M_{k-1;r-1}$.
3. Calculer $M_{0;r-k}$.
4. Exprimer $M_{k;r}$ en fonction du coefficient binômial $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\ (n\text{-}p)!}$.

Problème :

Soit $\|\ .\|_a$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|\ .\ \|_A$ la norme matricielle subordonnée à $\|\ .\ \|_a$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|B\|_A = \sup_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} \frac{\|Bx\|_a}{\|x\|_a}$$

Et on note

$$\rho(B) = \max_{1\le i\le n} \{|\lambda_i(B)|\}$$

où $\lambda_i(B)$ est la $i^{\text{ème}}$ racine complexe du polynôme caractéristique de B.

A) Préliminaires

1. Vérifier que pour toutes matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\|B_1B_2\|_A \le \|B_1\|_A\|B_2\|_A$$

2. Montrer que

   (a)
   $$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} B^k v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

   (b)
   $$\lim_{k\to+\infty} B^k v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \rho(B) < 1$$

   (c) On admet que :
   $\rho(B) < 1 \Longrightarrow$ Il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\quad \|B\|_A < 1$.

   Montrer que s'il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$, alors $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$

B) Méthode

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I - B)$ soit inversible lorsque I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit c un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit u comme l'unique solution de

$$u = Bu + c$$

Soit u_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = Bu_k + c$$

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

   (a) $\lim_{k\to+\infty} u_k = u, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$

   (b) $\rho(B) < 1$

   (c) Il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$

2. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec u l'unique solution du système
   $$Au = b$$
   On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = M - N$.

   (a) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(I - B)$ inversible et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que
   $$Au = b \Longleftrightarrow u = Bu + c$$
   Exprimer B et c en fonction de M, N et b.

   (b) Proposer une méthode itérative permettant de calculer une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers u quel que soit le vecteur initial u_0 à partir de M, N et b.

C) Application :

Expliciter une méthode itérative permettant d'approcher l'unique solution $u \in \mathbb{R}^n$ de l'équation $Au = b$ lorsque A et b sont tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles Interprétations peut-on donner du proverbe peul suivant dans différents contextes (ville ou village, pays, Afrique, monde) ?

«Les hautes herbes peuvent avaler les pintades, mais elles ne peuvent étouffer leurs cris.»

Sujet n° 2

Commentez ce proverbe guinéen qui évoque la prévoyance :

«Ce n'est pas le jour du combat qu'on aiguise sa lance.»

Que veut-il dire ? Expliquez avec des exemples précis.

Sujet n° 3

Que signifie ce proverbe arabe ?

«Les proverbes sont les lampes des mots.»

Expliquez à l'aide d'exemples.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On considère les vecteurs $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 + e_3$ et $w = -e_2 + 2e_3$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Problème

Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0, 1[$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1,\ 0 \leq y \leq M-1\} \\ F_1 &= \{(x, M) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1\} \\ F_2 &= \{(N, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq y \leq M-1\} \\ F &= F_1 \cup F_2 \cup \{(N, M)\} \\ \overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup F \end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (l, k) \in \mathcal{R},\ f(l, k) = pf(l+1, k) + (1-p)f(l, k+1) \tag{1}$$

Après une étude préliminaire (partie I), nous recherchons (partie II) les éléments de $\mathcal{E}$.

Dans tout le problème, on notera $C_t^q = \frac{t!}{q!(t-q)!}$ le coefficient binomial de paramètres $t \in \mathbb{N}$ et $q \in \{0, \ldots, t\}$.

I. Résultat préliminaire et Matrices nilpotentes.

A. Résultat préliminaire (*ce résultat sera admis*)

RÉSULTAT : SOIENT r ET s DEUX ENTIERS DONNÉS ($r \geq 1$ ET $s \geq 0$), IL EXISTE UN UNIQUE COUPLE DE POLYNÔMES (U, V) DE L'INDÉTERMINÉE x VÉRIFIANT LES PROPRIÉTÉS SUIVANTES:

i) LE POLYNÔME U EST DE DEGRÉ STRICTEMENT INFÉRIEUR À r.

ii) U ET V SATISFONT LA RELATION $(1-x)^{s+1}U + x^r V = 1$.

DE PLUS LES POLYNÔMES U ET V SONT DÉFINIS PAR

$$U = \sum_{l=s}^{s+r-1} C_l^s x^{l-s} = \sum_{l=0}^{r-1} C_{l+s}^s x^l \tag{2}$$

$$V = \sum_{l=0}^{s} C_{r-1+l}^{r-1} (1-x)^l \tag{3}$$

B. Matrices nilpotentes.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_d$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels, à d lignes et d colonnes. Si A est un élément de $\mathcal{M}_d$ et i, j deux entiers appartenant à $\{1, \ldots, d\}$, on note $A(i, j)$ le coefficient de la matrice A se situant sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. On appelle I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d$. On pose

$$A^0 = I_d,\ A^1 = A, \text{ et pour tout entier } k \geq 2, A^k = AA^{k-1}.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_d$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$; le plus petit entier $r \geq 1$ vérifiant $A^r = 0$ est appelé *ordre de nilpotence* de A.

On suppose désormais que A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_d$ nilpotente d'ordre r ($r \geq 1$, r est donné).

1. Montrer que 0 est la seule valeur propre de la matrice A. Donner le polynôme caractéristique de A. En déduire que $r \leq d$.
2. On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d$ engendré par les matrices $\{A^k, k \geq 0\}$. Montrer que $b = (I_d, A, A^2, \ldots, A^{r-1})$ est une base de $e(A)$.
3. Soit s un entier naturel.

   a. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$; donner ses coordonnées dans la base b.

   b. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible et que sa matrice inverse notée $(I_d - A)^{-(s+1)}$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} C_{s+k}^s\, A^k$.

   Indication : on pourra utiliser le résultat préliminaire appliqué à l'indéterminée A.

4. **Exemple.** On appelle J_d la matrice de $\mathcal{M}_d$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,d\}^2,\ J_d(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j-i=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Pour $k \geq 2$, calculer la puissance k-ième de J_d. En déduire que J_d est une matrice nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.

b. Pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$, c'est-à-dire expliciter les éléments de la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$.

II. Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (1)

Si f est une fonction définie sur $\overline{\mathcal{R}}$, à valeurs réelles, on note $M(f)$ la matrice à $(N+1)$ lignes et $(M+1)$ colonnes définie par :

$$M(f) = \begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & f(0,M) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & f(1,M) \\ . & . & .\ .\ .\ . & . \\ . & . & .\ .\ .\ . & . \\ . & . & .\ .\ .\ . & . \\ f(N,0) & f(N,1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & f(N,M) \end{pmatrix}$$

Pour k et l entiers vérifiant $0 \leq k \leq M$ et $0 \leq l \leq N$, on désigne par $C_k(f)$ la $(k+1)$-ième colonne de $M(f)$, c'est-à-dire $C_k(f) = \begin{pmatrix} f(0,k) \\ f(1,k) \\ . \\ . \\ . \\ f(N,k) \end{pmatrix}$ et par $L_l(f)$ la $(l+1)$-ième ligne de $M(f)$, c'est-à-dire $L_l(f) = (f(l,0), f(l,1), \ldots, f(l,M))$.

A. Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\overline{\mathcal{R}}$ vérifiant (1)

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ et à valeurs réelles.

2. **a.** Soit k un entier vérifiant $0 \leq k \leq M-1$. Si $f \in \mathcal{E}$, montrer que la matrice colonne $C_k(f)$ est déterminée de manière unique par la donnée de la matrice colonne $C_{k+1}(f)$ et du réel $f(N,k)$.

   b. En déduire que tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par la donnée des ensembles $\{f(l,M); 0 \leq l \leq N\}$ et $\{f(N,k); 0 \leq k \leq M-1\}$.

   Remarque : cela signifie que $f \in \mathcal{E}$ est déterminée de manière unique par sa restriction à l'ensemble F.

Pour tout i vérifiant $0 \leq i < N$, on désigne par ϕ_i l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \phi_i(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (i,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout j vérifiant $0 \leq j < M$, on désigne par ψ_j l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \psi_j(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (N,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin on note ξ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \xi(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (N,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{N-1}, \xi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{M-1}\}$ est une base de $\mathcal{E}$.
4. Déterminer l'élément ξ de $\mathcal{E}$ en explicitant la matrice $M(\xi)$.
Indication : utiliser la question **II.A.**2.**b.** *pour expliciter la matrice $M(\xi)$.*

B. Calcul des fonctions ϕ_i et ψ_j.

1. En conservant les notations I_d et J_d de la partie **I.B.** pour $d = N+1$, respectivement pour $d = M+1$, montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k < M$, respectivement pour tout entier l vérifiant $0 \leq l < N$, on a

$$\begin{aligned} (1-p)C_{k+1}(\phi_i) &= (I_{N+1} - pJ_{N+1})C_k(\phi_i) \\ pL_{l+1}(\psi_j) &= L_l(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{N+1})^t), \end{aligned}$$

où $(J_{N+1})^t$ désigne la transposée de la matrice J_{N+1}.
2. A l'aide de la question **I.B.**3., expliciter alors, pour tout élément $(l,k) \in \mathcal{R}$, les valeurs de $\phi_i(l,k)$ et $\psi_j(l,k)$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R ***désigne l'ensemble des nombres réels.***

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique de classe C^2 définie sur R telle que $f(0)=0$

Pour tout $x\in R$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{x}{2}f(x)$

1. Montrer que F est de classe C^2 sur R, et calculer sa dérivée seconde.

2. Montrer que pour tout $x\in R$: $F(x)=-\frac{1}{4}\int_0^x t(x-t)f''(t)\,dt$

Exercice n° 2

Soit *y* une fonction numérique à valeurs réelles. Pour tout *i* =1,2,…*n*, on pose :
$y_i^+=Sup(y_i,0)$ et $y_i^-=Sup(-y_i,0)$

1. Résoudre $Max\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i^+ + y_i^-)\ /\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2=1\right\}$ (il s'agit de trouver, s'il existe, le maximum de $\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i^+ + y_i^-)\right\}$ sachant que les fonctions y_i doivent vérifier la contrainte $\sum_{i=1}^{n} y_i^2=1$)
2. Résoudre $Min\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|\ /\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2\geq 1\right\}$

Exercice n° 3

On considère une suite finie $X_t,\ t=1,2,...n$

1. Soit M_3 l'application définie par : $M_3\,X_t=\frac{1}{3}(X_{t-1}+X_t+X_{t+1})$

Transformer les valeurs suivantes de la suite X_t par cette application M_3 :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	4	7	4	10	13	10	16	19	16

2. Trouver les valeurs de *a* et *b* telles que : $M_3\,X_t=at+b$
3. Soit $S_t=X_t-M_3\,X_t$. Quelles sont les propriétés de la suite S_t ?
4. De façon plus générale, on pose $M_{2p+1}\,X_t=\sum_{i=-p}^{p}q_i\,X_{t+i}$, où les coefficients q_i sont des nombres réels. On suppose que $X_t=at+b$. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients q_i pour obtenir : $M_{2p+1}\,X_t=X_t$
5. On suppose maintenant que $X_t=at^2+bt+c$. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients q_i pour obtenir : $M_{2p+1}\,X_t=X_t$

Exercice n° 4

On définit une suite de matrices carrées de la façon suivante :

$$H_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \text{ et } H_k=\begin{pmatrix}H_{k-1} & H_{k-1}\\ H_{k-1} & -H_{k-1}\end{pmatrix} \text{ pour tout } k\geq 2$$

1. Expliciter H_2
2. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres orthogonaux de H_2
3. Montrer que $Tr(H_k)=0$ pour tout $k\geq 2$

Exercice n° 5

Soit a un entier strictement positif fixé.

1. Montrer que $\sqrt{a^2+1}-a<\frac{1}{2a}$

2. Montrer que $\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}<\sqrt{a^2+1}-a$

3. En déduire que a est l'entier le plus proche de $\sqrt{a^2+1}$, c'est-à-dire que, pour tout entier naturel k, distinct de a, $\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|<\left|\sqrt{a^2+1}-k\right|$

4. En déduire une valeur approchée décimale de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.

5. On définit la suite $(t_n)_{n\in N}$ par :

$$t_0=a \quad \text{et} \quad t_{n+1}=t_n+\frac{1}{2a}(1+a^2-t_n^2)$$

Montrer que pour tout entier n, t_n est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $\left[a,a+\frac{1}{2a}\right]$

6. Etudier la suite $(t_n)_{n\in N}$

Exercice n° 6

Soient A un ouvert convexe non vide de R^n et f une fonction numérique différentiable définie sur A.

1. Montrer que si f est convexe, alors :

$$\forall a,x\in A \qquad f(x)-f(a)\geq<df(a),x-a>$$

On note $<.,.>$ le produit scalaire euclidien dans R^n et on rappelle qu'une fonction f est convexe si et seulement si elle vérifie $\forall a,x\in A \quad \forall t\in[0,1] \qquad f(tx+(1-t)a)\leq tf(x)+(1-t)f(a)$.
On pourra utiliser la fonction G définie par $G(t)=f(a+t(x-a))$

2. Montrer que si f vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall\, a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

alors

$$\forall\, a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

3. Montrer que si f vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall\, a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

alors

$$\forall\, a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous résumerez en 150 mots le texte suivant d'Edgar Pisani extrait du *Monde diplomatique* du mois de décembre 2004.

N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

NOURRIR NEUF MILLIARDS D'ETRES HUMAINS

« […] Le monde peut-il nourrir les 9 milliards d'humains annoncés ? Rien n'est sûr. Certains facteurs de production peuvent s'accroître : il y a de bonnes terres incultes à mettre en valeur, des progrès techniques et scientifiques à diffuser, des recherches à poursuivre, une formation technique à favoriser. Mais certains facteurs de production se réduisent : parmi les meilleures terres, certaines sont menacées par la montée du niveau des océans, l'urbanisation et les grands travaux, la surexploitation, la pollution, la disparition de forêts qui sont des régulateurs climatiques. Le désert dévore des espaces hier encore fertiles. L'eau, bien rare, devient un élément de conflit entre irrigation et besoins « urbains ». Les capitaux à investir en faveur du développement ne sont pas inépuisables, et l'agriculture en exige beaucoup.

Il nous serait permis, malgré tout cela, de faire le pari de l'autosuffisance de tous si le monde avait la capacité politique d'assurer des médiations difficiles : entre le droit des peuples de se nourrir eux-mêmes et le droit des marchands à abolir les frontières ; entre une planète exploitée par 300 000 méga fermes industrielles et 1 milliard d'entreprises familiales agricoles ; entre l'idéologie marchande, pour laquelle tout est simple, et une appréhension nuancée d'un monde naturel, social et politique complexe. La sécurité internationale dépend en effet d'un développement équilibré où la nature serait jardinée ; où d'immenses agglomérations et de grands conglomérats ne communiqueraient pas entre eux par des voies express traversant des espaces désolés ; où échappant à la misère, les peuples les moins bien pourvus connaîtraient au moins une pauvreté tolérable.

Le pire n'est pas exclu, car nous passons de la mondialisation des échanges à la globalisation d'un modèle dont la plus grande partie de la planète et la grande majorité des humains ne sauraient s'accommoder. Dans une unité contrainte, nous sommes menacés par une uniformisation faisant fi de notre diversité. Or si les civilisations sont multiples, c'est que la nature les a faites telles. Uniformiser, c'est faire disparaître des capacités de production. C'est vouer au désespoir – qui est mauvais conseiller – de 4 à 5 milliards de paysans ou de ruraux.

DES CLIVAGES POLITIQUES INATTENDUS

Le monde met l'agriculture au défi de nourrir 9 milliards d'êtres en sauvegardant nature et sociétés rurales. Acceptant ces responsabilités, l'agriculture met la société globale au défi de lui en donner les moyens ; elle met l'Union européenne élargie au défi d'exister comme une puissance autonome, capable de définir et de négocier une politique agricole, alimentaire, rurale et environnementale européenne assumant sa sécurité et contribuant aux équilibres mondiaux ; elle met l'OMC au défi de définir des règles qui tiennent compte de ses caractères spécifiques et de son infinie diversité ; elle met la modernité au défi d'inscrire le présent dans la durée. Il n'est pas impossible de relever ce défi. Esquissons donc les principes d'une gouvernance mondiale et d'une politique européenne.

Notre ambition, notre devoir étant de mettre fin à la faim, les besoins alimentaires du monde seront trois fois plus importants dans vingt cinq ans qu'ils ne le sont aujourd'hui. Les sociétés rurales représentant 4 milliards d'êtres, l'augmentation de la production agricole ne peut être recherchée dans l'oubli des énormes problèmes que représenterait un exode rural massif, alors que les villes, l'industrie et les services ne leur ouvrent pas les bras.

Le développement de la production agricole est favorisé par les progrès, mais il est menacé par la raréfaction de certains facteurs de production. Il ne saurait être promis, où que ce soit dans le monde, par la mise en œuvre hâtive de découvertes et la persistance de pratiques menaçant l'environnement. La sécurité alimentaire étant reconnue comme un droit humain et politique fondamental, doivent donc être consacrés à la fois le droit des peuples à se nourrir eux-mêmes et l'interdiction de toute subvention à l'exportation. Des médiations doivent être assurées : entre les dynamiques scientifique et marchande et la fragilité des sociétés comme de l'environnement ; entre la diversité naturelle et culturelle des régions et l'unité à inventer d'un monde pacifié.

Tels doivent être les objectifs d'une « gouvernance » mondiale et d'une politique agricole, alimentaire, rurale et environnementale européenne. Elles sont, l'une et l'autre, à inventer. Elles mettent au défi une OMC qui a pour seule vocation de favoriser les échanges et une Union européenne qui doit se construire en puissance mondiale d'un nouveau type.

Ces exigences répondant à des besoins et des menaces constatés, il serait moralement inacceptable, objectivement absurde et politiquement dangereux de ne pas y répondre.

Edgar PISANI

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un n-échantillon de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ l'espace des réels muni de la tribu borélienne et sa probabilité image. On a $var(X_i) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. De plus, la probabilité P_X est symétrique, c'est-à-dire qu'elle est telle que pour tout événement $B \in \mathcal{B}$,

$$P_X(B) = P_{-X}(B)$$

où P_{-X} est la loi de la variable aléatoire $-X_i$.

1. Montrer que

$$\forall t \geq 0, \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)$$

2. Soit un n-échantillon $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ indépendant de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$, tel que $\mathbb{P}(\sigma_i = 1) = \mathbb{P}(\sigma_i = 0) = \frac{1}{2}$. Justifiez l'égalité suivante

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)$$

3. Montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right)\right)$$

4. On rappelle que pour tout y réel, on a $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \leq e^{\frac{y^2}{2}}$. A l'aide de cette inégalité montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

5. Conclure en montrant que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right| > t\right) \leq 2e^{\frac{t^2}{2}}$$

Problème

Partie I.
Soit U une fonction deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ ($U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$). Soit x une fonction deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient t_i, t_f, x_0, x_1 quatre réels donnés tels que

$$\begin{cases} x(t_i) = x_0 \\ x(t_f) = x_1 \end{cases}$$

On appellera par la suite cette condition sur x : *CIF*.
On cherche dans cette partie à exprimer une condition sur $\tilde{x}(t)$ afin que

$$\max_{x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ CIF} \{\Phi(x)\} = \Phi(\tilde{x}) \tag{1}$$

lorsque

$$\Phi(x) = \int_{t_i}^{t_f} U(t, x(t), x'(t))dt$$

On notera pour tout ce qui suit $\partial_{zi}U$ la dérivée partielle de U par rapport à sa i $^{\text{ème}}$ variable pour $i = 1, 2, 3$.
On considère $\tilde{x}$ une solution de (1).

1. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h(t_i) = h(t_f) = 0$. Soit $s > 0$.
   (a) A-t-on $t \mapsto \tilde{x}(t) + sh(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (b) Cette fonction remplit-elle les conditions *CIF* ?
   (c) Comparer $\Phi(\tilde{x})$ et $\Phi(\tilde{x} + sh)$ pour tout $s > 0$.
   (d) Soit $g(s) = \Phi(\tilde{x} + sh)$ définie pour tout $s \in \mathbb{R}$. A l'aide de la définition d'une dérivée, montrer que $g'(0) \leq 0$.

2. (a) Exprimer $g(s)$ en fonction de U, t, x, x', s et h.
   (b) Montrer qu'on peut intervertir le signe dérivation par rapport à s et le signe intégrale dans l'expression suivante

$$\frac{d}{ds}\left[\int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt\right]$$

   (c) Montrer que l'on a

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[\partial_{z_2}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)\right] dt \leq 0$$

   (d) A l'aide d'une intégration par partie que l'on posera soigneusement, montrer qu'il existe une constante A telle que

$$\int_{t_i}^{t_f} h'(t)\left[-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2}U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right] dt \leq 0$$

3. Soit $h(t)$ telle que

$$h'(t) = -\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) \qquad (2)$$

   (a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant (2) et $h(t_i) = h(t_f) = 0$.

   (b) Montrer qu'on a alors
$$\forall t \in [t_i, t_f], \quad h'(t) = 0$$

   (c) En déduire qu'une condition nécessaire pour que $\tilde{x}$ soit solution de (1) et vérifie *CIF* est

$$\forall t \in [t_i, t_f], \quad \frac{d}{dt}\left(\partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) = \partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) \qquad (3)$$

Partie II. *Application de la partie I*
On s'intéresse à une entreprise produisant des vis. Cette entreprise reçoit une commande de B vis à livrer en une seule fois à la date $t = T$. On suppose qu'à la date $t = 0$ où elle reçoit la commande, elle ne posssède aucune vis en stock. On désire établir le plan de production de cette entreprise durant la période de temps $[0, T]$ de manière à minimiser le coût total de cette commande.
Le coût total instantané $C(t)$ se décompose entre :

- Le coût de stockage instantané $S(t)$. On suppose celui-ci proportionnel à la quantité stockée : lorsqu'il y a $N(t)$ vis au temps t à stocker, le coût de stockage instantané est alors $S(t) = c_1 N(t)$ avec c_1 constante positive.
- Le coût direct de fabrication instantané $F(t)$ d'une vis. Il est supposé linéairement croissant avec la vitesse de production.

On note $y(t)$ le nombre de vis fabriquées en tout temps t.

1. Que représente
$$\forall t \in [0, T], \quad w(t) = \int_0^t y(s)ds \ ?$$
2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $w'(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
3. Quelle est la vitesse de production par vis ? Exprimer la en fonction de $w'(t)$.
4. Déterminer $w(0)$ et $w(T)$.
5. Déterminer $S(t)$ en fonction de $w(t)$.
6. Montrer que $F(t)$ s'exprime comme $F(t) = c_2 y^2(t)$, avec c_2 constante strictement positive.
7. Exprimer le coût total instantané $C(t)$ en fonction de $w(t)$ et $w'(t)$.
8. Exprimer le coût total $\mathcal{C}$ sur la période $[0, T]$.
9. Préciser le sens du problème d'optimisation suivant dans le cadre ci-dessus défini. On explicitera le sens de chacune des expressions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2(w'(t))^2 + c_1 w(t)dt \\ w(0) = 0 \\ w(T) = B \\ w(t) > 0, \ w'(t) \geq 0, \ t \in]0, T] \end{cases}$$

10. Proposer des solutions possibles au problème $(\mathcal{P})$ en appliquant le résultat (3) de la partie I question 3 (c), pour le problème $(\mathcal{P}_1)$

$$(\mathcal{P}_1)\left\{\begin{array}{l} \min_{w\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})}\int_0^T c_2 w'^2(t)+c_1 w(t)dt \\ w(0)=0 \\ w(T)=B \end{array}\right.$$

11. Vérifier *a posteriori* les conditions sous lesquelles ces solutions vérifient $w(t)>0$ et $w'(t)\geq 0$ pour $t\in]0,T]$. On notera ces conditions H_1.

12. Si H_1 n'est pas respectée, que faire du point de vue du plan de production pour minimiser le coût et honorer la commande en temps voulu ?

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le développement durable a été défini en 1987 par Mme Brundtland, Premier Ministre norvégien, comme «*un développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs.»*

Selon vous, quelles sont les conditions nécessaires à cet équilibre, en Afrique notamment ?

Sujet n° 2

«Une éthique des sciences est-elle nécessaire ?»

Argumentez avec des exemples.

Sujet n° 3

«*Ceux qui ne peuvent pas se souvenir du passé sont condamnés à le répéter*.» (George Santayana, «La Vie de la Raison»)

Quelles réflexions vous inspire cette phrase ? Vous pouvez envisager votre réflexion du point de vue de l'histoire collective mais aussi individuelle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour n entier ≥ 1, On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp.$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

Si $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \leq B$ (resp. $A < B$.) si pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ (resp. $a_{i,j} < b_{i,j}$). A est positive (resp. strictement positive) si $A \geq [0]$ (resp $A > [0]$),[0] désigne la matrice nulle.

Un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est dit positif (resp. strictement positif) si ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives).

Une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Partie I

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme : $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto ||x|| = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$.

1. Montrer que $|| \ ||_\infty \quad : \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$||A||_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

est une norme.

2. Si $A = (a_{i,j})$, vérifier que

$$||A||_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

3. Montrer que la norme $|| \ ||_\infty$ est sous-multiplicative.

Partie II

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $|A| = (|a_{i,j}|)$ et $|x| = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$, alors $|A + B| \le |A| + |B|$, $|AB| \le |A||B|$ et $|Ax| \le |A||x|$.

2. Montrer que si A est une matrice strictement positive et x un vecteur positif non nul alors Ax est un vecteur strictement positif.

3. Montrer que si A est une matrice positive et x un vecteur strictement positif alors $Ax = 0$ implique A=0.

4. Montrer que si deux complexes z, z' vérifient $|z + z'| = |z| + |z'|$, alors il existe un réel λ tel que $z' = \lambda z$.

5. En déduire que si $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^n$ sont n nombres complexes ($n \ge 2$) tels que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall \ k \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad z_k = e^{i\theta}|z_k|$$

6. Soit A une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$|Ax| = |A||x| \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

Partie III

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $|| \quad ||$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, on appelle rayon spectral le nombre $\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, $T = (t_{i,j})$ une matrice triangulaire semblable à la matrice A et λ une valeur propre de la matrice A.

1. Déterminer le rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 \neq c^2$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AX = \lambda X$.
3. En déduire que $\rho(A) \leq ||A||$.
4. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.
5. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. En déduire que $\rho(A) \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$.
6. Montrer que l'application $N : A \mapsto ||S^{-1}AS||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Soit $\varepsilon > 0$ et $\triangle = (\triangle_{i,j})$ la matrice donnée par

$$\triangle_{i,j} = 0, \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \triangle_{i,i} = d^{i-1}, 1 \leq i \leq n, \quad \text{où} \quad d > 0.$$

Calculer $\triangle^{-1}T\triangle$, En déduire qu'il existe une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

8. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} A^k = 0$.
9. En déduire que $\rho(A) = \lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}}$ (considérer la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$).

Partie IV

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive.

On note $\mathcal{S}_+ = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}/x \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

1. Montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}/\exists X \in \mathcal{S}_+, AX \geq \lambda X\}$$

est majoré et que sa borne supérieure λ_0 est une valeur propre réelle de A associée à un vecteur propre X strictement positif.

2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A, montrer que $|\lambda| < \lambda_0$.

3. Montrer que le sous espace propre E_{λ_0} de A associé à la valeur propre λ_0 est de dimension 1.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit A la matrice d'une application linéaire de R^n dans R^n.

1. Montrer que l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$ est $Ker(A^{'})$, où $\mathrm{Im}(A)$ désigne l'image de A et $Ker(A^{'})$ le noyau de la transposée $A^{'}$ de A.

2. Montrer que le problème de minimisation suivant $\underset{v \in R^n}{Min} \|Av - b\|^2$ admet au moins une solution que l'on notera u_0, où $b \in R^n$.

3. Montrer que si u_1 est une autre solution du problème précédent de minimisation, alors $Au_1 = Au_0$.

4. Résoudre le problème posé de minimisation dans le cas où le rang de la matrice A est égal à *n*.

Exercice n° 2

Soit f une fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$, convexe, croissante et non constante. Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 3

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la fonction numérique f définie sur R^2 par $f(x,y) = x^n + y^n - nxy$.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f et préciser leur nombre (on discutera selon la parité de n).
2. Dans toute la suite de cet exercice, on suppose $n = 4$. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur le disque $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. Calculer la valeur minimale de f sur D.
4. Vérifier l'inégalité $f(x,y) \leq 16 - 2x^2y^2 - 4xy$ pour tout couple (x,y) appartenant à D. En déduire la valeur maximale de f sur D.

Exercice n° 4

1. Soit f une fonction numérique de classe C^1 telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et vérifiant : $\exists a \in R^* / f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M au graphe de f passe par l'origine.
2. Soit g une fonction numérique deux fois dérivables sur un intervalle $[a,b]$ telle que $g(a) = g(b) \geq 0$ et $g''(x) \leq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Montrer que pour tout x de $[a,b]$ on a $g(x) \geq 0$.

Exercice n° 5

1. Développer en série entière $\ln(1-x)$ pour $0<|x|<1$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.
2. Calculer le réel $a=\sum_{n\geq 3}\frac{1}{2^n(n+1)(n-2)}$ (on pourra utiliser la fonction $S(x)=\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$).

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique continue sur R, périodique de période T.

1. Montrer que $\int_a^b f(nt)\,dt$ converge vers $\frac{(b-a)}{T}\int_0^T f(u)\,du$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour toute fonction en escalier φ sur R, nulle en dehors d'un intervalle borné, on a :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,du\right)$$

3. En déduire que le résultat ci-dessus reste vrai pour toute fonction continue sur un intervalle borné.

4. Expliciter le résultat précédent pour $f(t)=|\sin t|$ et $f(t)=\sin^2 t$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous résumerez en 200 mots l'article suivant « Bataille pour la survie du coton africain » de Tom Amadou Seck paru dans *Le Monde Diplomatique* de décembre 2005.

N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

BATAILLE POUR LA SURVIE DU COTON AFRICAIN

En Afrique de l'Ouest, 15 à 20 millions de personnes vivent directement ou indirectement du coton[1]. En raison de sa bonne qualité, il constitue l'un des rares secteurs où le continent noir demeure compétitif. Dès 2001, quatre pays du Sahel parmi les plus pauvres de la planète (Tchad, Burkina Faso, Mali, Bénin) ont donc demandé à l'Organisation Mondiale du Commerce (OMC) la suppression des subventions massives que les Etats-Unis et l'Union Européenne accordent à leurs producteurs[2]. Ils rappellent que les bailleurs de fonds internationaux leur imposent la plus stricte orthodoxie économique (privatisation des compagnies cotonnières, ouverture des marchés)[3], et ils demandent en contrepartie la fin des pratiques déloyales des pays industrialisés. Fruit de trois ans de travail entre producteurs, industriels et organisations non-gouvernementales (ONG)[4], cette initiative a été l'une des causes de l'échec de la conférence ministérielle de l'OMC de Cancún (Mexique) en septembre 2003[5].

[1] Les principaux pays concernés sont le Mali, le Bénin, le Burkina Faso, le Tchad, le Cameroun, le Niger, le Togo, le Sénégal, la Centrafrique, la Guinée-Bissau, la Côte d'Ivoire, Madagascar.
[2] Lire Denis Pesche et Kako Nubukpo, « L'Afrique du coton à Cancún : les acteurs d'une négociation », *Politique Africaine*, n° 158, octobre 2004.
[3] Lire André Linard, « Le coton africain sinistré », *Le Monde Diplomatique*, septembre 2003.
[4] « L'or blanc devient poussière. Quelle voie pour le coton en Afrique de l'Ouest ? », document de synthèse n° 58, Oxfan-ENDA, Dakar, avril 2004.
[5] En 2003, le Bénin et le Burkina ont soutenu la plainte déposée par le Brésil – quatrième exportateur mondial – contre les subventions agricoles américaines, devant l'Organe de règlement des différends (ORD) de l'OMC, qui a abouti à la condamnation des Etats-Unis.

Première anomalie, qui affecte le marché du coton, comme d'ailleurs ceux de l'ensemble des produits de base : ce ne sont pas les plus gros producteurs mais les premiers exportateurs qui déterminent les cours mondiaux. La Chine, plus gros producteur de coton, est aussi le premier consommateur : elle importe plus de 60 % de la production de la zone franc africaine. Deuxième producteur, devant l'Inde et le Pakistan, les Etats-Unis sont, et de loin, les premiers exportateurs, avec 37 % du marché. Les producteurs africains représentent 3,6 % de la production mais 17 % des exportations mondiales. Pour autant ce sont les exportations américaines qui définissent les cours mondiaux, et non celles des principaux producteurs.

Deuxième anomalie : la production américaine se trouve artificiellement dopée par l'intervention du gouvernement fédéral, sous forme d'aides directes aux producteurs (3,5 milliards de dollars) et de subventions aux exportations (1,5 milliard de dollars), qui représentent près de 50 % des subventions mondiales au coton. Les aides des Etats-Unis et, dans une moindre mesure, celles de l'Union Européenne aux producteurs espagnols et grecs alimentent une surproduction mondiale provoquant une chute des cours. En 2005, le prix mondial est tombé au-dessous de 55 cents (40 centimes d'euro) la livre. A 65 cents la livre, les producteurs africains ne dégagent déjà plus de bénéfices. Au dessous, ils produisent à perte, et devront réduire les surfaces cultivées en 2005-2006.

Pour le continent noir, les dégâts dépassent le secteur cotonnier. Durant les bonnes années, en effet, les groupements de producteurs réinvestissent les revenus de « l'or blanc » : réfection des pistes, construction d'écoles ou de dispensaires. La fibre constitue ainsi la première exportation du Burkina Faso et du Mali.

Les subventions américaines représentent trois fois le total de l'aide publique au développement des Etats-Unis au continent noir. En 2004, le Mali a perdu 43 millions de dollars en recettes d'exportation, alors que le soutien financier que lui apporte Washington s'élève à 38 millions de dollars. A la baisse des cours du coton s'ajoute la hausse des prix du carburant, qui renchérit d'autant les coûts de production, notamment dans les pays enclavés comme le Burkina, le Mali et le Tchad.

Au long des années 1990, les producteurs de coton africains ont effectué de considérables efforts pour s'adapter aux exigences du marché mondial. Sous la pression des bailleurs de fonds, en premier lieu la Banque mondiale, ils ont dû enclencher la privatisation des sociétés de collecte, telle la Compagnie malienne de développement des textiles (CMDT), qui leur garantissait des prix planchers, la fourniture d'intrants et l'achat de matériel[6]. Ce processus a profondément désorganisé les filières et fragilisé les paysans. Les producteurs ont dû se regrouper : au Burkina, ils ont obtenu de siéger au conseil d'administration de la Sofitex, l'entreprise publique reprise par le groupe français Dagris. L'Union nationale des producteurs de coton du Burkina Faso (UNPCB) et son responsable, M. François Traoré, ont mobilisé d'autres organisations de producteurs – au Bénin, au Mali, au Sénégal, au Cameroun, à Madagascar – et donné naissance à une organisation continentale : l'Association des producteurs de coton africain (Aproca).

[6] Voir notre supplément « Le coton, atout de l'Afrique rurale », *Le Monde Diplomatique,* mai 1999.

L'Aproca a réussi à s'attirer les bonnes grâces de l'Association cotonnière africaine (ACA), qui regroupe les principales sociétés cotonnières de la sous-région. Mieux, elle a mis en place une « cyberpétition » contre les subventions agricoles du Nord, qui a recueilli 250 000 signatures. Mais de nombreux dirigeants politiques africains redoutent des représailles de Washington dans le cadre de l'African Growth and Opportunity Act (AGOA)[7].

Les pays africains souhaitent dissocier le dossier coton de celui de l'agriculture en général, compte tenu du rôle vital de la fibre dans leurs économies. Ils réclament des mesures compensatoires, notamment la mise en place d'un fonds d'urgence d'appui à la production cotonnière. Ils attendent aussi des progrès de la recherche agronomique pour lutter contre la stagnation des rendements, et ils veulent pouvoir discuter de l'introduction des organismes génétiquement modifiés (OGM), que les Etats-Unis tentent d'imposer dans leurs rapports bilatéraux avec les pays du continent.

L'Alliance Sud-Sud apparue à Cancún avec la création du G21[8] n'est pas sans contradictions. Sur la question agricole, en effet, une victoire du Brésil pourrait se révéler être celle de *l'agro-business* au détriment de l'agriculture familiale des paysans africains. Selon le fonds international pour le développement de l'agriculture (FIDA) des Nations unies, l'agriculture familiale demeure le moteur de la croissance et de la productivité pour la production vivrière. C'est elle qui contribue à la sécurité alimentaire et à la lutte contre la famine et la pauvreté, tout particulièrement en Afrique subsaharienne.

Tom Amadou Seck
Le Monde Diplomatique, décembre 2005

[7] Loi votée en mai 2000 par le Congrès américain, et qui établit un règlement concernant les relations économiques et commerciales entre les Etats-Unis et 48 pays africains (excepté le Maghreb) ; www.agoa.gov
[8] Afrique du Sud, Argentine, Bolivie, Brésil, Chili, Chine, Colombie, Costa Rica, Cuba, Egypte, Equateur, Guatemala, Inde, Mexique, Pakistan, Paraguay, Pérou, Philippines, Salvador, Thaïlande, Venezuela. Lire Hugo Ruiz-Diaz, « Une tribune pour les pays du Sud », *Le Monde Diplomatique*, septembre 2005.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

I. Exercice

Soit z un nombre complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On dit que $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ est le rayon de la série $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ si r est la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels positifs R tels que pour tout $|z| \leq R$, la série est absolument convergente où $|\ .\ |$ désigne le module d'un nombre complexe.

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série de rayon r fini. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, tel que $|z_0| = r$. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n z_0^n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ est uniformément convergente sur $[0, z_0]$.
2. Soit une réel x. On considère la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$
   (a) Quel est son rayon ?
   (b) Que vaut cette série pour tout $x \in]-1, 1[$?
   (c) Quel est le comportement de cette série pour $x = 1$?
   (d) Quel est le comportement de cette série sur $[0, 1]$?
   (e) Que dire de la régularité de la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ lorsque $x \in [0, 1]$?
   (f) Calculer
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(g) Déterminer de la même manière la valeur de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$

II. Problème

Estimation de l'erreur dans l'approximation des intégrales par la méthode de Poncelet.

Méthode 1

- **A. Question préliminaire**

1. Soit g une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[-1;1]$. Soit l'application G de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0;1], \quad G(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0) - Kx^3$$

où K est une constante que l'on choisira de telle sorte que $G(1) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un réel $\theta \in]0;1[$ tel que

$$K = \frac{g'(\theta) - g'(-\theta)}{6\theta}.$$

(*on pensera à utiliser le théorème de Rolle*)

(b) En déduire qu'il existe un réel $\eta \in]-1;1[$ tel que $K = \frac{1}{3}g''(\eta)$.

2. Montrer à l'aide du **A.**1.(b) que si h est une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ $(a < b)$, alors il existe un réel $\xi \in]a;b[$ tel que

$$\int_a^b h(t)dt = (b-a)h\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}h''(\xi).$$

- **B. Application**

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0;1]$. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right).$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. Donner une expression de sa limite l.

2. Montrer que

$$|S_n - l| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}, \tag{1}$$

où $\|f''\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f''(x)|$.

3. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $l - S_n = \dfrac{1}{12n^2}$. En déduire que la borne (1) de $|S_n - l|$ est optimale (c'est-à-dire du même degré en $\dfrac{1}{n}$).

Méthode 2

Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[0;1]$. On pose

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_0^1 f(x)dx.$$

1. Montrer que si l'application f est affine, alors $R_n(f) = 0$.
2. Montrer que si l'application f est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0;1]$, alors pour tout $x \in]0;1[$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^1 \varphi_t(x) f''(t)dt,$$

   où $\varphi_t(x) = \sup(0; x-t)$.
3. Montrer que si f est deux fois continûment dérivable sur $[0;1]$,

$$R_n(f) = \int_0^1 R_n(\varphi_t) f''(t)dt.$$

4. On définit maintenant le noyau de Péano par $K_n(t) = R_n(\varphi_t)$.
   (a) Décrire $K_n(t)$.
   (b) Montrer que

$$\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{1}{24n^2}.$$

   (c) En déduire que si f est deux fois dérivable sur $[0;1]$, alors

$$|R_n(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Que pensez-vous de cette phrase de Victor Hugo, écrivain français du 19ème siècle : « *Une moitié de l'espèce humaine est hors de l'égalité, il faut l'y faire rentrer : donner pour contre-poids au droit de l'homme le droit de la femme ».* Est-elle toujours d'actualité ? Expliquez votre point de vue.

Sujet n° 2

Quelles sont, selon vous, les conditions indispensables pour qu'un accès à l'éducation pour tous soit possible ?

Sujet n° 3

Nelson Mandela, ancien Président de la République d'Afrique du Sud, a déclaré en novembre 2006 : « *Ce sont les hommes qui créent la pauvreté et la tolèrent, et ce sont les hommes qui la vaincront.* » Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour n, p entiers ≥ 1, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$ est notée ${}^tM$.

Si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire usuel par $< X, Y >= {}^tXY$, la norme associée est notée $||X||_2 = \sqrt{< X, X >}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\Phi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \longmapsto AX$, on pose :

$$||\Phi_A|| = \sup_{||X||_2 \leq 1} ||AX||_2 = ||A||$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
$$||AB|| \leq ||A|| \; ||B|| \quad \text{et} \quad ||AX||_2 \leq ||A|| \; ||X||_2$$

Sp(A) désigne le spectre (l'ensemble des valeurs propres) de A.

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si la forme quadratique $q_A : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tXAX \in \mathbb{R}$ est définie positive.

Partie I

On note H_n la matrice de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $H_n = (a_{i,j})$ où :

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad i,j \in \{1, \cdots, n+1\}$$

sa forme quadratique associée est notée q_n. On a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$q_n(X) = {}^tXH_nX$$

1. Montrer que $q_n(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1t + \cdots + x_nt^n)^2 dt$ si ${}^tX = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

2. a) Montrer que si P est un polynôme à coefficients complexes, on a :

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0$$

b) En déduire que :

$$q_n(X) < \int_0^{\pi} |x_0 + x_1e^{i\theta} + \cdots + x_ne^{in\theta}|^2 dt$$

c) En utilisant b), établir que : $q_n(X) < \pi||X||_2^2$.

3. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont des éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

4. En déduire que $Sp(H_n)$ est une partie de $]0, \pi[$.

5. a) Déterminer $Sp(H_1)$.

b) Écrire l'expression de $q_1(X)$ dans une base orthonormale de vecteurs propres.

c) En déduire la nature de l'ensemble Γ défini ainsi :

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\}$$

d) Représenter Γ dans un repére orthonormé en prenant 2 cm pour unité.

6. Montrer que l'application $N : X \longmapsto \sqrt{{}^tXH_1X}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Que représente Γ pour N sur $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

Partie II

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$B = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \min(Sp(A)), \quad \alpha_2 = \min(Sp(B)), \quad \beta_1 = \max(Sp(A)) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \max(Sp(B))$$

1. Montrer que si B est une matrice symétrique définie positive, alors A est une matrice symétrique définie positive et a est strictement positif.

2. En exprimant $q_A(X)$ dans une base convenable, montrer que : $\alpha_1 = \min\limits_{||X||_2=1}(q_A(X))$ et $\beta_1 = \max\limits_{||X||_2=1}(q_A(X))$.

3. En déduire que $\alpha_2 \leq \alpha_1$ et $\beta_1 \leq \beta_2$.

4. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $q_B(Y) = q_A(X) + 2u^t XC + au^2$.

b) Montrer que $q_B(Y) \leq \begin{pmatrix} ||X||_2 & |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & ||C||_2 \\ ||C||_2 & |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||X||_2 \\ |u| \end{pmatrix}$.

c) En déduire que $\beta_2 \leq \dfrac{1}{2}\left\{\beta_1 + a + \sqrt{4||C||_2^2 + (\beta_1 - a)^2}\right\}$.

5. On considère $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$ et on pose $\alpha_n = \min(Sp(H_n))$, $\beta_n = \max(Sp(H_n))$. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante avec :

$$\beta_{n+1} \leq \beta_n + \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Partie III

On définit sur $\mathbb{R}_n[t]$ (ensemble des polynômes de degré n) l'application bilinéaire suivante :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[t], \qquad < P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

et on pose :

$$\delta_n = \inf_{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) dt$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. En déduire qu'il existe un unique vecteur $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\delta_n = \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) dt$$

$$\text{et } \forall k \in \{0, \cdots, n-1\}, \quad \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) t^k dt = 0$$

3. Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{X+n-1} + \frac{1}{X+n+1}$$

a) Montrer que $F(0) = F(1) = \cdots = F(n-1) = 0$.

b) En déduire que $F(X)$ s'exprime sous la forme :

$$F(X) = \frac{A(X)}{(X+1)(X+2)\cdots(X+n+1)}$$

On déterminera explicitement $A(X)$.

c) En déduire que $\delta_n = F(n) = \dfrac{(n!)^4}{2n!(2n+1)!}$.

4. α_n ayant été défini à la question II. 5., montrer que :

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{12.15^n}$$

Partie IV

Pour toute matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel défini par :

$$C(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$$

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'unique solution de $AX = B$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \neq 0$. Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que : $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{||\Delta X||_2}{||X||_2} \leq C(A)\frac{||\Delta B||_2}{||B||_2}$$

2. Montrer que pour toute matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$C(A) = \sqrt{\frac{\max\left(Sp({}^tAA)\right)}{\min\left(Sp({}^tAA)\right)}}$$

3. En déduire une expression de $C(A)$ lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

4. Montrer que si $C(A) = 1$ alors il existe $\mu > 0$ tel que la matrice μA soit orthogonale.

5. Comparer $C(A)$ et $C(QA)$ si Q est une matrice orthogonale.

6. Donner une minoration de $C(H_n)$ grâce au calcul de β_1, $n \geq 1$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) , notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :
$$\frac{Ln\, n}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Ln\, n}{n}$$

(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

3. Montrer que $Ln(u_n)$ est équivalent à $-Ln\, n$ et en déduire que $x_n = 1 - \frac{Ln\, n}{n} + o\left(\frac{Ln\, n}{n}\right)$

Exercice ° 2

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$

Exercice n° 3

Déterminer toutes les fonctions numériques f, continues sur R, qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)\, f(t)\, dt$$

Exercice n° 4

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_R g(x) f_n(x)\, dx$

Exercice n° 5

On considère la suite d'intégrales $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\, dx$,

où $tg(x)$ désigne la tangente de x

1. Trouver une relation de récurrence concernant cette suite.
2. Montrer que la suite I_n est convergente.
3. Trouver un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 6

Buffon (plus connu comme naturaliste) avait posé le problème suivant : « Si on lance une aiguille de longueur l sur un parquet dont les lames sont de largeur a, quelle est la probabilité *p* pour que l'aiguille tombe à cheval sur deux lames ? ».

1. On suppose que $l \leq a$. On note *d* la distance du milieu de l'aiguille à la lame la plus proche et θ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) la mesure de l'angle que fait l'aiguille avec la direction orthogonale à cette lame.

- A quelle condition a-t-on un chevauchement ?
- Calculer *p* (on pourra utiliser la courbe représentative de la fonction $\theta \to \frac{l}{2}\cos\theta$).

2. On suppose $l > a$. Calculer *p* .

Exercice n° 7

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$\forall x \in R, \quad f(x) = (1-x) f(\alpha x)$ où f est une fonction continue.

1. Montrer que si f et g sont deux solutions de (E) qui vérifient $f(0) = g(0)$, alors elles sont égales.

2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous contracterez au 1/5ème (en 200 mots) le texte suivant « Trente ans de bouleversements dans le monde » de Pierre Dockès.

N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

Trente ans de bouleversements dans le monde

La vague de mondialisation des XX- XXI siècles s'est développée en deux temps assez différents, séparés par la période de transition des années 1973-1989 : 1973, le retournement du rythme de croissance et 1989, la victoire du capitalisme à l'échelle mondiale.

Le capitalisme a changé. Il a accouché d'un nouvel ordre productif dans les années 1970-1980, à l'œuvre dès les années 1990, mais non abouti, donc dangereusement instable. On sait ses caractéristiques, sa base technique renouvelée, qui donne une importance essentielle à la connaissance, l'importance centrale des marchés financiers globalisés avec la place devenue fondamentale des échanges de capitaux dans la formation des profits, les transformations du rapport salarial, des rapports de force entre le travail et le capital, celles parallèles des modes d'organisation et de gouvernance des entreprises (avec le changement des rapports entre les *managers* et les capitalistes), la suprématie de la régulation par le marché par nature mondialisable sur les régulations volontaires restées essentiellement dans le cadre des Etats-nations.

Le monde a changé. La fin du communisme et la transition de la Russie, de l'Europe orientale, de la Chine vers le capitalisme ont produit un rebond de mondialisation – une mondialisation sans adversaires systémiques, mais avec un potentiel d'affrontements internationaux considérables. Et la Chine, l'Inde, la Russie, le Brésil sont en voie de rattrapage rapide. La Chine a un taux de croissance moyen de 10% depuis quinze ans, or il s'agit de plus d'un cinquième de la population mondiale. Certes, la croissance chinoise est instable, car elle est fondée sur la croissance des exportations, les investissements directs étrangers, les dépenses d'infrastructures et de nombreuses entreprises sont en surproduction, très endettées. Ce rattrapage est cependant irréversible. Depuis le début des années 1990, les pays émergents ont gagné six points de parts du marché mondial en volume.

Cet élargissement du monde constitue un changement quantitatif majeur : plus de 700 millions de travailleurs (non agricoles) entrent dans la compétition mondiale. On assiste a une redistribution des « poids » économiques des nations, le poids relatif de l'Europe et du Japon se réduisant davantage que celui des Etats-Unis, qui conservent leur position dominante.

L'intégration mondiale atteint un degré inégalé puisqu'on a retrouvé, puis dépassé l'ouverture des économies nationales atteinte en 1870, aussi bien en ce qui concerne les flux de marchandises que les flux de capitaux. Depuis quinze ans, les exportations mondiales sont passées de 19% à 24%, les flux de capitaux privés de 10% à 25% du PIB mondial. Cette mondialisation des marchés s'est développée sans que se mette en place un mode de régulation intentionnelle à la même échelle (même s'il existe des esquisses). Est-ce pour cela que la libération des échanges de biens et services a probablement atteint ses limites - l'échec redoublé de Doha est révélateur -, que de tous côtés, on appréhende mieux le risque d'instabilité des flux de capitaux ?

L'Europe et la France ont perdu. Le choc concurrentiel sur la France, plus généralement sur les pays du Nord, est considérable et croissant, et pas seulement sur l'industrie intensive en travail peu qualifié.

Cependant, depuis 1990, les pays du Nord sont dans des situations très différentes les unes des autres. Le Japon est resté durablement en déflation. Les Etats-Unis ont bénéficié de taux de croissance presque deux fois plus élevés que l'Europe (un point et demi de taux de croissance en plus) et ils récupèrent le terrain perdu dans les années 1950 et 1960. Ils ont retrouvé un dynamisme économique spectaculaire, ils ont été la matrice du nouvel ordre productif et de la troisième révolution industrielle. Leur croissance a été soutenue par la consommation, appuyée sur l'endettement, relayée par l'investissement. Une situation très fragile, en particulier parce que le financement de la croissance s'appuyant toujours davantage sur l'épargne étrangère (notamment chinoise), la balance commerciale s'enfonce nécessairement dans le déficit.

Quant à l'Europe, depuis quinze ans, son PIB par tête se détériore relativement aux autres pays de l'OCDE avec le déclin relatif de la productivité. L'Europe continentale, et plus spécialement la zone euro, n'a que des taux de croissance entre 1% et 2%. Depuis 1989, la globalisation a eu des effets négatifs sur le taux de croissance européen, mais modestes. Les effets du côté de la demande (prix plus bas, plus grande variété des produits) ont été modérément positifs ; en revanche, du côté de l'offre ils sont tous négatifs (accroissement du taux de pénétration des importations, déplacement de la demande mondiale vers des biens non européens, accroissement des sorties d'investissements directs à l'étranger dû à l'*offshoring,* tendance renforcée par l'*outsourcing*[1]).

Cependant, la perte due à la mondialisation est restée modeste : 0,1% du taux de croissance par tête entre 1991 et 2003. Il ne faut pas négliger le fait que les pays émergents constituent un marché potentiellement élevé (si le marché chinois est essentiellement orienté vers les moyens de production, l'énergie, les matières premières, la consommation ne devrait pas manquer de suivre). La balance commerciale de l'Europe s'améliore avec le reste du monde, malgré le déficit croissant avec la Chine. Et il y a une forte complémentarité des biens pour lesquels l'Europe est bien placée (moyenne et haute technologie, biens d'équipements) et ceux produits par la Chine (basse technologie, biens travaillistiques, produits en relation avec les nouvelles technologies).

Dockès, Pierre, 2006, octobre 2006, « Trente ans de bouleversements dans le monde », pp. 208 à 212, le Cercle des économistes, *Politique économique de DROITE, Politique économique de GAUCHE.*

[1] *Offshoring*, création d'établissements à l'étranger par l'investissement direct ; *outsourcing*, recours à des sous-traitants étrangers ou en encourageant la délocalisation de ses sous-traitants domestiques.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1.

On rappelle le résultat suivant : on dit que le nombre réel $p \neq 0$ est une période de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si pour tout x réel, $f(x+p) = f(x)$. On dit alors que f est périodique. Si de plus f est continue non constante, elle admet une plus petite période strictement positive appelée **la** période de f.

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels et on considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est périodique.
2. Soit a une période de f, montrer que a est rationnel.
3. Soit a un rationnel quelconque, considérons x réel, quelle est la nature de x et $x+a$: rationnel, irrationnel ?
4. Montrer que le groupe des périodes de f n'a pas de plus petit élément.

Exercice 2.

Soit f_n le terme général d'une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément et préciser sa limite.
2. Les fonctions f_n sont-elles dérivables ? La limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle dérivable ?
3. Soit $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des dérivées premières de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Quelle est la nature de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Conclure.

Problème

Soit Y une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité notée f, strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. On suppose dans tout le problème que cette variable admet une espérance notée μ et une variance notée $\sigma^2 > 0$. On note p un réel appartenant à $]0;1[$, F_Y la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et $\mathbb{E}(g(Y))$ l'espérance de $g(Y)$ lorsque cette espérance existe. On définit F_Y par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(y)dy.$$

- **Préliminaires.**

1. Soit t un réel quelconque. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \geq t^2 \int_{t}^{+\infty} f(x)dx.$$

   Ecrire cette inégalité en utilisant la fonction F_Y et l'espérance de Y^2.

2. La fonction de répartition F_Y est-elle strictement monotone ?
3. Exprimer $P(Y - \mu > t)$ à l'aide de la fonction de répartition de Y.
4. On note Z la variable définie par :

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}.$$

   Soit t un réel quelconque. Exprimer $F_Y(t)$ à l'aide de la fonction de répartition de Z.

5. Soit t un réel quelconque. Exprimer $\mathbb{E}[(t - Y)^2]$ en fonction de t, μ, σ^2. Que vaut cette expression pour $t = \mu$?
6. On considère ici $\mu = 0$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$:

$$t \leq \sqrt{\mathbb{E}((t - Y)^2)}\sqrt{\mathbb{P}(Y < t)}. \tag{1}$$

- **Question 1.**

1. On supposera dans cette question que Y est d'espérance nulle : $\mu = 0$. Soit $p \in]0;1[$, montrer que, pour tout élément $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :

$$t \leq \sigma\sqrt{\frac{1}{1-p}}.$$

2. L'espérance μ est maintenant quelconque. Soit $p \in]0;1[$. Déduire des questions précédentes que, pour tout élément $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :

$$t \leq \sigma\sqrt{\frac{1}{1-p}} + \mu.$$

3. Montrer que le neuvième décile de la loi de Y peut être majoré par :

$$\sigma\sqrt{10} + \mu.$$

- **Question 2.** Le but de cette question est d'affiner l'inégalité obtenue précédemment.

  1. On suppose ici que $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Déduire des questions préliminaires que, pour tout réel $t > 0$:
  $$\mathbb{P}(Y > t) \leq \frac{1}{t^2+1}.$$
  2. Soit $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire Y est toujours telle que $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. En déduire que, pour tout réel $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :
  $$t \leq \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$
  3. L'espérance μ et la variance $\sigma^2 > 0$ de Y sont maintenant quelconques. Soit $p \in]0; 1[$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :
  $$t \leq \sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}} + \mu. \tag{2}$$
  4. Montrer que le neuvième décile de la loi de Y peut être majoré par :
  $$3\sigma + \mu.$$

- **Question 3.**

  1. Quelle est l'utilité d'un tel résultat ?
  2. Diriez-vous que le résultat (2) est généralisable à tout type de variable aléatoire ? Argumenter précisément la réponse donnée.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Définissez, commentez et illustrez ce qu'est, pour vous, une éducation réussie.

Sujet n° 2

« Mon plus gros défi pour gagner est de convaincre les Libériens qu'une femme est assez forte pour imposer sa volonté dans ce pays », à partir de cette citation de Ellen Johnson-Sirleaf, présidente du Liberia depuis janvier 2006, vous réfléchirez à la place des femmes en politique.

Sujet n° 3

« En démocratie, douter des vérités reçues est une vertu critique » Elie Wiesel, « La Cité des hommes », *Le Monde*. Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET D'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n, $(n \geq 1)$.

Partie I

Dans cette partie on étudie les propriétés spectrales d'une application semi-linéaire.
Une application u de E dans lui-même est dite semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(a\ x + y) = \overline{a}\ u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\bar{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu\ x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu\ x$.

b. Soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu\, x$:

$$E_\mu = \{x \ : \ u(x) = \mu\, x\}$$

E_μ est-il un espace vectoriel réel ?

c. Soit μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Démontrer que pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore une valeur co-propre de u.

d. L'ensemble E_μ est-il un espace vectoriel complexe ?

e. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

Partie II

Soient u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace vectoriel E. A un vecteur x, de coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est associée une matrice-colonne X d'éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n$ appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A.\overline{X}.$$

La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u respectivement dans les bases $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0,($X \neq 0$) est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

c. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

d. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

Partie III

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n et T une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a. Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

b. Soient λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

- les vecteurs $\overline{A}.X$ et X sont liés ,
- les vecteurs $\overline{A}.X$ et X sont indépendants.

c. En déduire que le réel positif ou nul μ est une valeur co-propre de la matrice A, si et seulement si le réel μ^2 est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

d. Soit λ est une valeur propre de la matrice T. Démontrer que pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice T.

e . Soit μ est une valeur propre de la matrice T. Démontrer qu'il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice T.

f. Soit S la matrice définie par :

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser :

$$X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}.$$

g. Soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + iC.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Partie IV

On dit qu'une matrice A d'ordre n est co-diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $P.A.\overline{P}^{-1}$ soit diagonale.

1. Montrer que si A est co-diagonalisable alors la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

On suppose maintenant qu'une matrice carrée complexe A d'ordre n vérifie les trois propriétés suivantes :

i) la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable,

ii) les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ sont positives ou nulles,

iii) le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

En vue de ii), soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A.\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon quelles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \geq 0.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, ont respectivement les multiplicités $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale Λ semblable à la matrice $A.\overline{A}$, s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse il existe une matrice P inversible telle que

$$A.\overline{A} = P.\Lambda.P^{-1}.$$

Soit B la matrice définie par la relation suivante :

$$B = P^{-1}.A.\overline{P}.$$

2. Les relations suivantes sont-elles vérifiées ?

$$B.\overline{B} = \overline{B}.B \ ; \ B.\Lambda = \Lambda.B.$$

3. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$$

4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale D d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = Q.D.\overline{Q^{-1}}.$$

Conclure que toute matrice vérifiant les hypothèses $i), ii)$ et $iii)$ est co-diagonalisable.

5. Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n, S est-elle co-diagonalisable ?

Soient B, C, D et E les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? co-diagonalisables ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R *désigne l'ensemble des nombres réels.*

Exercice n° 1

1. Montrer que les fonctions $\cos x \, Ln\,(\sin x)$ et $\cos x \; Ln(tg\, x)$ sont intégrables sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, où $Ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x \, Ln(\sin x) dx$.

3. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x \, Ln(tg\, x) dx$.

Exercice n° 2

Soit la fonction gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

2. Calculer $I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$ en fonction de x et n.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - \frac{t}{n})^n$.

4. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)...(x+n)}$

Exercice n° 3

Soit $y(x)$ une fonction deux fois continument dérivable définie sur R. On considère l'équation différentielle suivante :
$y''(x)+xy'(x)+2y(x)=0$ avec les conditions : $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$

1. Vérifier que $y(x)=-xe^{-x^2/2}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

2. Quelles sont les fonctions numériques continues qui vérifient :

$$f(x)=-1-\int_0^x (2x-t)\,f(t)\,dt$$

Exercice n° 4

Pour $k>1$ et $x\in R$ positif, on pose

$$f_k(x)=\frac{\left((k-1)x+1\right)^{k/k-1}-kx-1}{k}$$

et

$$f_k^*(y)=\underset{x\in R}{Sup}\,(xy-f_k(x))$$

1. Calculer $f_k^*(x)$ pour $k=2$.
2. Etudier la convexité de $f_k(x)$.
3. Calculer $f_k^*(y)$ pour tout $k>1$.

Exercice n° 5

Soit A une partie non vide de R^2 et $a\in A$. On définit alors l'ensemble suivant :

$$T(A,a)=\left\{u\in R^2 / \exists(x_n)\in A,\ \exists\lambda_n>0,\ x_n\to a,\ \lambda_n(x_n-a)\to u\right\}$$

1. Montrer que $(0,0)\in T(A,a)$.
2. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble stable par homothétie positive.
3. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2.

4. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe de R^2.
5. Soit $A = R^+ \times R^+$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.
6. Soit $A = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.

Exercice n° 6

Etudier la série de terme général : $u_n = Ln(1 + \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right))$ pour $\alpha > 0$

Exercice n° 7

Soit $Y = (y_1, ..., y_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs.

1. Résoudre le problème de minimisation suivant : $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha)^2$
2. Soit $X = (x_1, ..., x_n)$ un autre n-uplet de valeurs positives réelles, trouver le nombre réel a solution du problème de minimisation suivant : $\underset{a \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i)^2$
3. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$
4. Montrer qu'il existe une unique solution, strictement positive, au problème de minimisation suivant : $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha)^4$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous contracterez en 150 mots environ le texte suivant « Pour une dialectique des cultures » de Paul Ricœur. N'oubliez pas de préciser le nombre exact de mots utilisés à la fin de votre copie.

Pour une dialectique des cultures

Comment est possible une rencontre de cultures diverses, entendons : une rencontre qui ne soit pas mortelle pour tous ? Il paraît en effet ressortir des réflexions précédentes que les cultures sont incommunicables ; et pourtant l'étrangeté de l'homme pour l'homme n'est jamais absolue. L'homme est un étranger pour l'homme certes, mais toujours aussi un semblable.

Quand nous débarquons dans un pays tout à fait étranger, comme ce fut le cas pour moi, il y a quelques années en Chine, nous sentons que malgré le plus grand dépaysement nous ne sommes jamais sortis de l'espèce humaine ; mais ce sentiment reste aveugle, il faut l'élever au rang d'un pari et d'une affirmation volontaire de l'identité de l'homme. C'est ce pari raisonnable que tel égyptologue fit jadis quand découvrant des signes incompréhensibles, il posa en principe que si ces signes étaient de l'homme, ils pouvaient et devaient être traduits[1]. Certes dans une traduction tout ne passe pas, mais toujours quelque chose passe.

Il n'y a pas de raison, il n'y a pas de probabilité, qu'un système linguistique soit intraduisible. Croire la traduction possible jusqu'à un certain point, c'est affirmer que l'étranger est un homme, bref, c'est croire que la communication est possible. Ce qu'on vient de dire du langage – des signes – vaut aussi pour les valeurs, les images de base, les symboles qui constituent le fonds culturel d'un peuple. Oui, je crois qu'il est possible de comprendre par sympathie et par imagination l'autre que moi, comme je comprends un personnage de roman, de théâtre ou un ami réel mais différent de moi ; bien plus, je puis comprendre sans répéter, me représenter sans revivre, me faire autre en restant moi-même. Etre homme, c'est être capable de transfert dans un autre centre de perspective.

[1] Allusion à Champollion (1790 - 1832) qui déchiffra le premier des hiéroglyphes égyptiens.

Alors on se pose la question de confiance : qu'arrive-t-il à mes valeurs quand je comprends celles des autres peuples ? La compréhension est une aventure redoutable où tous les héritages culturels risquent de sombrer dans un syncrétisme[2] vague. Il me semble néanmoins que nous avons donné tout à l'heure les éléments d'une réponse fragile et provisoire : seule une culture vivante, à la fois fidèle à ses origines et en état de créativité sur le plan de l'art, de la littérature, de la philosophie, de la spiritualité, est capable de supporter la rencontre des autres cultures, non seulement de la supporter, mais de donner un sens à cette rencontre. Lorsque la rencontre est une confrontation d'impulsions créatrices, une confrontation d'élans, elle est elle-même créatrice. Je crois que, de création à création, il existe une sorte de consonance en l'absence de tout accord.

C'est lorsqu'on est allé jusqu'au fond de la singularité que l'on sent qu'elle consonne avec toute autre, d'une certaine façon qu'on ne peut pas dire, d'une façon qu'on ne peut pas inscrire dans un discours. Je suis convaincu qu'un monde islamique qui se remet en mouvement, un monde hindou dont les vieilles méditations engendreraient une jeune histoire, auraient avec notre civilisation, notre culture européenne, cette proximité spécifique qu'ont entre eux tous les créateurs. Je crois que c'est là que finit le scepticisme.

Rien par conséquent n'est plus éloigné de la solution de notre problème que je ne sais quel syncrétisme vague et inconsistant. Au fond les syncrétismes sont toujours des phénomènes de retombée ; ils ne comportent rien de créateur, ce sont de simples précipités historiques. Aux syncrétismes, il faut opposer la communication, c'est-à-dire une relation dramatique dans laquelle tour à tour je m'affirme dans mon origine et je me livre à l'imagination d'autrui selon son autre civilisation. La vérité humaine n'est que dans ce procès où les civilisations s'affronteront de plus en plus à partir de ce qui en elle est le plus vivant, le plus créateur. L'histoire des hommes sera de plus en plus une vaste explication où chaque civilisation développera sa perception du monde dans l'affrontement avec toutes les autres. Or, ce procès commence à peine. Il est probablement la plus grande tâche à venir.

Nul ne peut dire ce qu'il adviendra de notre civilisation quand elle aura véritablement rencontré d'autres civilisations autrement que par le choc de la conquête et de la domination. Mais il faut bien avouer que cette rencontre n'a pas encore eu lieu au niveau d'un véritable dialogue. C'est pourquoi nous sommes dans une sorte d'intermède, d'interrègne, où nous ne pouvons plus pratiquer le dogmatisme de la vérité unique et où nous ne sommes pas encore capables de vaincre le scepticisme dans lequel nous sommes entrés. Nous sommes dans le tunnel, au crépuscule du dogmatisme, au seuil des vrais dialogues.

Paul Ricœur, Revue *Esprit* – Oct. 1961

[2] André Lalande, dans son vocabulaire, définit le syncrétisme : « une réunion facile d'idées ou de thèses d'origine disparate ». Il s'applique ici plus particulièrement à la fusion indistincte ou au résidu incohérent de diverses cultures, à quoi s'opposent leur compréhension véritable, créatrice et profonde et la communication.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1.

Soient, pour tout n entier naturel non nul, les séries de terme général u_n et w_n définies par

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \\ w_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

1. La série de terme général w_n est-elle une série convergente ?
2. La série de terme général u_n est-elle une série convergente ?
3. Montrer que u_n et w_n sont des suites équivalentes lorsque n tend vers l'infini.
4. Y-a-t il contradiction entre les trois points précédents ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 2.

On dit qu'un élément a réel est une valeur d'adhérence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a.

Soit la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = n\left(1 + (-1)^n\right).$$

1. Définir les sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicées par les entiers pairs, et par les entiers impairs respectivement. Les calculer.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t elle une valeur d'adhérence ?
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t elle ?
4. Sous quelles conditions, une suite réelle ayant une valeur d'adhérence converge-t elle ?

Exercice 3.

Soit le système différentiel (*) suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} f'(x) &= 3(f(x))^{\frac{2}{3}} \\ f(0) &= 0 \end{cases}$$

Les graphes de la figure **FIG.1** présentent les courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

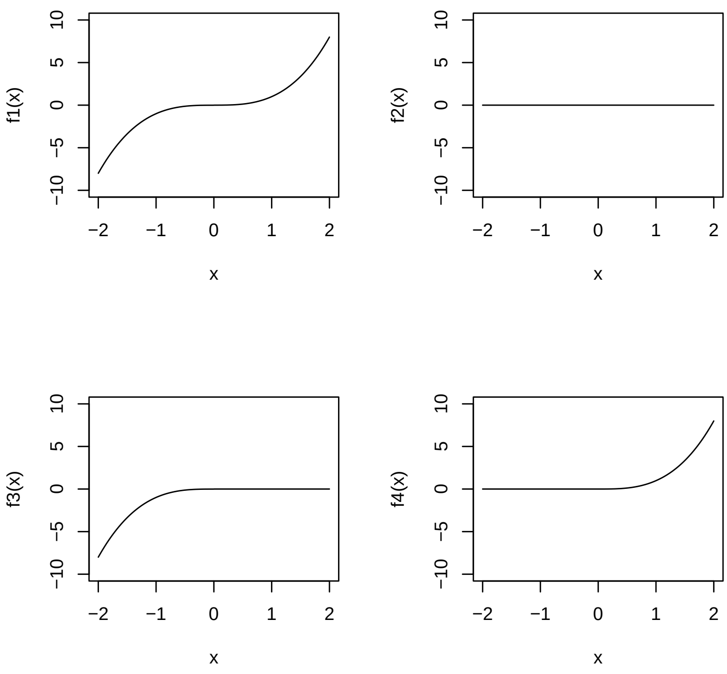


Fig. 1 – Courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

1. A l'aide des graphes de la figure **FIG.1**, déterminer laquelle (lesquelles) des applications f_1, f_2, f_3 ou f_4 est (sont) solution (s) du système différentiel (*).
2. Y-a-t il contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 4.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |x|$$

   (b) Montrer que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

   (c) Pour x non nul, la fonction f est-elle dérivable ? Dans l'affirmative, exprimer sa dérivée.

   (d) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}.$$

   Cette fonction g admet-elle une limite en 0 ?

   (e) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \left(\bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[\right) \\ 4^n x - 2 & \text{pour } x \in \bigcup_{n\geq 1}[\frac{2}{4^n};\frac{3}{4^n}[\\ -4^n x + 4 & \text{pour } x \in \bigcup_{n\geq 1}[\frac{3}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\end{cases}$$

   enfin, $h(-x) = h(x)$.

   (a) Montrer que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

   (b) Tracer la courbe représentative de h pour $x \in [\frac{1}{16};\frac{3}{2}]$ dans un repère orthonormé (O,i,j) : une unité sera représentée par 10 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

   (c) Calculer $h(\frac{3}{4^n})$. La fonction h est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier soigneusement la réponse.

   (d) Calculer en fonction de n les trois intégrales suivantes en utilisant au maximum la structure géométrique des courbes représentatives de ces fonctions

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx.$$

   (e) En déduire la valeur de $\int_0^1 h(x)dx$.

   (f) Soit y un réel positif. La fonction h est-elle intégrable sur $[0;y]$?

   (g) On pose

$$H(y) = \int_0^y h(x)dx.$$

   i. Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   ii. Quelle est la dérivée de H ? Est-elle majorée ?

   iii. Calculer

$$H\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad H\left(\frac{2}{4^n}\right).$$

iv. Soit

$$\mathcal{H}(x) = \frac{H(x)}{x}.$$

Calculer

$$\mathcal{H}\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}\left(\frac{2}{4^n}\right).$$

La fonction $\mathcal{H}$ admet-elle une limite en 0 ?

(h) La fonction H est-elle dérivable en 0 ?

.ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« Dans ce pays, ce sont les études qui permettent à nos enfants d'espérer quelque chose d'autre. » Barack Obama*, Eduquer nos enfants dans le contexte économique du XXIe siècle,* 25 octobre 2005. Discutez et illustrez cette citation.

Sujet n° 2

L'égalité entre les femmes et les hommes : réalité, projet ou utopie ? Vous illustrerez votre réflexion au plan universel, ainsi que dans votre propre pays.

Sujet n° 3

Expliquez et discutez cette définition de la mondialisation : « *Il s'agit d'un véritable coup d'Etat institutionnel à l'échelle de la planète.* » Citation d'Aminata Traoré, intellectuelle malienne et ancienne ministre de la culture du Mali, extraite de *Le viol de l'imaginaire*.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET D'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à p lignes et p colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_p$, on note $\underline{M}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de la matrice M dans la base canonique. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est désigné par $< .,. >$. La norme euclidienne est notée par $|| \, ||$. Finalement, pour tout endomorphisme η, on désigne par η^* son adjoint défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad < \eta(x), y > = < x, \eta^*(y) > .$$

Partie I

Soit n un entier ≥ 1. On appelle forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ une application $\omega \; : \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est

- Bilinéaire : Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $x \longmapsto \omega(x,y)$ est linéaire et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $y \longmapsto \omega(x,y)$ est linéaire.
- Antisymétrique : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.
- Non-dégénérée : Le seul vecteur x qui vérifie $\omega(x,y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur nul.

a. Soit η un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \omega(x,y) = < \eta(x), y > . \tag{1}$$

Montrer que ω est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si η est inversible.

b. Soit ω une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme η de $\mathbb{R}^n$ tel que la relation (1) soit vérifée. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.

c. Montrer que s'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, alors n est pair.

d. On suppose dans cette question que $n = 2m$. On pose

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \qquad \omega_0(x, y) =< \underline{J}x, y >$$

où J est la matrice donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$$

I_m étant la matrice unité.

1) Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2m}$.

2) Soit $(e_k)_{1 \le k \le 2m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$. Calculer $\omega_0(e_k, e_l), 1 \le k \le 2m, 1 \le l \le 2m$.

Partie II

On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle matrice symplectique toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ telle que

$$^tMJM = J.$$

1. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice symplectique?

2. L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication?

3. La matrice J est-elle symplectique?

4. La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique?

5. On écrit toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

   (a) Montrer que la matrice M est symplectique si et seulement si les matrices A, B, C, D vérifient les conditions
   $$\begin{cases} {}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont symétriques} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m \end{cases}$$

   (b) Montrer que si D est inversible, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ telle que
   $$M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Partie III

Soit M une matrice symplectique et soit P son polynôme caractéristique.

1. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P(\lambda) = \lambda^{2m} P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

2. Montrer que si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M, de multiplicité d, alors $\frac{1}{\lambda_0}, \overline{\lambda_0}, \frac{1}{\overline{\lambda_0}}$ sont des valeurs propres de M, chacune de multiplicité d.

3. Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de -1 et 1?

4. Donner des exemples de matrices symplectiques $\in \mathcal{M}_4$, diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et ayant

(a) une seule valeur propre ;

(b) deux valeurs propres doubles distinctes ;

(c) une valeur propre double et deux valeurs propres simples ;

(d) quatre valeurs propres distinctes non réelles et de module $\neq 1$.

Partie IV

Soient ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ et M sa matrice dans la base canonique.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}$, $\omega_0(\phi(x), \phi(y)) = \omega_0(x, y)$,

(ii) la matrice M est symplectique.

Un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ qui vérifie la propriété (i) ci-dessus est appelé *endomorphisme symplectique*.

Un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^n$ est dit *stable* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(||\psi^p(x)||)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée, où ψ^p désigne la composée de l'application ψ avec elle-même p fois.

2. Montrer que si un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^n$ a toutes ses valeurs propres distinctes et de module 1 dans $\mathbb{C}$, alors ϕ est stable.

3. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}_m$ pour que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique soit symplectique et stable.

b) Montrer que si un endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ possède une valeur propre dans $\mathbb{C}$ de module $\neq 1$, alors ϕ n'est pas stable.

4. On note $x_1, \cdots, x_{2m}$ les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^{2m}$ dans la base canonique. On considère les ensembles

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad \sum_{k=1}^{2m} x_k^2 \leq 1 \right\},$$

$$C_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\right\}$$

et

$$\Gamma_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad x_1^2 + x_{m+1}^2 \leq R^2\right\}, R \text{ étant un réel strictement positif.}$$

4. a) On suppose $m \geq 2$. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe un endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\phi(B) \subset C_R$.

b) Soit ϕ un endomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2m}$ et soit ϕ^* l'adjoint de ϕ par rapport au produit scalaire euclidien. Montrer que ou bien $||\phi^*(e_1)|| \geq 1$, ou bien $||\phi^*(e_{m+1})|| \geq 1$.

c) En déduire que, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\phi(B) \subset \Gamma_R$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Calculer $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Ln\,t}{1+t^2}\,dt$, pour tout réel x strictement positif.

2. Calculer $J=\iint_D (x^2-2y)\,dx\,dy$, où $D=\left\{(x,y)/\ x\geq 0, y\geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$. Les paramètres réels *a* et *b* sont supposés strictement positifs.

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in Q\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,1]$

2. Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $g(x)=(x-\frac{1}{2})f(x)$; étudier la continuité et la dérivabilité de g.

3. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x)=(x-\frac{1}{2})^2 f(x)$; étudier la continuité et la dérivabilité de h.

Exercice n° 3

1. Montrer qu'il existe une unique application $f : N^* \to N$ qui vérifie les trois propositions suivantes :

(1) $f(1) = 0$

(2) $f(p) = 1,$ pour tout nombre premier *p*.

(3) $f(xy) = yf(x) + xf(y),$ pour tout couple d'entiers non nuls.

On donnera une expression de $f(n)$ en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de *n* en produit de nombres premiers, à savoir $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, où $p_1,...p_k$ sont des nombres premiers.

2. Soit $n \in N^*$. Montrer que $f(n) = n$ si et seulement si $n = p^p$ où *p* est un nombre premier.

Exercice n° 4

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_1^e x(Ln\ x)^n dx$

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_0^1 x^n\ Ln(x+1)\,dx$

Exercice n° 5

Déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt, \text{ pour tout } x \in R.$$

Exercice n° 6

Un fournisseur livre deux sortes de boissons B1 et B2. Dans chaque livraison figurent 20% de boissons B1 et 80% de boissons B2.

1. On prélève, au hasard, 4 boissons dans une livraison de 50 boissons.

   - Préciser la probabilité d'avoir 4 boissons de type B1.

   - Préciser la probabilité d'avoir 1 boisson de type B1 et 3 boissons de type B2.

   - Préciser la probabilité d'avoir au moins une boisson de type B1.

2. On prélève maintenant une boisson, on note son type et on la remet dans le lot.
   On réalise *n* fois cette expérience et on note X le nombre de boissons B1 obtenues.

   - Exprimer la probabilité que $X \geq 1$ en fonction de *n*.

   - Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins une boisson B1 ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots le texte suivant extrait du livre « La nouvelle écologie politique – Economie et développement humain » de Jean-Paul FITOUSSI et Eloi LAURENT.

Il s'attachera à construire son résumé indépendamment du plan du texte et n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Repenser le développement humain

« La croissance est-elle obsolète ? ». C'est la question qui fut posée par William Nordhaus, spécialiste de l'économie de l'environnement, et le prix Nobel d'économie 1981 James Tobin[1] il y a plus de trente ans. Ils y répondirent par la négative. Et pourtant, « la croissance, écrivirent-ils, est accusée de brouiller les priorités nationales, d'aggraver la distribution du revenu et d'altérer de manière irréparable l'environnement […] Mais plutôt que de rejeter en bloc l'idée de croissance et son principal instrument de mesure, Nordhaus et Tobin tentèrent de partir du PIB (produit intérieur brut) pour l'améliorer et proposer « une mesure du bien-être humain ». Car selon eux, « l'état stationnaire classique ne doit pas devenir une norme utopiste ».

Le Rapport sur le développement humain des Nations Unies de 1990 a lui aussi marqué, à partir des travaux de Sen, un renouveau dans la conception du développement : « Ce que nous appelons le développement humain est le processus qui élargit l'éventail des possibilités offertes aux individus : vivre longtemps et en bonne santé, être instruit et disposer de ressources permettant un niveau de vie convenable sont des exigences fondamentales ; s'y ajoutent la liberté politique, la jouissance des droits de l'homme et le respect de soi[2] ». Sen résume cette approche en une superbe formule qui définit le développement « comme un processus d'expansion des libertés réelles dont jouissent les individus[3] ».

[1] W. Nordhaus et J. Tobin, « Is Growth Obsolete ?, in *The Measurement of Economic and Social Performance,*National Bureau of Economic Research, 1972.
[2] « Rapport mondial sur le développement humain, 1990, Définir et mesurer le développement humain », Nations Unies.
[3] Amartya Sen, *Un nouveau modèle économique, op. cit.*

De ces réflexions sont nés trois indicateurs principaux de développement humain : l'indice de développement humain (l'IDH) qui repose sur trois dimensions (l'espérance de vie, l'éducation et le revenu par habitant), l'indice de développement humain par genre (qui ajoute à l'IDH les inégalités entre hommes et femmes) et l'indice de pauvreté humaine (qui mesure la pauvreté non pas sous forme monétaire, mais selon les dimensions de l'IDH). Cependant ces indicateurs ont été avant tout construits pour mesurer les progrès des pays en développement, et demeurent, en tout cas pour le principal d'entre eux (l'IDH), trop corrélés au PIB pour fournir une information vraiment nouvelle. Il s'agit donc à présent de poursuivre la réflexion en améliorant notre compréhension du progrès humain et en y incluant les pays développés.

Trois décennies après Nordhaus et Tobin et quinze ans après l'IDH, la marge d'amélioration de la réflexion et des instruments de mesure du développement humain demeure en effet importante. Et la tâche devient urgente et nécessaire : il existe une divergence croissante entre la mesure des phénomènes économiques et sociaux, et la perception qu'en ont les populations. Qui plus est, cette discordance est universelle. Il se peut que notre appareil statistique, qui nous a relativement bien servi dans un passé pas trop lointain, ne soit plus tout à fait adapté aux problèmes que nous affrontons aujourd'hui. Il est par exemple évident qu'en une période caractérisée par une forte croissance des inégalités, personne ne peut plus se reconnaître dans un indicateur qui reflète une moyenne.

Une première direction de recherche apparaît dès lors nécessaire : modifier le cadre comptable existant pour qu'il prenne mieux en compte les évolutions de l'économie et de la société : inégalités, sécurité, services publics (santé, éducation, etc.) notamment. De plus, un certain nombre de phénomènes qui déterminent le bien-être des populations ne sont pas mesurés par notre appareil statistique, pour l'essentiel ceux relatifs à l'environnement (qualité de l'air, de l'eau, etc.). Une deuxième direction de recherche consiste alors à tenter d'en proposer des mesures acceptables. Enfin, nous ne disposons pas vraiment d'indicateurs de la qualité de la vie, même si de nombreux travaux s'y sont brièvement essayés (bonheur, « capabilités », loisir, libertés, participation à la vie de la cité, etc.). Il convient de les développer et de les affiner, tant la mesure du bien-être est importante pour la formulation de politiques efficaces. Ces trois directions ont été distinguées pour les besoins de l'exposé mais il va de soi qu'elles se recoupent en de nombreux aspects[4].

[4] Voir à ce sujet les travaux de la « *Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress* » et notamment la première note d'étape remise au Président de la République (juillet-août 2008).

L'économie ouverte

Il nous faut à présent synthétiser notre propos à la lumière de la théorie moderne du développement et de la justice sociale. La première a été reformulée avec une clarté particulière par Dani Rodrik[5]. Selon lui, trois causes « profondes » ou « fondamentales » expliquent le développement économique : l'environnement naturel (les avantages ou les handicaps liés à la position géographique d'un pays et à ses caractéristiques naturelles telles que le climat, le sol …), l'échange international (le commerce avec les autres nations du monde sur le marché des biens, des capitaux auxquels s'ajoutent les flux migratoires) et enfin les institutions (entendues au sens large comme les arrangements sociopolitiques formels et informels qui influent sur les activités économiques. Les causes secondes ou « apparentes » qui dérivent de ces forces profondes sont l'accumulation quantitative des facteurs de production (capital physique et capital humain) et la croissance de la productivité (l'accumulation qualitative du progrès technique).

La dynamique du revenu par habitant est ainsi déterminée directement par les causes apparentes et indirectement par les causes fondamentales. Quelles sont alors les causes premières ou prépondérantes du développement économique ? Comment les hommes peuvent-ils maîtriser leur prospérité ? Rodrik apporte trois réponses à ces questions : d'une part, la géographie est une cause « exogène » du développement hors de portée du contrôle humain, tandis que les institutions et l'échange international sont « partiellement endogènes » ; d'autre part, la géographie influe sur les institutions et l'échange international et ces deux dernières causes se déterminent mutuellement ; enfin, les institutions sont la cause prépondérante du développement économique.

Jean-Paul FITOUSSI et Eloi LAURENT
« *La nouvelle écologie politique » (pp.76-78)*

[5] Dani Rodrik (dir.), *In Search of Prosperity : Analytic Narratives on Economic Growth*, Princeton N.J., Princeton University Press, 2003.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soient u_n et v_n les termes généraux d'une série.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ensemble des entiers naturels non nuls, on considère

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} \\ v_n &= \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

   (a) Première méthode
      i. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - v_n$?
      ii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.
   (b) Seconde méthode
      i. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\frac{1}{1+x}$.
      ii. En déduire un développement de u_n.
      iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère maintenant

$$u_n = \frac{C-(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)-(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}$$

   où C est une constante réelle. On désire déterminer la nature de la série de terme général u_n selon les deux méthodes employées dans l'exemple précédent **1.**.

(a) Première méthode

i. Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permettant de procéder comme en **1. (a)**.

ii. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - v_n$.

iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

(b) Seconde méthode

i. Exprimer le développement limité d'une fonction que l'on précisera en 0, à un ordre que l'on précisera également.

ii. En déduire un développement de u_n pour n grand.

iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Problème

On observe un phénomène aléatoire. On désire construire une fonction permettant de déterminer si on a affaire à un aléa prenant ses valeurs sur au plus p quantités (non connues) ou un autre type d'aléa (plus de p quantités, aléa continu, etc.). On ne connaît de X que la valeur de ses $2p+1$ premiers moments.
Soient p un entier non nul et $x = (x_0, \ldots, x_p)$ un $(p+1)$-uplet réel.

1. Matrice de Vandermonde

On note $VM_p(x)$ la matrice de Vandermonde définie pour tout $p \geq 1$ par

$$VM_p(x) = \left(x_j^i\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(a) Exprimer matriciellement $VM_1(x)$.

(b) Exprimer matriciellement $VM_2(x)$.

(c) Calculer le déterminant (det) de $VM_1(x)$.

(d) Exprimer le déterminant (det) de $VM_2(x)$ en fonction de

$$\prod_{0=j<k=2}(x_k - x_j).$$

(e) Montrer par récurrence que pour tout $p \geq 1$,

$$det(VM_p(x)) = \prod_{0=j<k=p}(x_k - x_j).$$

Indication : on pourra effectuer des transformations sur les lignes L_i avec $L_i - x_0 L_{i-1} \longrightarrow L_i$.

(f) Soit p fixé, que dire des valeurs de $(x_0, \ldots, x_p)$ si $det(VM_p(x)) = 0$?

2. Matrice de Hankel

On note $H_p(x)$ la matrice de Hankel définie pour tout $p \geq 1$ par

$$H_p(x) = \left(x_j^{i+j}\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(a) Exprimer matriciellement $H_1(x)$.

(b) Exprimer matriciellement $H_2(x)$.

(c) Exprimer matriciellement $H_3(x)$.

(d) Calculer les déterminants de $H_1(x)$ et $H_2(x)$.

(e) Exprimer le déterminant de $H_2(x)$ en fonction du déterminant de $VM_2(x)$.

(f) Exprimer le déterminant de $H_3(x)$ en fonction du déterminant de $VM_3(x)$.
Indication : utiliser des transformations sur les lignes L_i avec $L_i - x_0 L_{i-1} \longrightarrow L_i$.

(g) Exprimer le déterminant de $H_p(x)$ en fonction de celui de $VM_p(x)$.

(h) Donner une expression du déterminant de $H_p(x)$ en fonction de p et de $(x_0, \dots, x_p)$.

(i) Soit p fixé, que dire des valeurs de $(x_0, \dots, x_p)$ si $det(H_p(x)) = 0$?

3. Aléa et matrice de Hankel.

On considère maintenant X une variable aléatoire pouvant prendre q valeurs distinctes notées $a_1, \dots, a_q$. Et soient $X_0, \dots, X_p$ un $(p+1)$-uplet de variables aléatoires, indépendantes entre elles et de même loi que X.
On note $\mathbb{E}$ le signe espérance et on rappelle que si p_k désigne la probabilité que la variable X prenne la valeur a_k, le moment d'ordre j de X, $\mathbb{E}(X^j)$ est égal à

$$\mathbb{E}(X^j) = \sum_{k=1}^{q} a_k^j p_k.$$

On note $EH_k(X)$ la matrice des espérances des moments d'ordre 0 à $2k$ de la variable aléatoire X. Plus précisément, pour tout $k \geq 1$,

$$EH_k(X) = \left(\mathbb{E}(X^{i+j})\right)_{i,j=0,\dots,k}.$$

(a) Exprimer matriciellement $EH_1(X)$.

(b) Exprimer matriciellement $EH_2(X)$.

(c) Exprimer matriciellement $EH_3(X)$.

(d) Exprimer matriciellement $\mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p))$.

(e) Que dire de $EH_p(X)$ et de $\mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p))$?

(f) Combien y-a-t-il de permutations σ des éléments $\{0, , \dots, p\}$? On notera l'ensemble de ces permutations $\mathcal{S}_{p+1}$.
En déduire une expression de $EH_p(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}))$.

(g) Que dire de $EH_p(X)$ et de $\mathbb{E}(H_p(X_1, X_0, X_2 \dots, X_p))$?

(h) Exprimer le déterminant de la matrice de Hankel des moments de X, $det(EH_p(X))$.
Justifier soigneusement les inversions de signe espérance et déterminant lorsqu'il y a lieu.
Indication : On pensera à utiliser la formule de Leibnitz donnant le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,K}$ de taille $K+1$. On rappelle que la formule de Leibnitz en ce cas est

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{K+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{K} a_{\sigma(i)i}$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

(i) Que dire de q et p lorsque $det(EH_p(X)) = 0$?

4. Conclure.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

«*Quoiqu'on ait dépensé apparemment plus de 300 milliards d'aide sur notre continent depuis 1970, le bilan sur le plan économique et humain est à peu près nul.*», Paul Kagamé, 6^{e} président de la république du Rwanda, discours à la fondation Brenthurst, juillet 2007. Que pensez-vous de ce constat ? Vous illustrerez votre point de vue.

Sujet n° 2

«Ces religions qui lèsent les femmes sont aussi contre la démocratie, les droits humains et la liberté d'expression.», Taslima Nasreen, médecin et femme de lettres bangladaise. Qu'en pensez-vous ? Illustrez votre point de vue.

Sujet n° 3

Selon vous, quelle est la place des ONG dans notre société ? Sont-elles complémentaires, en opposition ou en concurrence à l'action gouvernementale ? Vous illustrerez votre réponse.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Préambule : Le sujet est composé de 5 exercices indépendants, que le candidat pourra traiter dans l'ordre de son choix.

Dans l'ensemble du sujet, N désignera l'ensemble des entiers naturels, Z celui des entiers relatifs, R celui des nombres réels, et $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes d'un ensemble E .

Exercice n° 1

Soit $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n et à coefficients dans R .

Soient A,B,C trois matrices de $M_n(R)$ idempotentes (une matrice X est idempotente si et seulement si elle vérifie $X = X^2$).

Montrer que :

$$S = A+\sqrt{2}B+\sqrt{3}C \text{ est idempotente } \Leftrightarrow B = C = 0$$

Indications : on pourra montrer préalablement que les valeurs propres d'un projecteur sont comprises dans l'ensemble $\{0,1\}$, et que sa trace est toujours un entier naturel.

Exercice n° 2

Soit $R^{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients réels.

Soit f l'endomorphisme de $R^{n-1}[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini ainsi :

$$f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Question 1 : Montrer que $f^n(P)$ est le polynôme nul quel que soit le polynôme P.

Question 2 : Montrer que :

$\forall r \in \{0,..., n\}, f^r(P)(X) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} P(X+k)$, où $\binom{r}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi r. En déduire qu'il existe une suite de réels $(a_k)_{1 \le k \le n}$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k)$$

Exercice n° 3

Soient $(e_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ et $(f_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ deux bases orthonormées de E, espace vectoriel euclidien, et soit $u \in L(E)$. On pose $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} < u(e_i), f_j >^2$

Question 1 : Montrer que $\|u(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} < f_j, u(e_i) >^2$

Question 2 : En déduire que A ne dépend ni des $(e_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ ni des $(f_i)_{i\in\{1,...,n\}}$. L'exprimer en fonction de u.

Exercice n° 4

Soient B une forme bilinéaire symétrique sur R^n et q la forme quadratique associée (telle que $\forall x \in R^n$, $q(x) = B(x,x)$).

Soit $G = \{ f \in L(R^n) / q(f(x)) = q(x), \forall x \in R^n \}$.

Question 1 : Montrer que $f \in G \Leftrightarrow \forall (x,y) \in R^n \times R^n, B(f(x), f(y)) = B(x,y)$.

Question 2 : Préciser la structure de (G,o), 'o' représentant l'opérateur de composition de l'espace des fonctions.

Question 3 : Soient $n=4$, $(e_i)_{1\le i\le 4}$ la base canonique de R^4, $q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_4{}^2$,

$f\in G$ et $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ sa matrice dans la base canonique. Appelons aussi M la matrice de

q dans cette base, et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de A.

Question 4 : Montrer que $a_{44}{}^2\ge 1$ et déterminer A^{-1}.

Exercice n° 5

On se propose ici de déterminer les sous-groupes d'un groupe cyclique.

On rappelle qu'un groupe cyclique peut s'écrire sous la forme $G=\{e_G, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$, avec $g^n=e_G$ (élément neutre pour la loi considérée). n est alors appelé « ordre » du groupe G, et g « générateur » du groupe G.

Soient $(G,.)$ un groupe cyclique, H un sous-groupe non vide quelconque de ce groupe, g un générateur de G et :

$$\varphi:\begin{cases}Z\to G\\ n\mapsto g^n\end{cases}$$

Question 1 : Montrer qu'il existe $s\in N$ tel que $\varphi^{-1}(H)=sZ$, et que s divise l'ordre du groupe G.

Question 2 : Montrer que $H=\varphi(\varphi^{-1}(H))$.

Question 3 : Déterminer les sous-groupes de G.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$2^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - 2ay - b)^2$, où a et b sont deux constantes réelles données.

1. *f* est-elle bornée ? A quelle condition *f* peut-elle être nulle ?
2. On suppose que $a^2 + b < 0$, trouver, s'ils existent, les extrema de *f*.
3. On suppose que $a^2 + b > 0$. Chercher les extrema locaux et absolus de *f*.

Exercice n° 2

Soit $f : R^* \to R$ définie par : $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$.

1. Tracer avec précision le graphe de f.

2. Résoudre l'équation : $2^x = x^2$ (on donnera des valeurs approchées avec une erreur inférieure à 0,5).

Exercice n° 3

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ définie, pour $x > -1$ et $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = nx\frac{(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 1.$$

1. Etudier la continuité de la fonction f_n pour tout $x > -1$.

2. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe pour tout $x > -1$.

Exercice n° 4

On pose : $P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.

2. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$, trouver une primitive de $f(x)$ que l'on notera $F(x)$.

3. Vérifier que $F(x)$ admet des limites finies lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

Exercice n° 5

1. Trouver deux nombres réels A et B tels que la relation : $4n^3 = An^2(n+1)^2 + Bn^2(n-1)^2$ soit vérifiée pour tout entier *n*.

2. Déduire de la relation précédente la somme S_n des cubes des *n* premiers nombres entiers.

3. Montrer que l'on peut obtenir la somme S_n directement par récurrence.

4. On pose $u_n = \dfrac{s_n}{S_n}$, où s_n désigne la somme des *n* premiers nombres entiers.

   Calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$

Exercice n° 6

Soient X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 \,/\, \exists (u_n) \in X, \exists (\lambda_n) \geq 0,\ \underset{n\to\infty}{Lim}\, u_n = a,\ \underset{n\to\infty}{Lim}\, \lambda_n (u_n - a) = u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

2. Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

   a) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

   b) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

   c) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x \geq 0, -x^2 \leq y \leq x^2 \right\}$ et $a = (0,0)$

Exercice n° 7

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B, deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans l'urne A et un jeton dans B que l'on échange en les plaçant dans B et A (étape1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

2. Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1} = k$ sachant que $X_n = i$.

3. On pose $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où

   P désigne la probabilité. Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

4. Etudier la suite vectorielle (V_n). Déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots le texte suivant « *Les effets de la mondialisation* » (d'après un article de François HOUTART paru dans le magazine Tricontinentale de mars 2007).

Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Les effets de la mondialisation

Lorsque l'on parle de mondialisation, certains en soulignent les aspects positifs, c'est-à-dire l'accroissement des contacts entre les continents et les pays, les progrès remarquables de l'internet et des communications, les échanges de toute sorte, notamment sur le plan culturel. Personne ne met en doute de tels aspects de la mondialisation, mais ils doivent être situés dans un ensemble, qui permet de constater que les bienfaits de la mondialisation sont réservés à une petite minorité.

En effet, ce qu'on appelle aujourd'hui la mondialisation est en fait sur le plan économique, politique et culturel, l'extension mondiale de la logique économique du capitalisme. Le concept s'est imposé de manière universelle, notamment avec le développement du projet économique néolibéral à partir du milieu des années 1970. Il signifie principalement la mondialisation du capital, basée sur la libéralisation des échanges financiers ou des biens et services (mais pas l'émancipation de la main-d'œuvre).

La rupture des années 70

Les trente années qui ont suivi la deuxième guerre mondiale, ont été caractérisées par un développement économique considérable. Il y avait alors trois modèles principaux, qui ont tous contribué à la croissance. Le premier a été le modèle occidental (appelé keynésien, du nom de John Maynard Keynes, l'économiste anglais inspirateur du système). Il reposait sur un compromis entre capital, travail et Etat. Ce compromis a été obtenu, suite à la deuxième guerre mondiale, en raison des luttes des travailleurs pour faire reconnaître leurs droits et par crainte du communisme. Il s'agissait en fait d'une concession du capital envers le travail, concession garantie par l'Etat qui jouait un important rôle de redistributeur de la richesse. Ce modèle a pu se développer, avec des fruits sociaux appréciables, grâce à une augmentation rapide de la productivité qui permettait au capital de conserver un taux de rétribution suffisamment élevé. Avec la chute de la productivité dans le secteur industriel et de multiples périodes de surproduction caractéristiques du capitalisme, le modèle keynésien est entré en crise dès le début des années 1970.

Le deuxième modèle a été le socialisme, tel qu'il s'est développé dans les pays de l'Est européen et également en Chine, dans la péninsule indochinoise et à Cuba. Ce modèle constituait en principe une alternative au capitalisme, même régulé sous sa forme keynésienne. Il est également entré en crise, assez rapidement, pour des raisons internes (modèle économique de rattrapage du capitalisme, organisation autoritaire du champ politique) et externes (la guerre froide comme instrument de pression sur les économies socialistes). La chute du mur de Berlin en a été le point final en Europe. L'Asie de l'Est et du Sud-Est a, elle, changé de modèle à partir des années 80, adoptant alors une orientation capitaliste de développement économique. Cuba, plus fidèle aux objectifs socialistes, a néanmoins dû ouvrir ses frontières au capital extérieur et établir une double monnaie.

Le troisième modèle, appelé parfois le modèle de Bandung (lieu d'une conférence qui a réuni des peuples décolonisés après la deuxième guerre mondiale), était basé sur un développement national substituant une production locale aux importations et établissant un pacte entre le travail organisé (qui était minoritaire) et le capital d'une bourgeoisie nationale. Les paysans restaient cependant en marge et c'est le modèle qui est entré le plus vite en crise, notamment à cause du coût des transferts technologiques et des connaissances (une des principales origines de la dette du Tiers Monde).

Le développement du modèle néolibéral

Les trois modèles étant en crise, l'idée de développer l'économie mondiale en fonction d'un projet néolibéral s'est imposée au travers de la mise en œuvre de ce que l'on a appelé le Consensus de Washington. Celui-ci n'a pas été une décision formelle mais la cristallisation d'idées sur lesquelles les grands décideurs économiques (multinationales, FMI, Banque mondiale, Réserve fédérale américaine) étaient d'accord : il s'agissait d'exploiter au mieux les bienfaits supposés de la libéralisation de tous les échanges économiques. Le cadre théorique préexistait : le modèle néolibéral avait déjà été pensé par l'économiste autrichien Friedrich Hayek dès après la deuxième guerre mondiale.

Il en est résulté une double offensive, contre le travail et contre l'Etat, afin de diminuer la part de chacun d'eux dans la répartition de la richesse produite et d'augmenter ainsi la part du capital. Face à la crise d'accumulation, et à la chute du taux de profit, les détenteurs du capital ont en effet estimé indispensable de pallier le manque d'augmentation de la productivité par une autre répartition de la richesse.

L'offensive contre le travail s'est manifestée dans le monde entier : transformation de ses contenus grâce aux nouvelles technologies, réorganisation interne, flexibilité, délocalisations, diminution progressive de la sécurité sociale, diminution des pensions et finalement diminution progressive du salaire réel. Toutes ces évolutions ont été observées aussi bien dans les économies du Nord que dans celles du Sud. A cela, il faut ajouter de dures réactions contre les organisations ouvrières qui ont perdu de très nombreux adhérents et qui, surtout dans le Sud, ont été parfois confrontées à une véritable criminalisation de leurs leaders, avec, dans certains cas, élimination physique.

La deuxième offensive, celle contre l'Etat, s'est traduite par des vagues de privatisations concernant aussi bien les activités économiques propres des Etats que les services publics. A cela, on doit ajouter une surexploitation des ressources naturelles entraînant une augmentation très rapide de la dose de CO_2 dans l'atmosphère et le réchauffement du climat.

Le nouveau modèle de développement économique - construit sur la libéralisation totale des échanges et s'appliquant dans des sociétés inégales où le pouvoir de décision économique, politique et militaire était concentré et accaparé *in fine* par les pays du Nord et quelques pays émergents – a généré un accroissement très net des différences de développement et donc des écarts entre les riches et les pauvres. Ces différences se sont considérablement accentuées au cours des trente années d'extension des politiques néolibérales, au point que certains décideurs politiques et économiques ont commencé à s'en inquiéter, notamment au sein de la Banque mondiale.

Il faut ajouter que si ce modèle a permis le développement spectaculaire de 20% de la population, une partie importante de la classe moyenne a été rendue très vulnérable et la pauvreté a augmenté en chiffres absolus. Ainsi, en Amérique latine, il y avait 220 millions de pauvres au début des années 2000, soit 30 millions de plus que 10 ans auparavant. De telles évolutions correspondent à la logique même du système capitaliste, pour lequel il est plus intéressant d'avoir 20% de la population mondiale capable d'absorber la production de biens sophistiqués, sur lesquels le taux de profit est plus élevé, que de produire pour les 80% autres qui ont peu ou pas de pouvoir d'achat et qui ne contribuent guère à produire de la valeur ajoutée. En effet, le capitalisme contemporain, dominé par le capital financier, recherche des gains à court terme, sans grande préoccupation pour le long terme, notamment les coûts sociaux et les coûts écologiques.

Aujourd'hui, le capital, face aux crises du capitalisme industriel mais aussi financier, s'est défini trois nouvelles frontières. La première est le passage de l'agriculture paysanne à une agriculture productiviste de type capitaliste. En effet, c'est à cette condition que l'agriculture peut contribuer à l'accumulation du capital de manière importante. Tant que les produits agricoles ne deviennent pas des marchandises, il y a peu de possibilités de participation à l'accumulation du capital. La meilleure formule est évidemment l'extension de sociétés multinationales dans ce que l'on a appelé l'agro-business. La deuxième frontière, ce sont les services publics. Tant qu'ils restent du domaine de l'Etat ou des collectivités, ils ne contribuent que de manière faible à l'accumulation du capital. Mais une fois que des services, tels que l'électricité, l'eau, les transports, les téléphones, mais aussi la santé et l'éducation passent dans le domaine privé, la possibilité de profit devient beaucoup plus importante. Or, cela concerne des centaines de milliards d'euros. La conséquence sociale est cependant que la privatisation signifie généralement un accès plus difficile ou totalement exclu pour les plus pauvres.

La troisième frontière est constituée par les zones de biodiversité dans le monde, parce que l'industrie du futur se basera plus sur le biologique que sur le chimique. C'est vrai pour des industries telles que la pharmacie ou les cosmétiques, sans parler bien entendu de l'industrie alimentaire, mais encore plus, dans l'avenir, de la production de la bioénergie pour remplacer le pétrole en extinction progressive et particulièrement destructeur de l'environnement. Malheureusement, la formule capitaliste d'agriculture détruit considérablement les sols à cause de l'utilisation massive des engrais chimiques et des pesticides. Elle provoque des catastrophes sociales considérables dans les populations paysannes. Tant que la recherche de nouvelles sources d'énergies renouvelables restera dans la logique du capitalisme, elle ne débouchera pas sur de réelles alternatives écologiques et sociales.

Le néolibéralisme n'est pas un accident de l'histoire. Il se situe dans la logique même de l'accumulation du capital. Il dispose des institutions juridiques nécessaires sur le plan mondial, c'est-à-dire la Banque mondiale, le FMI et l'Organisation Mondiale du Commerce. Les deux premiers organismes n'ont rien de démocratique car les décisions sont prises au sein du Conseil d'administration où les pays sont représentés en fonction du capital dont ils disposent. Par ailleurs, les Etats-Unis possèdent un droit de veto. C'est le seul pays du monde jouissant d'un tel avantage. Les décisions sont donc prises en fonction des intérêts de ceux qui disposent du capital - les pays du Nord - qui en règle générale favorisent le système existant. Par ailleurs, l'exploitation des richesses du Sud par le capital du Nord n'a jamais été aussi grande dans l'histoire. Elle est plus importante que du temps du colonialisme. Alors que le monde a multiplié par sept sa richesse au cours des 50 dernières années, jamais il n'y a eu autant de personnes vivant dans l'extrême pauvreté.

Tout cela provoque évidemment des réactions, parfois contradictoires. D'un côté, les responsables économiques et politiques du système lui-même n'hésitent pas à soutenir la militarisation de certains régimes pour conserver le contrôle des richesses naturelles et de l'énergie. De l'autre, ils sont effrayés de certaines conséquences sociales et ils affirment de grandes ambitions comme celles des plans de lutte contre la pauvreté de la Banque mondiale ou les objectifs du Millenium de l'ONU. Ces derniers consistent à vouloir réduire l'extrême pauvreté de moitié en 2015. Outre le fait que l'objectif ne sera probablement pas atteint, n'est-il pas scandaleux d'accepter à l'avance qu'en 2015 il y ait encore 800 millions de personnes vivant dans une grave indigence alors que les solutions existent pour résoudre ces problèmes en moins d'une génération.

Par ailleurs, depuis la fin des années 90, une convergence des mouvements sociaux et des organisations non gouvernementales progressistes s'est amorcée et cela, 25 ans après le Consensus de Washington qui a affirmé la prééminence des stratégies néolibérales et 10 ans après la chute du mur de Berlin qui a symbolisé le triomphe du capitalisme. Ces résistances existaient depuis longtemps dans différents domaines mais, pour la première fois, une jonction de mouvements et de milieux qui n'avaient précédemment rien à voir les uns avec les autres, semble s'opérer. On a vu à Seattle ou plus tard dans le Forum social mondial se réunir les syndicats ouvriers, les paysans sans terre, les peuples autochtones, les femmes, les écologistes, les mouvements de défense des droits de l'homme, etc. Tous ont progressivement découvert qu'ils avaient le même adversaire, c'est-à-dire le néolibéralisme. Les convergences de résistance se sont manifestées au cours des dernières années de manière de plus en plus massive, notamment dans le cadre des Forums sociaux (Porto Alegre), mais aussi dans celui de réseaux d'acteurs collectifs, comme celui des paysans dans Via Campesina par exemple.

En Amérique latine, on voit émerger des partis de gauche, fruit en grande partie des mouvements sociaux, qui mettent en route une autre logique économique fondée sur la solidarité plutôt que sur la compétition. Ils rendent au peuple sa souveraineté sur les ressources naturelles et ils mettent en route des modèles économiques contredisant les logiques du fonctionnement capitaliste : échanges sans passer par le système bancaire mondial, troc entre viande et pétrole (Argentine - Venezuela), médecins et pétrole (Cuba - Venezuela), etc. Ils construisent aussi un nouveau modèle d'intégration économique. Ces exemples montrent que des alternatives sont possibles.

La mondialisation telle qu'elle existe aujourd'hui a des effets écologiques et sociaux très négatifs. Les changements climatiques en sont une manifestation, mais aussi l'accroissement de la pauvreté et l'accroissement des distances économiques et sociales entre groupes humains. C'est la logique du système capitaliste qui est en jeu et par conséquent, c'est cette dernière qu'il faut délégitimer…

D'après François Houtart
(Magazine Tricontinentale, mars 2007)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

La lisibilité de la copie sera prise en compte dans la notation.
Encadrer chaque résultat obtenu.
Préciser clairement lorsqu'une réponse est admise, non traitée, ou encore non totalement résolue.

Exercice

Soit la matrice C_n définie par

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

où les complexes $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(b_j)_{j=1,\dots,n}$ sont tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et j variant entre 1 et n.
On notera pour tout ce qui suit : $l_1, \dots, l_n$ les numéros de lignes 1 à n, et $c_1, \dots, c_n$ les numéros de colonnes 1 à n.

1. Exprimer C_1
2. Exprimer C_2
3. Calculer $det(C_1)$
4. Calculer $det(C_2)$ que l'on exprimera comme une fraction de facteurs.

5. On désire retrouver le déterminant de C_2 par une autre méthode.
On précisera à quoi est équivalent le déterminant de C_2 lorsqu'on effectue les opérations détaillées ci-après. De plus, on veillera à écrire à chaque étape, l'expression obtenue en justifiant les simplifications éventuelles que l'on effectuera systématiquement autant que possible.
   (a) Multiplier chaque colonne c_j par $(a_2 + b_j)$, pour tout $j = 1, 2$.
   (b) Retrancher la dernière ligne l_2 à toutes les autres.
   (c) Retrancher la dernière colonne c_2 à toutes les autres.
   (d) Retrouve-t-on le déterminant de C_2 ?
6. A l'aide de la méthode proposée précédemment pour l'obtention de C_2, exprimer la formule du déterminant de C_n, dit déterminant de Cauchy, en respectant chacune des étapes soigneusement mises en valeur.

Problème

On désire étudier la densité généralisée de Pareto (GPD) et le comportement de sa fonction de survie.
On définit les objets suivants :
- On appelle densité de probabilité, la fonction $f(x)$, intégrable, positive, telle que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$
- On note $P_X(A)$ la probabilité que X appartienne à l'ensemble A lorsque X suit la loi de densité f la quantité :
$$P_X(A) = \int_A f(x)dx.$$
- On appelle fonction de survie $S(t)$, la probabilité que X appartienne à l'ensemble $]t, +\infty[$, pour t réel :
$$S(t) = P_X(]t; +\infty[).$$
- Soit $q \geq 0$ avec $q \neq 1$. L'entropie de Rényi-Tsallis est définie sur un espace fonctionnel par l'expression suivante :
$$H_q(f) = \frac{1}{1-q}\left(\int f^q(x)dx - 1\right).$$
- L'entropie de Shannon est définie sur un espace fonctionnel dont les éléments sont à valeurs strictement positives. Elle est définie par l'expression :
$$H(f) = -\int f(x)\ln(f(x))dx,$$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
- Pseudo-distance de Bregman :
Soit F une fonction définie sur $\mathcal{A}$ un convexe fermé, continuement dérivable, strictement convexe, à valeurs réelles. On appelle pseudo-distance (ou divergence) de Bregman aux points a et b de $\mathcal{A}$:
$$d_F(a,b) = F(a) - F(b) - < D_b^1 F, (a-b) >,$$
où $D_b^1 F$, désigne la différentielle première de F calculée au point b et $<\ ,\ >$ un produit scalaire sur $\mathcal{A}$.

A. Préliminaires :

1. Soit $f(x)$ la densité de la loi exponentielle de paramètre $\sigma > 0$ définie pour tout $x > 0$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x}{\sigma}).$$
Calculer sa fonction de survie $S(t)$
2. Soient les paramètres $(\gamma, \sigma) \in (\mathbb{R}_*, \mathbb{R}_*^+)$. On considère S la fonction de survie définie pour tout t réel, par
$$S(t) = \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}t\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$
Calculer la densité f de la loi correspondant à cette fonction de survie dans les cas :
   (a) $\gamma \neq 0$,
   (b) $\gamma = 0$ (on définit alors la fonction de survie par sa limite lorsque γ tend vers 0).
3. Calculer la limite de H_q lorsque q tend vers 1 et f est une densité de probabilité.
Que remarque-t-on ?

B. Maximisation sous contraintes :

Soient μ et θ deux réels finis. Pour $0 < q < 1$, on désire résoudre le problème de maximisation suivant :
$$\begin{cases} \max_{G\in\mathcal{F}} H_q(G) \\ avec \int_0^{+\infty} xG(x)dx = \mu \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} G(x)dx = \theta \end{cases} \tag{1}$$
où $\mathcal{F} = \{G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\}$.

1. On considère la divergence de Bregman $B(f, g)$ définie par
$$\int d_F(a; b)dx$$
calculée aux points $a = f$ et $b = g$, f et g étant deux densités de probabilité, le produit scalaire sur $\mathbb{R}$ étant $< x; y >= xy$, pour la fonction convexe $F : x \mapsto -x^q$.
Exprimer $B(f, g)$ en fonction de f, g et q.
2. Pour $q \neq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, on pose
$$G^*(x) = \alpha^{\frac{1}{q-1}}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}x\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$
   (a) Exprimer en fonction de G, q et G^* la pseudo-distance de Bregman $B(G, G^*)$ lorsque G vérifie (1).
   (b) Montrer alors que
$$\int G(x)G^*(x)^{q-1}dx = \int G^*(x)^q dx.$$
   (c) Montrer que "$B(G, G^*)$ positive ou égale à zéro" équivaut à "$G = G^*$".
   (d) En déduire une inégalité entre $H_q(G^*)$ et $H_q(G)$. On précisera le domaine d'appartenance de q.
   (e) Conclure quant au problème de maximisation sous contraintes que l'on se proposait de résoudre.
   (f) Que dire dans le cas de l'entropie de Shannon (cas $q = 1$) ? (on explicitera les valeurs de μ, θ, G^* ainsi que la valeur de l'entropie de Shannon en le point atteignant ce maximum).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« *La mondialisation est la version la plus récente de la domination occidentale* », Sophie Bessis, ***L'Occident et les autres***, La Découverte, 2001. Cette affirmation vous paraît- elle vraie ?
Vous illustrerez votre point de vue. Sophie Bessis est une historienne franco-tunisienne.

Sujet n° 2

Selon vous, la diversité culturelle menace-t-elle l'unité nationale ?

Sujet n° 3

A propos des célébrations des cinquantenaires des indépendances africaines, que pensez-vous de ce point de vue d'Achille Mbembe, universitaire camerounais, professeur d'histoire et de science politique à l'université de Johannesburg.
« *De mon point de vue, il n'y a strictement rien à célébrer.[ ].On ne trompera personne en vêtant de haillons ce qui manifestement est nu* ».
Extrait d'un entretien avec Norbert N. Ouendji dans Africultures. Vous discuterez cette appréciation.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants. Le problème est constitué de cinq parties dépendantes. Toutefois, les résultats non démontrés d'une partie pourront être utilisés dans les questions suivantes.

Exercice

Soit D_n le déterminant d'ordre n de terme général $d_{i,j}$ défini par $d_{i,i} = u+v$, $d_{i,i+1} = uv$, $d_{i+1,i} = 1$, et $d_{i,j} = 0$ sinon, où u et v sont deux nombres réels.

1. Etablir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$.
2. En déduire D_n.

Problème

Partie 0

Les résultats de cette partie seront utiles pour la suite.

1. Montrer que la fonction logarithme népérien est concave.

2. Soient x_1, $x_2, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs. Soit m_a leur moyenne arithmétique et m_g leur moyenne géométrique. On rappelle que

$$m_g = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

   Montrer que $m_g \leq m_a$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Partie I

Soient deux suites réelles à termes strictement positifs $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On suppose que la série de terme général α_n est convergente. On définit les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$U_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1/n} \text{ et } \gamma_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \beta_k\right)^{-1/n}.$$

1. Montrer que

$$\frac{U_n}{\gamma_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \gamma_k.$$

   Indication: on pourra utiliser un résultat de la **Partie 0**.

2. On fait l'hypothèse ici que la série de terme général γ_n/n, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente. Soit Γ_k le reste de cette série, autrement-dit

$$\Gamma_k = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n/n.$$

   Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \alpha_k \beta_k.$$

3. On fait le choix particulier de β_n suivant

$$\beta_n = (n+1)^n / n^{n-1}.$$

   (a) Cette suite définit-elle une suite γ_n conforme à l'hypothèse faite à la question précédente?
   (b) Calculer Γ_k.

4. On s'intéresse à la série de terme général U_n.

   (a) Montrer que cette série est convergente.
   (b) Donner une majoration de sa somme en fonction de la somme de la série de terme général α_n.
   Indication: on pourra utiliser un résultat de la **Partie 0**.

Partie II

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie

$$L_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ L_n \geq 1, \ L_n^2 \leq L_{n+1}L_{n-1}. \tag{1}$$

1. Donner deux exemples de suites qui vérifient la propriété (1).

2. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone?

3. Montrer que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n,

$$L_k L_{n-k} \leq L_n.$$

4. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = L_n^{-1/n}, \ n \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = L_{n-1}/L_n, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de $v_1, v_2, \ldots$ et v_n.

5. Montrer que

   (a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone,

   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq (v_1 v_2 \dots v_n)^{1/n}$.

7. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geq v_n$.

8. Etablir l'équivalence suivante

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ est convergente } \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ est convergente }.$$

   Indication: on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**.

Partie III

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est analytique dans $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est une fonction développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est analytique dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout point y de $\mathbb{R}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y et une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n.$$

On admet qu'une fonction analytique dans $\mathbb{R}$ est toujours de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On suppose dans cette partie que la fonction f est analytique dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n

$$c_n = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}.$$

2. Soit l'ensemble

$$R(f) \quad = \quad \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0 \right\}.$$

   Montrer que $R(f)$ est à la fois une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$.

3. En déduire que f satisfait la propriété suivante
$$R(f) \neq \phi \implies f \equiv 0. \tag{2}$$

Partie IV

Soit $L = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (1). Toutes les fonctions f considérées dans cette partie sont supposées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞.

On définit l'ensemble de fonctions suivant:
$$E(L) = \left\{ f \mid \exists\alpha > 0\,, \exists\beta > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \alpha\beta^n L_n \right\},$$

où les constantes α et β dépendent de f.

Dans les questions 1 à 3, on suppose que $L_n = n!$.

1. Montrer que cette suite (L_n) vérifie la propriété (1).
2. Montrer que
$$f \in E(L) \implies f \text{ est analytique.}$$
3. Montrer que
$$f \in E(L) \implies f \text{ vérifie (2).}$$

   On revient au cas général où $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1).

4. Soient f et g de classe C^∞ dans $E(L)$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R} :\ h(x) = f(\mu + \sigma x),$$
avec μ et σ deux réels. Montrer que les fonctions suivantes sont aussi éléments de $E(L)$
   (a) $f + g$,
   (b) fg,
   (c) h.
   Indication: on pourra utiliser les résultats de la **Partie II**.

5. On définit le support de f comme l'adhérence du complémentaire de $R(f)$. On suppose que $E(L)$ vérifie l'implication suivante

$$\forall f \in E(L),\ R(f) \neq \phi \implies f \equiv 0.$$

Montrer que si la fonction f est à support compact, alors elle est identiquement nulle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Pour tout entier *n* strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n),\ \alpha_1 = 1,\ \text{et}\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de *n* et calculer sa limite, si elle existe.

2. Pour tout entier *n*, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

3. Déterminer la limite (si elle existe) de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 2

1. Montrer l'existence d'une fonction φ définie implicitement par la relation $Arctg\,(x-y)+1=e^{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour $y=\phi(x)$ au voisinage de 0.

Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^x-1}{e^x+1}dx$

3. $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln(x)\,dx$ (on donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$, où p et q sont des nombres rationnels)

Exercice n° 4

Une entreprise produit des biens A, B et C. La production de ces biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés pour chaque unité produite sont donnés dans le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Profit
A	1	3	1	2	5
B	6	1	3	3	5
C	3	3	2	4	5

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 84, 42, 21 et 42.

Déterminer la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

Exercice n° 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice triangulaire *T* semblable à *A*.

2. Calculer A^n pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2.

Exercice n° 6

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$.

Calculer $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$, puis montrer que $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$(ensemble des polynômes de la variable *X* à coefficients entiers).

Exercice n° 7

Soient *X* et *Y* deux variables aléatoires réelles. On pose $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$, où α est un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. On suppose que *X* (respectivement *Y*) suit une loi normale de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2) et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. Déterminer la loi de *Z*.

2. On ne suppose pas de lois a priori sur *X* et *Y*, ni qu'elles sont indépendantes, mais on suppose toutefois qu'elles admettent des moments d'ordre 1 et 2 et vérifient : $Var(X - Y) > 0$
Var désigne la variance.

Déterminer α de façon que la variance de *Z* soit minimale.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots (réduction au 1/10ème) le texte suivant « L'Afrique face au défi de l'Etat multinational » extrait d'un article de Mwayila TSHIYEMBE paru dans « *Le Monde Diplomatique* » en septembre 2000.

Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

L'Afrique face au défi de l'Etat multinational

Etats-Unis d'Afrique » : le grand rêve, caressé depuis les premiers jours du panafricanisme, affleure dans les débats de toutes les instances communautaires africaines. Pour de nombreux responsables politiques, la faillite de l'Etat postcolonial constitue l'épicentre de la marginalisation du continent et la cause de la recrudescence de la violence, qui plonge des pans entiers de l'Afrique dans le chaos. Cette faillite serait aussi à l'origine de la misère exponentielle qui menace la survie de dizaines de millions d'individus, détruit ce qui reste de lien sociétal et laisse le champ libre aux redoutables pandémies du sida et de la malaria, tandis que les cadres sont au chômage, expatriés ou parqués dans une fonction publique en banqueroute, réduisant en poussière les savoirs conquis de haute lutte à l'école occidentale...

Mais ceux qui dressent ce sombre diagnostic posent rarement la question d'un nouveau modèle d'Etat, inspiré des traditions africaines, condition impérieuse d'une sortie de la crise, et seul capable de répondre aux défis de la mondialisation. Sans un tel renouveau, le projet d'Etats-Unis d'Afrique risque de demeurer une coquille vide ; et il n'y aura sur le continent ni authentique Etat de droit, ni développement durable, pas plus qu'un réveil des intelligences et un rassemblement des dévouements qui font si cruellement défaut.

En effet, la faillite de l'Etat postcolonial traduit une mise en cause du « vouloir vivre ensemble », une crise de sens et de dessein. Il existe un désaccord abyssal entre les nations (ou ethnies) et les citoyens, sur les valeurs fondamentales de la collectivité : définition d'une société de liberté, d'un pouvoir réellement consenti et partagé, d'un droit perçu comme naturel. L'articulation entre Etat et société apparaît conflictuelle depuis que les sociétés plurinationales n'ont survécu à l'anéantissement de leur modèle d'Etat que pour être soumises à une caricature de celui de l'Occident.

En dépit de la domination coloniale, qui a rompu la dynamique de leur construction étatique, la nature des sociétés africaines demeure plurinationale. Les nations précoloniales - qui furent les marqueurs identitaires de ces Etats multinationaux - survécurent malgré leur morcellement et leur fréquent éparpillement sur plusieurs Etats. Cependant, cette situation ne constitue pas un obstacle rédhibitoire à la reconstruction d'un lien sociétal. Car la crise de l'Etat-nation entraîne une conséquence inattendue : la libération du concept de nation de l'emprise du droit et de la mystique révolutionnaire. L'implosion de l'Union soviétique et de l'ex-Yougoslavie, la séparation de la Tchéquie et de la Slovaquie, le génocide des Tutsis et le chaos somalien en font foi.

Désormais, on peut distinguer la nation juridique, « l'Etat », et la nation sociologique, dite « ethnie ». Cette dernière procède à la fois d'une communauté de caractères (langue, lien de sang, religion, histoire commune) et d'une volonté de vivre ensemble attestée. Elle représente le soubassement de la nationalité d'origine, dont l'Etat postcolonial se limite à constater l'existence - dépourvu qu'il est de la mémoire historique et administrative des hommes et pays juxtaposés par la seule volonté coloniale.

Réhabiliter ces « nations » permet de mettre fin à la crise de conscience nationale et aux conflits d'identités qui violentent l'Afrique, mais aussi d'empêcher la manipulation politique de la contes tation de la nationalité, par exemple pour écarter la communauté banya mulengue à l'est du Congo-Kinshasa, l'ancien président Kenneth Kaunda en Zambie ou l'ancien premier ministre Alassane Ouattara en Côte-d'Ivoire. Si l'Etat multinational était instauré, la loi stipulerait partout que la nationalité se définit par la conscience et le statut d'appartenance à une communauté de caractères (Akan, Mosi, Bamileke), et la citoyenneté par la conscience et le statut d'appartenance à un Etat (Côte-d'Ivoire, Burkina, Cameroun).

Cette « renaissance » de l'Etat peut s'ancrer dans l'africanité. Contrairement aux idées reçues, l'Afrique noire avait en effet, à l'instar de l'Europe, créé son propre modèle d'Etat multinational et de nation-ethnie, avec les empires d'Ethiopie, du Ghana, du Mali, du Songhay, du Noupé, d'Ifé, du Bénin, du Kanem-Bornou, du Congo, du Monomopata ou du Zimbabwe, qui remontent au Moyen Age africain. Dans ces sociétés, le politique avait précédé l'invention de l'Etat - alors que la théorie classique assimile la construction du politique à l'avènement de l'Etat-nation.

A l'opposé de l'Etat-nation, qui a le monopole de production du droit, la nature plurinationale des sociétés africaines les a poussées à inscrire dans l'acte de fondation de l'Etat multinational les deux espaces autonomes de production du droit : l'espace étatique (lieu de production du droit général) et l'espace national ou ethnique (lieu de production du droit particulier sur le foncier, la succession, l'état civil, etc.). L'individu baigne dans un véritable pluralisme juridique, selon qu'il est sollicité par l'un ou l'autre de ces deux espaces, en fonction des types d'activité qu'il y exerce et de statut qu'il y revendique.

Il importerait ainsi de sortir le droit africain de l'espace de non-droit, dit de « la coutume », où il a été relégué par le mimétisme hérité de la colonisation, en restaurant le pluralisme juridique. La charte africaine des droits de l'homme a certes voulu refléter cette spécificité en proposant la notion de « droit des peuples », mais sans en préciser le contenu. L'Etat postcolonial a ainsi conservé sa primauté souveraine, et des peuples se sont vu priver de leurs *« propres moyens de subsistance »* (au sens de l'article premier) : ainsi le peuple Ogoni du delta du Niger, zone pétrolière du Nigeria, ou le peuple Dioula de la Casamance en rébellion contre l'Etat sénégalais.

Par ailleurs, dans ce modèle d'Etat multinational, les droits des minorités ne sont pas opposables aux droits de la majorité, car l'acte de refondation du pacte républicain contient l'obligation faite à l'Etat et aux nations constitutives de respecter les principes de l'égalité et du droit à la différence, afin de réaliser un destin commun. En contrepartie, ces nations jouissent automatiquement de mêmes droits et devoirs relevant des « droits de fondation », notamment celui de parler sa langue, de pratiquer sa religion et sa culture, de jouir de sa nationalité, etc. Dès lors, la question des droits des minorités n'a aucun fondement politique dans un Etat multinational.

Ainsi se définit une sorte de fédéralisme intégral, qui distribue le pouvoir selon la logique d'une triple fédération des nations, des citoyens et des terroirs. Sa fonctionnalité repose sur le postulat que l'Etat est l'appareil de plusieurs nations, disséminées sur plusieurs terroirs. Dans ce sens, la rationalité de l'autorité et de l'action politique ne peut être efficace que si le pouvoir est attribué d'abord en fonction des nations et des citoyens, ensuite des territoires. Si bien que les chefferies, les communes et les provinces autonomes n'ont de signification politique que pour autant qu'elles constituent le berceau des nations et des citoyens en cause, fondateurs de l'ordre politique.

Innovation majeure du fédéralisme intégral, la transformation de ces collectivités infra-étatiques en espaces politiques de cogestion conduit à brasser, dans le même destin, des peuples différents, évitant ainsi toute « purification ethnique ». Alors que le fédéralisme territorial de l'Etat-nation se fonde sur le postulat que, la nation étant une et indivisible, l'autorité politique ne peut s'y exercer efficacement que si elle touche l'ensemble du territoire sur lequel s'éparpille la population, dans le fédéralisme intégral, chemin faisant, le pouvoir doit être organisé en fonction du découpage politique du territoire : en cantons, communes, Etat fédéré, etc.

Au-delà du terroir

La fédération des terroirs suggère l'idée de dépassement de ce concept européen de « territoire », et l'investissement dans le concept africain de l'espace, pensé comme cadre de vie, tissé des réseaux, des flux d'échanges et des lieux de mémoire attachant les êtres humains à leur sol et à leur environnement. Dans nombre de cas, il n'y a d'ailleurs pas de corrélation entre l'espace politique et l'espace socioculturel. Un nouveau pacte social est indispensable pour fonder l'Etat multinational sur le double consentement des nations et des citoyens, réconciliant ainsi la citoyenneté (individualisme) et la multinationalité (communautarisme) comme deux pôles de légitimation.

Il s'agit d'un principe de multinationalité qui se définit comme l'espace politique de fondation et de médiation d'un nouveau pacte démocratique, liant juridiquement chacune des nations et l'Etat, par un strict respect de l'égalité et du droit à la différence, en vue de bâtir un destin commun. Elle représente une autre façon de vivre l'Etat, lorsque l'unité politique ne se confond pas avec l'unité nationale.

Ainsi définie, la multinationalité met deux principes en mouvement : d'une part, le principe de la double représentativité des nations et des citoyens en tant qu'entités distinctes ; d'autre part, le principe de divisibilité de la souveraineté ou souveraineté partagée, ce partage se réalisant au profit soit des nations et des citoyens sur le plan interne, soit des Etats souverains sur le plan externe - comme avec l'intégration économique et politique dans l'Union européenne actuellement, dans la Communauté des Etats d'Afrique de l'Ouest (Cedeao) ou, demain, des Etats d'Afrique australe.

De nouveaux droits politiques s'attachent à la multinationalité : droit à l'existence, au vote, à la résistance à l'oppression, à la terre ancestrale, au partage des richesses, etc. Il s'agit d'une « républicanisation » du pouvoir traditionnel, qui réconcilie la tradition avec la modernité à travers une série de mécanismes : réhabilitation de la chefferie (gouvernement et assemblée), désignée comme première collectivité locale au-dessus de laquelle se trouvent la commune et la région autonomes, attribution à la chefferie de compétences en matière d'état civil, de santé primaire, d'éducation de base, de développement rural, consécration du droit de vote des nations afin qu'elles désignent leurs propres représentants dans les assemblées bicamérales, au niveau communal, régional et fédéral.

Exercent ce droit de vote des mandataires librement désignés par chaque communauté villageoise, parmi les socioprofessionnels, appelés grands électeurs, à travers un collège spécifique. Les partis politiques ne détiennent donc plus le monopole de l'activité politique, et le gouvernement de la chefferie peut solliciter la compétence de tout citoyen. Cette rénovation ne remet en cause ni les frontières internes et externes de l'Etat ni la balkanisation des nations opérée par la conférence de Berlin (1878).

A la différence de l'Etat-nation, l'Etat multinational ne s'approprie pas les citoyens, qui, là, suscitent l'Etat, désignent et destituent les gouvernants selon les règles communément acceptées. Partant de l'inversion de cette relation dialectique, la citoyenneté est à polarisation variable. Elle est une dans l'Etat multinational fédéral, double dans l'Etat multinational confédéral où elle remplace la classique double nationalité. La citoyenneté de l'Union européenne, telle que définie dans l'article 8 du traité de Maastricht, va dans ce sens.

En rupture radicale avec l'approche classique, la Constitution fondée sur les peuples - « démotique » ou pluraliste - renouvelle l'infrastructure juridique en prenant en compte le pluralisme de la société par-delà le multipartisme : elle restitue aux différentes composantes des sociétés hétérogènes leur statut de peuples ou nations, comme réalité juridique et politique distincte de l'Etat multinational. Bien que corsetées dans les entités politiques taillées par la seule volonté coloniale, les populations composites continuent inlassablement de témoigner d'elles-mêmes. Loin de se manifester comme un corps unifié et homogénéisé dans une nation étatique chimérique, elles traduisent plutôt une diversité des nations sociologiques à la recherche de l'Etat de tous les peuples, sinon de toutes les nations (Akans, Bambaras, Bamilékés, Dioulas, Fangs, Haussas, Peuls, Mandingues, Ibos, Hutus, Lubas, Lundas, Kikuyus, Kongos, Mboshis, Mosis, Ovimbundus, Saras, Shonas, Tutsis, Touaregs, Yorubas, Vilis, Wolofs, Zulus, Xhosas, etc.).

Dans cette perspective, la constitution de l'Etat multinational n'a pas seulement pour objet de donner un statut au pouvoir et au citoyen (*lire encadré ci-dessous*). Elle offre surtout un statut politique et juridique aux nations sociologiques ou ethnies, afin de fonder leur droit inaliénable à la légitimation de l'Etat et à l'exercice du pouvoir au même titre que les citoyens.

En ce sens, la Constitution fondera - pour la première fois dans l'Afrique post coloniale - le statut juridique d'un Etat compatible par sa nature démocratique, son droit, son histoire, sa culture, avec les logiques sociales des sociétés plurinationales qui lui donnent corps et signification (…).

MWAYILA TSHIYEMBE

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soit A dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 3 à éléments complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Calculer A^9.

Problème

I. *Polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soient $x_0, ..., x_n$ des réels distincts et $f_0, ..., f_n$ des éléments de $\mathbb{R}$. Soient les polynômes à coefficients réels

$$L_k(x) = \frac{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x - x_j)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x_k - x_j)}, \quad k = 0, ..., n,\ x \in \mathbb{R},$$

et

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer $L_k(x_\ell)$ pour toutes les valeurs de k et ℓ dans $\{0, ..., n\}$.
2. Calculer $L(x_\ell)$ pour tout ℓ dans $\{0, ..., n\}$. Quel est le degré maximal du polynôme $L(x)$?
3. Montrer que $L(x)$ est l'unique polynôme ayant les propriétés de la question 2.
   Il s'agit du *polynôme d'interpolation de Lagrange*.

II. *Intégration numérique*

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On appelle *procédé d'intégration numérique* associé aux points $x_0, ..., x_n$ de $[a, b]$ et aux poids $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ l'application

$$f \mapsto I(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

On veut étudier la qualité de l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par $I(f)$ en la caractérisant par l'erreur d'approximation

$$E(f) = I(f) - \int_a^b f(x)dx.$$

1. On suppose que le procédé I est exact sur les polynômes de degré au plus n, c'est-à-dire que

$$E(P) = 0,$$

pour tout polynôme P à coefficients réels, de degré au plus n.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$.

a) Ecrire le développement de Taylor à l'ordre n de $f(x)$ en a, avec reste intégral.
Montrer que le reste intégral peut s'écrire sour la forme

$$\frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x)dt, \text{ avec } G_t(x) = (x - t)_+^n = \max\{0, (x - t)^n\}.$$

b) Montrer que

$$E(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) K_n(t)dt,$$

avec $K_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, dit *noyau de Peano*, donné par

$$K_n(t) = E(G_t).$$

c) En déduire une majoration simple de $E(f)$ en fonction de la norme uniforme de $f^{(n+1)}$: $\sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

d) Si $g(x) = x^{n+1}$, appliquer les questions précédentes pour calculer $E(g)$ en fonction de K_n.
On suppose K_n de signe constant. Exprimer la majoration précédente de $E(f)$ en fonction de $E(g)$.

2. On veut décrire des procédés d'intégration numérique aux cas où les points d'interpolation sont également répartis sur $[a, b]$: $x_k = a + (b - a) \cdot k/n$, $k \in \{0, ..., n\}$.

   a) Trouver les constantes $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, ..., n$ telles que le procédé

   $$f \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

   est exact pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n. On pourra utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, ..., x_n$ (c'est-à-dire $f_0 = f(x_0)$, ..., $f_n = f(x_n)$). (Ne pas chercher une forme explicite de ces coefficients).
   Montrer l'unicité de ces coefficients.

   b) Calculer le noyau de Peano pour $n = 1$.
   En déduire un procédé d'intégration numérique et l'erreur d'approximation associée si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

III. *Méthode de Gauss*

Soit $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré n orthonormés sur $[a, b]$:

$$\int_a^b P_n(u)P_m(u)\,du = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que P_{n+1} et S sont orthogonaux, pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à n.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $u_0, ..., u_n$ les zéros de P_{n+1} : $P_{n+1}(u) = \gamma_{n+1}(u - u_0)...(u - u_n)$, avec $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$.
   Soit Q un polynôme de degré $2n + 1$.

   a) Ecrire le polynôme L d'interpolation de Lagrange de Q aux points $u_0, ..., u_n$.

   b) Montrer que le polynôme $Q - L$ est divisible par P_{n+1}. En déduire qu'il existe des réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ tels que

   $$\int_a^b Q(u)du = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q(u_k).$$

   c) Démontrer que $\lambda_k > 0$, pour tout k de 0 à n.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

«Dans la conclusion de son ouvrage, Mutations de la famille africaine, L'Harmattan, 2010, Céline Kula-Kim, sociologue originaire du Congo constate :
"Une nouvelle impulsion de la famille africaine qui oscille maintenant entre deux mondes : le monde traditionnel et le monde moderne". Explicitez cette affirmation.

Sujet n° 2

Les frontières aujourd'hui, une réalité vouée à disparaître ou à se renforcer ?

Sujet n° 3

«Le courage est une vertu démocratique», que pensez-vous de cette affirmation de Cynthia Fleury, philosophe, tirée de La Fin du courage, Fayard, 2010 ?

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle "partition de l'entier n en k éléments" la donnée de k entiers naturels $(a_1, \ldots, a_k)$ tels que $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on note $p_k(n)$ le nombre de partitions de l'entier n en k éléments :

$$p_k(n) = Card\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 + \cdots + a_k = n\}.$$

où $Card$ est la notation pour le cardinal d'un ensemble (c'est-à-dire le nombre d'éléments composant un ensemble). On note également

$$r_k(n) = Card\{(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}^k : b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + kb_k = n\}.$$

Enfin, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\mathcal{R}_k$ de la variable complexe z par

$$\mathcal{R}_k(z) = \sum_{n \geq 0} r_k(n) z^n.$$

On admet que pour tous nombres complexes α et z tels que $|\alpha z| < 1$

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)^k} = \sum_{n \geq 0} C_{n+k-1}^{k-1} \alpha^n z^n,$$

où $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ représente le k-ième coefficient binomial d'ordre n.

1.1 Partitions entières pour $k = 2, 3$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $r_k(n) \leq \dfrac{p_k(n)}{k-1}$.
2. Calculer $r_2(n)$, $p_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

4. En utilisant l'égalité

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = 1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6,$$

valable pour tout complexe z, montrer que pour tout $n \geq 6$, on a

$$r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6) = 0.$$

5. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{17}{72}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-jz} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}.$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_3(n) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}.$$

7. En déduire que $r_3(n) = E\left[\dfrac{(n+3)^2}{12}\right]$ où $E[x]$ est l'entier le plus proche de x, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $|x-n| \leq |x-p|$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Par exemple, $E[6.8] = 7$ *et* $E[2.5] = 2$.

1.2 Séries entières rationnelles

Soit $S(z)$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$:

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{pour } |z| < r.$$

On admet le théorème suivant :
La série entière $S(z)$ coïncide avec une fonction rationnelle $F(z)$ de la forme $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont deux fonctions polynômes telles que Q ne s'annule pas dans le disque ouvert $D(0,r)$ de rayon r, lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}^{q+1}$ (non tous nuls) tels que pour tout $n \geq d$, $\lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \cdots + \lambda_q a_{n+q} = 0$.

On dit alors que la fonction rationnelle est définie par :
– les conditions initiales : c'est-à-dire la donnée de $q+d$ nombres $(a_0, a_1, \ldots, a_{d+q-1})$
– et la relation de récurrence linéaire donnée par les $q+1$ coefficients $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.

On admet que deux fonctions rationnelles sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Elles sont donc égales si et seulement si les conditions initiales et la relation de récurrence sont identiques.

8. Soit $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fonction rationnelle telle que Q ne s'annule pas dans dans le disque ouvert $D(0,r)$, avec $r > 0$. Ses conditions initiales sont constituées de $q+d$ nombres. Montrer qu'il existe une fonction polynôme S de degré $d-1$ tel que
$$F(z) = S(z) + z^d G(z) \text{ pour tout } z \in D(0,r),$$
où G est une fonction rationnelle possédant la même relation de recurrence que F, mais dont les conditions initiales ne sont constituées que de q nombres.

La question précédente permet de se limiter au cas $d = 0$. Dans toute la suite du problème, on considérera qu'on est toujours dans ce cas et on notera encore F une telle fonction rationnelle. Les conditions initiales permettent alors de définir la famille de polynômes suivante
$$P_0(X) = 0 \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, q\}, \quad P_k(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n.$$

On note également $R(X) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i}$ le polynôme associé à la relation de reccurence.

9. Montrer que $Q(X) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i} P_i(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à q.
10. Montrer que $\lambda_q \left(P_q(X) - F(X)\right) = \lambda_0 X^q F(X) + \sum_{j=1}^{q-1} \left(\lambda_j X^{q-j} \left[F(X) - P_j(X)\right]\right)$.
11. En déduire que $F(X) = Q(X)/R(X)$.
12. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que
$$R(X) = (1 - \xi_1 X)^{m_1} \cdots (1 - \xi_r X)^{m_r}.$$
13. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de Q/R, montrer qu'il existe une famille $\Big((b_{i,j})_{j=1,\ldots,m_i}\Big)_{i=1,\ldots,r}$ telle que
$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} C_{n+j-1}^{j-1} \xi_i^n.$$

Afin de trouver un équivalent de a_n, on ne conserve de la somme précédente que la valeur ξ_i de plus grand module et le terme polynomial de plus haut degré (c'est-à-dire pour $j = m_i$). Dans le cas de plusieurs racines de même module maximal, on ne garde que celle de plus grande multiplicité.

14. Soit i_0 l'indice du ξ_i de plus grand module (ou de plus grande multiplicité en cas de plusieurs racines de même module maximal). Montrer qu'un équivalent de a_n s'écrit sous la forme suivante

$$a_n \sim b_{i_0,m_{i_0}} \xi_{i_0}^n \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}.$$

15a. On considère la fonction rationelle $\tilde{F}$ définie par les conditions initiales (1,1,2,3,4,5) et la relation de récurrence (-1,1,1,0,-1,-1,1). Trouver une expression explicite de la fonction $\tilde{F}$ en fonction de $\mathcal{R}_3$.

15b. En utilisant la question 14, montrer qu'un équivalent du n-ième coefficient de $\tilde{F}$ (noté $a_n(\tilde{F})$) est donné par

$$a_n(\tilde{F}) \sim \frac{n^2}{12}$$

Ce résultat est-il en conformité avec le résultat de la question 8 ?

1.3 Partitions entières pour k quelconque

16. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\mathcal{R}_k(X) = \dfrac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ puis

$$\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \ \cdots \ \frac{1}{1-z^k}.$$

17. En déduire que

$$r_k(n) = r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots$$

où on utilise la convention : $r_k(n-ik) = 0$ si $n < ik$.

18. En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto x^{k-1}$ est convexe, montrer que pour tout $k \geq 2$

$$x^{k-2} \geq \frac{1}{k(k-1)} \left(x^{k-1} - \max\left\{ (x-k)^{k-1} ; 0 \right\} \right), \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

19. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$r_k(n) \geq \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

2 Problème d'algèbre linéaire

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$q(x) = \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E, on note $U \oplus V$ l'espace qui est la somme directe de U et V, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $U + V$ sous la condition $U \cap V = \{0\}$.

2.1 Diagonalisation

1. Soit q une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ (appelée forme polaire de q) telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout x de E. Vérifier en particulier que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)).$$

On dit que la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie positive) si, pour tout x de E, $\varphi(x,x) \geq 0$ (resp. si, pour tout $x \neq 0$, $\varphi(x,x) > 0$). On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$.

2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = {}^t P \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

Dans la suite du problème, on appelle rang de la forme quadratique q (associée à la forme bilinéaire symétrique φ) le rang de la matrice de φ dans une base de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ (ou de façon équivalente pour la forme quadratique associée q) si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Etant donnés x et y deux vecteurs de E, on note $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\varphi(x,y)$ en fonction des x_i et des y_i.
4. Soit f_1 un vecteur de E tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. On note $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie pour tout x de E par $\varphi_1(x) = \varphi(f_1, x)$, et $F = \ker(\varphi_1)$. Montrer que $E = \mathbb{R}f_1 \oplus F$ où $\mathbb{R}f_1$ désigne le sous espace vectoriel de E de dimension 1 engendré par f_1.
5. En déduire que toute forme bilinéaire symétrique sur E admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
6. Déterminer une telle base pour la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

(On pourra commencer par préciser la forme bilinéaire symétrique φ associée à q et la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$).

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E et deux entiers p et q tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & -J_q & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où J_r désigne une matrice identité de taille $r \times r$.

2.2 Sous-espaces totalement isotropes

On appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique φ (noté ker (φ)) le noyau de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. On dit que φ est non-dégénérée si ker $(\varphi) = \{0\}$.

On dit que la forme bilinéaire φ est positive (resp. négative) si pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geq 0$ (resp. $\varphi(x,x) \leq 0$). On dit que la forme bilinéaire φ est définie si elle vérifie la proposition suivante

$$\varphi(x,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

On appelle signature de φ le couple d'entiers $(n_+; n_-)$ où n_+ est la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel F de E tel que la restriction de φ à F soit définie positive, et n_- la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel G de E telle que la restriction de φ à G soit définie négative.

Dans les questions suivantes, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale pour φ, et $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p+1, \ldots, p+q$, et $\alpha_i = 0$ sinon.

8a. Montrer que $p \leq n_+$.

8b. Soit F_+ un sous-espace vectoriel de E de dimension n_+ tel que la restiction de φ à F_+ (notée $\varphi|_{F_+ \times F_+}$) soit définie positive, et $G = \mathrm{Vect}\ (e_{p+1}, \ldots e_n)$. Montrer que F_+ et G sont en somme directe. En déduire que $n_+ \leq p$.

8c. En déduire le théorème de Sylvester : Dans toute base orthogonale de E, la matrice de φ possède n_+ éléments strictement positifs et n_- éléments strictements négatifs.

9. Exprimer le rang de φ en fonction de sa signature, et déterminer la signature d'une forme bilinéaire définie positive.

On appelle cône isotrope de la forme quadratique q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\}.$$

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique φ si $\varphi(x,y) = 0$. Pour A une partie de E, on appelle orthogonal de A selon φ l'ensemble

$$A^{\perp} = \{y \in E, \forall x \in A \quad \varphi(x,y) = 0\}.$$

10a. Montrer que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

10b. Montrer que pour toute partie F de E, on a

$$F \subset F^{\perp\perp}.$$

10c. Montrer que pour A et B deux parties de E on a l'implication suivante

$$A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

On appelle sous-espace totalement isotrope (SETI en abrégé) un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout x de F, $q(x) = 0$. On appelle SETI maximal (SETIM en abrégé) un sous espace totalement isotrope G vérifiant la propriété : si F est un SETI contenant G, alors $F = G$ (G est maximal pour l'inclusion).

Soit F un SETI.

11a. Montrer que $F \subset F^{\perp}$.

11b. Montrer que dim $F \leq n - \dfrac{r}{2}$, où r est le rang de la forme quadratique q.

11c. Montrer que F est inclus dans un SETI maximal.

On suppose que φ est non dégénérée. Etant donnés deux SETIM G_1 et G_2, on note $F = G_1 \cap G_2$, S_1 un supplémentaire de F dans G_1 (de sorte que $F \oplus S_1 = G_1$) et S_2 un supplémentaire de F dans G_2 (de sorte que $F \oplus S_2 = G_2$).

12a. Montrer que $S_1 \cap S_2^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2 = \{0\}$. En déduire que dim G_1 = dim G_2.

12b. Tous les SETIM ayant donc la même dimension, on appelle indice de la forme quadratique q la dimension commune de tous les SETIM. Calculer l'indice de q en fonction de sa signature $(n_+; n_-)$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, qui converge vers une limite *l*.

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, dont le premier terme u_0 est strictement compris entre 0 et 1.

- Etudier la convergence de la suite (u_n).

- En déduire la convergence des séries de terme général : u_n^2, $Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n.

Exercice n° 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels et f une application de E dans F qui vérifie les deux assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2)\ \forall K > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K$$

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall \lambda \in Q, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$, où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

3. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers zéro, calculer la limite de la suite $f(x_n)$.

4. Montrer que f est continue en 0 et en déduire que f est continue et linéaire.

Exercice n° 3

1. Pour t nombre réel compris strictement entre 0 et 1, calculer l'intégrale suivante :

$$A(t) = 2\int_0^1 Max(\omega(1-t), t(1-\omega))d\omega$$

2. Pour x, y>0, on pose : $V(x,y) = 2\int_0^1 Max(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y})d\omega$

Calculer cette intégrale.

Exercice n° 4

Soient E un espace vectoriel normé réel et f une fonction numérique définie sur E. On dit que f est quasi-convexe si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.

2. Montrer que toute fonction monotone sur R est quasi-convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe.

4. Soit f_i une famille de fonctions numériques quasi-convexes définies sur *E*, telle que, pour tout *x* de *E*, $Sup\, f_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction $g(x) = Sup\, f_i(x)$ est quasi-convexe.

5. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x, y \in X,\ \ f(y) \leq f(x) \Rightarrow df(x)(y-x) \leq 0$$

6. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique deux fois différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x \in X,\ \forall h \in E,\ df(x)(h) = 0 \Rightarrow d^2 f(x)(h,h) \geq 0$$

Exercice n° 5

On considère la suite $(u_n(\lambda))$ pour un paramètre réel λ strictement positif par :

$$u_n(\lambda) = \frac{e^{nLn\lambda - \lambda}}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n(\lambda))$ est convergente pour tout $\lambda > 0$.

2. Déterminer le maximum de $(u_n(\lambda))$ pour *n* fixé.

3. Peut-on prolonger $(u_n(\lambda))$ par continuité en $\lambda = 0$?

Exercice n° 6

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ (inégalité de Markov),}$$

où *P* désigne la probabilité et *E(X)* l'espérance mathématique de *X*.

2. Un fabricant produit en moyenne 20 produits par semaine. Cette production est plus ou moins aléatoire, car elle dépend des fournisseurs et de la disponibilité des matières premières. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

3. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Où $\sigma(X)$ correspond à l'écart-type de *X*.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 150 mots (réduction au 1/10ème) le texte suivant d'Agnès Rousseaux publié le 8 septembre 2009. Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Sortir du cycle infernal du surendettement

Évoquer la dette des pays dits « en développement », c'est entrer dans un univers de démesure et de non-sens. Les chiffres font peur, à l'image de la situation qu'ils illustrent. Le montant de cette dette était de 70 milliards de dollars en 1970. Il a grimpé en 2007 à 3 360 milliards de dollars. Une augmentation exponentielle qui mine les économies de ces pays en développement, complètement accaparés par le remboursement des emprunts et de leurs intérêts. Selon le Comité pour l'Annulation de la Dette du Tiers-Monde (CADTM), « *les Pays en développement ont remboursé l'équivalent de 102 fois ce qu'ils devaient en 1970, mais entre temps leur dette a été multipliée par 48* ». Cette situation entraîne une dépendance vis-à-vis des créanciers et déstructure l'économie de pays embourbés dans cette spirale infernale.

C'est le cas de l'Équateur, qui consacrait en 2005 environ 40 % de son budget annuel à rembourser sa dette extérieure publique. Et cela au détriment de dépenses sociales, éducatives, sanitaires, dont le pays aurait tant besoin ... Aujourd'hui, 80 % de la population équatorienne vit avec moins de 2 dollars par jour. L'adoption du dollar et l'abandon de la monnaie nationale, en 2000, a provoqué la faillite de milliers de petites entreprises, concurrencées par des importations fortement subventionnées. Depuis plusieurs décennies, les conditions de vie se sont détériorées : accroissement de la pauvreté, problème de dénutrition chronique pour 50 % des enfants, augmentation du chômage... Entre 1970 et 2005, le nombre de personnes vivant sous le seuil de pauvreté est passé de 40 % à 61 %.

A ces régressions économiques et sociales s'ajoutent des impacts environnementaux. Pour pouvoir respecter les remboursements de la dette, la surexploitation des réserves pétrolières a été encouragée, sans que cela ne serve au développement du pays. Déforestations, pollutions des eaux, déplacements de population : les dommages causés sont évalués à 50 fois le montant de la dette ! Et à ce rythme, dans 25 ans, les réserves seront épuisées. Pour ces raisons, le gouvernement de gauche dirigé par le Président Rafael CORREA, élu en 2006, a entrepris une initiative originale pour enrayer le cycle infernal de la dette.

Quand les emprunts servent à licencier, à privatiser et à détruire l'environnement

En 30 ans, la dette de l'Équateur est passée de 240 millions de dollars à 16 milliards. La dictature puis les gouvernements néolibéraux l'ont multiplié par 66 ! Sans que les populations en bénéficient. Mais à quoi donc a servi l'argent emprunté ? Pour le savoir, le Président CORREA a lancé un audit. Une commission nationale, épaulée par des experts internationaux, dont le CADTM, a travaillé pendant plus d'un an à décortiquer les emprunts successifs et leur utilisation. L'audit a été remis en septembre 2008 et ses conclusions sont sans appel : la commission a mis en évidence le caractère illégitime d'une grande partie de la dette publique de l'Équateur.

C'est tout d'abord la « dette odieuse », contractée par le régime dictatorial entre 1968 et 1979, qui entraîne le pays dans une mauvaise pente. Puis la décision unilatérale des États-Unis d'augmenter les taux d'intérêt en 1979. Quelques années plus tard, la crise financière du secteur privé (liée aux dévaluations de la monnaie nationale) oblige l'État à un « sauvetage » du secteur bancaire. Ce qui entraine la transformation de dettes privées en dette publique. Celle-ci est alors multipliée par six...

L'utilisation des crédits est tout aussi effarante. Selon les informations disponibles, seules 14 % des sommes empruntées entre 1989 et 2006 auraient servi à des projets de développement (télécommunications, eau potable, énergie,...), le reste - soit 86 % - étant consacré au remboursement de la dette externe et de ses intérêts. Et c'est sans compter les conditions posées par les créanciers, qui orientent le pays vers une libéralisation à outrance, avec l'obligation de licenciement de 30000 fonctionnaires en 2003-2004, ou le développement d'une économie d'exportation. Un exemple parmi d'autres : certains crédits ont servi à développer la culture des crevettes, production d'exportation encouragée par le FMI. Les conséquences ont été catastrophiques pour les écosystèmes, notamment la mangrove, source de revenus pour les populations locales et barrière contre les inondations. Elle est aujourd'hui détruite à 70 %. Autant de désastres sociaux et environnementaux qui permettent à des associations équatoriennes de réclamer aujourd'hui réparation au titre de la dette écologique dont l'Équateur est créancier.

Suite à l'audit, plutôt que d'attaquer en justice les créanciers peu scrupuleux (FMI, Banques américaines, Club de Paris...), l'Équateur a décidé d'annuler une partie de cette dette illégitime. Au printemps 2009, le gouvernement a annoncé qu'il ne remboursera qu'au tiers de leur valeur les bons émis jusqu'en 2030. Soit une économie substantielle de 2 milliards de dollars. Pour Eric Toussaint, membre du CADTM et de la Commission d'audit, c'est « *un résultat très positif, même si personnellement j'aurai souhaité que ça aille plus loin. L'audit avait donné des raisons, juridiquement étayées, pour annuler une plus grosse partie de la dette. Les 80 % de la dette que nous avions audités étaient totalement répudiables* ».

Une politique souveraine face à la dette

Cette démarche marque une rupture claire avec les pratiques existantes. L'allégement de la dette se fait le plus souvent par négociation multilatérale. Et les créanciers conditionnent l'allégement de la dette à certaines mesures, comme par exemple la privatisation de secteurs d'activités. Cela a été le cas du Brésil qui a, dans les années 90, laissé à l'abandon les services publics de base (santé, éducation, transport) puis a finalement réussi à rembourser intégralement sa dette au FMI, en soutenant fortement l'agrobusiness, avec toutes les conséquences néfastes, sur le plan écologique et social, que l'on peut imaginer (déforestation massive, paysans privés de terres et de ressources...). Dans le cas de l'Équateur, il s'agit au contraire d'un acte unilatéral et souverain. Cela crée un précédent, d'autant plus que l'Équateur n'est pas au bord de la banqueroute. L'annulation partielle de la dette va permettre de consacrer une part plus importante aux dépenses sociales : santé, éducation, infrastructures…

Aujourd'hui, malgré les risques d'embargo, de fuite des capitaux, d'annulation d'investissements, et autres menaces de la part de banquiers et d'États effrayés par cette mesure unilatérale, plusieurs autres pays envisagent de suivre cette voie. C'est le cas par exemple du Zimbabwe ou du Paraguay, qui a invité le CADTM pour discuter d'une stratégie à adopter. Un signe positif : plus les pays seront nombreux à s'engager dans cette voie, plus le rapport de force pourra peser en leur faveur. Qui, après l'initiative équatorienne, voudrait continuer de payer une dette illégitime ou qui n'a pas été auditée ?

« Il faut poursuivre en justice les responsables de cette situation »

L'initiative ne vient pas seulement des pays débiteurs. En 2006, la Norvège avait procédé à l'annulation de la dette de cinq pays pour des emprunts dont elle reconnaissait les conditions inappropriées. On pourrait en espérer autant de la France, dont les créditeurs ont été ou sont bien souvent liés par des relations coloniales ou néocoloniales.

D'autres moyens sont à explorer. Pour sa part, Eric Toussaint espère que les instructions judiciaires vont se développer à l'égard des fonctionnaires équatoriens qui, depuis 2000, ont signé des contrats avec les banques américaines. En allant à l'encontre du droit et de la Constitution équatorienne, ils ont trahi les intérêts de leur pays, bien souvent motivés par des pots-de-vin. Les dirigeants des banques, peu regardants sur les conditions de prêts et qui ont tiré profit de cette situation, devraient également être mis en cause. De même que les institutions financières internationales et leurs plans de dérégulation à outrance. Qui osera intenter un procès à la Banque mondiale ?

Les bases d'un autre modèle de développement ?

« *Il ne s'agit pas de déclarer une dette illégitime parce qu'elle est le produit d'un système capitaliste. On peut avoir des dettes odieuses dans des systèmes non capitalistes. L'audit de la dette n'est pas directement une critique du capitalisme, mais il promeut un autre modèle de développement, favorise la reconquête démocratique, l'exercice de la souveraineté de chaque pays. C'est un moyen pour rompre avec des mécanismes de dépendance, c'est donc un instrument de libération et de justice* », explique Eric Toussaint. La démarche d'audit permet surtout d'inverser le rapport de force entre créanciers et créditeurs. Et de faire réfléchir – ou fléchir- les créanciers peu scrupuleux, en faisant peser la menace du non-remboursement de leurs capitaux en cas de conditions jugées illégitimes. Ce processus est en tout cas une remise en cause efficace d'un système de domination et d'oppression. Il met en lumière l'immoralité et l'illégalité d'une partie de ces dettes, tout en proposant une résolution effective et rapide du problème ainsi qu'un cadre de contrôle pour l'avenir.

L'Equateur est un exemple que devraient peut-être suivre les pays du Nord, dont les gouvernements n'ont pas hésité à mettre à disposition des marchés 7800 milliards de dollars entre avril et octobre 2008. Cela a provoqué une hausse considérable de la dette publique, sans que les citoyens aient eu leur mot à dire. Une petite partie de ce montant aurait permis à un grand nombre de pays en développement de s'en sortir. Mais sauver des banques est sans doute plus important que d'investir sur le long terme dans des politiques de développement respectueuses de l'environnement - au Nord comme au Sud - ou de sauver des pays de la logique infernale de l'endettement et de la misère qui en découle.

Agnès Rousseaux

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à 3 et dont les coefficients sont réels.

1. Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'intégrale
$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
converge.
2. Si on note par $\theta = (c, x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^4$, montrer que l'application
$$w_\theta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R},$$
définie par
$$w_\theta(P) = c(P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)),$$
est une application linéaire.
3. Calculer θ tel que
$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = w_\theta(P),$$
pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice II

Soit P_n la suite de polynômes réels définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = 1 + X$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) + XP_{n-1}(X). \tag{1}$$

1. Montrer, par récurrence, que le degré des polynômes P_{2n} et P_{2n-1} est n.
2. Ecrire l'équation caractéristique de la suite récurrente linéaire (1) et donner la solution $P_n(X)$ de cette suite.
3. Montrer que toutes les racines de $P_n(X)$ sont réelles.

Exercice III

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\, dx$$

   est asymptotiquement équivalent à n, quand n tend vers l'infini.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n}\, dx$$

   est asymptotiquement équivalent à $\frac{C}{n}$, quand n tend vers l'infini. Calculer explicitement la constante $C > 0$.

Exercice IV

Méthode numérique d'approximation d'une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$.

Soit l'intervalle $[a, b]$ fixé, pour $a < b$ réels.

I. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

1. Montrer que $g(x)$ ne s'annule en aucun x de $]a, b[$;
2. Démontrer que $g(x) < 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

II. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe un unique c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$;
2. Montrer qu'il existe m_1 et m_2 tels que
$$0 < m_1 \leq f'(x), \quad 0 < f''(x) \leq m_2 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [a, b[;$$
3. On souhaite approximer c. Soit P le polynôme de degré 1 tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, et soit c_1 dans $]a, b[$ tel que $P(c_1) = 0$. Démontrer que $a < c_1 < c$, en utilisant la fonction $g(x) = f(x) - P(x)$.

III. Désormais on conserve les hypothèses de la partie II.

Soit $\{c_n\}_{n\geq 0}$ la suite récurrente définie de la façon suivante :
-on pose $c_0 = a$;
-pour tout $n \geq 0$ et c_n déjà défini, on note P_n l'unique polynôme de degré 1 tel que $P_n(c_n) = f(c_n)$, $P_n(b) = f(b)$; on définit c_{n+1} par $P_n(c_{n+1}) = 0$.

1. Trouver explicitement la fonction φ telle que $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.
2. Montrer que la suite $\{c_n\}_{n\geq 0}$ est strictement croissante et contenue dans l'intervalle $[a, c]$.
3. Montrer que la suite $\{c_n\}_{n\geq 0}$ converge vers c, et que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|c_n - c| \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Application numérique : Représenter graphiquement la fonction $f(x) = x^3 - 4x + 1$ et donner l'approximation numérique c_3 de la solution réelle de $f(x) = 0$ comprise entre 1.5 et 2. Donner un majorant de l'erreur commise en utilisant ce qui précède.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« L'Afrique doit donc inventer son développement, et ne plus penser que l'aide est la solution idoine. » Que pensez-vous de cette citation de Dambisa Moyo, économiste d'origine zambienne, tirée de son livre L'Aide fatale, paru en 2009.

Sujet n° 2

« Il n'y a de révolution sociale véritable que lorsque la femme est libérée. Que jamais mes yeux ne voient une société où la moitié du peuple est maintenue dans le silence. » Thomas Sankara, 8 mars 1987, homme politique burkinabé anti-impérialiste. Que pensez-vous de cette affirmation ? Vous illustrerez votre propos.

Sujet n° 3

Selon vous quels sont les liens entre le développement économique d'un pays et son développement social et la démocratie ? Vous illustrerez votre argumentaire.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Etant donné un nombre réel positif r, on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\bar{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, où $|z|$ est le module de z.

On appelle *série entière* associée à la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute série de fonction de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe. On rappelle le lemme suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiere, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors

(i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) Pour tout nombre réel r tel que $0 < r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\bar{D}(r)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est alors défini par

$$R = \sup\{r \geq 0, \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée }\}.$$

On appelle alors *disque de convergence* le disque $D(R)$.

Le but du problème est d'étudier sur quelques exemples le comportement d'une série entière au voisinage du cercle $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ lorsque $R < +\infty$.

1.1 Préliminaires

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque $D(1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

On note de plus $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. En remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$, montrer que pour tout $z \in D(1)$,
$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$
2. Soit $z \in \Delta$. On note $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$. Montrer que
$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$
3. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D(1)$
$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$
4. Déduire des questions précédentes que
$$\lim_{z \to 1, z \in \Delta} f(z) = S.$$
5. **Application :** Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

1.2 Un théorème Taubérien

Le but des questions suivantes est d'établir une réciproque partielle du résultat précédent.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Pour $x \in]-1, 1[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x \to 1, x<1} f(x) = S.$$

6. Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $(1 - x^k) \leq k(1-x)$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]0, 1[$,
$$|S_n - f(x)| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k.$$

8. Justifier que le réel $M = \sup\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

9. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

1.3 Un exemple de comportement sur le cercle $C(1)$

On considère dans cette partie la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} z^n$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x. Le but est de montrer que cette série est convergente en tout point du cercle $C(1)$ mais qu'elle n'est nulle part absolument convergente.

10. Dans cette question, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose $\sigma_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

    (a) On suppose que la suite (σ_n) est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Justifier que

    $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n$$

    et en déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

    (b) On suppose que la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

11. (a) Etablir que pour tout entier naturel impair p, on a

    $$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2.$$

    (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0+1)^2 \leq N$. Montrer que

    $$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

    (c) Etablir :

    $$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq 8(N_0+1).$$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ est une série convergente.

12. Dans cette question, θ est un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$.

 (a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée.

 (b) Montrer que la série $\sum |c_n - c_{n+1}|$ avec $c_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

 (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} e^{in\theta}$ est convergente.

13. Conclure.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on cherche à étudier des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une formule de récurrence linéaire afin de trouver une formule simple donnant u_n en fonction de n.

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si μ est une valeur propre d'une matrice M de taille $n \times n$, on note E_μ le sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre μ, c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $M - \mu I_n$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\mu = \{x \in R^n : Mx = \mu x\} = Ker(M - \mu I_n).$$

2.1 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle récurrente d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 0, \\ u_1 &=& 1, \\ u_{n+2} &=& u_{n+1} + u_n. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

 Montrer qu'on peut écrire la relation $(\star)$ sous la forme

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = M\, U_n,$$

 où M est l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dira que M est la matrice de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
5. Identifier une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$D = P^{-1}MP. \tag{1}$$
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire
$$M^nP = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{pmatrix}$$
où a et b sont des réels à déterminer.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule suivante :
$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}.$$
8. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.

2.2 Suite récurrente d'ordre p

Dans cette partie, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence d'ordre p de la forme :
$$v_{n+p} = \mu_0 v_n + \mu_1 v_{n+1} + \cdots + \mu_{p-1} v_{n+p-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$
où $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$. De plus, on se donne une condition initiale pour les p premiers éléments de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme
$$v_0 = v^0, v_1 = v^1, \ldots, v_p = v^p, \tag{3}$$
où $(v^0, \ldots, v^p)$ est une autre famille de réels fixée.
Une telle suite possède également une matrice de récurrence $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$V_{n+1} = M\ V_n,$$
avec $V_n = (v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+p-1})^t$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$.

9. Montrer que la matrice M est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$
10. Déterminer le polynôme caractéristique (noté χ_M) de la matrice M.

11. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{p-1,p-1} & t_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{p,p} \end{pmatrix},$$

où les $t_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, telles que

$$T = P^{-1}MP. \tag{4}$$

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$V_n = PT^nP^{-1}V_0.$$

2.3 Diagonalisation

On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

où on rappelle que $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$.

13. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 qui soit colinéaire à un vecteur de la forme
$$(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{p-1}).$$

14. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ suivante

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

est de rang supérieur ou égal à $p-1$.

15. En déduire que les sous-espaces propres de la matrice M sont tous de dimension 1, c'est-à-dire
$$\text{Pour tout } i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \dim(E_{\lambda_i}) = 1.$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Et on note D la matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

16. Montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_p \\ \nu_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_1^{p-1} & \nu_2^{p-1} & \cdots & \nu_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ une famille de réels à déterminer telle que $D = P^{-1}MP$.

17. **Application :** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 0, \\ a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 0, \\ a_{n+3} & = & a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 0, \\ b_1 & = & 0, \\ b_2 & = & 1, \\ b_{n+3} & = & b_{n+2} - b_{n+1} + b_n \end{array} \right. \tag{5}$$

vérifient $a_n = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$ et $b_n = \dfrac{1 - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $n/2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n\,u_n$

2. Donner un exemple de suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, mais telle que la suite de terme général $n\,u_n$ ne tende pas vers zéro.

3. Soit σ une application injective de N^* (ensemble des entiers naturels non nuls) dans lui-même. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout x nombre réel, on a : $1 + x \le e^x$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = (1+k)(1+k^2) + ... + (1+k^n), \text{ pour } n \in N^* \text{ et pour } 0 \le k < 1$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,Ln(k)}$ (cette question est indépendante des deux précédentes)

Exercice n° 3

1. Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n nombres réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & a_0 \\ 1 & . & . & . & a_1 \\ 0 & . & . & . & . \\ ... & . & . & 0 & . \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre n (elle présente des 1 sur la sous diagonale, les a_i sur la dernière colonne et partout ailleurs des zéros). Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Trouver une matrice carrée A d'ordre 4 qui vérifie l'équation : $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$

Exercice n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur y de R^3 qui vérifie :

$$Det(x_1, x_2, z) = y.z, \ \forall z \in R^3$$

Où $y.z$ désigne le produit scalaire euclidien de ces deux vecteurs et Det le déterminant. Le vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 et on note $y = x_1 \wedge x_2$.

1. Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de y en fonction de celles de x_1 et x_2.

2. On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$

- Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

- Montrer qu'il existe un réel k tel que : $u^3 = ku$

- En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

3. Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par : $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$

- Montrer que φ_α est une bijection de R^3

- Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

- En déduire l'expression de l'application réciproque de φ_α en fonction de α et u.

Exercice n° 5

Les deux questions sont indépendantes. R_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et C^k les fonctions k fois continûment dérivables.

1. Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et que dans un voisinage de zéro, $f''(x) \geq -\dfrac{p}{x^2}$, où p est une constante positive. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} x\, f'(x)$

2. Soit $f \in C^5(R, R)$ une fonction impaire qui vérifie :

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists M > 0, \forall x \in R, \left| f^{(5)}(x) \right| \leq M$

Montrer que pour tout réel *x*, on a : $\left| f(x) - \dfrac{x}{3} f'(x) \right| \leq \lambda\, M \left| x \right|$.

Déterminer la meilleure constante possible λ.

Exercice n° 6

Soient $X = (X_1, ..., X_n)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ deux suites indépendantes de variables de Bernoulli de même paramètre λ, où $0 < \lambda \leq 1/2$. On a :

$$\lambda = P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - P(Y_i = 0).$$

On note L_n la longueur de la plus grande suite *Z* commune à *X* et *Y*.

L'ordre des valeurs dans une suite ne peut pas être changé. Il est possible d'introduire des cases vides entre les valeurs d'une suite pour obtenir la plus grande suite commune. Plusieurs suites - peuvent convenir.

Par exemple, pour *n*=9, si *X*=(0 0 0 1 0 0 1 0 0) et *Y*= (0 0 1 0 0 0 0 1 0), on peut noter :

X=	0	0	0	1	0	0			1	0	0
Y=	0	0		1	0	0	0	0	1	0	
Z=	0	0		1	0	0			1	0	

Et $L_n = 7$.

1. Pour *n*=2, calculer l'espérance de L_2 en fonction de λ.

2. Pour quelle valeur de λ, l'espérance de L_2 est-elle minimale ?

3. Quelle est la probabilité que $L_n = n$, sachant que la suite *X* est fixée avec uniquement trois 1 et que *Y* a aussi uniquement trois 1 (*n*>3) ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots (réduction au 1/10ème) le texte suivant de Valéry Ridde et Karl Blanchet publié en 2008 dans la Revue Humanitaire. Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Vers la gratuité des soins en Afrique ?

« Lorsque j'ai reçu une ordonnance, le médecin m'a dit "tant que tu n'auras pas payé, nous allons t'emprisonner" », raconte Christine, une jeune Burundaise de 18 ans. Dans ce petit pays voisin du Rwanda, des dizaines de malades ont ainsi été séquestrés plusieurs jours voire plusieurs semaines. Ce sont les gardiens des hôpitaux, salariés de sociétés de gardiennage privées, qui se chargent de faire respecter la règle. Dans d'autres pays où certains patients s'enfuient la nuit car ils ne peuvent pas régler les frais (les infirmiers les appellent les « évadés »), on confisque les pièces d'identité pour les obliger à revenir payer. Des cartons entiers de ces documents peuvent ainsi s'entasser dans les bureaux des centres médicaux. Au Burkina Faso, pour que les patients n'oublient pas de s'acquitter de leur dû, on peut lire « Pour la santé soyons prêts à payer le prix » sur les murs des dispensaires comme celui de Bindi situé au nord du pays.

« Si tu pars au centre de santé, explique Mariam Ouedraogao qui vit dans un village reculé à l'est de Ouagadougou, le papier que tu dois prendre afin qu'on regarde de quoi tu souffres, ça coûte 200 francs CFA. Tu prends ce papier avant qu'on ne te consulte. Si on te consulte et on voit ta maladie, pour te soigner, on te donne un autre papier, une ordonnance, pour que tu achètes des médicaments. En ce moment si tu n'as pas d'argent, tu vas rester à la maison pour te soigner. C'est ce qui fait que les centres de santé, « c'est pas tout le monde qui y va ».

Un système inégalitaire

En effet, contrairement à la plupart des pays riches, en Afrique, les patients doivent payer la totalité des coûts sans qu'aucun système d'assurance ne rembourse leurs frais. Depuis les années 1980, les systèmes de soins africains reposent sur le paiement direct des prestations par le patient et non plus sur la gratuité, comme dans les années qui ont suivi les indépendances. Mise en place sous l'impulsion des bailleurs de fonds (FMI, Banque mondiale, etc.), cette politique a bénéficié de la complicité de ceux que la chercheuse américaine Merilee Grindle nomme les « acolytes nationaux ». Les élites locales « se soignent toutes dans le privé et souvent à l'étranger ; elles n'accordent aucune priorité réelle à la santé publique ».

L'expérience a montré que le paiement direct ne permet pas d'entretenir les systèmes de santé en Afrique. Pis, il constituerait même une barrière empêchant les plus pauvres de se soigner. Selon la Banque mondiale elle-même, il ne couvrirait que 5 à 10 % des besoins. Les populations les plus malades – qui sont souvent aussi les plus miséreuses – financent ainsi, en partie, le système de santé. Or les principes de solidarité et d'équité voudraient que l'on tienne compte de la « capacité à payer » des populations. En Sierra Leone, les milieux modestes consacrent 25 % de leurs revenus aux dépenses médicales tandis que les plus riches seulement 3,7 %. Dix à trente pour cent de la population du continent africain n'auraient pas accès aux soins pour des raisons budgétaires. Ils seront « toujours arrêtés à la porte » nous disait un paysan du Burkina. En outre, un grand nombre de personnes s'endettent pour payer leurs ordonnances ou sont obligés de vendre leurs animaux ou leurs récoltes. C'est ce que l'on appelle des « dépenses catastrophiques » qui appauvrissent encore les pauvres lorsqu'ils tombent malades. La proportion des ménages qui doivent effectuer de tels déboursements catastrophiques est de 1,3 % en France contre 8,5 % au Malawi, par exemple.

La Banque mondiale fait marche arrière

Dans les pays qui ont instauré un système de santé largement financé par le public (à travers les cotisations, les taxes ou les impôts), il demeure relativement aisé de se faire soigner lorsque l'on ne dispose pas d'argent. Mais en Afrique où les revenus fiscaux sont faibles et le financement de la santé majoritairement d'origine privée, la collectivité laisse les patients seuls face à leurs besoins. L'aide internationale, qui n'a pourtant jamais été aussi importante dans ce secteur – elle est passée de 6 milliards de dollars en 2000 à 14 milliards en 2005 – se révèle insuffisante pour répondre à la demande. Les Objectifs du Millénaire pour le Développement (OMD) ne seront d'ailleurs pas atteints. L'aide paraît en effet trop concentrée sur la lutte contre des maladies spécifiques (sida, tuberculose, etc.) et pas assez sur le renforcement des systèmes de santé dans leur ensemble.

C'est pourquoi, après avoir pendant 20 ans demandé aux patients de payer lorsqu'ils consultent, les pouvoirs publics nationaux et mondiaux semblent amorcer un changement de cap. Même la Banque mondiale qui a été le plus ardent défenseur de l'imposition du paiement direct des soins dans les années 1980 et 1990, semble changer d'avis. Dans sa nouvelle politique de santé promue en 2007, elle affirme qu'elle soutiendra les pays qui décident d'abolir le paiement direct. De même, en juin 2007, la directrice générale de l'Organisation mondiale de la santé (OMS) abondait en se sens : « Si vous voulez réduire la pauvreté, cela me paraît censé d'aider les gouvernements à abolir le paiement ». En outre, nous avons pu observer comment, discrètement, sur le terrain, le bureau d'aide humanitaire de la Commission européenne appuie des associations qui mettent en place la gratuité des soins en Afrique. Mais les fonctionnaires de l'aide au développement à Bruxelles ne semblent pas tous d'accord. Pourtant, selon le chercheur britannique Chris James, l'abolition du paiement des soins pour les enfants de moins de 5 ans dans 20 pays d'Afrique sub-saharienne pourrait sauver de 150 000 à 300 000 vies.

Certains gouvernements africains semblent acquis à une réorientation des politiques de santé. Ainsi, l'Afrique du Sud ou l'Ouganda en sont maintenant à plusieurs années d'expériences en ce sens. Plus récemment, le Sénégal a rendu gratuits les soins donnés aux personnes âgées ; au Mali ce sont les césariennes ; au Niger, les consultations pour les enfants de moins de 5 ans ; au Burkina Faso les accouchements sont subventionnés à 80 % par l'Etat. Dans tous ces pays, les effets sont immédiats et le nombre de consultations a augmenté parfois de manière exponentielle. Mais ce virage n'a pas toujours été bien préparé : les décisions ont été prises rapidement sans laisser aux techniciens le temps de s'adapter. En effet, c'est souvent sous l'effet de crises majeures que la suppression du paiement direct s'est imposée : les détentions de patients au Burundi, la crise alimentaire au Niger, ou le blocus économique et politique à Madagascar.

Les freins au changement

Cependant, des réticences se manifestent. Ainsi, Drissa, infirmier rencontré dans un dispensaire au Niger se montre amer : « J'ai l'impression que le Niger est devenu un laboratoire pour tester tous les systèmes, un pays cobaye ». On s'inquiète du financement, du manque de préparation, du besoin de suivre et d'évaluer l'introduction d'un tel changement, ou encore de sa pérennité. Au Niger, le ministère des Finances renâcle : « Quand ça arrive au Trésor, on a l'impression que ce n'est plus une priorité nationale » nous dit un représentant d'une agence internationale de coopération. Prudemment, le Burkina Faso s'est borné, en janvier 2008, à la réduction – et non pas la suppression – du paiement des traitements des antirétroviraux, en attendant que la question de la gratuité trouve réponse dans la durabilité des financements requis. Pourtant, ces traitements sont gratuits dans tous les pays de la région et l'expérience a montré, au Sénégal par exemple, que cette pratique ne rendait pas, contrairement aux idées reçues, les patients moins motivés dans le suivi de leur traitement.

Mais certains villageois, quant à eux, ne comprennent pas les nouvelles directives. Dans les années 1980, l'idée de la participation communautaire visait à confier aux paysans le contrôle des centres de santé par la mise en place de comités de gestion. Ce système n'a jamais vraiment fonctionné et la participation s'est limitée à une contribution financière. Aussi, les paysans ont pris l'habitude de payer. Aujourd'hui, les responsables communautaires ne comprennent pas pourquoi on leur demande de supprimer cette pratique qui alimente les caisses des dispensaires où dormiraient des millions de francs CFA. Mais ces sommes n'ont jamais été utilisées pour améliorer l'accès aux soins des plus pauvres, accroissant ainsi les inégalités entre ceux qui peuvent payer et ceux qui n’en ont pas les moyens. Au Niger par exemple, seulement 4% des femmes les plus pauvres accouchent avec l’aide d’un personnel médical qualifié contre 63% de leurs consœurs des ménages riches. De surcroît, les villageois se souviennent des années 1960 et 1970 quand la gratuité signifiait absence de médicaments et mauvaise qualité des soins.

Certains soulignent que le terme « gratuité » est un abus de langage médiatique. En effet, même si l’acte médical n’est plus payant, le patient devra toujours financer le transport, le temps perdu, l’alimentation des accompagnants et tous les autres frais indirects. À la lumière de l’expérience ghanéenne, on s’interroge ainsi sur les réels bénéficiaires des nouvelles politiques. Dans ce pays d’Afrique de l’Ouest, des chercheurs ont observé que les interventions de santé publique universelles ne profitent pas, dans un premier temps, aux plus pauvres mais d’abord aux plus riches. Les plus pauvres vivent souvent loin des villes et des centres de santé et l’information sur l’existence de nouveaux services leur parvient difficilement. Les plus riches qui sont aussi les plus éduqués sont les premiers à avoir les moyens d’adopter de nouveaux comportements favorables à la santé. Ajoutons que les infirmiers qui bénéficient dans certains pays de ristournes sur ces paiements ne sont pas très heureux non plus. Pour un certain nombre d’entre eux, les paiements directs sont un moyen commode d’arrondir les fins de mois de leurs maigres salaires, par des pratiques qualifiées pudiquement de « paiement informel ». Enfin, la dernière difficulté à surmonter est évidemment celle du financement. La plupart de ces politiques d’exemption sont financées directement ou indirectement par les bailleurs de fonds internationaux. La « mode » passée, poursuivront-ils ? À quand le prochain revirement de politique ? Les Etats africains vont-ils enfin, à l’aune de ces expériences, accorder un budget décent à la santé ? Abolir le paiement ne suffit pas : il faut aussi investir dans l’amélioration conséquente de l’offre de soins et payer des salaires décents aux professionnels de la santé pour éviter, notamment, la fuite des cerveaux. La déclaration d’Abuja et l’engagement des États de consacrer au moins 15 % de leur budget à la santé n’a été respectée que par une minorité de pays tel que le Ghana par exemple.

Au nom de la reconnaissance grandissante du droit à la santé, des luttes associatives pour l’accès aux médicaments antirétroviraux et de l’accès aux soins comme nouveau bien public mondial, les bailleurs de fonds et les responsables politiques africains commencent à reconsidérer l’accès aux soins des plus pauvres. Mais la vigilance s’impose. Si la Société financière internationale, associée à la Banque mondiale, recommande dans son dernier rapport l’investissement dans le secteur privé de la santé en Afrique, elle annonce la couleur en évoquant le « business de la santé en Afrique ». Sont-ce là les prémices d’une nouvelle vague de réformes ?

Valéry Ridde et Karl Blanchet

Revue Humanitaire

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I

1. Soit $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Trouver un polynôme $P_2(x)$ qui approxime $f(x)$ pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et démontrer que l'erreur d'approximation $f(x) - P_2(x)$ vérifie

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{2}, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

2. Soit f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur $]-1, 1[$, telle que $f(0) = 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\sqrt{x}}]} f(kx),$$

où $[z]$ désigne la partie entière d'un nombre réel z.

3. Prouver que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable, telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$, on a alors, pour tout a nombre réel,

$$\lim_{x \to \infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = \exp\left(-\frac{a^2}{2} \right).$$

Exercice II

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices carrés de dimension 3 à éléments réels et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable et, si oui, donner la matrice diagonale ainsi que la matrice de passage.
2. Trouver toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

   $$B^2 = A \quad \text{et} \quad tr(B) = 0,$$

   où tr désigne la trace.

Exercice III

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a, b, $c \in \mathbb{C}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix}$$

appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en discutant selon les valeurs de a, b et c.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ quelconque, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en résolvant l'équation $AX = \lambda X$, pour un vecteur X de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice IV

Soit
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et donner une relation de récurrence pour calculer I_{n+1} avec $n \in \mathbb{N}$.
2. Notons par $\hat{I}_0$ l'approximation numérique de I_0 et supposons que $\hat{I}_n$ est calculé à partir de $\hat{I}_0$ par la même relation de récurrence que I_n à partir de I_0. Soit $\epsilon_n = |I_n - \hat{I}_n|$ l'erreur d'approximation, pour tout n entier positif.

   Trouver une relation de récurrence pour la suite ϵ_n. De combien serait l'erreur ϵ_{10} si l'erreur initiale est $\epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-5}$? Comment s'exprime ϵ_{10} en fonction de ϵ_{20} ? Que suggérez-vous ?
3. Montrer que
$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10(n+1)(n+2)},$$
   et, en déduire que
$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$
   De quel ordre est ϵ_n et l'erreur relative ϵ_n / I_n ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans le monde actuel, peut-on encore parler d'indépendance nationale ? Vous illustrerez votre argumentaire d'exemples concrets.

Sujet n° 2

A propos de la lutte contre la pauvreté, l'économiste Esther Duflo, dans son livre La politique de l'autonomie, paru en 2012 (Ed. Le Seuil), explique que : « Tout le monde adore détester l'aide internationale mais la plupart des difficultés n'ont rien à voir avec l'aide internationale. ». Qu'en pensez-vous ? Vous expliquerez les enjeux et les contextes.

Sujet n° 3

Selon vous la compétition de manière générale est-elle dans notre monde un facteur de progrès ou d'exclusion pour les individus ? Discutez et argumentez.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\frac{d^n}{dX^n}$ la dérivation n-ième par rapport à la variable X, $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées.

1 Problème d'analyse

Le but du problème d'analyse est d'étudier quelques propriétés des polynômes dit de Legendre.

1.1 Préliminaires

1. Calculer les dérivées des fonctions polynômes $X^2 - 1$, $(X^2 - 1)^2$ et $(X^2 - 1)^3$.

On définit les polynômes $P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}((X^2 - 1)^n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $P_0(X) = 1$.

2. Donner une expression simple des polynômes P_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le degré de P_n et donner son coefficient dominant.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi la famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_N[X]$.
5. Montrer que

$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}(X(X^2 - 1)^n)$$

1.2 Autre expression

6. Soit f une fonction réelle. Déduire de l'égalité

$$f(X) = \frac{f(X) + f(-X)}{2} + \frac{f(X) - f(-X)}{2}$$

que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

7. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire).

8. Conclure sur la parité des fonctions polynômes P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit k un entier entre 0 et n. On note $a_k^{(n)}$ le coefficient d'ordre k du polynôme P_n tel qu'on ait la formule suivante :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} X^k.$$

9. En développant $(X^2 - 1)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que les coefficients $a_k^{(n)}$ sont donnés par la formule

$$\begin{cases} a_{n-2k}^{(n)} = \dfrac{(-1)^k}{2^n} C_n^k C_{2n-2k}^n = \dfrac{(-1)^k}{2^n} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \dfrac{(2n-2k)!}{n!(n-2k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n/2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où C_n^k désigne le nombre de combinaison de k éléments pris parmi n.

On obtient donc la forme équivalente

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^n X^{n-2k},$$

où E est la fonction partie entière.

10. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X).$$

11. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Bonnet défini par

$$B_{n+1}(X) := (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X).$$

12. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme

$$\frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X).$$

13. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Rodrigues

$$R_n(X) := \frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X) - \frac{d}{dX}(P_{n-1}(X)).$$

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.

1.3 Orthogonalité

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

16. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on dit que P est orthogonal à $\mathbb{R}_N[X]$ lorsque $\langle P, Q \rangle = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_N[X]$. On note $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle$ le carré de la norme de P_n qu'on supposera égal à $\dfrac{2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On supposera également que le polynôme de Bonnet B_{n+1} et le polynôme de Rodrigues R_n sont identiquement nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. Montrer l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \end{array} \right. \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

18. Montrer que $\langle P_{n+2}, P_{n+1} \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
19. En déduire l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \\ \langle P_{n+2}, P_n \rangle = 0 \end{array} \right. \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

20. En déduire que P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on étudie un endomorphisme u sur $\mathbb{R}[X]$ qui laisse stable les sous-espaces $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire un endormorphisme tel que

$$\text{Pour tout } Q \in \mathbb{R}_N[X], \ u(Q) \in \mathbb{R}_N[X].$$

Les compositions successives de u notées u^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ ont alors la même propriété (avec la convention $u^0 = Id$ où Id est l'endomorphisme identité). Pour tout $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on s'interroge sur le sens de la limite de $u^m(P)$ lorsque $m \to +\infty$. On note Ker et Im respectivement le noyaux et l'image d'un endomorphisme.

2.1 Sous-espaces stables

Soit $\gamma \in]0, 1[$, on pose u_γ l'endomorphisme suivant

$$\begin{array}{rcl} u_\gamma : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \gamma P\left(\dfrac{(4\gamma-1)X}{2\gamma+1}\right) + (1-\gamma)P\left(\dfrac{(4\gamma-1)X+1}{2\gamma+1}\right). \end{array}$$

1. Vérifier que u_γ est un endomorphisme qui laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Puisque u_γ laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut définir $u_{\gamma,N}$ comme la restriction du morphisme u_γ au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ par la formule

$$\begin{array}{rcl} u_{\gamma,N} : \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \mapsto & u_\gamma(P). \end{array}$$

2. Montrer que $u_{\gamma,N}$ est bien un endomorphisme.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, Ker $u_{\gamma,N} \subset$ Ker $u_{\gamma,N}^{m+1} \subset$ Ker $u_{\gamma,N}^{m+2}$.
4. Que dire de la suite réelle $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $d_m = \dim(\text{Ker } u_{\gamma,N}^m)$?
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, Im $u_{\gamma,N}^{m+2} \subset$ Im $u_{\gamma,N}^{m+1} \subset$ Im $u_{\gamma,N}$.
6. Que dire de la suite réelle $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $i_m = \dim(\text{Im } u_{\gamma,N}^m)$?

2.2 Étude de $u_{\frac{1}{3},2}$

Dans cette sous-partie, on pose $N = 2$ et $\gamma = 1/3$. On va montrer que $u_{\frac{1}{3},2}^m(P)$ converge vers une constante lorsque $m \to +\infty$ et expliciter cette constante en fonction de P. Par souci d'allégement des notations, on notera v l'endomorphisme $u_{\frac{1}{3},2}$.

7. Donner la matrice de v dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On notera cette matrice M.
8. En déduire Ker v et Im v.
9. Montrer que les suites $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
10. Montrer que la famille $\mathcal{B}'_2 = \{1, 1-2X, 1-6X+6X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
11. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'_2$ à $\mathcal{B}_2$.
12. Calculer l'inverse de la matrice Q.
13. En déduire la matrice D de v dans la base $\mathcal{B}'_2$.
14. Que représentent les vecteurs de $\mathcal{B}'_2$ vis-à-vis de l'endomorphisme v ?
15. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit a_P, b_P et c_P les coefficients réels tels que
$$P(X) = a_P X^2 + b_P X + c_P.$$
Ce sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer les coordonnées a'_P, b'_P et c'_P de P dans la base $\mathcal{B}'_2$.
16. Calculer M^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On pose e_z la forme linéaire d'évaluation du polynôme. C'est une forme linéaire qui a un polynôme P fait correspondre la valeur de la fonction polynôme associée au point $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} e_z : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(z). \end{array}$$

17. Montrer que e_z n'est pas injective et qu'elle est surjective.
18. Expliciter la restriction de e_z sur $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de z, a_P, b_P et c_P.
19. Montrer que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$.
20. En déduire que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Pour n entier naturel, on pose Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$. Calculer I_1 , I_2 et I_3.

2. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

3. Calculer $J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Exercice n° 2

1. Soit $K : R \to R$ définie par : $K(t) = \frac{3}{4\sqrt{5}}(1-\frac{t^2}{5})\, I_{[-\sqrt{5},\sqrt{5}]}(t)$ où I désigne la fonction indicatrice (ou caractéristique). Calculer $\int_R K(t)\,dt$ et $\int_R t^2 K(t)\,dt$.

2. Soient λ un paramètre réel et p, f deux entiers naturels non nuls. On pose,
pour $t \in [-p, f]$:

$\theta_t = \dfrac{K(t/\lambda)}{\sum_{t=-p}^{f} K(t/\lambda)}$. Pour $\lambda = p/\sqrt{5}$ et f=p, calculer θ_t en fonction de t et p.

3. On suppose seulement que $\lambda = p/\sqrt{5}$, calculer θ_t en fonction de t , f et p.

4. Comment peut-on interpréter K ?

Exercice n° 3

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$$f \circ f = \lambda f \text{ , où } \lambda \text{ est un paramètre réel non nul.}$$

On note $L_\lambda = \{f \,|\, f \circ f = \lambda f\}$.

1. Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

2. Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E.

3. Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$.

4. Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2.

5. Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à L_λ et vérifiant $(u - a \times Id) \circ (u - b \times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.

Montrer que $v = u - a \times Id$ et $w = u - b \times Id$ appartiennent à L_λ.
Ecrire u sous la forme $\alpha v + \beta w$ (on précisera les valeurs de α et β) et en déduire u^n.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A - aI)(A - bI) = 0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.

Exercice n° 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de *A*.

2. Calculer $(A-2I)^3$. En déduire l'inverse de *A* (si son inverse existe).

3. Trouver une base dans laquelle la matrice A est semblable à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n pour tout entier naturel *n*.

Exercice n° 5

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$.

1. Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x)$

2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$, déterminer $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_R g(x) f_n(x)\,dx$

Exercice n° 6

Soit la suite (u_n) de nombre réels, décroissante et positive.

1. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ en fonction de celle de $\sum_{n\geq 1} u_n$

2. On suppose de plus que la suite (u_n) converge vers zéro. On pose : $w_n = n^2 u_{n^2}$.
A-t-on un lien entre la convergence des deux séries de termes généraux (u_n) et (w_n) ?

Exercice n° 7

Soit $f : U \to R$ de classe C^1, où U est une partie de R^n.

On dit qu'une direction $\delta \in R^n$ est admissible pour f en $x \in U$ s'il existe $\overline{\alpha} > 0$ tel que : $x + \alpha\delta \in U$ pour tout α vérifiant $0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$.

1. Si x^* réalise un minimum relatif pour f sur U et si δ est une direction admissible pour f en x^*, que peut-on dire du produit scalaire $\langle df(x^*), \delta \rangle$, où $df(x^*)$ désigne la différentielle de f en x^* ?

2. Si $U = R^n$, que peut-on dire de $df(x^*)$?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 250 mots (réduction au 1/6ème) le texte suivant de Yves EKOUE AMAÏZO publié en janvier 2009. Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Crise économique en Afrique : Vers un Etat social régulé

Il est quasiment sûr aujourd'hui que la conjoncture mondiale va se dégrader en 2009 et 2010 avec un taux de croissance mondial largement en dessous des 2,2 % annoncés par le Fonds monétaire international. Les conséquences sur l'Afrique seront moins sensibles sur les économies pétrolières africaines ou les grands exportateurs de matières premières pour lesquelles les prix n'auront pas chuté. Pour les autres, c'est une période d'incertitudes, avec paradoxalement, de nouveaux risques comme l'augmentation des interventions de l'armée dans la vie politique, des crises sociales et des grèves liées aux inégalités, à l'injustice et à la corruption, une recrudescence des liens bilatéraux avec l'Occident aux dépens de l'intégration régionale africaine. Ceci peut déboucher sur une paralysie des intentions de relance des économies africaines par le soutien au pouvoir d'achat et le paiement effectif de la dette intérieure lesquels pourtant permettent de venir en appui aux petites et moyennes entreprises et industries africaines y compris celles opérant dans l'artisanat et dans le tourisme.

Alors que la croissance économique africaine a, bon an mal an, soutenu la croissance mondiale, les dirigeants africains ne peuvent plus continuer à hiberner « au soleil ». Ils ne peuvent plus faire le dos rond face à une nouvelle crise économique en formation qui risque de se transformer en opportunité pour ceux des pays qui font reposer leur démocratie économique sur la régulation, la transparence et l'éthique. Il ne s'agit pas de relâcher les efforts de bonne gouvernance en augmentant le déficit public mais plutôt de considérer la crise financière occidentale comme une opportunité pour revoir les arbitrages budgétaires et relancer la demande privée africaine. Pour ce faire, les États africains ne peuvent plus se contenter de jouer sur les outils monétaires et budgétaires nationaux, mais doivent s'organiser au niveau supranational et continental pour signer un pacte de soutien au pouvoir d'achat afin d'opter et d'organiser enfin collectivement les processus permettant d'aboutir à de la croissance économique partagée.

Une confiance retrouvée entre les dirigeants et les populations est indispensable. Cela suppose des changements tels que : la nécessaire réforme de l'accès au crédit, la révision de la conception laxiste des délais de paiement en Afrique, la volonté réelle d'honorer la dette intérieure comme partie intégrante de la relance économique, la relance budgétaire axée sur le développement des capacités productives et de la productivité agricole, l'investissement dans les infrastructures et l'organisation logistique. A l'instar des pays du G 20, l'Afrique ne peut faire l'impasse sur une relance budgétaire sans s'appuyer sur les surplus dégagés sur le continent y compris ceux des investisseurs étrangers. Bref, c'est d'une solidarité nouvelle dont l'Afrique a besoin pour faire face à la crise économique. A défaut, l'Afrique aura hiberné pendant la crise financière occidentale laquelle ne restera pas sans conséquences fâcheuses sur les économies africaines.

Avec environ 210 millions de sans emplois dans le monde en 2009, l'Organisation internationale du Travail prévoit plus de 20 millions de chômeurs officiels rien que pour cette année avec un taux d'exclusion très élevé chez les moins de 24 ans. En Afrique, avec l'instabilité du travail dans le secteur informel, les conséquences de la crise financière vont aggraver la fracture sociale tout en contribuant à l'augmentation de la précarité de l'emploi. La conséquence directe sera une augmentation de la flexibilité non sollicitée dans le travail, et en définitive, un recul sérieux du travail décent et du respect des droits acquis des employés. La 2e conférence entre les partenaires sociaux organisée conjointement par l'OIT et l'Union africaine à Ouagadougou au cours du mois de février ne manquera certainement pas de rappeler l'acuité de la situation sans nécessairement y apporter des remèdes. Les efforts devront commencer au niveau de l'État et des partenaires sociaux eux-mêmes.

Il faudra nécessairement organiser des assemblées annuelles quadripartites entre État, patronat, actionnaires et représentants des employés pour se mettre d'accord sur les concessions et avancées à réaliser au cours de l'année et se revoir chaque année ou plus souvent pour faire respecter les engagements pris et les faire évoluer. Mais tout ceci n'a pas de sens si l'Afrique continue à négliger systématiquement la production industrielle alors que tous les chefs d'État africains ont approuvé en 2004 une stratégie commune de développement des capacités productives en Afrique. Faut-il rappeler que c'est sur les critères de croissance négative consécutive de trois trimestres de la production industrielle qu'une économie est déclarée en récession ? Malgré ces deux préceptes, la sortie de crise pour l'Afrique risque de prendre du temps et devra être simplement intégrée dans les politiques de croissance accélérée et partagée. A défaut, c'est bien à une augmentation du chômage officiel et officieux que l'on va assister en 2009. Les banques opérant en Afrique devraient pouvoir bénéficier d'une forme de garantie des États afin de les amener à desserrer l'étau du crédit et à assurer, grâce à la sous-traitance, un système d'accompagnement par des sociétés de consultants locaux afin d'assurer un taux de succès plus important des affaires et projets privilégiant l'économie de proximité.

La production industrielle mondiale est en chute libre depuis près de quatre trimestres dans les pays riches avec comme conséquence un taux record de chômage prévu en 2009. Cette récession du secteur industriel devrait rappeler à l'Afrique que le développement durable ne peut se faire sans le développement industriel. Aussi, le développement des capacités productives et la production manufacturière fondée sur la transformation et la diversification les secteurs productifs où l'Afrique présente des avantages compétitifs doivent redevenir le moteur de la croissance de l'économie africaine. C'est pourtant à partir d'un minimum d'environ 17 % de valeur ajoutée manufacturière dans le produit intérieur brut que les économies africaines pourront certainement contribuer à créer et partager de la richesse et en conséquence réduire la pauvreté de manière pérenne avec des occupations et des emplois décents.

La contraction de l’activité mondiale va limiter les demandes en provenance de l’Afrique. La perte de pouvoir d’achat des populations et la détresse des jeunes, avec ou sans diplômes, risquent de devenir une bombe à retardement pour des dirigeants africains qui n’ont pas, pour la plupart, pris la mesure des nouveaux enjeux et de leur inaptitude à faire preuve d’audace et d’innovation au service des populations. Les rares usines africaines risquent de tourner en deçà de leur capacité de production de croisière, le tourisme pourrait en retour stagner du fait de l’insécurité et de l’imprévisibilité grandissante en Afrique alors que le pouvoir d’achat fond chez les clients traditionnels. Le paquet fiscal qui aurait pu être espéré d’une industrie florissante en Afrique, mais détenue pour l’essentiel par des non-Africains, suppose une anticipation et une volonté de bâtir pour les générations futures. Malheureusement, la situation actuelle se caractérise plus par des engagements budgétaires valorisant le surendettement avec un report quasi-systématique sur les Africains de demain dont le péché originel risque d’être endettés avant même de naître.

Aussi, la contraction profonde des économies riches au cours du premier trimestre 2009 devrait faire réagir l’Afrique. Il n’est donc plus question de tergiverser sur le soutien à apporter aux entrepreneurs locaux et ingénieux. Il faut simplement les soutenir et les organiser en réseaux d’affaires pour faire face à la compétition mondiale. C’est de pragmatisme économique dont il est question ici. Les dogmes de l’économie du laisser-faire reposant uniquement sur des politiques monétaristes ou des ajustements budgétaires conçus comme des gouffres sans fin sont à proscrire. Les défaillances des marchés ne peuvent faire oublier qu’il faut des formes nouvelles d’économie du marché où le volet social va de pair avec la compétition régulée. Les dirigeants africains doivent oublier les vertus de l’État minimaliste prônées par des institutions outre atlantique. Ils doivent au contraire prendre conscience que la part de leur responsabilité individuelle, actuellement protégée par le statut diplomatique, reste souvent écrasante dans le sort réservé aux populations africaines. Les dirigeants africains devraient opter pour un Etat social régulé et rompre avec les délégations pyramidales du pouvoir où le sommet n’est jamais responsable, ni coupable.

L’économie doit redevenir productive et être fondée sur la liberté d’agir des individus au service des populations. Les économies de prédation à sens unique ne pourront résister longtemps aux conséquences d’une crise multiforme qui accentue les inégalités. Les a priori idéologiques, eux aussi venus d’ailleurs, doivent céder face à des formes de résolution des crises économiques, à partir de l’originalité de pratiques africaines progressistes qui s’enracinent dans une tradition non rétrograde. L’Afrique ne peut plus faire l’impasse sur son industrialisation au risque de ne pas saisir l’opportunité que représente la crise financière dont l’Occident s’est rendu responsable. Le niveau élevé de la Diaspora africaine et les mutations des nouvelles générations décidées à en découdre avec leurs aînés bien peu audacieux conduiront nécessairement à une révision des rapports capitalistes entre l’État, les actionnaires, les partenaires sociaux et les employés vers plus d’humanité.

L’Afrique devra s’en donner les moyens en utilisant son capital humain et ses atouts en ressources naturelles pour entrer de plein pied dans l’industrialisation. Les dirigeants africains devraient profiter de cette crise venue d’ailleurs pour ne plus vivre sur le dos des générations futures en valorisant le travail, l’anticipation, l’interdépendance, les capacités productives et l’organisation en réseaux afin de bâtir des complémentarités avec la complicité active de la diversité plurielle des Africains. Si la corruption et la prédation doivent encore l’emporter, l’effet de levier de l’endettement risque cette fois-ci de devenir un effet massue. Cela ouvrira alors le champ à l’avènement, non plus à des États africains en défaillance, mais bel et bien à des États en situation de banqueroute du fait d’arbitrages hasardeux des dirigeants, pris dans les sollicitations alléchantes au plan individuel de certains acteurs transnationaux qui font de l’éthique et les populations africaines, une priorité seconde. Le Ghana avec sa démocratie politique renouvelée semble avoir le profil nécessaire pour organiser et réussir une démocratie économique au service des populations. D’autres pays africains peuvent lui emboîter le pas.

Yves EKOUE AMAÏZO

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Peut-on importer la démocratie ? Votre démonstration pourra s'appuyer sur des exemples précis.

Sujet n° 2

Dans son livre La crise de la culture, paru en 1961, la philosophe Hannah Arendt écrivait : « *La société de masse ne veut pas la culture mais les loisirs* ». Doit-on opposer culture et loisirs. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

Qu'est-ce que l'amitié ? Vous illustrerez votre propos.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à m. On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, on note $\mathcal{C}([a,b])$ l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a,b]$.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier des méthodes classiques d'intégration numérique afin de proposer des approximations de la valeur de certaines intégrales.

On définit I l'opérateur d'intégration sur $\mathcal{C}([a,b])$ de la manière suivante :

$$I : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

1.1 Préliminaires

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on a $I(f) \leq (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b])$ positive, on a $I(f) \geq (b-a) \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

3. Monter que I est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a,b]), \qquad \lambda I(f) + I(g) = I(\lambda f + g).$$

4. Dans le cas où $0 < a < b < 1$, calculer $I(\sqrt{1-x^2})$.
5. En déduire la valeur de $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

1.2 Formules de quadrature

On se fixe un entier $n \geq 1$. Soit $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de n points de l'intervalle $[a,b]$ tels que $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Soit également $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille de n réels positifs. On note $Q(f)$ le réel tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

On parle alors d'une formule de quadrature "à n points".

6. Monter que Q est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a,b]), \qquad \lambda Q(f) + Q(g) = Q(\lambda f + g).$$

7. Montrer que $|Q(f)| \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) \sum_{i=1}^{n} w_i$.
8. Montrer que $|Q(f)| \leq n \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) \left(\sup_{i=1,\dots,n} w_i\right)$.
9. Montrer que pour toute fonction positive croissante

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=1,\dots,n-1} \frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right) I(f).$$

10. Montrer que pour toute fonction positive décroissante

$$\sum_{i=2}^{n} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=2,\dots,n} \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}}\right) I(f).$$

1.3 Polynômes d'interpolation

Lorsque $Q(p) = I(p)$ pour tous les polynômes $p \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on dit que l'opérateur Q "intègre exactement les polynômes d'ordre m".

11. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_1) "à 1 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 (les constantes).

On note $p_n[f]$ le polynôme d'interpolation de la fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$ tel que

$$p_n[f] : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i(x), \end{array}$$

où L_i est le i-ème polynôme de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{i=1,\dots,n}$, c'est-à-dire

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{j\neq i, j=1}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq i, j=1}^{n} (x_i - x_j)}$$

12. Montrer que $p_n[f](x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
13. Lorsque $w_i = I(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $I(p_n[f]) = Q(f)$.

On pose F la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t)(b-a) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

14. Montrer que F s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
15. En déduire que tout opérateur Q “à 1 point” qui intègre exactement les constantes vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq (b-a)^2 \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ dès que f est dérivable.
16. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_2) “à 2 points” qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1 (les fonctions affines).
17. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_3) “à 3 points” avec $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$ et $x_3 = b$ qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0, 1 et 2.

1.4 Estimation d'erreur

Dans cette partie on suppose que $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n$ et on définit :

Q_n^{gauche} l'opérateur “à n points à gauche” tel que $Q_n^{gauche}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$, et

Q_n^{droite} l'opérateur “à n points à droite” tel que $Q_n^{droite}(f) = \sum\limits_{i=2}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)$.

18. Donner les familles $(w_i^{gauche})_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i^{droite})_{i=1,\dots,n}$ associées à ces deux opérateurs.
19. Montrer que les deux opérateurs Q_n^{gauche} et Q_n^{droite} “à n points” vérifient

$$\max\left\{\left|Q_n^{gauche}(f) - I(f)\right|, \left|Q_n^{droite}(f) - I(f)\right|\right\} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

20. Trouver un entier $n \geq 2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'opérateur $Q = \alpha Q_n^{gauche} + \beta Q_n^{droite}$
    a) soit un opérateur “à n points” (préciser les familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ associées),
    b) intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1
    c) vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

2 Problème d'algèbre

Le but du problème d'algèbre est d'étudier différentes méthodes d'approximation d'un nuage de point, il traite d'interpolation polynômiale, de moindres carrés et de régression linéaire.

Pour cela, on se fixe un entier $n \geq 1$ et deux familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ qui représentent les coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ d'un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que les x_i sont tous différents, ce sont les abscisses des points du nuage. On ne suppose rien sur les y_i, ce sont les ordonnées des points du nuage.

2.1 Approximation polynômiale

On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{R}_m[X]$ approche k points du nuage lorsque $p(x_i) = y_i$ pour une famille d'au moins k indices i dans $\{1, \dots, n\}$.

1. On cherche un polynôme qui approche 2 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui approche x_1 et x_2.
2. On cherche un polynôme qui approche 3 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui approche le nuage $(0, y_1; 1, y_2; 2, y_3)$.
3. On cherche un polynôme qui approche n points du nuage sous la forme
$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}.$$
Montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire à n équations et n inconnues.
4. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \cdots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
5. Calculer le déterminant de cette matrice M.
6. En déduire que le système admet une unique solution.
7. Soit un entier $j \in \{1, \dots, n\}$. Donner la formule exacte du polynôme L_j qui approche un nuage de points d'abscisses $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et d'ordonnées $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ telles que $y_j = 1$ et $y_i = 0$ si $i \neq j$.
8. En déduire une formule équivalente pour le polynôme P de la question 3. qui fait intervenir les L_j pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

2.2 Projection orthogonale

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([a,b])$ telle que
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x \text{ pour toutes fonctions } f, g \in \mathcal{C}([a,b]).$$
On pose f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que
$$\langle f - Q, f - Q \rangle = \inf_{P \in \mathbb{P}_{m-1}} \langle f - P, f - P \rangle$$

On parlera de la solution du problème de projection orthogonale.

9. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b])$.
10. En déduire que $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$ notée $\|f\|$.
11. Supposons que Q soit une solution du problème de projection orthogonale. On pose $\tilde{Q}$ un autre polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$. Montrer que
$$\|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 \geq 0,$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$.
12. En déduire que $\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle = 0$.
13. Conclure sur l'unicité du polynôme solution du problème de projection orthogonale.
14. Montrer que $\langle f, X^j \rangle = \langle Q, X^j \rangle$ pour tous les monômes X^j pour $j \leq m-1$.
15. Lorsque $n = m$, et en notant $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$, montrer que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.
16. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1/j & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/i & \ldots & 1/(i+j-1) & \cdots & 1/(i+n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1/n & \cdots & 1/(n+j-1) & \cdots & 1/(n+n-1) \end{pmatrix},$$
ou plus simplement $M_{i,j} = 1/(i+j-1)$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

2.3 Moindres carrés

Lorsqu'on ne cherche plus à approcher ni exactement ni orthogonalement le nuage, on peut chercher à minimiser l'erreur quadratique entre le polynôme et les points. On parle d'approximation aux moindres carrés. Elle est définie ainsi : trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - y_i)^2 = \inf_{P \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2.$$
On note encore $R = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$, on pose M la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que
$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{j-1} & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \ldots & x_i^{j-1} & \cdots & x_i^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{j-1} & \cdots & x_n^{m-1} \end{pmatrix},$$
ou simplement $M_{i,j} = x_i^{j-1}$. Enfin on pose A le vecteur colonne $(a_0, \ldots, a_{m-1})$ et Y le vecteur colonne $(y_1, \ldots, y_n)$.

17. Montrer que trouver le polynôme de minimisation du problème des moindres carrés est équivalent à résoudre le système

$$\|MA - Y\|_2 = \inf_{Z \in \mathbb{R}^n} \|MZ - Y\|_2$$

où $\| \cdot \|_2$ est la norme euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

18. On note M^T la transposée de M. Montrer que la matrice $M^T M$ est diagonalisable.

On note V la matrice de passage de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ telle que $V^T M^T M V = D$ où D est une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_m^2 \end{pmatrix}.$$

On note c_j le j-ème vecteur colonne de la matrice MV et v_j le j-ème vecteur colonne de la matrice V. Et J l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $d_j \neq 0$.

19. Montrer que $M = \sum_{j \in J} c_j v_j^T$.

20. Montrer que les vecteurs $u_j = c_j/d_j$ pour les d_j non nuls forment une base orthonormée de l'image de M.

21. Expliquer pourquoi on peut compléter la famille des $(u_j)_{j \in J}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On note U la matrice composée par l'ensemble de ces vecteurs.

22. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \in J$ forment une base de l'image de M^T.

23. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \notin J$ forment une base du noyau de M.

On pose E la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/d_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/d_m & 0 & \dots & 0 \end{array}\right).$$

24. On suppose que le rang de M est m. Montrer que la solution des moindres carrés est donnée par $A = VEU^T Y$.

25. Quelle est la forme d'une solution lorsque le rang de M n'est plus supposé égal à m ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$2^{ème}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier naturel, la fonction réelle f_n est définie par : $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de f_0 et donner l'allure de son graphe.
2. Le graphe de la fonction f_0 admet-il un centre de symétrie ? Si oui, préciser ce centre.
3. La fonction f_n admet-elle un point fixe ? un centre de symétrie ?
4. Calculer $I_0 = \int_0^1 f_0(x)\, dx$
5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$ pour tout n et en déduire sa limite.

Exercice n° 2

Soit $f :]0, +\infty] \to R$ définie par : $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Etudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

3. Etudier la suite (u_n) de nombre réels définie par : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 > 0$

4. Etudier la suite (w_n) de nombre réels définie par : $w_{n+1} = w_n .\, f(w_n)$ et $w_0 > 0$

Exercice n° 3

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice *M*.
2. Etudier la diagonalisation de la matrice *M*.
3. Calculer M^n pour tout entier *n*.
4. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} M^n$

Exercice n° 4

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f
2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.
3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f.
4. Etudier la différentiabilité de f.

Exercice n° 5

On considère *n* valeurs réelles x_i, *i* = 1 à *n*, strictement positives et telles que : $x_i < x_{i+1}$ pour tout *i* compris entre 1 et *n*-1. Soit α un paramètre réel.

1. Résoudre le problème d'optimisation suivant : $\underset{\alpha}{Min} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)^2$

2. On suppose que $\alpha \geq x_n$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\underset{\alpha}{Min} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha|$.

   On notera m_1 la valeur de ce minimum et α_1 son argument.

3. On suppose que $\alpha \leq x_1$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\underset{\alpha}{Min} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha|$.

   On notera m_2 la valeur de ce minimum et α_2 son argument.

4. Comparer m_1 et m_2.

Exercice n° 6

Soient q_1 et q_2 deux applications définies sur $M_n(R)$ respectivement par :

$q_1(A) = (Tr(A))^2$ et $q_2(A) = Tr({}^tAA)$,

où $M_n(R)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,

$Tr(A)$ la trace d'une matrice A de $M_n(R)$ et ${}^tA$ la transposée de A.

1. Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques.
2. q_1 et q_2 sont-elles positives ? définies positives ?

Exercice n° 7

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a.3^{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, où a est un paramètre réel

1. Déterminer le paramètre a pour que f soit la densité d'une loi de probabilité.

2. Soit X la variable aléatoire dont f est la densité. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Calculer, si elle existe, l'espérance de X.

4. Soit $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y et son espérance, si elle existe.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet : Vous résumerez en 150 mots le texte ci-après de Dominique Bocquet extrait de l'ouvrage « Pour une mondialisation raisonnée. Les révolutions discrètes de l'OCDE » paru en 2012. Vous n'oublierez pas d'indiquer le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

Pour une mondialisation raisonnée

(…) Actuellement, c'est l'ascension des pays émergents qui domine la scène multilatérale. Elle entraine à la fois un renforcement de l'interdépendance (dont les enjeux climatiques ou la crise financière fournissent des exemples frappants) et un surcroît d'attachement à la notion de souveraineté. Autrement dit, elle accroit le dilemme du multilatéralisme.

Dans les pays historiquement les plus engagés dans le multilatéralisme (Europe, Etats-Unis), cette ascension tend à crisper l'opinion et à alimenter les réflexes souverainistes. Surtout, chez les pays émergents, un vif attachement à la souveraineté nationale s'exprime. Il procède d'une « revanche » historique, après les phases de perte d'autorité et souvent d'indépendance subies antérieurement par ces pays. A cela s'ajoute une donnée géographique élémentaire : les grands pays émergents détiennent, de par leur population, la taille critique pour peser au niveau mondial[1].

Ainsi, l'ascension des pays émergents tend à tirer le système international dans un sens « intergouvernemental », confortant ce qu'il est convenu d'appeler l'ordre westphalien du monde.

[1] La Chine et l'Inde sont chacune plus peuplées que l'Europe et les Etats-Unis. Avec ses 170 millions d'habitants, le Brésil surplombe en puissance les autres pays d'Amérique du Sud et peut de ce fait ambitionner une influence majeure. Ceci représente une différence décisive face à l'irruption des Super-grands (Etats-Unis et URSS) en 1945. Après cinq siècles de domination européenne du monde, ils étaient brutalement rappelés à la réalité de leur poids numériques. Cette prise de conscience entra pour beaucoup dans l'élan initial de la construction européenne.

Selon ce principe, seules sont valables les décisions communes prises par les gouvernements des Etats souverains. Mais, encore faut-il que des décisions soient effectivement prises. C'est là que les difficultés commencent : l'accord systématique de tous est une condition difficile à *remplir en soi*[2].

Même s'ils constituent un progrès (en écartant une forme de domination), la remise en cause de l'hégémonie américaine et l'avènement d'un monde multipolaire introduisent un élément supplémentaire de complexité. Lorsqu'il existe une puissance dominante, à même d'influencer les autres pays, elle peut jouer un rôle fédérateur pour favoriser la prise de décision dans l'espace multilatéral. Quand ils ne sont pas écartés par eux-mêmes de l'esprit multilatéral, les Etats-Unis ont abondamment joué ce rôle qui atténue quelque peu, dans la pratique, le principe westphalien d'égale souveraineté entre les Etats[3].

Un mécanisme de nature assez proche réside dans le rôle facilitateur, voire directeur, des grands Etats. Les négociations multilatérales en offrent de nombreux exemples. Toutefois, il est mal vécu par les « petits » pays si le jeu est poussé trop loin car il aboutit à une forme de directoire des grands, lui aussi contraire à l'égalité entre Etats.

Enfin, le seul fait que les équilibres mondiaux connaissent une évolution rapide (entre autres du fait de l'émergence) incite certains pays à souhaiter un contrôle intergouvernemental accru sur les décisions et les choix collectifs. Tel est souvent le cas des pays pensant être gagnants dans les changements de rapport de force : ils peuvent soupçonner les accords et compromis passés (dont les organisations internationales tirent souvent leurs mandats) de refléter un équilibre moins favorable à ce qu'ils pourraient dorénavant escompter.

La gestion de cette contradiction ramène inévitablement au multilatéralisme : même, accrochés à la notion de souveraineté, les Etats ont un immense besoin de contacts, de « socialisation[4] » entre eux, ne serait-ce que pour se consulter plus facilement. Le multilatéralisme peut également produire des règles (du type de celles de l'OMC). Ce processus est moins inconciliable que d'autres avec la contrainte de l'unanimité car l'élaboration de règles appelle de toute façon une certaine lenteur (nécessaire à l'obtention de règles de qualité qui ne soient pas de pure circonstance) ou encore à régler des crises.

Mais tout n'est pas affaire de règles. Dans un monde interdépendant, il faut pouvoir gérer de conserve des politiques communes et des mécanismes de régulation intégrés, ou encore réagir à des crises.

---

[2] La règle de l'unanimité exige l'accord de tous, ce faisant, le rend plus difficile… ! Le « père de l'Europe » Jean Monnet avait insisté sur ce point : la règle de l'unanimité incite à durcir les positions, chaque pays ayant un pouvoir de véto, étant tenté d'imposer ses objectifs. De là, l'introduction révolutionnaire dans certaines procédures communautaires du vote à la majorité qualifiée. A ses yeux, le but n'était pas de faire l'économie du consensus (préférable au passage en force), mais au contraire de le faciliter en obligeant chaque pays à se montrer conciliant sur les aspects non essentiels pour lui. C'est, en pratique, ce qui se passe au Conseil des ministres de l'Union européenne : sur les sujets autorisant des décisions majoritaires, le consensus est fréquent.

[3] Un cas extrême et situé hors du champ économique est constitué par l'OTAN de la guerre froide. Théoriquement, cette organisation était strictement intergouvernementale et égalitaire. Concrètement, les Etats-Unis disposaient d'un argument massue pour faire prévaloir leur volonté : la garantie de sécurité qu'ils apportaient, face à la menace soviétique, grâce à leur poids militaire. Au-delà, la capacité des Etats-Unis à influencer, même partiellement, les positions des autres pays est l'une des clés du multilatéralisme de l'après-guerre, ce qui les a encouragés dans le choix multilatéral.

[4] Ce terme est notamment utilisé dans l'excellente contribution de Pierre Grosser : « De 1945 aux années 1960 : une efforescence sur fond de guerre froide et de décolonisation », in Bertrant Badie et Guillaume Devin, Le multilatéralisme : nouvelles formes de l'action internationale, La Découverte, Paris, 2007, pp 23 à 40.

Pour se préparer à de tels défis, il est souhaitable que les Etats conduisent entre eux le plus possible de travail analytique de fond, même si, en apparence, ce travail semble modeste lorsqu'il se borne à bâtir des cadres d'analyse économique ou des diagnostics de base. En effet, même s'il ne permet généralement pas d'aboutir à des résultats à brève échéance, c'est ce travail de fond qui, sur le plus long terme, produit des pistes pertinentes d'accords et de coopération.

En réalité, le principe westphalien, aussi vivace soit-il dans les esprits, n'est pas forcément tenable jusqu'au bout dans un monde interdépendant. Un vif besoin d'actions communes se manifeste et il peut arriver que la « nécessité fédérale », à force d'être sous-estimée, se venge.

La crise financière survenue en 2008 en fournit un bon exemple : la pression des événements a obligé les Etats à introduire dans l'urgence des procédures contraignantes auxquelles ils s'étaient auparavant refusées au nom du dogme de souveraineté.

La décision du G20 de menacer les paradis fiscaux de sanctions en est une première illustration. Cette action s'est brusquement révélée indispensable et urgente pour préserver la capacité fiscale des Etats contraints de renflouer les banques. Elle n'a pu être opérationnelle que parce que les bases avaient été préalablement définies à froid par les travaux de l'OCDE[5].
(…)

Dominique Bocquet
Pour une mondialisation raisonnée
Les révolutions discrètes de l'OCDE
P. 30-33

[5] L'un des éléments centraux, dans le travail accompli par l'OCDE, a été de distinguer entre, d'une part, la concurrence fiscale normale (qui ne peut être interdite dans un monde où coexistent des choix collectifs différents et où la liberté des échanges est reconnue) et, d'autre part, la concurrence fiscale dommageable. Les travaux de l'Organisation ont permis, au fil des années, de bâtir un consensus entre experts sur la définition de cette dernière sans quoi aucune avancée concrète n'aurait été possible.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La justice est-elle juste ? Vous répondrez à cette question en illustrant vos propos.

Sujet n° 2

Le rire est-il une forme de pouvoir sur les autres ? Discutez et illustrez.

Sujet n° 3

La liberté s'oppose-t-elle toujours à la contrainte ? Argumentez et illustrez vos propos.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGéNIEURS STATISTICIENS éCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHéMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

On fixe un réel $a > 0$.

Si f est un élément de E, on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0$$

L'objectif du problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) bornée sur I, puis d'étudier l'application $U : f \mapsto g$.

1. (a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$ et en déduire que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right).$$

   (b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) bornée sur I, celle-ci est unique.

   (c) Vérifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$.

(d) Montrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) bornée sur I.

Dans la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. (a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

   (b) Montrer que U est un endomorphisme de E.

   (c) U est-il injectif ?

   (d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)dt$.

3. (a) Pour k un nombre réel positif, et $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

   (b) En déduire que pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\ker(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter $U^n(f_k)$. En déduire pour $x \in I$: $\lim_{n \to +\infty} [U^n(f_k)](x)$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction de E définie par : $\varphi_n : x \mapsto x^n e^{-x}$. On note $\psi_n = U(\varphi_n)$.

   (a) Pour $n \geq 1$, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel F_p de E engendré par $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$.

   (c) On prend ici $p = 2$. Ecrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme U restreint à F_2. Calculer T_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Pour $f \in E$, montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.

   (b) On suppose que φ appartient à E et est à valeurs positives. Montrer que $\psi = U(\varphi)$ est à valeurs positives.

   (c) Si de plus φ est décroissante, montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

6. On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) : f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'application qui à $f \in E_1$ associe f' .

   (a) Pour $f \in E_1$, montrer que $aU(f) = f + U(f')$.

   (b) En déduire que pour tout $f \in E_1$, $D(U(f)) = U(D(f))$.

7. Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives, tel que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

   On note $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$, $g = U(f)$ et $G : x \mapsto \int_1^x g(t)dt$.

   (a) Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.

   (b) Justifier que la fonction F est un élément de E, et montrer qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in I$,
$$G(x) = Ce^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$$

   (c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

(d) En déduire que $C = 0$ et que $G = U(F) - \dfrac{g(1)}{a}$.

(e) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est une intégrale convergente.

2 Problème d'algèbre

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, n un entier naturel supérieur ou égal à 1, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On peut définir l'endormorphisme f_M canoniquement associé à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$f_M : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & Mx \end{array}$$

On note $\mathrm{Ker}(f_M)$ et $\mathrm{Im}(f_M)$ respectivement le noyau et l'image de f_M. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Le problème est constitué de deux parties qui pourront être traitées de manière indépendante.

2.1 Première partie

Si λ est une valeur propre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note E_λ le sous-espace propre de $\mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ, c'est-à-dire le noyau de l'endormorphisme associé à la matrice $M - \lambda I_n$ noté $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n : Mx = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n).$$

On note alors $\sigma(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. Et $\rho(M)$ le rayon spectral de M, c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M.

1. Dans cette question, on pose $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction gradient de F est notée ∇F. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^2$, $\nabla F(y) = Ay - b$.

(c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

(d) Écrire le développement limité de F en ce point critique.

(e) En déduire que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.

Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$. On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif, i.e. pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x\rangle > 0$.

2. (a) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $]0, +\infty[$.
3. On suppose dans cette question que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, que c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad G(x) = \frac{1}{2}\langle Mx, x\rangle - \langle c, x\rangle.$$

   (a) Prouver que, pour tout couple (x, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $\langle Mx, h\rangle = \langle Mh, x\rangle$.
   (b) On pose $\nabla G(y) = My - c$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Donner la forme de la fonction $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad G(x + h) = G(x) + \langle \nabla G(x), h\rangle + R(h).$$
   (c) On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x) \geq G(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En observant que $G(x_0 + th) \geq G(x_0)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\nabla G(x_0) = 0$.
4. On suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x_0) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} G(x)$, et le déterminer en fonction de M et c.
   (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ avec d non nul. Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $G(v - rd) = \inf\limits_{s \in \mathbb{R}} G(v - sd)$.
   (c) Exprimer r en fonction de v, d, M et c.

2.2 Deuxième partie

On note $L(\mathbb{K}^n)$ l'ensembles des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$. On note Π_f le polynôme minimal d'un endormorphisme $f \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^n)$ et $P_f(X) = \det(\mathrm{XI_n - f})$ son polynôme caractéristique. Un endomorphisme $f \in L(\mathbb{K}^n)$ est dit cyclique s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$C_a^p = \{a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de $\mathbb{K}^n$ de cardinal p, stable par f , c'est à dire :
— C_a^p est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$,
— C_a^p possède p éléments deux à deux distincts,
— $f(C_a^p) \subset C_a^p$.
Une telle partie C_a^p est nommée cycle de f au point a et on dit que f est cyclique d'ordre p.

5. (a) Pour quel(s) entier(s) $n \in \mathbb{N}$ non nul, un projecteur h de $L(\mathbb{K}^n)$ peut-il être cyclique ?
   (b) Comment s'écrit alors un cycle de h ?

6. On considère $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

   (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f.

   (b) Déterminer le rang de f.

   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

7. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ cyclique d'ordre p.

   (a) Justifier que $p \geq n$.

   (b) Montrer que f est au moins de rang $n - 1$.

8. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f. Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), ..., f^{m-1}(a))$ soit libre.

   (a) Prouver que $\forall k \geq m,\ f^k(a) \in Vect(\mathcal{F})$.

   (b) En déduire que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

   On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f. Déterminer les valeurs (si elles existent) de x et y pour que f soit cyclique d'ordre 2.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver un polynôme P de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes tel que $P(A)=0$.

2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où n est un entier naturel strictement supérieur à 2.

3. Pour n entier positif ou nul, calculer A^n et résoudre le système : $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 2

Soit $f :]0, +\infty[\to R$ définie par : $f(x) = x^{-5}\left(e^{1/x} - 1\right)^{-1}$

1. Calculer la limite de f en zéro et en $+\infty$. Montrer que f admet un maximum.

2. Soit $x_0 = Arg\max(f)$, montrer que $5x_0\,(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

3. Soit $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$. Montrer que l'équation $5x\ (e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$, où $x>0$, est équivalente à $g(t) = t$, où t est strictement positif.

4. Montrer qu'il existe une unique solution α de l'équation $g(t) = t$, avec $\alpha \in [4,5]$

5. En déduire que f possède un unique maximum.

Exercice n° 3

On considère A et B deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre n (entier strictement positif).

1. Montrer que la matrice *AB-BA* n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

2. On suppose de plus que A et B sont définies positives, étudier le signe de *Tr(AB)*, où *Tr* désigne la trace de la matrice.

3. Soit M une matrice carrée antisymétrique réelle. Montrer que $I+M$ est inversible et déterminer la nature de la matrice $(I - M)(I + M)^{-1}$.

Exercice n° 4

On considère les suites (u_n) et (λ_n), $n \geq 1$, définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}};\ \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$, il existe deux autres suites (θ_n) et (α_n) telles que pour tout entier n strictement positif, on a :

   $$u_n = \cos(\theta_n);\ \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n);\ 0 \leq \theta_n \leq \pi/2.$$

   Montrer que la suite (λ_n) est convergente, on précisera sa limite.

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité :

   $\left|\pi - \lambda_n\right| \leq \dfrac{\pi^3}{6 \times 8^n}$. En déduire un entier N tel que : $\left|\pi - \lambda_N\right| \leq 10^{-6}$

Exercice n° 5

On considère l'espace vectoriel R^4 rapporté à une base orthonormée *B*. On désigne par (x, y, z, t) les composantes d'un vecteur dans cette base. Soit f l'endomorphisme de R^4, associé, dans la base *B*, à la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image de f.

2. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale semblable.

3. Quel est le rang de la forme quadratique définie sur R^4 par :

   $$q(x,y,z,t) = 4z^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4zt$$

4. On considère le système d'équations :

   $$\begin{cases} y + z + t = 1 \\ x + 2z = m^2 + 1 \\ x + 2y + 4z + 2t = p + 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 2 \end{cases}$$, où m et p sont des paramètres réels.

   Résoudre le système homogène associé

   Discuter l'existence de solutions de ce système en fonction de m et p.

Exercice n° 6

Soient f et g deux applications numériques définies sur $]0, +\infty[$, où f est convexe et g affine.

On suppose que :

(1) $\forall x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ et
(2) $f(1) = g(1)$

Comparer f et g.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet :

Vous résumerez en 150 mots le texte ci-après de Richard Munang et Jesica Andrews paru en 2014 dans le magazine *Afrique Renouveau*. Vous n'oublierez pas d'indiquer le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

L'Afrique face au changement climatique

Le changement climatique s'accompagnera d'effets sans précédent. On assistera par exemple à une baisse des rendements agricoles, des saisons de végétation brèves et les modifications du régime des précipitations rendront l'accès à l'eau difficile. La population en Afrique devrait atteindre deux milliards dans moins de 37 ans et, dans 86 ans, trois naissances sur quatre dans le Monde se produiront sur le continent.

La baisse des rendements agricoles et l'accroissement démographique exerceront une pression supplémentaire sur un système de production alimentaire déjà fragile. Dans un tel contexte, les experts signalent que, si la situation actuelle perdure, l'Afrique ne pourra subvenir qu'à 13% de ses besoins alimentaires d'ici à 2050. Cela fera également peser une nouvelle menace sur les quelque 65% de travailleurs africains dont la subsistance dépend de l'agriculture, y compris sur les enfants et les personnes âgées – premières victimes de l'insécurité alimentaire.

À l'heure actuelle, quelques 240 millions d'Africains souffrent déjà de la faim. D'ici 2050, il suffira d'une augmentation de 1,2 à 1,9 degré Celsius environ pour accroître d'entre 25 et 95% le nombre d'Africains sous-alimentés (+ 25% en Afrique centrale, + 50% en Afrique de l'Est, + 85% en Afrique australe et + 95% en Afrique de l'Ouest). La situation sera catastrophique pour les enfants, dont la réussite scolaire dépend d'une alimentation appropriée. La Commission économique pour l'Afrique (CEA) estime que le retard de croissance infantile provoqué chez les enfants par la malnutrition pourrait priver les pays africains de 2 à 16% de leur produit intérieur brut.

Une agriculture africaine sous pression climatique

Des changements climatiques tels que la hausse des températures et la réduction des réserves en eau, ainsi que la perte de biodiversité et la dégradation des écosystèmes, ont un impact sur l'agriculture. Selon la célèbre revue scientifique internationale *Science*, l'Afrique australe et l'Asie du Sud seront les deux régions du monde dont les productions agricoles seront les plus affectées par le changement climatique d'ici à 2030. À titre d'exemple, les variétés de blé se développent bien à des températures comprises entre 15 et 20 ºC, mais la température moyenne annuelle en Afrique subsaharienne dépasse aujourd'hui cette plage pendant la saison de végétation. Si ces tendances climatiques se poursuivent, la production de blé pourrait donc enregistrer une baisse de 10 à 20% d'ici à 2030 comparé aux rendements des années 1998-2002.

L'insécurité alimentaire pourrait également être source d'instabilité sociale, comme cela a déjà été le cas par le passé. Entre 2007 et 2008, plusieurs pays avaient connu des émeutes en réaction à une flambée des prix des produits alimentaires de première nécessité. En 2010, des centaines de manifestants étaient descendus dans les rues au Mozambique pour protester contre une hausse de 25% du prix du blé, provoquée par une pénurie mondiale, en partie imputable aux feux de forêts ayant ravagé les cultures en Russie, suite à une période de températures extrêmes. L'augmentation du prix du pain avait provoqué des violences, des pillages, des incendies, et même des morts.

Le rapport *Africa's Adaptation Gap* (L'écart de l'adaptation en Afrique) du Programme des Nations Unies pour l'environnement (PNUE), signale qu'un réchauffement d'environ deux degrés Celsius entraînerait une réduction de 10% du rendement agricole total en Afrique subsaharienne d'ici 2050. Un réchauffement supérieur (plus probable) pourrait porter ce chiffre à 15 ou 20%.

Les mauvaises nouvelles ne s'arrêtent pas là pour l'agriculture africaine : d'ici le milieu du siècle, la production de blé pourrait enregistrer une baisse de 17%, 5% pour le maïs, 15% pour le sorgho, et 10% pour le mil. Si le réchauffement dépassait les trois degrés Celsius, toutes les régions actuellement productrices de maïs, de mil et de sorgho deviendraient inadaptées à ce type de cultures. La question est donc de savoir si le système agricole africain est prêt à relever le défi.

Protéger les ressources hydriques

Des précédents montrent qu'il est possible d'accroître la production agricole dans un contexte de changement climatique. Les analystes considèrent donc que les pays africains devront intégrer ces connaissances à leur planification, et qu'il leur faudra protéger et consolider leurs ressources hydriques, cruciales pour la sécurité alimentaire.

Dans les années à venir, l'eau nécessaire à l'agriculture se fera de plus en plus rare. Selon le PNUE, 95% de la culture africaine est pluviale. Pour la Banque mondiale, la disponibilité totale des eaux «bleues et vertes» (issues des précipitations et des rivières) diminuera très probablement de plus de 10% dans toute l'Afrique d'ici à 2020. Le changement climatique menace aussi la biodiversité et les écosystèmes, qui constituent le pilier de l'agriculture. Ces pertes affecteront la qualité des sols et de la végétation dont dépend le bétail pour son alimentation. Toujours selon la Banque mondiale, la réduction potentielle de la biodiversité, des cultures et des ressources en eau devrait obliger l'Afrique à réexaminer son système alimentaire actuel, obligeant le continent à travailler avec la nature et non contre elle.

De nouvelles approches plus efficaces

La capacité de la révolution agricole industrielle à résoudre tout ou partie des problèmes climatiques en Afrique reste sujette à débat. Les experts soutiennent que l'agriculture industrielle est actuellement responsable du tiers de toutes les émissions de gaz à effet de serre, principale cause du changement climatique. Ils considèrent également que les ressources et les infrastructures nécessaires à l'exploitation d'un système agricole industriel ne sont pas à la portée des petits exploitants africains.

De nouvelles machines seraient synonymes de réduction de la main-d'œuvre, ce qui pourrait entraîner une hausse du taux de chômage et une baisse des salaires pour les nombreux Africains vivant de l'agriculture. Les pratiques actuelles seront insuffisantes pour satisfaire la future demande alimentaire, l'Afrique se doit donc d'adopter de nouvelles approches plus efficaces.

En juillet 2013, les dirigeants africains ont pris l'ambitieux engagement d'éradiquer la faim d'ici 2025. Ils comptent encourager les exploitants à abandonner progressivement l'agriculture de rendement, les systèmes agricoles fragiles et les cultures exigeant de grandes quantités d'engrais et de pesticides, au profit de pratiques durables et résilientes au changement climatique. L'épuisement des nutriments représente, à lui seul, une perte de capital naturel comprise entre un et trois milliards de dollars par an, selon les résultats publiés par le Nouveau Partenariat pour le développement de l'Afrique (NEPAD).

Une adaptation fondée sur les écosystèmes

Pour que l'Afrique puisse libérer son potentiel, les décideurs politiques du secteur agricole et de l'environnement doivent joindre leurs forces à celles de la société civile et des organisations non gouvernementales afin d'évaluer les options permettant aux agriculteurs, et à l'environnement, de s'adapter au changement climatique. L'une des options à l'étude est l'adaptation fondée sur les écosystèmes, dont l'objectif est d'atténuer les effets du changement climatique en utilisant des systèmes naturels, comme par exemple des variétés résistantes à la sécheresse, des méthodes de stockage d'eau plus efficaces et des systèmes de rotation culturale variés, indique le PNUE.

En Zambie, 61% des agriculteurs ayant appliqué ces méthodes fondées sur les écosystèmes, telles que des pratiques de préservation des ressources naturelles ou d'agriculture biologique durable, ont rapporté des excédents de production. Dans certains cas, les rendements ont enregistré une croissance allant jusqu'à 60%, tandis que les ventes d'excédents sont passées de 25,9 à 69%. Au Burkina Faso, les agriculteurs utilisent des méthodes traditionnelles pour restaurer les sols : en creusant des micro-bassins (connus localement sous le nom de *zaï*) dans une terre dévitalisée, puis en les remplissant de matières organiques, certains fermiers burkinabés sont capables de revitaliser les sols et d'améliorer le stockage des eaux souterraines afin d'accroître leur productivité. Ces exploitants ont ainsi récupéré 200 000 à 300 000 hectares de terres dégradées et produit 80 000 à 120 000 tonnes de céréales supplémentaires, selon les estimations.

D'autres options consistent à protéger les bassins versants et à améliorer leur capacité à retenir l'eau et à la transporter là où elle est la plus nécessaire; mettre en œuvre des programmes de lutte intégrée contre les nuisibles pour protéger les cultures de manière rentable et naturelle; pratiquer l'agroforesterie, la culture intercalaire et la rotation culturale pour diversifier les apports en nutriments et accroître les rendements de manière durable et naturelle; entretenir les forêts et utiliser les aliments forestiers; utiliser des engrais naturels tels que le fumier; et recourir à des pollinisateurs naturels tels que les abeilles qui, selon une récente étude, pourraient permettre d'accroître de 5% le rendement des arbres fruitiers. Toutes ces alternatives sont rentables : le projet entrepris en Zambie ne coûte que 207 dollars par personne, et des projets similaires développés en Ouganda et au Mozambique reviennent respectivement à 14 et 120 dollars par personne.

Une lueur d'espoir

Les prévisions les plus pessimistes concernant les effets du changement climatique suggèrent que l'Afrique pourrait perdre 47% de ses revenus agricoles d'ici à l'an 2100, tandis que les plus optimistes prédisent une perte de 6% seulement. Ce second scénario part du principe que des pratiques et des infrastructures d'adaptation au changement climatique sont déjà en place. Néanmoins, l'écart entre ces deux estimations est suffisamment important pour justifier des investissements dans des stratégies d'adaptation qui permettront à l'Afrique de mettre à profit ses vastes ressources naturelles. Pour parvenir à consolider son agriculture et à enrayer la faim, les analystes considèrent que le continent devra composer avec son environnement naturel afin de le rendre plus productif et résilient au changement climatique.

À travers le continent, de nombreuses communautés ont déjà commencé à développer une résilience en stimulant les écosystèmes existants et les ressources naturelles disponibles. C'est en mettant en œuvre ces bonnes pratiques et en gérant les effets inévitables du changement climatique de manière appropriée que le continent pourra subvenir à ses besoins alimentaires. L'Afrique n'est pas inéluctablement vouée à l'indigence.

Richard Munang et Jesica Andrews

Afrique Renouveau: édition Spéciale Agriculture 2014, page 6

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« C'est en gardant le silence, alors qu'ils devraient protester, que les hommes deviennent lâches ». Ella Wheeler Wilcox (1850-1919) auteure et poète américaine, tiré de Poems of problems paru en 1914. Qu'en pensez-vous ? Illustrez vos propos.

Sujet n° 2

Peut-on souffrir des tragédies vécues par nos ancêtres ? Argumentez et illustrez.

Sujet n° 3

Comment faire pour cultiver la paix ? Expliquez et illustrez.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans tout le problème, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note F la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad F(x, z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right)$$

et f la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Rappel : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries de nombres complexes absolument convergentes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ($n \in \mathbb{N}$) est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell\right)$$

Partie 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé.
   (a) Ecrire les développements en série entière de la variable réelle x des fonctions $x \mapsto \exp(-zx)$ et $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.
   (b) En effectuant un produit, à l'aide de la question précédente, montrer que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n$$
   où A_n est une fonction polynomiale de degré n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale H_n par $H_n = (-1)^n n! A_n$.
   Donner les expressions de $H_0(z)$ et de $H_1(z)$ en fonction de z.
   (c) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x,z)$ à l'aide de F.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.
   Donner les expressions de $H_2(z), H_3(z)$ et $H_4(z)$ en fonction de z.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \dfrac{(-1)^n}{f}\left(\dfrac{d^n f}{dx^n}\right)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.
   Exprimer $K_0(x)$ et $K_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $H_n = K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction φ_n de la variable réelle x par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi''_n(x) - \dfrac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$, où λ_n est un nombre réel que l'on déterminera.
5. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on pose :
   $$I_{p,q} = I_{q,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(x)\varphi_q(x)\mathrm{d}x = (-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien définie pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On admettra désormais que $I_{0,0} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

(b) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}.$$

En déduire la valeur de $I_{p,q}$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera les cas $q \neq p$ et $q = p$.

Partie 2 Soit $\hat{f}$ la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\hat{f}(0)$ et en déduire l'expression de $\hat{f}(\nu)$ en fonction de ν.

2 Problème 2

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens chacun de dimension au moins égale à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x|y)$ et $\|x\|$.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^{\mathbf{t}}A$.

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution*.

Partie I

I.1 Soient x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que $(x|y) = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, ..., e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i\ {}^{\mathbf{t}}E_i Z$.

ii) En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i\ {}^{\mathbf{t}}E_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $\|p(z)\| \leqslant \|z\|$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^{\perp}$.

b) Établir l'égalité : $\lambda\|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

c) Montrer que : $\operatorname{Ker}(p \circ r) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(r)$ et $\operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(r)$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m - k$.

a) Montrer que les matrices vérifient les relations :

$A^2 + BC = A$, $\quad AB + BD = B$, $\quad CB + D^2 = D$, $\quad {}^{\mathbf{t}}A = A$, $\quad {}^{\mathbf{t}}B = C \quad$ et $\quad {}^{\mathbf{t}}D = D$.

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.

(ii) ${}^{\mathbf{t}}CC = 0$.

(iii) $C = 0$.

(iv) p et r commutent.

Partie II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$$

Dans la suite x_0 sera appelée une pseudo-solution de l'équation :

$$f(x) = v \tag{1}$$

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation (1) admet une pseudo-solution unique.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, pour tout x appartenant à E : $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$.

Écrire sous forme matricielle l'équation $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, :

$$ {}^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}AV $$

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R ***désigne l'ensemble des nombres réels.***

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

2. Étudier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction *f*.

Exercice n° 2

On note $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.

1. L'ensemble des matrices carrées orthogonales d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$?

2. L'ensemble des matrices carrées diagonalisables d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$?

3. Soit $E = \left\{ A = (a_{ij}) \in M_n(R) \,/\, \forall i, j,\ a_{ij} \geq 0;\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$. Cet ensemble est-il convexe ?

Exercice n° 3

Pour n entier naturel non nul, on dit que la suite de matrices $A_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ w_n & t_n \end{pmatrix}$ converge vers la matrice $A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ si et seulement si $u_n \to u,\ v_n \to v,\ w_n \to w$ et $t_n \to t$.

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$, où a un nombre réel donné strictement positif.

Déterminer $\underset{n \to \infty}{Lim} A_n$ (on pourra mettre en évidence l'expression : $\sqrt{1 + \dfrac{a^2}{n^2}}$)

Exercice n° 4

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, dt$

2. On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t x^2}}{1+t^3}\, dt$

Étudier l'existence de f et calculer $f(0)$.

3. Étudier les variations de f et déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice n° 5

1. Soient A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et P un polynôme d'une variable réelle. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de M.

3. Trouver un polynôme P du second degré tel que la matrice $P(M)$ admette (-1) pour valeur propre double et 3 pour valeur simple. On explicitera $P(M)$.

4. Déterminer la matrice M_1 de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 de la matrice M.

5. Déterminer la matrice M_2 de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le plan vectoriel propre associé aux valeurs propres 0 et 2 de la matrice *M*.

6. Donner un exemple de matrice *M* telle que $M_1M_2 = M_2M_1 = 0$

Exercice n° 6

On considère dans l'espace vectoriel R^3 les deux sous-ensembles

$E_1 = \{(n, n^2, n^3) \ / \ n = 0,1,2.....\}$ et $E_2 = \{(n+1, 2n \ +1, 3n+1) \ / \ n = 0,1,2.....\}$

Soit V_1 (respectivement V_2) le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par E_1 (respectivement E_2)

1. Déterminer la dimension de V_1, puis de V_2.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel V_3 orthogonal à V_2 pour la base canonique.

3. La matrice *A* suivante est-elle diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice n° 7

1. Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et *n* entier naturel non nul, on pose : $I_n(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} x^n \, Ln\, x \, dx$, où Ln désigne le logarithme népérien. Déterminer $\underset{\varepsilon \to 0}{Lim} I_n(\varepsilon)$.

2. Soit f une fonction numérique définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{Ln\, x}{x-1}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet :
Vous résumerez en 150 mots le texte ci-après de Kelvin KAJUNA, texte extrait d'un article publié sur le site du Centre Africain pour le Commerce, l'Intégration et le Développement (CACID).
Vous n'oublierez pas d'indiquer le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

Une intégration selon nos propres conditions : l'avenir de l'économie africaine

L'intégration dans l'économie mondiale exigera de l'Afrique qu'elle regarde en premier lieu vers l'intérieur : en créant des chaînes de valeur régionales efficaces, les acteurs économiques africains pourraient devenir suffisamment concurrentiels pour intégrer les chaînes de valeur mondiales. L'affirmation largement répandue selon laquelle la mondialisation bénéficie essentiellement aux pays développés ne devrait pas nous empêcher de prendre la mesure d'une vérité fondamentale : la mondialisation a radicalement modifié la nature du commerce international et de l'économie politique au sens large. En raison des avancées technologiques, le monde s'est rétréci et est devenu plus efficace. Les entreprises – les firmes multinationales en particulier – se sont adaptées à cet environnement, en renonçant à la production locale au profit d'une coordination des différents stades du processus de production dans divers pays et avec différents fournisseurs. Ce bouleversement des chaînes d'approvisionnement traditionnelles a donné naissance à ce que les économistes du commerce appellent des chaînes de valeur mondiales, ou CVM.

Afin d'abaisser les coûts, les entreprises multinationales ont créé des CVM en délocalisant ou en externalisant leurs activités commerciales là où elles peuvent être effectuées de la manière la plus efficiente. De telles activités comprennent la recherche et la conception, l'assemblage des pièces, ou encore le marketing et d'autres services connexes. Ce changement de lieu géographique des processus de production a offert aux pays en développement l'opportunité de s'intégrer dans l'économie mondiale. Le leader incontesté dans ce processus a été la Chine, notamment grâce à la puissance de sa main-d'œuvre et de sa production manufacturière. Les pays d'Afrique, des Caraïbes et du Pacifique (ACP) sont à la traîne à cet égard. Cet article jette un éclairage sur l'Afrique en particulier.

Les CVM devenant de plus en plus cruciales dans les dynamiques qui régissent le commerce et l'investissement au niveau mondial, il est impératif pour l'Afrique de participer de manière plus effective à ces chaînes de valeur pour promouvoir un développement économique durable. Les perspectives d'une participation fructueuse aux CVM dépendront des capacités des entreprises africaines à trois niveaux : leur capacité à entrer dans les CVM, à se maintenir au sein des CVM existantes, et à évoluer vers un stade plus productif de ces chaînes de valeurs. En raison des défis systémiques que les pays africains ont à relever, le premier niveau de capacité – devenir assez compétitif pour rejoindre les CVM – demande davantage d'attention des pouvoirs publics et des conseillers en politiques. Ces défis comprennent la grande fragmentation du continent africain, le faible niveau de revenu des économies africaines, ainsi que les insuffisances générales en matière d'infrastructures

Des chaînes de valeur régionales aux chaînes de valeur mondiales.

Pour que les acteurs économiques africains puissent développer l'avantage concurrentiel nécessaire pour intégrer les CVM, ces obstacles majeurs doivent impérativement être surmontés. Cependant, comme certains auteurs le soulignent, ceci doit se faire en premier lieu au niveau régional. Offrir aux entreprises l'opportunité d'opérer au travers de chaînes de valeur régionales dans divers pays africains favoriserait l'intégration régionale des marchés, ce qui en retour pourrait déclencher des processus d'amélioration. Il en résulte que ces chaînes de valeur régionales pourraient alors atteindre des standards internationaux en matière de productivité et de qualité, permettant ainsi aux acteurs économiques africains de devenir suffisamment concurrentiels pour attirer l'investissement des firmes multinationales et à terme intégrer les CVM.

La création des chaînes de valeur régionales en Afrique dépendra d'une multitude de facteurs. Parmi ceux-ci, on trouve notamment la capacité des entreprises africaines à capitaliser sur les opportunités existantes. À titre d'exemple, le fait que 65 pourcent des terres arables du monde se trouvent en Afrique mérite une grande attention. Le développement de davantage de chaînes de valeur agricoles opérant par-delà les frontières pourrait largement contribuer à libérer ce potentiel. Un autre facteur qui pourrait influer sur la création de chaînes de valeur régionales performantes réside dans la disponibilité de mesures et d'instruments de coopération régionale pour les acteurs économiques africains. L'existence de nombreuses communautés économiques régionales (CER) en Afrique pourrait amener à conclure que l'intégration régionale a été suffisamment réalisée, mais la réalité est toute autre. La mise en place d'accords d'intégration régionale montre certes le soutien des pouvoirs publics africains, mais ces initiatives ont jusqu'ici peu fait pour éliminer les obstacles entre les marchés africains et accroître le commerce intra régional sur le continent. Comme le souligne Trudi HARTZENBERG la directrice exécutive de TRALAC (Trade Law Centre for Southern Africa), les CER sont d'une importance capitale si l'Afrique souhaite échapper à cette caractérisation systématique : un continent de « petits pays, de petites économies et de petits marchés ».

Le rôle clé de la ZLE tripartite pour la création de chaînes de valeur concurrentielles

L'année 2015 marque, pour le continent africain, une étape d'une importance considérable en termes d'intégration régionale. En juin, en l'espace d'environ une semaine, le continent a vu la signature d'un accord relatif à la Zone de libre-échange tripartite (ZLET) et le lancement des négociations en vue de l'établissement de la Zone de libre-échange continentale (ZLEC). Une fois l'accord ratifié par le nombre requis d'États membres, la ZLET sera la zone de libre-échange la plus vaste en Afrique, s'étendant sur trois des communautés économiques régionales (CER) existantes. Les trois CER concernées sont le Marché commun de l'Afrique orientale et australe (COMESA), la Communauté de l'Afrique de l'Est (EAC) et la Communauté de développement de l'Afrique australe (SADC). La ZLEC est quant à elle encore plus ambitieuse que la ZLET, puisqu'elle envisage une zone de libre-échange regroupant toutes les nations de l'Union africaine (UA).

La Zone de libre-échange tripartite (ZLET) et la Zone de libre-échange continentale (ZLEC) révèlent toutes deux la tendance des pays africains à vouloir rivaliser avec des accords méga-régionaux tels que le Partenariat Trans-Pacifique (TPP) et le Partenariat transatlantique de commerce et d'investissement (TTIP). Ces deux initiatives pourraient s'avérer déterminantes pour stimuler la mise en place de chaînes de valeur régionales performantes en Afrique, ce qui aiderait les acteurs économiques africains à renforcer leur compétitivité et à s'intégrer dans les CVM. Une entrée en vigueur rapide de la ZLEC étant peu probable, en raison de l'ampleur de cette initiative, c'est sur la ZLET que l'attention devrait davantage se focaliser pour le moment.

D'ailleurs, certains soulignent que la mise en œuvre et le succès de la ZLET influeront de manière significative sur la probabilité de voir la ZLEC se matérialiser.
Une analyse de l'accord relatif à la ZLET offre des perspectives divergentes. D'une part, dans le contexte africain, il est louable que l'accord reconnaisse que la libéralisation des échanges ne peut constituer l'unique élément, ou l'élément le plus central, d'une zone de libre-échange. En plus des engagements de libéralisation des échanges, l'accord prend en compte, entre autres, les règles d'origine, les obstacles non-tarifaires et la facilitation des échanges. Des améliorations de ces dispositions sont néanmoins possibles et les États membres devraient les examiner davantage à mesure de l'avancée vers la ratification de l'accord relatif à la ZLET.
Les règles d'origine dictent la façon dont les pays déterminent la nationalité économique des produits importés, et donc les droits qui leur sont imposés. L'OMC énonce des disciplines relatives aux règles d'origine dans l'Accord sur les règles d'origine. L'avènement de la mondialisation et des CVM a rendu les règles d'origine particulièrement pertinentes car l'origine d'un produit peut à présent être aisément et légitimement contestée. Comme mentionné plus haut, la délocalisation ou l'externalisation de la production de biens et des services peut donner à ces intrants plusieurs nationalités ou origines. La création de chaînes de valeur régionales en Afrique nécessite donc une prise en considération attentive des règles d'origine. En outre, la ZLET doit tenir compte du fait que les règles d'origine pourraient entraîner un « protectionnisme caché ». En d'autres termes, des règles d'origine qui excluent les exportateurs extérieurs du traitement préférentiel conféré par la ZLET pourraient effectivement limiter l'accès au marché pour ces exportateurs. En conséquence, empêcher les acteurs économiques régionaux de s'approvisionner en intrants bon marché à l'extérieur de la zone de libre-échange pourrait restreindre leur capacité à devenir suffisamment concurrentiels pour intégrer les chaînes de valeur mondiales.
Parmi les obstacles au commerce intra régional les plus cités, on trouve notamment les pertes excessives de temps et d'argent résultant de l'inefficacité de la circulation des marchandises entre les pays. Par exemple, il y a une relation directement proportionnelle entre la durée de transit des marchandises et les coûts de transport, ce qui dissuade les entreprises de rechercher un accès à d'autres marchés. Pour créer des chaînes de valeur régionales performantes en Afrique, il est donc crucial de maximiser l'efficience du commerce transfrontalier. La facilitation des échanges et du transport offre des mesures préventives et correctives pour remédier à ce grave problème typiquement africain.
L'accord relatif à la Zone de libre-échange tripartite (ZLET) contient des dispositions qui tracent le contour des programmes et des stratégies sur lesquels les États membres devraient s'engager en matière de transport et de facilitation des échanges. Cependant, même préalablement à la signature de cet accord, ces trois CER (SADC, COMESA et EAC) avaient entrepris une harmonisation de certains programmes afin d'atténuer les défis associés à la conduite des affaires au sein et entre ces régions. Ces programmes comprennent, par exemple, un mécanisme pour surveiller, signaler et supprimer les obstacles non-tarifaires, ainsi que la mise en œuvre de procédures aux frontières plus rationalisées, sous forme de postes frontières uniques. (…)

Kelvin KAJUNA

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment concilier le devoir de mémoire et la nécessité de l'oubli ? Vous illustrerez votre argumentaire.

Sujet n° 2

« Dans la vie rien n'est à craindre, tout est à comprendre », (Marie Curie (1867-1934), scientifique célèbre pour ses recherches sur le radium, Prix Nobel de chimie.) Que pensez-vous de cette approche scientifique ?

Sujet n° 3

Que pensez-vous de l'affirmation selon laquelle le pouvoir rend invulnérable ?

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x-y|$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \qquad (\star)$$

où $f \in \mathcal{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ F(x) &= \lambda^{-n} F(x-na) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) \end{aligned}$$

2. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f \in \mathcal{L}$ si et seulement si sa dérivée f' est bornée.
4. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$. Montrer que le produit $f.g$ appartient à $\mathcal{L}$. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.
5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq A|x| + B$$
6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$
Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente.
   En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et que F est donnée par
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$$
   (b) Déterminer F dans les cas suivants :
$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$
2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifant $(\star)$ et que F est donnée par
$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$$

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.
   (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$, il faut que f soit bornée.
   (b) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x + a) = 0$$
   Cette fonction est-elle unique ?

2. On suppose que $\lambda = -1$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0$$
   Cette fonction est-elle unique ?
   (b) On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.
      i. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$ converge.
      ii. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et de limite nulle en $+\infty$.

2 Problème 2

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E, on pose
$$f^0 = \mathbf{id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc .}$$
Si f est un endomorphisme de E et si
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
avec P élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à
$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f.
2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

(b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

(c) Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.

i. Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

ii. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \dots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k \mathbf{id}_E)^{n_k}$$

est stable par f.

3. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \mathbf{id}_E$.

(b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

(c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

(d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

(e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

4. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E.

(b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \ker \varphi$.

i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.

Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$${}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL.$$

iii. Déterminer (en en donnant une base) les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Partie II

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, \dots, E_p$ les sous- espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?
2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.
   (a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité :
   $$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$
   (b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k$ appartient à F.
   (c) Montrer que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont tous dans F.
3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.
4. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre ?

Partie III

1. On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n, c'est à dire vérifiant les conditions :
   $$f^n = \mathbf{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$
   (a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ vaut 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon.
   (b) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

2. Dans cette question on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.
   (a) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$. Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \ker f$.
   (b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
   (c) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, montrer l'inclusion suivante :

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

   A-t-on nécessairement l'égalité ?
   (d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \ker f$.
   (e) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F. Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \ker f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \ker f$ est réduite au vecteur nul.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe selon les valeurs de n.

2. On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ (avec $n \geq 0$)

- Calculer J_1 et J_2

3. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ et déterminer sa limite si cette suite est convergente.

Exercice n° 2

On considère dans R^3, le plan P_a d'équation : $z = x + ay$, où a est un nombre réel quelconque.

1. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice M_a de la projection orthogonale sur P_a.

2. Calculer $M_a{}^n$ pour tout entier n strictement positif.

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice S_a de la symétrie orthogonale par rapport à P_a.

Exercice n° 3

Soient A et B deux matrices carrées du même ordre à coefficients réels.

1. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si A^p $(p \in N^*)$ est inversible et dans ce cas, exprimer $(A^p)^{-1}$ en fonction de A^{-1}.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in R$

- Calculer A^n pour tout entier naturel n.
- Calculer (si elle existe) l'inverse de A.
- Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.

Exercice n° 4

On définit une suite d'entiers naturels q_k $(k \in N)$ par $q_{k+1} = 2q_k + 1$ et $q_0 = 0$

1. Exprimer q_k en fonction de k.

2. On note $Q = \{q_k \,/\, k \in N\}$ et on définit la suite (a_n) par :

$a_0 = 1; a_{q_k} = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} q_i}; a_n = 0$ si $n \notin Q$. Quelle est la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$?

3. Pour $x>1$, calculer $\underset{k\to+\infty}{Lim}\, a_{q_k} x^{q_k}$

4. On considère la suite (p_n) définie par : $p_0 = p \in]0,1[; p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Etudier la convergence de la suite (p_n).

5. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + p_{k+1} - p_k\right)$

Exercice n° 5

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On considère Q l'application numérique définie sur E_n par :

$$Q(p) = \int_{-1}^{1} p^2(x)(1+x^2)\,dx$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, dont la forme bilinéaire associée définit sur E_n un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une base orthogonale p_i $(i = 0,1,...n)$ de E_n telle que le terme de plus haut degré de p_i soit X^i.

3. Pour $i \in \{1,...n-2\}$, on note F_i le sous-espace de E_n engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à *i*. Déterminer une base du sous-espace $F_i^{\perp}$ orthogonal à F_i.

4. Montrer que $p_{i+2} - X\, p_{i+1}$ appartient à $F_i^{\perp}$. En déduire une relation entre p_{i+2}, p_{i+1}, p_i

5. On suppose *n*=2.
- Ecrire la matrice *M* de la forme bilinéaire symétrique associée à *Q* dans E_2
- La matrice *M* est-elle inversible ?
- La matrice *M* est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de ses éventuelles valeurs propres ?

6. Répondre à la question précédente dans le cas où *n*=3.

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique *g* définie par : $g(x) = (x^2 - 1)\, e^{-x^2/2}$. Etudier les variations de *g* et tracer son graphe (on précisera ses extrema, ainsi que sa convexité).

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)\, y = 0$. On cherchera des solutions de la forme $y(x) = u(x)\, e^{-x^2/2}$

3. On considère les fonctions numériques $f_{a,b}$ définies par $f_{a,b}(x) = (ax + b)\, e^{-x^2/2}$, où *a* et *b* sont deux nombres réels. On note $C_{a,b}$ leurs courbes représentatives. Montrer que pour *a* fixé non nul, les fonctions $f_{a,b}$ admettent des extrema et que les points correspondants à ces extrema sur $C_{a,b}$ appartiennent à un ensemble M_a. Représenter M_1. Comment M_a se déduit de M_1 ?

4. Montrer que pour *a* fixé non nul, les courbes $C_{a,b}$ admettent trois points d'inflexion dont l'un est d'abscisse comprise entre -1 et 1.

5. Ces points d'inflexion appartiennent pour *a* fixé et *b* variable à un ensemble noté I_a Représenter I_1. Comment I_a se déduit de I_1 ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ECONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet :
Vous résumerez en 200 mots le texte ci-après d'Henri Leridon, paru dans *Le Monde diplomatique* en novembre 2015.
Vous n'oublierez pas d'indiquer le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

L'Afrique, énigme démographique

D'ici à 2050, la population de l'Afrique pourrait doubler, atteignant ainsi 2,4 milliards de personnes, avant de s'établir à 4 milliards vers 2100. Inattendues, ces projections démographiques établies par l'Organisation des Nations unies bouleversent les perspectives de développement du continent, en particulier si on les met en rapport avec les chiffres de la croissance économique.

Le dernier rapport de la Banque africaine de développement, de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) et du Programme des Nations unies pour le développement (PNUD) sur l'avenir économique de l'Afrique prévoit en effet que le taux de croissance moyen du produit intérieur brut (PIB) de 4,5 % observé au cours des quatre dernières années se maintiendra en 2015 et 2016. A priori, il s'agit d'une performance remarquable lorsqu'on la compare à celles de la zone euro (0,9 % en 2014) ou de l'Amérique latine (1,7 %), et honorable par rapport à celles de l'Asie du Sud et de l'Est (7 %). Toutefois, si l'on s'intéresse au PIB par habitant, le tableau se dégrade : la croissance de la richesse par habitant est ramenée à 1,6 % en Afrique subsaharienne, contre 0,4 % dans la zone euro, 0,6 % en Amérique latine et 6 % en Asie. En d'autres termes, la croissance démographique africaine pourrait ralentir fortement l'amélioration des conditions de vie des populations locales au cours des prochaines décennies. Cette perspective devrait conduire à envisager des mesures d'urgence ; or elle suscite peu de réactions.

Actuellement, la population africaine croît de 2,5 % par an, pour une moyenne mondiale de 1,2 %. Si l'Amérique latine et l'Asie suivent cette dernière tendance, l'Amérique du Nord croît plus faiblement encore (0,4 %), tandis que l'Europe est quasi stationnaire. Dans le grand mouvement de la transition démographique (qui voit la mortalité et la natalité baisser toutes les deux), l'Afrique resterait donc en retrait. Mais s'agit-il d'un simple retard ? En effet, il arrive fréquemment que, au cours de la transition, la mortalité diminue avant la fécondité.

S'ouvre alors une phase de forte croissance démographique, que l'on peut considérer comme une période instable de la transition. Plus cette période dure, plus la population augmente.

L'Amérique latine et l'Asie ont ainsi connu pendant quelques décennies des taux d'accroissement démographique annuel supérieurs ou égaux à 2 %, qui conduiront à une multiplication par, respectivement, 4,7 et 3,7 de leurs populations entre 1950 et 2050. L'Afrique subsaharienne dépasse le seuil de 2 % depuis soixante ans, et cela pourrait continuer pendant encore plusieurs décennies. Le coefficient multiplicateur sera alors très probablement supérieur à 11, et la population pourrait continuer à croître après 2050. Il existerait donc bien une spécificité de l'Afrique subsaharienne, l'évolution de l'Afrique du Nord ayant été très différente.

Cette situation résulte du maintien d'une forte fécondité. Celle-ci, outre qu'elle affichait des niveaux particulièrement élevés, a baissé plus lentement au début de la transition en Afrique subsaharienne qu'en Amérique latine et en Asie. La fécondité africaine actuelle correspond ainsi à celle de ces deux régions il y a quarante ans. Mais cette croissance de la population s'explique aussi en partie par la baisse de la mortalité. L'espérance de vie sur le continent, bien qu'encore éloignée de la moyenne mondiale (70,5 ans en 2010-2015), a gagné plus de vingt ans depuis 1950, passant de 36 à 57 ans. La baisse du taux de mortalité (nombre de décès rapporté à la population totale) a donc compensé la — faible — baisse de la fécondité.

Indifférence des responsables sanitaires

Cette évolution contribue encore à déconcerter l'observateur. Souvent, une réduction de la mortalité, surtout infantile ou juvénile, induit une baisse de la fécondité, fût-ce avec retard, les familles constatant qu'un plus grand nombre d'enfants survivent. De fait, depuis 1950, la mortalité juvénile (entre 0 et 5 ans) a été divisée par trois au sud du Sahara, passant de 30 % à 10 % ; mais cela n'a pas encore eu d'effet sur la fécondité.

En Afrique, où la plupart des naissances ont lieu au sein des mariages — ou de toute autre forme d'union reconnue —, l'évolution de l'âge lors de la première union peut jouer un rôle. Son augmentation a, par exemple, fortement contribué à la baisse de la fécondité dans un pays comme la Tunisie. Or une étude réalisée en 2003 dans trente pays d'Afrique subsaharienne a montré que le mariage y restait très précoce. Plus de la moitié des femmes entre 20 et 25 ans qui ont été interrogées avaient été mariées avant 20 ans dans les deux tiers de ces pays, et plus de 75 % dans sept pays. Une étude publiée en 2013, comparant les résultats des deux enquêtes les plus récentes dans 34 pays d'Afrique subsaharienne, a montré une augmentation moyenne de 0,3 année en cinq ans. L'élévation de l'âge du mariage est donc très lente, voire inexistante dans certains pays.

Souvent, la fécondité effective d'un pays se révèle proche du nombre d'enfants désirés par la population. Hors situation de contrainte, comme en Chine ou en Inde (lors des premières grandes campagnes de stérilisations), la première condition pour avoir peu d'enfants est donc d'en vouloir peu. Dans la plupart des pays en développement, le nombre d'enfants désirés a chuté : entre 2 et 3. Mais, en Afrique, il demeure très élevé. Selon une étude réalisée en 2010), dans 18 pays sur 26, le « nombre idéal d'enfants » déclaré par les femmes mariées était en moyenne supérieur à 5 et, dans deux cas, supérieur à 8. Là où l'on a interrogé aussi les hommes, l'idéal était presque partout supérieur à 5 et dépassait 8 dans six pays, le record étant détenu par le Tchad, avec 13,7 enfants. Si les parents, et en particulier les pères, souhaitent une famille nombreuse, c'est principalement parce qu'elle paraît représenter une source de richesse, les enfants pouvant aider aux champs, garder le bétail et, plus tard, trouver de petits travaux en ville.

En outre, même lorsqu'on souhaite limiter sa descendance, encore faut-il disposer des moyens appropriés ; et la contraception reste peu répandue en Afrique. Alors que, en 2013, 63 % des femmes de 15-49 ans vivant en couple dans le monde utilisaient une méthode de contraception, et 57 % une méthode moderne (pilule, stérilet ou stérilisation), les proportions tombaient à 25 % et 20 % pour l'Afrique subsaharienne, et plus bas encore pour l'Afrique centrale et occidentale. Les faibles taux observés au Tchad, en Guinée, au Mali ou en Erythrée (moins de 10 %) indiquent que les responsables politiques et sanitaires de ces pays manifestent une indifférence totale à cette question, quand ils ne sont pas carrément favorables à une forte fécondité.

Dans l'enquête périodique réalisée par la division de la population des Nations unies, toutes les administrations d'Afrique occidentale, y compris celles du Mali et du Niger, déclarent souhaiter une diminution du taux de fécondité, en apportant notamment un *« soutien direct »* à la planification familiale. Pourtant, ces intentions ne semblent pas encore se traduire dans les faits, les méthodes contraceptives restant par exemple peu accessibles. *« En Afrique subsaharienne,* analyse Jean-Pierre Guengant, directeur de recherche émérite à l'Institut de recherche pour le développement (IRD), *les décideurs politiques considèrent encore largement que la croissance rapide de la population est un facteur de prospérité, car elle contribue à l'expansion des marchés et à la puissance des pays. »*

Les choses commencent cependant à bouger — lentement. En 2011, neuf gouvernements d'Afrique de l'Ouest, le Fonds des Nations unies pour la population (UNFPA), l'Agence française de développement et plusieurs grandes fondations privées ont signé un accord, dit « partenariat de Ouagadougou », destiné à favoriser la planification familiale. Il existe aussi des initiatives locales. Au Niger, l'association Animas-Sutura a monté en 2007 une radio communautaire couvrant une vingtaine de villages pour diffuser des conseils en matière d'hygiène, de nutrition et de santé, en évoquant en particulier les maladies sexuellement transmissibles et la planification familiale. Bien qu'il reste assez modeste (autour de 20 %), le recours à la contraception dans les villages concernés est maintenant comparable à celui observé dans les zones urbaines. Quant à l'Association pour la promotion féminine de Gaoua (APFG), elle développe autour de cette ville du sud du Burkina Faso des actions intégrées d'alphabétisation, de formation à l'artisanat et de planification familiale. Enfin, la communauté scientifique mondiale commence elle aussi à se saisir du problème. Une nécessaire « révolution contraceptive »

Mais, en matière démographique, l'inertie est forte. C'est la raison pour laquelle les prévisions à l'horizon 2050 semblent assez solides. Les chiffres cités plus haut sont ceux de l'hypothèse moyenne dans les dernières projections des Nations unies ; celle-ci implique une forte diminution de la fécondité, le nombre moyen d'enfants devant passer de 5 à 3 en à peine plus d'une génération. Si l'on parvenait à aller encore plus vite (2,6 enfants en 2050 dans l'hypothèse basse des Nations unies), la population de l'Afrique atteindrait 2,2 milliards en 2050, soit seulement 10 % de moins que l'hypothèse centrale. A l'horizon 2100, toutefois, la baisse serait beaucoup plus substantielle : — 40 %. Une fois encore, ce calcul montre que, pour obtenir un changement significatif à long terme, il est impératif de modifier très tôt les comportements.

L'Algérie, l'Egypte, le Maroc ou la Tunisie ont connu des transitions beaucoup plus rapides. Aujourd'hui, la fécondité y est comprise entre 2 et 3 enfants par femme, et les proportions d'utilisatrices de méthodes contraceptives sont comprises entre 60 % et 68 %, avec entre 52 % et 58 % de recours aux méthodes modernes, ce qui les situe dans la moyenne mondiale. En Afrique subsaharienne, l'Afrique du Sud atteint les mêmes niveaux (60 %, quasiment toutes en méthodes modernes), et le Kenya comme le Malawi s'en approchent, avec 46 %.

Diffuser l'usage de la contraception au sein des populations africaines n'a donc rien d'impossible. Mais, pour cela, les programmes que les organismes internationaux importent sans prêter grande attention aux spécificités locales ont montré leurs limites. Même là où ils ont pu avoir une certaine efficacité, comme au Ghana ou au Kenya, la fécondité semble être ensuite restée bloquée à 4 ou 5 enfants par femme. Il faut donc une plus grande implication des responsables politiques ou religieux et des leaders d'opinion de tout type. Il n'est pas toujours nécessaire que les gouvernements soutiennent ostensiblement le recours à la contraception : ils peuvent simplement laisser des relais privés et associatifs libres d'agir, comme l'a montré l'expérience de pays comme l'Algérie ou l'Iran.

Le meilleur levier reste toutefois une mobilisation directe des femmes. A cet égard, et même si l'effet n'est pas universel, on considère généralement qu'une élévation du niveau d'éducation des filles est indispensable. Or, en Afrique de l'Ouest par exemple, en 2010, environ 46 % des femmes de 20 à 39 ans n'avaient reçu aucune éducation (contre 31 % des hommes).

Les populations africaines aspirent légitimement à une amélioration de leurs conditions de vie, que la diminution du rythme de croissance démographique ne pourrait que favoriser. Investir dans l'éducation et améliorer le statut des femmes pourrait provoquer une « révolution contraceptive » dont les bénéfices couvriraient d'ailleurs de larges domaines de la santé, bien au-delà de la limitation des naissances.

Henri Leridon

Directeur de recherche émérite à l'Institut national d'études démographiques (INED), Paris.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« Si tout est permis, rien n'est permis », Que pensez-vous de cette citation de Vladimir Jankélévich (1903-1986), philosophe français, tiré de son essai *L'Ironie* publié en 1950 ?

Sujet n° 2

Peut-on négocier la paix avec des criminels ? Vous argumenterez et illustrerez vos propos.

Sujet n° 3

« Migrations, émigrations, conquêtes, aucune portion de l'humanité n'est restée au lieu de son origine (…) nous sommes tous des exilés », que pensez-vous de cette citation de Barbara Cassin, philologue et membre de l'Académie française, tiré de son ouvrage *La nostalgie : quand donc est-on chez soi ?* paru en 2018 ?

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit d un entier égal à 1 ou 2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

Le but du problème est de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) = f(x + z, y + z), \qquad (T)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) + f(y, z) = f(x, z), \qquad (A)$$

c'est-à-dire les fonctions continues invariantes par translation diagonale et additives au sens de (A).

Partie I - Étude de l'invariance par translation

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (T), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, x) = f(y, y).$$

3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_2$, la fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} |f(x,y)| & si & x < y, \\ |f(y,x)| & si & x \geq y. \end{array} \right. \end{array}$$

est encore invariante par translation diagonale, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_2$.

4. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(0,z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel.

5. Calculer le noyau $\mathcal{K}$ et l'image $\mathcal{I}$ du morphisme Φ.

6. Montrer que le morphisme Φ induit un isomorphisme linéaire du quotient $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{I}$. Calculer l'inverse Ψ de cet isomorphisme. Dans la définition de Ψ, on pourra identifier la fonction f à son représentant dans $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sans perte de généralité.

7. Soit a un nombre réel. Montrer que l'application

$$\Phi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z, a\, z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

8. Lorsque $a \neq 1$, précisez si ce morphisme est injectif ou surjectif.

9. Montrer qu'il existe un réel a^* tel que $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathrm{a}^*})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

10. Quel est le noyau de Φ_{a^*} ?

Partie II - Étude de l'additivité.

11. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (A), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

12. Soit $f \in \mathcal{A}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,x) = 0.$$

13. On suppose que $f \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}_2$. Montrer que la suite

$$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$

converge quand $N \to +\infty$. Calculer sa limite.

14. On suppose que f est positive, montrer que la fonction f est croissante par rapport à chacune de ces variables.

Partie III - Étude des fonctions continues vérifiant (T) et (A).

Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0,1).$$

16. Montrer pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0,x) = xf(0,1)$.
18. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x)f(0,1)$.
19. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$, la suite suivante est convergente

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) f\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

20. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$, on a $S_N(g,f) \to f(0,1) \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ quand $N \to +\infty$.
21. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ on définit la quantité suivante pour tout $x \in [0,1]$

$$D_N(g)(x) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N \mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x).$$

Montrer que la fonction $D_N(g)$ est bornée sur $[0,1]$ uniformément par rapport à $N \in \mathbb{N}^*$.

22. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $D_N(g)(x) \to g'(x)$.
23. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$ non-nulle, calculer la limite de

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right) f\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) / f(0,1)$$

en fonction de f et g.

24. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la quantité

$$R_N(g,f) = \int_0^1 D_N(g)(x)dx - I_N(g,f).$$

converge vers 0 quand $N \to +\infty$.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des commutateurs de deux éléments dans les espaces vectoriels. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E.

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec la notation $\circ$ pour définir la composition, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc .}$$

et on définit $[f, g]$ le commutateur de f et g par la quantité

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de E noté en ligne, on note x^T sa transposée qui forme donc un vecteur colonne. Cette notation s'applique également à tout autre élément de E apparaissant dans la suite de l'énoncé. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

1. Soit une suite de réels $a_{2k} = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k+1} = 0$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

2. Soit une suite de complexes $a_k = \dfrac{(-i)^k (k+i)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

3. Montrer que $[f, g]$ est un endomorphisme de E.

4. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série entière donnée sans coefficient nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ par
$$P_k(X) = a_k X^k.$$
Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si $[f, g] = \mathbf{0}_E$, il existe une suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$$
5. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f, g] = \mathbf{0}_E$. Montrer que $b_{k,N} = 1$ pour tout k et pour tout $N \in \mathbb{N}$.
6. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f, g] \neq \mathbf{0}_E$. Montrer que $P_2(f+g) - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}[g, f]$.
7. Montrer que $F_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P_k(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers un endomorphisme.

Partie II

8. Soit x un élément non nul de E et y un élément de E. Montrer qu'il existe au moins une matrice réelle M_0 de taille $n \times n$ tels que
$$M_0\ x^T = y^T$$
9. Montrer que le choix de la matrice n'est pas unique si $n \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, et deux matrices réelles distinctes M et N de tailles $n \times n$ telles que
$$Mz^T = Nz^T.$$
10. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une matrice M de taille $n \times n$ telle que pour tout $y \in E$,
$$My^T = f(y)^T.$$
11. Montrer que la matrice construite à la question précédente est unique. Pour chaque endomorphisme f de E, on notera alors M_f la matrice associée par la construction précédente.
12. Montrer que l'application
$$\Phi : \begin{cases} (\text{Endomorphismes}(E), +, \circ) & \longrightarrow & (\text{Matrices réelles de taille } n \times n, +, \times) \\ \qquad\qquad f & \mapsto & \Phi(f) = M_f \end{cases}$$
est un morphisme d'anneau.
13. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que
$$\Phi([f, g]) := M_{[f,g]} = M_f \times M_g - M_g \times M_f.$$

Partie III

Pour f un endomorphisme de E, on note C_f l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $M_{[f,g]}$ est la matrice identiquement nulle, c'est-à-dire

$$C_f := \{g : E \to E \text{ endomorphisme } : M_f \times M_g = M_g \times M_f\}.$$

14. Pour $f = \mathbf{id}_E$, montrer que $C_{\mathbf{id}_E}$ est constitué de l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$.
15. Montrer que C_f est un sous-groupe additif des matrices réelles de taille $n \times n$.
16. Montrer que C_f est un sous-anneau des matrices réelles de taille $n \times n$.
17. Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$.
18. Soit D une matrice diagonale de taille 2×2 et d l'endomorphisme associé par la base canonique. Montrer que
$$d \in \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \mathcal{M}_{2,2},$$
et
$$d \notin \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}, b = c = 0 \right\}.$$
19. Soit f un endomorphisme dont la matrice M_f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage R et une matrice diagonale D telles que
$$M_f = R^{-1}DR$$
Montrer que si $g \in C_f$ et M_g est diagonalisable, alors il existe une matrice de passage Q, une matrice diagonale Δ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ telle que
$$M_g = Q^{-1}\Delta Q \quad \text{et} \quad M_f = Q^{-1}\widetilde{D}Q.$$
20. Montrer qu'il existe une matrice S telle que $\widetilde{D} = S^{-1}DS$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. Etudier la convexité de f.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Soit la fonction h définie sur R par : $h(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $I = \int_0^1 h(x)\, h(-x)\, dx$.

Exercice n° 2

Soit la fonction numérique f_α définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha + Ln(1+x^2)$, où α est un nombre réel quelconque et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de f_α selon les valeurs de α .
2. Etudier les variations et tracer les graphes de f_1 et f_2. Comparer ces deux graphes sur R^+.
3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $u_0 > 0$.
4. Etudier la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = f_2(v_n)$ et $v_0 > 0$.

5. Pour $n \in N$, on pose : $I_n = \int_1^n f_n(x)\, dx$.

- Calculer I_2
- Etudier la suite (I_n)

Exercice n° 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des paramètres réels.

1. Etudier la diagonalisation de M selon les valeurs de α et β.

2. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.
Calculer, pour tout $n \in N$, M^n et $(M + I)^n$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

3. On suppose $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta \neq 1$, calculer M^n, pour tout $n \in N$.

Exercice n° 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $V={}^tM\,M$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice V.

3. Trouver un vecteur unitaire u de R^3 tel que $V\,u = 2u$.

4. Déterminer la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale, dans R^3, sur la droite vectorielle D engendrée par u.

5. Si chaque ligne de la matrice M correspond à une observation, quelle est l'observation dont la projection orthogonale sur D a la plus grande longueur ?

6. Déterminer les vecteurs propres de la matrice V.

7. Résoudre $Max\left\{ {}^tv V v \;/\; v \in R^3, \|v\| = 1 \right\}$.

Exercice n° 5

Pour $x \in R$, on considère l'intégrale généralisée : $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,dt$

1. Montrer que $K : x \mapsto K(x)$ définit une application de R dans R et étudier sa parité.

2. Pour $x>0$, calculer $K(x)$ en fonction de $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à calculer et en déduire l'expression de $K(x)$ pour tout $x \in R$.

3. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2\,(1+t^2)}\,dt$

- Montrer que *F* est bien définie sur *R*.
- Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (on pourra comparer *F* et *K*).

4. Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t\,x)}{t\,(1+t^2)}\,dt$

- Montrer que *G* est convergente.
- Pour $x, h \in R$, monter l'inégalité suivante : $\left|\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| \le h^2\,t^2$.
- Montrer que *F* est dérivable et que sa dérivée est égale à *G*.
- Montrer que *G* est continue.

Exercice n° 6

1. Soit $M : (a,b,c) \in C^3 \mapsto M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où C désigne l'ensemble des nombres complexes. Montrer que M est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre C^3 et $E = \{M(a,b,c)\ /\ (a,b,c) \in C^3\}$ et déterminer une base de *E*.

2. Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer U^n pour tout $n \in N$.

3. Calculer $M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc)$, où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

4. Déterminer, quand il existe, l'inverse de $M(a,b,c)$.

5. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$. A quelle condition ces valeurs propres sont-elles distinctes ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après de Aboubacar Yacouba Barma, est un article publié dans « La Afrique Tribune » en mars 2017.

Il doit être résumé en 150 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

La Chine, ce partenaire presque comme les autres

C'est un proverbe chinois qui le dit : *« quand tout va bien, on peut compter sur les autres, quand tout va mal on ne peut compter que sur sa famille »*. Ce qui cadre bien, aujourd'hui, avec la dynamique sur laquelle surfent les relations entre l'Afrique et la Chine. En 2009, en pleine crise financière mondiale qui a surtout impacté les pays développés, la Chine s'est érigée en premier partenaire commercial de l'Afrique. En 2015 et alors que les pays occidentaux peinaient toujours à se relever des répercussions de la crise économique mondiale et que la croissance chinoise ralentissait, l'empire du milieu annonçait un nouveau programme financier en faveur du continent doté d'une enveloppe de 60 milliards de dollars sur trois ans.

L'effort est assez soutenu si l'on tient compte des difficultés qui affectent l'économie chinoise ces dernières années avec des inquiétudes sur l'effondrement des colossales réserves de change du pays. Ce qui risque d'imposer une baisse de régime aux investissements chinois en Afrique. Une mauvaise nouvelle pour bon nombre de pays africains, principalement les plus riches en ressources naturelles, qui ont développé durant la dernière décennie, une forte dépendance à la demande chinoise. Mais comme le rappelle, encore, un autre proverbe chinois, *« dans la sécheresse on découvre les bonnes sources et dans la détresse, les bons amis »*, les autorités chinoises n'entendent point baisser la voilure et veulent maintenir intact le partenariat construit en moins de deux décennies avec l'Afrique.

C'est d'ailleurs la teneur du message adressé aux présidents africains par leur homologue chinois, Xi Jinping, lors de la dernière édition du Forum de coopération Afrique-Chine (FOCAC) qui s'est tenue en décembre 2015 à Johannesburg et au cours de laquelle, les engagements de la Chine en Afrique pour les prochaines années ont été dévoilés. Cette approche chinoise qui consiste à se porter toujours au secours des économies africaines en pleine expansion, en fait toute la particularité. On se rappelle d'ailleurs que c'est au moment où l'Afrique était presque délaissée, surtout par les anciennes puissances coloniales et les institutions financières internationales, que la Chine s'est invitée sur le continent. Une mise gagnante puisque cette entrée en force de la Chine en Afrique est intervenue presqu'au moment où les pays africains amorçaient leurs cycles des « trente glorieuses », avec une dynamique de croissance sans précédent, laquelle a remis à jour tout le potentiel dont recèle le continent en matière d'opportunités économiques. La dynamique de la décennie 2000 à 2010 a d'ailleurs été fortement soutenue par la Chine qui en plus des investissements massifs dans plusieurs pays a parallèlement renforcé son influence diplomatique et sa présence économique directe en Afrique. Seuls les chiffres permettent de mesurer l'ampleur désormais prise par les relations économiques et commerciales sino-africaines. En plus de la série des annulations des dettes et de l'engagement financier à hauteur de 20 milliards de dollars déjà promis en 2012 et concrétisé depuis (à la suite des 5 milliards engagés dans les années 2000), les échanges commerciaux entre la Chine et l'Afrique ont cru de manière vertigineuse. De 10 milliards de dollars en 2000, le commerce Chine-Afrique a franchi le cap des 200 milliards en 2014 alors que les investissements chinois sur le continent ont dépassé les 30 milliards de dollars.

En 2016, l'empire du milieu représentait 10% des relations économiques de l'Afrique alors que la part des échanges commerciaux entre les pays du continent et la Chine a progressé de moins de 4% à plus de 20% sur les 15 premières années du nouveau millénaire. Il est projeté qu'à l'horizon 2020, la valeur du commerce Chine-Afrique, dépasse le cap des 400 milliards, ce qui conforterait la place de premier partenaire stratégique de l'économie africaine que s'arroge désormais la deuxième économie du monde.

Partenariat gagnant-gagnant

Le partenariat gagnant-gagnant qu'offre la Chine à l'Afrique ne devrait toutefois pas, occulter certains aspects qui reflètent une image assez négative, celle d'un « néo-colonialisme déguisé ». Il y a quelques années déjà, l'ancien gouverneur de la Banque centrale du Nigéria, Sanussi Lamido, avait mis en garde les responsables africains contre les effets pervers de l'offensive chinoise sur les ressources naturelles africaines. L'audience internationale qui a suivi cette sortie ressemble à bien des égards, et toute proportion gardée, à l'œuvre de l'économiste zambienne Dambisa Moyo, qui quelques années plus tôt, mettait en exergue les limites de l'aide publique internationale pour le développement en Afrique.

Si la dynamique des relations sino-africaines suscite aussi des critiques, elle sert aussi d'alternative aux pays africains surtout dans le nouveau contexte socioéconomique et politique des dernières années. Confrontés à une explosion des attentes sociales et un déficit criant en infrastructures, un handicap pour atteindre la croissance nécessaire à la prise en compte des défis contemporains, les responsables africains voient en la Chine un passage. Surtout à l'heure où l'aide internationale se fait de plus en plus rare et les marchés financiers de plus en plus exigeants en termes de critères pour accéder à certaines ressources, même au niveau des institutions financières ou des agences de développement. Ce n'est pas pour rien qu'aujourd'hui, Pékin est devenue une destination de premier choix pour les présidents africains tout comme l'a été à une certaine époque, et parfois bien plus, Paris ou Bruxelles à titre d'exemples.

Les capitales occidentales sont certes le passage obligé pour une reconnaissance internationale, alors Pékin est devenue l'étape privilégiée pour les dirigeants africains en quête de soutien pour financer les programmes de développement qu'ils ont élaboré. Et Pékin a su toujours se montrer généreuse, en échange de quelques contres parties. Un échange de bons procédés, financement contre matières premières qui représente un moindre mal pour beaucoup de chefs d'Etat africains qui misent avant tout sur leurs potentiels en ressources naturelles pour développer leurs économies.

Prometteuse « Chine-Afrique »

Aujourd'hui, la Chine s'impose comme le partenaire commercial par excellence du continent. Dans un contexte marqué par une rude concurrence pour l'accès aux marchés africains, que se livrent les anciennes puissances et les économies émergentes, la Chine a un statut des plus « particulier ». Tant par l'ampleur des échanges économiques mais aussi par les perspectives en matière de partenariat commercial surtout que les relations sino-africaines ont su jusque-là faire preuve d'adaptation à l'évolution de l'économie africaine.

Ce partenariat n'est certes pas exempt de critiques comme bien des analystes l'ont mis en exergue mais au final, il s'inscrit dans la même dynamique qui sous-tend l'expansion des autres partenaires intéressés par cette « niche africaine ». C'est ce qu'a d'ailleurs relevé la Banque africaine de développement (BAD) dans un rapport publié en 2011, alors que la dynamique sino-africaine soulevait encore beaucoup d'interrogations sur les réelles motivations de la Chine en Afrique et surtout les effets de sa stratégie de partenariat à l'égard des pays africains. Dans ce rapport intitulé : *«La Chine et l'Afrique : un nouveau partenariat pour le développement ?»*, la BAD qui a passé au crible les ressorts de ces relations, estime que *«les pratiques de la Chine en tant que prestataire d'aide et de financement du développement ne sont pas aussi différentes de celles des autres donateurs qu'on le pense habituellement»*, et d'étayer *«la marge d'amélioration est conséquente pour l'ensemble des acteurs du système mondial d'aide et de financement du développement»*. Consciente des critiques abondantes dont elle fait l'objet, la Chine essaie tant bien que mal d'adapter sa stratégie africaine tout en veillant à ne pas occulter les ingrédients qui ont fait le succès de sa recette.

De l'approche première qui a été schématisé par une sorte de troc des temps modernes, « soutien financier contre matières premières », la Chine est en train de se greffer comme un acteur majeur des perspectives d'évolution de l'économie africaine et de partenaire de développement. Les nouvelles niches sur lesquelles misent les investisseurs chinois, portés par une ambition politique au plus haut sommet de l'Etat, dans de nouveaux créneaux comme les services, l'agriculture et l'industrie, témoignent d'une forte volonté du pays de s'implanter durablement en Afrique. A cela s'ajoute une stratégie d'influence tout azimut avec toujours ce même *« soft power »* qui constitue la marque de fabrique de la Chine, celui de la non-ingérence dans les affaires intérieures des pays africains et des contributions financières sans conditions. Cela, même lorsque le pays s'ouvre sur de nouveaux créneaux comme la lutte contre les menaces sécuritaires, l'aide humanitaire ou le maintien de la paix sur le continent. C'est peut-être une manière prudente et prospective pour le pays qui ambitionne de se hisser au rang de première puissance mondiale, d'anticiper sur le futur en consolidant d'une part son influence sur le continent et aussi et surtout d'autre part, de sécuriser ses sources d'approvisionnements en matières premières tout autant que ses débouchés commerciaux.

Dans un cas comme dans l'autre, le renforcement du positionnement de la Chine en Afrique a de quoi augurer d'opportunités de croissance pour les pays du continent qui sauront le mieux se positionner. C'est d'ailleurs cette perspective de développement des pays africains et surtout de leur plus grande intégration dans les chaines de valeurs mondiales, qui apportera un nouveau souffle dans les relations entre le continent et ses multiples partenaires. A ce jeu, force est d'avouer que pour l'heure, c'est la *ChinAfrique* qui bénéficie des meilleures côtes...

Par Aboubacar Yacouba Barma

« La Afrique Tribune », mars 2017

CORRIGE DES SUJETS ISE OTION MATHEMATIQUES 1998-2019

NIVEAU LICENCE EN MATHEMATIQUES

SESSION

D'AVRIL

1998

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE
DE MATHEMATIQUES

*

*   *

PARTIE n° 1

Existence du polynôme de meilleure approximation.

❶ E est trivialement un espace vectoriel normé par la norme sup.

❷- Soit d la distance de f à F_p. Par définition, il existe une suite $(g_n)_{n\in IN}$ dans F_p telle que, pour tout n $\|g_n - f\| < d + \frac{1}{n+1}$. Cela implique $\|g_n\| < \|f\| + d + 1$. La boule fermée de F_p $B(0,\|f\| + d + 1)$ est compacte, donc il existe une site extraite de $(g_n)_{n\in IN}$ que l'on continue à appeler $(g_n)_{n\in IN}$ et qui converge vers $g \in F_p$. Par continuité de la norme, on en déduit $\|g - f\| = d$; D'où l'existence de $P = g$.

PARTIE n° 2

Unicité du polynôme de meilleure approximation.

❶ Si $d = 0$, alors $P = f$ et $f \in F_p$. Réciproquement, si $f \in F_p$, $d = 0$ et $P = f$ est unique.

❷ Soit $d \neq 0$, $\alpha = \sup\limits_{x \in [a,b]} \left[P(x) - f(x) \right]$ et $\beta = \inf\limits_{x \in [a,b]} \left[P(x) - f(x) \right]$. On doit déjà avoir $\alpha \leq d$ et $\beta \geq -d$. Si $\alpha < d$, soit $Q = P + \frac{d-\alpha}{2} \in F_p$. Alors :

$$\sup_{x \in [a,b]} \left[Q(x) - f(x) \right] = \alpha + \frac{d-\alpha}{2} = \frac{d+\alpha}{2} < d \text{ et } \inf_{x \in [a,b]} \left[Q(x) - f(x) \right] \geq -d + \frac{d-\alpha}{2} > -d .$$

C'est absurde, donc $\alpha = d$; de même, $\beta = -d$.

Or $P - f$ est continue. Donc, il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $P(x_1) - f(x_1) = \alpha = d$ et $A_1 \neq \varnothing$.

On montre de même que $A_{-1} \neq \varnothing$.

❸ $P - f$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$ qui est compact. Elle y est donc uniformément continue et il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, si $|x - y| \leq \gamma$ alors :

$$\left| (P-f)(x) - (P-f)(y) \right| \leq \frac{d}{2}$$

Fixons m entier supérieur ou égal à $\frac{b-a}{\gamma}$. Le découpage tel que $x_k = a + k\frac{b-a}{m}$ répond à la question. On fixe ce découpage dans la suite du problème.

❹ Soit $(x,y) \in A_1 \times A_{-1}$. Alors, $(P-f)(x) - (P-f)(y) = 2d$, donc x et y ne peuvent pas être sur le même segment (saut maximum de $\frac{d}{2}$) ni sur des segments contigus (saut maximum de d). Mais $A_1 \neq \varnothing$.et $A_{-1} \neq \varnothing$. Donc il y a au moins trois segments différents ($m \geq 3$) et il y a au moins un segment dans I_ε, un segment dans $I_{-\varepsilon}$ (qui sont forcément distincts), d'où $card(I) = r \geq 2$.

❺ Soit $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ suite strictement croissante telle que $B_j = \left[x_{i_j - 1}, x_{i_j} \right] \subset I_1 \cup I_{-1}$. Puisque $I_1 \cap I_{-1} = \varnothing$, cela implique qu'il existe un unique ε_1 tel que $B_{i_1} \in I_{\varepsilon_1}$.

Donc il existe un seul $j_1 \in I$, $j_1 = \sup i_k$ tels que $B_{i_1},\dots,B_{i_r} \in I_{\varepsilon_1}$; il existe un seul $j_2 \in I$, $j_2 = \sup i_l$ tels que $B_{i_{k+11}},\dots,B_{i_l} \in I_{-\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_2}$; etc.

D'où, de proche en proche, il existe une seule suite $\left(j_1,\dots,j_q\right)$ et $q \geq 2$.

❻ Soit $C_k = \bigcup_{j_{k-1} < j \leq j_k} B_j$. On sait que B_{j_k} et $B_{j_{k+1}}$ ne sont pas contigus (id est : $j_{k+1} > j_k + 1$). Cela implique que si $u \in \left]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_k+1}}\right[$, on a $x < u < y$ pour tout $\left(x,y\right) \in C_k \times C_{k+1}$.

A partir de maintenant, u_k est fixé et appartient à $\left]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_k+1}}\right[$.

❼ Soit $Q(x) = (x-u_1)\dots(x-u_{q-1})$. La fonction $P-f$ ne s'annule sur aucun B_j (car $\inf\left|P-f\right| \geq d/2$ sur B_j). Il en va trivialement de même pour Q. On en déduit que $\left(P-f\right)Q$ est de signe constant sur chacun des C_k.

De plus, lorsque l'on passe de C_k à C_{k+1}, $P-f$ change de signe (signe de ε_k) ainsi que Q (qui franchit un seul zéro). Le signe de $\left(P-f\right)Q$ est donc constant sur $\bigcup C_k$.

❽ i) Sur $[a,b]/\bigcup C_k$, $\sup\left|P(x)-f(x)\right| = d_1 < d$ (f ne peut atteindre d ou $-d$ en une borne de C_k, par définition de C_k).

Soit $M = \sup\left|Q(x)\right|$. Alors $\sup\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| \leq d_1 + |\lambda| M$

Finalement, si $|\lambda| < \dfrac{d-d_1}{M}$, alors $\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| < d$

ii) Sur $\bigcup C_k$, $P-f$ et Q ont le même signe. Si on impose $\lambda < 0$, alors :

$$\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| = \left|\left|P(x)-f(x)\right| - |\lambda|\left|Q(x)\right|\right|$$

Or $\left|P(x)-f(x)\right| \geq d/2$; En imposant de plus $|\lambda| M < d/2$, on aura :

$$\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| = \left|P(x)-f(x)\right| - |\lambda|\left|Q(x)\right| < d$$

Récapitulons : en prenant $\lambda < 0$ et $|\lambda| \le \inf\left(\frac{d-d_1}{2};\frac{d}{2M}\right)$, et puisque $P - f + \lambda Q$ est continue, on aura bien $\|P - f + \lambda Q\| < d$. Mais alors, $Q \notin F_p$ (car sinon, $P + \lambda Q \in F_p$, ce qui est absurde). Donc le degré de Q est supérieur ou égal à $p+1$, ce qui implique $q \ge p+2$.

On peut alors choisir $p+2$ valeurs successives de k, k variant de 1 à $p+2$, telles que sur chaque C_k, il existe y_k tel que $(P-f)(y_k) = \varepsilon_k d$.

❾ i) Si P et P_1 sont dans F_p tels que $\|P-f\| = \|P_1 - f\| = d$, on aura :

$$\left\|\frac{1}{2}(P+P_1) - f\right\| \le \frac{1}{2}\|P-f\| + \frac{1}{2}\|P_1 - f\| = d$$

Mais $\frac{1}{2}(P+P_1) \in F_p$, on doit donc nécessairement avoir $\left\|\frac{1}{2}(P+P_1) - f\right\| \ge d$; Il y a donc égalité.

ii) Soit x tel que $\frac{1}{2}(P(x) + P_1(x)) - f(x) = d$. Puisque $P(x) - f(x) \le d$ et $P_1(x) - f(x) \le d$, on doit en fait avoir : $P(x) - f(x) = P_1(x) - f(x) = d$. On a le même résultat pour les points y où $\frac{1}{2}(P(y) + P_1(y)) - f(y) = -d$.

Mais alors, $P - f$ et $P_1 - f$ prennent les mêmes valeurs aux $p+2$ points y_k ; $P - P_1$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p+1$ qui s'annule $p+2$ fois, donc $P = P_1$.

❿ Soit $R \in F_p$ tel qu'il existe $(z_1, \ldots, z_{p+2})$ dans $[a,b]$ où $R(z_i) - f(z_i) = (-1)^i \zeta \|R - f\|$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, p+2\}$. Posons $\|R - f\| = \delta$. Il y a deux cas possibles :

- pour i tel que $(-1)^i \zeta = +1$, $R(z_i) - f(z_i) = \delta \ge d$ et $f(z_i) - P(z_i) \ge -d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \ge 0$.

- pour i tel que $(-1)^i \zeta = -1$, $R(z_i) - f(z_i) = -\delta \le -d$ et $f(z_i) - P(z_i) \le d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \le 0$.

Si $R \ne P$, $\delta > d$ et $R(z_i) - f(z_i)$ est strictement positif ou strictement négatif selon la parité de i. Donc $R - P$ admet au moins $p+1$ zéros. C'est impossible, donc $R = P$.

En fait, la suite $(z_1, \ldots, z_{p+2})$ caractérise P.

PARTIE n° 3

Exemples.

❶ Soit P_0 le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0. Posons $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors $P_0=\dfrac{M+m}{2}$; En effet :

$\exists x_1\in[a,b]$, $f(x_1)=M$, ce qui implique $(P_0-f)(x_1)=\dfrac{m-M}{2}$

$\exists x_2\in[a,b]$, $f(x_2)=m$, ce qui implique $(P_0-f)(x_2)=\dfrac{M-m}{2}$

Et $\|P_0-f\|=\dfrac{M-m}{2}$.

❷ $f(x)=e^x$. Soit P_1 le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1. Posons $P_1(x)=\alpha x+\beta$. D'après la question II-10, il existe z_1,z_2,z_3 tels que $(P-f)(z_1)=(P-f)(z_3)$, donc $(P-f)'$ s'annule une seule fois sur $[a,b]$. On obtient $\alpha-e^x=0$ (et donc $\alpha>0$), qui est équivalent à $x=\ln(\alpha)\in[a,b]$. $P-f$ est croissante de a à $\ln(\alpha)$ et décroissante de $\ln(\alpha)$ à b. Donc $\|P-f\|=-(P-f)(a)=-(P-f)(b)=(P-f)(\ln(\alpha))$ ou, de façon équivalente :

$$e^a-\alpha a-\beta=e^b-\alpha b-\beta=\alpha\ln(\alpha)+\beta-\alpha$$

ce qui donne :

$$\alpha=\frac{e^b-e^a}{b-a};\beta=\frac{1}{2(b-a)}\left[be^a-ae^b+\left(e^b-e^a\right)\left(1-\ln\left(\frac{e^b-e^a}{b-a}\right)\right)\right]$$

❸ $a=-b$, $f(x)=x^2-\varepsilon x$ avec $\varepsilon=\mathrm{sgn}(x)$: c'est une fonction paire. Le polynôme de meilleure approximation P doit donc être pair aussi, car $Q(x)=P(-x)$ est aussi un polynôme de meilleure approximation, et d'après la question II-10, ce polynôme est unique.

Posons $P(x)=\alpha x^2+\beta$. Toujours d'après la question II-10, il existe z_1,z_2,z_3,z_4 où $P-f$ vaut $\pm d$. Par parité, il existe z_5 tel que $(P-f)(z_5)=\pm d$ et $z_3=0$. Soit $g=P-f$, étudiée sur $[0,b]$. Puisque $g(0)=g(z_5)$, $g'(x)=2(\alpha-1)x+1$ s'annule en $z_4=\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}$. Cela implique $\alpha-1<0$, et donc g est croissante de 0 à $\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}$ et décroissante de $\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}$ à $b=z_5$. Finalement, $g(0)=-g\left(\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}\right)=g(b)$, ce qui implique $\beta=(\alpha-1)b^2+b+\beta$ et donc $\alpha-1=-1/b$, donc $\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}=\dfrac{b}{2}$ et $g\left(\dfrac{b}{2}\right)=-g(0)$ est équivalent à $\alpha\dfrac{b^2}{4}+\beta=-\beta$.

Finalement : $P(x)=\left(1-1/b\right)x^2-b/8$

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ $\det(M-\lambda I)=(1-\lambda)^3-\frac{1}{2}(1-\lambda)=(1-\lambda)((1-\lambda)^2-\frac{1}{2})$. Les valeurs propres de la matrice sont : $1, 1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces trois valeurs étant strictement positives, la matrice est définie positive.

❷ Soit $X=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. La matrice de la projection orthogonale sur F au sens du produit scalaire défini par M est égale à : $X(X'MX)^{-1}X'M$, où M' désigne la transposée de M.

Calculons $P_F(u)$ pour $u\in\mathbf{R}^3$,

$X'M=\begin{pmatrix}1/2&1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$ et $X'MX=I_2$, d'où $X(X'MX)^{-1}X'M=\begin{pmatrix}0&0&0\\1/2&1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$

Pour $u=(x,y,z)$, on a $P_F(u)=(0,\frac{1}{2}x+y,\frac{1}{2}x+z)$

EXERCICE n° 2

❶ La décomposition de ϕ en carrés selon la méthode de Gauss donne :

$$\phi(x)=2x_1x_2+x_1(3x_3+4x_4)+5x_2x_3$$
$$\phi(x)=\frac{1}{2}(2x_2+3x_3+4x_4)(2x_1+5x_3)-\frac{5}{2}x_3(3x_3+4x_4)$$

On détermine alors deux formes linéaires l_1 et l_2 sur E par :

$$l_1 + l_2 = 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \text{ et } l_1 - l_2 = 2x_1 + 5x_3$$

On obtient,

$$l_1 = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \text{ et } l_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

De même, on détermine deux formes linéaires l_3 et l_4 sur E par :

$l_3 + l_4 = 3x_3 + 4x_4$ et $l_3 - l_4 = x_3$, d'où
$l_3 = 2(x_3 + x_4)$ et $l_4 = x_3 + 2x_4$

On obtient ainsi,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(l_1^2 - l_2^2) \ -\frac{5}{2}(l_3^2 - l_4^2)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)^2 - 10(x_3 + x_4)^2 + \frac{5}{2}(x_3 + 2x_4)^2$$

La signature de ϕ est donc (2,2,n-4). Si $n = 4$, ϕ est non dégénérée.

❷ Pour obtenir une base ϕ -orthogonale de E, il suffit de transformer la base initiale de E par la matrice P définie par son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base ϕ s'écrit : $\phi(x) = \frac{1}{2} X_1{}^2 - \frac{1}{2} X_2{}^2 - 10 X_3{}^2 + \frac{5}{2} X_4{}^2$

EXERCICE n° 3

❶ Les vecteurs de F sont invariants par S_F et P_F. On a $E = F \oplus F^{\perp}$, donc pour tout $x \in E$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$. Géométriquement on obtient $S_F(x) = x - 2(x - P_F(x))$ ou encore $S_F = 2P_F - I$.

❷ Pour $F = Vect(a)$ et pour $x \in E$, on a :

$$P_F(x) = \frac{(x,a)}{\|a\|^2} a \text{ et } S_F(x) = 2\frac{(x,a)}{\|a\|^2} a - x$$

En effet, $e = \frac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de F, donc $P_F(x) = \lambda e$ avec $\lambda(x,e) = (x, \frac{a}{\|a\|}) = \frac{1}{\|a\|}(x,a)$

Pour $F=a^{\perp}$, comme $E=Vect(a)\oplus a^{\perp}$, on a $P_E=I=P_{vect(a)}+P_{a^{\perp}}$. On en déduit :

$S_F=2P_F-I=2(I-P_a)-I=I-P_a$ et

$S_F(x)=x-2\dfrac{(x,a)}{\|a\|^2}a$

❸ Pour $F=Vect(a)$, $P_F=\begin{pmatrix}1&0&.&0\\0&0&.&0\\.&.&.&.\\0&0&.&0\end{pmatrix}$ et $S_F=\begin{pmatrix}1&0&.&0\\0&-1&0&.\\.&0&-1&0\\0&.&0&-1\end{pmatrix}$

Pour $F=a^{\perp}$, $P_F=\begin{pmatrix}0&0&.&0\\0&1&.&0\\.&.&1&.\\0&0&.&1\end{pmatrix}$ et $S_F=\begin{pmatrix}-1&0&.&0\\0&1&0&.\\.&0&1&0\\0&.&0&1\end{pmatrix}$

EXERCICE n° 4

❶ On a $D_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&0&.&0\\1&a+b&ab&0&.\\0&1&a+b&ab&0\\.&0&.&.&ab\\0&0&0&1&a+b\end{vmatrix}$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

❷ On vérifie que $D_n=\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$.

PROBLEME

❶ $X'X=\begin{pmatrix}X'_1\\.\\X'_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&.&X_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|x_1\|^2&.&\langle x_i,x_j\rangle\\.&.&.\\\langle x_i,x_j\rangle&.&\|x_p\|^2\end{pmatrix}=G(x_1,\dots,x_p)$,

$X'X$ est appelée matrice de Gram.

❷ On choisit x_{p+1} orthogonal à tous les vecteurs $\left\{x_1,\dots,x_p\right\}$ et unitaire, puis x_{p+2} orthogonal à tous les vecteurs $\left\{x_1,\dots,x_p,x_{p+1}\right\}$ et unitaire. Ainsi, on obtient par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}&\left\langle x_i,x_j\right\rangle=0,\forall 1\le i\le p,\forall p+1\le j\le n\\&\left\langle x_j,x_j\right\rangle=1,\ \forall p+1\le j\le n\\&\left\langle x_i,x_j\right\rangle=0,\ \forall p+1\le i,j\le n\ i\neq j\end{aligned}$$

Ceci correspond à l'égalité demandée.

D'autre part, $(\det\hat{X})^2=\det\hat{X}'\hat{X}=\det X'X$ et $\det G(x_1,\dots,x_p)=\det X'X=\det X'X.\det I_{n-p}=\det G(x_1,\dots,x_n)$, d'où l'égalité.
Il est clair qu'alors $\det G(x_1,\dots,x_p)>0$.
On peut compléter les deux familles libres de vecteurs $\left\{x_1,\dots,x_p\right\}$ et $\left\{x_1,\dots,x_{p-1},x_p+\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i\right\}$, qui engendrent le même sous-espace vectoriel, par les mêmes vecteurs $\left\{x_{p+1},\dots,x_n\right\}$ et obtenir ainsi,

$$(\det\hat{X})^2=\det G(x_1,...,x_p)\ \text{ et }\ (\det\hat{X})^2=\det G(x_1,...,x_{p-1},x_p+\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i)$$

D'où le résultat demandé :

$$\det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p)=\det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p+\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i)$$

❸ On a $P_F(y)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j$. Si $y\notin F$, les vecteurs $\left\{x_1,\dots,x_p,y\right\}$ sont indépendants et on applique le résultat précédent à l'ordre $p+1$ (dans ce cas le vecteur $y-P_F(y)$ est orthogonal à F). Si $y\in F$, $y-P_F(y)=0$ et $y=P_F(y)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j.$, dans ce cas les deux déterminants sont nuls.

$$G(x_1,\dots,x_p,y-P_F(y))=\begin{pmatrix}X'X & 0\\ 0 & \|y-P_F(y)\|^2\end{pmatrix}$$

On a les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\det G(x_1,\dots,x_p,y-P_F(y))=\det G(x_1,\dots,x_p,y)\\&\det G(x_1,\dots,x_p,y-P_F(y))=\det G(x_1,\dots,x_p,y)\times\|y-P_F(y)\|^2\\&(d(y,F))^2=\|y-P_F(y)\|^2\end{aligned}$$

On en déduit,

$$(d(y,F))^2 = \frac{\det G(x_1,\ldots,x_p,y)}{\det G(x_1,\ldots,x_p)}$$

❹ $G(x_1,\ldots,x_p,y) = \begin{pmatrix} X^{'}X & X^{'}y \\ y^{'}X & \|y\|^2 \end{pmatrix}$.

D'où $\det G(x_1,\ldots,x_p,y) = \det X^{'}X \times \det(\|y\|^2 - y^{'}X(X^{'}X)^{-1}X^{'}y)$
ou encore,

$$\det G(x_1,\ldots,x_p,y) = (\|y\|^2 - y^{'}X(X^{'}X)^{-1}X^{'}y) \times \det G(x_1,\ldots,x_p)$$

D'autre part, $(d(y,F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2 = \|y - X(X^{'}X)^{-1}X^{'}y\|^2$
En développant cette dernière expression, on obtient :

$\|y\|^2 - y^{'}X(X^{'}X)^{-1}X^{'}y = (d(y,F))^2$ et donc,

$$(d(y,F))^2 = \frac{\det G(x_1,\ldots,x_p,y)}{\det G(x_1,\ldots,x_p)}$$

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

PARTIE n° 1

❶ On a trivialement que $|||A||| = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $|||\lambda A||| = |\lambda| \, |||A|||$ quel que soit λ appartenant à ℝ. Pour prouver la troisième propriété, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \left(|||A||| + |||B|||\right)\|x\|$, ce qui implique bien que $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$

❷ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|ABx\| \leq |||A||| \, \|Bx\| \leq |||A||| \, |||B||| \, \|x\|$, ce qui implique bien que $|||AB||| \leq |||A||| \, |||B|||$

❸ ① $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right] |x_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right] \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right)$, et donc $|||A|||_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, excepté la composante j pour laquelle $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right]$ est maximal, on voit que $|||A|||_1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right]$; d'où l'égalité demandée.

② $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| . \|x\|_\infty$, et donc $|||A|||_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ tel que, si i atteint le maximum de $\left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$, alors $x_j = \mathrm{sgn}(a_{ij})$, on voit que $|||A|||_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$; d'où l'égalité demandée.

❹ On a trivialement que $\|A\|_E = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\|\lambda A\|_E = |\lambda|\|A\|_E$ quel que soit λ appartenant à $\mathbb{R}$. Pour prouver la troisième propriété, on se sert de l'inégalité de Minkowski, qui nous dit que : $\left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_{i,j}\left(a_{ij} + b_{ij}\right)^2\right)^{1/2}$.

Le coefficient à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de $A^t A$, que l'on note c_{ij}, est égal à $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$; par conséquent, $tr\left(A^t A\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,k} a_{ki}^2$, d'où l'expression demandée.

Cette norme ne peut pas être subordonnée, parce que, si *I* désigne la matrice identité, on a trivialement : $\|I\|_E = \sqrt{n}$, alors que pour toute norme subordonnée, on doit avoir $\|I\| = 1$.

PARTIE n° 2

❶ Soit $x \in IR^n$ tel que $(A + \Delta A)x = 0$. On doit alors avoir : $x = -A^{-1}\Delta A x$. Mais, si $x \neq 0$, on aurait $\|A^{-1}\Delta A x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\| < \|x\|$ ce qui implique une contradiction.

❷ ① x et Δx existent puisque A et $A + \Delta A$ sont inversibles.

② D'après la question 2 de la première partie, on doit avoir $\chi(A) \geq \|I\| = 1$.

③ On a $A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x = \Delta b$, ce qui implique : $\Delta x = A^{-1}(\Delta b - \Delta A x - \Delta A \Delta x)$. Par conséquent, $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\left(\|\Delta A\|\|\Delta x\| + \|\Delta A\|\|x\| + \|\Delta b\|\right)$. Puisque $Ax = b$, on doit avoir $\frac{\|A\|\|x\|}{\|b\|} \geq 1$. On a donc : $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\left(\|\Delta A\|\|\Delta x\| + \|\Delta A\|\|x\| + \frac{\|A\|\|x\|}{\|b\|}\|\Delta b\|\right)$; cette dernière expression est clairement équivalente à celle qui est demandée.

Cette inégalité permet de majorer l'erreur relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$, à partir des bornes relatives imposées a priori sur b et A. Plus $\frac{\chi(A)}{1-\chi(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est petit, plus l'erreur relative est faible. Or, pour $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ fixé, $\frac{\chi(A)}{1-\chi(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est une fonction croissante du coefficient de conditionnement de A. Il est donc préférable d'avoir une matrice au coefficient de conditionnement faible, et donc le plus proche de 1 possible.

PARTIE n° 3

❶ Les solutions sont $(1,1,1,1)$, $(9.2,-12.6,4.5,-1.1)$ et $(-81,137,-34,22)$ respectivement.

❷ Pour la norme $\|.\|_2$, on a $\|A\|_2 = 30.2887$, $\chi(A) = 2984$, $\|b\|_2 = 60.0249$, $\|x\|_2 = 2$. Dans le second système, on a $\|\Delta b\|_2 = 0.2$, $\|\Delta A\|_2 = 0$ et $\|\Delta x\|_2 = 16.3969$ (par rapport au premier système). On vérifie alors aisément la majoration demandée.

SESSION

D'AVRIL

1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

Dans tout ce qui suit, J désigne un intervalle de ℝ inclus dans $[-1,1]$, de longueur non nulle et tel que, pour tout $x \in J, x^2 \in J$. On étudie l'ensemble E_j des aplications dérivables de J dans ℝ telles que :

$$(*)\ \forall x \in J,\ f'(x) = f\left(x^2\right).$$

Remarque : Il s'agit d'une équation différentielle «non ordinaire». En effet, les équations différentielles ordinaires sous forme «résolue» sont de la forme

$$f'(x) = F\left(x, f(x)\right)$$

ce qui n'est pas le cas ici. Nous n'avons donc à priori aucun résultat d'existence et d'unicité ; le théorème de Gauchy ne s'applique pas ici. Par contre l'application $f \mapsto \left\{x \mapsto f'(x) - f\left(x^2\right)\right\}$ est visiblement linéaire. On a donc une équation différentielle linéaire non ordinaire !

I - PRELIMINAIRES

❶ Soit $(a,b) \in$ ℝ^2, $-\infty < a < b \leq +\infty$, et g une application n fois dérivable de $]a,b[$ dans ℝ. On suppose que, il existe $n \in$ ℕ tel que, pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$, la dérivée $k-ième$ $g^{(k)}$ admet une limite λ_k quand la variable tend vers a. On définit alors la fonction $\tilde{g}$ de $[a,b[$ dans ℝ par

$$\begin{aligned} & \tilde{g}(a) = \lambda_0 ; \\ \forall x \in]a,b[, \quad & \tilde{g}(x) = g(x). \end{aligned}$$

Solution : Appelons P_n la propriété précédente, et démontrons la par récurrence. P_0 n'est autre que le prolongement par continuité et donc est vraie. Supposons, pour $n \in$ ℕ, P_n, vraie et démontrons P_{n+1}. Notons $h = \tilde{g}^n$. Par l'hypothèse P_n, h est une fonction continue sur $[a,b[$, et dérivable sur $]a,b[$. Pour tout $x \in]a,b[$ on a, par le théorème des accroissements finis,

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a+\theta x) = \tilde{g}^{(n+1)}(a+\theta x)$$

où $\theta]0,1[$. Et donc, comme $\lim_{x\to a}(a+\theta x) = a$

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{g}^{(n)}(x)-\tilde{g}^{(n)}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\tilde{g}^{(n+1)}(a+\theta x) = \lambda_{n+1}$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

❷ Soit J un intervalle comme au début. Démontrer que E_j est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur ℝ des fonctions indéfiniment dérivable sur J.

Solution : Classique et très simple par récurrence pour la dérivabilité infinie.

❸ Soit g une fonction dérivable définie sur un intervalle borné $I =]a,b[(-\infty < ab + \infty)$ à valeurs dans ℝ.

① On suppose que g et sa dérivée g' sont toutes deux minorées sur I. Montrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

Solution : Si m est un minorant de g'.

On considère la fonction h de I dans ℝ définie par $\forall x \in I, h(x) = g(x) - mx$.

La fonction h est dérivable sur I et sa dérivée h' est positive : $\forall x \in I, h'(x) = g'(x) - m \geq 0$ par la définition de m. h est donc une fonction croissante. Comme elle est minorée, elle admet une limite quand x tend vers a. Il en est de même de g, puisque a est un nombre réel et que $\lim_{x\to a} g(x) = ma + \lim_{x\to a} h(x)$

② On suppose maintenant que g et sa dérivée g' sont toutes deux majorées sur I. Démontrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

Solution : On pose pour $x \in I, \tau(x) = -g(x)$ et on se ramène au cas précédent.

❹ On définit une application θ de $[-1,1]$ dans ℝ par

$$\theta(-1) = \theta(1) = 0$$

$$\forall x \in]-1,1[, \theta(x) = e^{\omega(x)} \text{ avec } \omega(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

① Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.

Solution : θ est indéfiniment dérivable comme composée de fonctions indéfiniment dérivable

② Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta^{(n)}(1) = \theta^{(n)}(-1) = 0$

Solution : Montrons qu'il existe une fraction rationnelle $R_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(x^2-1\right)^N}$, où P_n est un polynôme et N un entier positif, telle que

$$\forall n \in N,\ \forall x \in]-1,1[, \theta^{(n)}(x) = R_n(x)e^{\omega(x)}$$

l'égalité à démontrer est vraie pour $n=0$ en prenant $P_0 \equiv 1$ et $N=0$. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, alors

$$\forall x]-1,1[, \left(\theta^{(n)}(x)\right)' = \left(R_n(x)e^{\omega(x)}\right)' = \left(R_n^{'}(x)\omega'(x)\right)e^{\omega(x)}$$

avec

$$R_n^{'}(x) + R_n(x)\omega'(x) = \frac{P_n^{'}(x)\left(x^2-1\right)^2 + \left(2x - 2Nx\left(x^2-1\right)\right)P_n(x)}{\left(x^2-1\right)^{N+2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{\left(x^2-1\right)^{N+2}}$$

d'où le résultat par récurrence.

$\theta'(x) = \dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$ est positive pour $x \in]-1,0]$ et négative pour $x \in [0,1[$.

En posant $y = \dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^N}$' ont obtient que $\lim\limits_{x \to \pm 1} \dfrac{e^{\omega(x)}}{\left(x^2-1\right)^N} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y y^N = 0$ par les propriétés classiques de l'exponentielle, d'où le résultat en utilisant I-❶.

③ Soit C^∞ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivable de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et D le sous espace de C^∞ des fonctions s'annulant ainsi que toutes leur dérivées aux points 1 et -1. Démontrer que l'application linéaire de C^∞ dans lui même $f \mapsto \theta f$ (où θf est l'application définie par $\forall x \in [-1,1], \theta f(x) = \theta(x) f(x)$) est injective et à valeurs dans D. En déduire que D est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.

Solution : Notons Θ l'application linéaire de C^∞ dans lui-même $f \mapsto \theta f$. Le noyau de Θ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty$ telles que $\forall x \in [-1,+1], \theta(x) f(x) = 0$. Comme, $\forall x \in]1-,+1[, \theta(x) > 0$ on a que $\forall x \in]1-,+1[, f(x) = 0$. Comme f est continue, f est la fonction nulle. Par le théorème de Liebniz, $\Theta(f)^{(n)}(\pm 1) = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \theta^{(p)}(\pm 1) f^{(n-p)}(\pm 1) = 0$ et donc $\forall f \in C^\infty, \Theta(f) \in D$. Comme C^∞ contient les fonctions polynômiales, c'est un espace de dimension infinie. Comme l'image d'une base de cardinal infini par une application linéaire injective est un système libre de cardinal infini, on en déduit que D est de dimension infinie.

II - ETUDE DE $E_{[-1,1]}$

❶ On définit une suite d'entiers $(q_k, k \in \mathbb{N})$ par

$$q_0 = 0;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, q_{k+1} = 2q_k + 1$$

① Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = 2^k - 1$

Solution : Par récurrence évidemment !

On note $Q = \{ q_k / k \in \mathbb{N} \}$.

Soit $(a_n, n \in \mathbb{N})$ la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 1 \ ;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{l=k} q_l}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \notin Q, a_n = 0$$

② Trouver la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$

Solution : $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}-1} = 0$ et donc d'après le tes de d'Alembert, la série $\sum a_{q_k}$ est convergente d'où $\sum a_n$ est convergente. Par ailleurs, comme, pour $k \geq 1, q_k\, a_{q_k} = a_{q_{k-1}}$, la série $\sum n a_n$ est également convergente.

③ Déterminer, pour $x > 1, \lim_{k \to +\nabla} a_{q_k} x^{q_k}$.

Solution : On a

$$\frac{a_{q_{k+1}} x^{q_{k+1}}}{a_{q_k} x^{q_k}} = \frac{1}{2^{k+1}-1} x^{2^{K+1}} - 2^k \geq \frac{1}{2} \frac{x^{2^k}}{2^k}$$

Or, pour $x > 1, \lim_{n \leftarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \infty$ et donc la suite $(a_{q_k} x^{q_k}, k \in \mathbb{N})$ est strictement croissante à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$.

④ Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 et que l'application

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur $[-1,+1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Solution : Par le ② ci-dessus, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. Par le ③ ci-dessus $R \leq 1$. On a donc $R = 1$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup \left\{ \left| a_n x^n \right| / x \in [-1,+1] \right\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-1,+1]$ et donc la fonction de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et continue.

⑤ Démontrer que S est un élément de $E_{[-1,1]}$ tel que $S(0) = 1$.

Solution : Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup \left\{ \left| n a_n x^{n-1} \right| / x \in [-1,+1] \right\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n < +\infty$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est normalement convergente sur $[-1,+1]$ et donc S est dérivable sur $[-1,+1]$ et, $\forall x \in [-1,+1], S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Enfin

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k a_{q_k} x^{q_{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_{k-1}} x^{2 q_{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_k} \left(x^2\right)^{q_k} = S\left(x^2\right)$$

et donc $S \in E_{[-1,1]}$. $S(0) = a_0 = 1$ par construction de la suite $(a_n, n \in \mathbb{N})$.

❷ ① Donner une majoration que l'on justifiera de $\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right|$ qui soit valable sur tout le segment $[0,1]$. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de $S(1)$.

Solution : On a :

$$q_0=0, a_{q_0}=1, q_1=1, a_{q_1}=1, q_2=3, a_{q_2}=\frac{1}{3}, q_3=7, a_{q_3}=\frac{1}{21}, q_4=15, a_{q_4}=\frac{1}{315}, q_5=31, a_{q_5}=\frac{1}{9765}$$

Donc si on pose $T(x)=\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n=\sum_{k=0}^{k=4} a_{q_k} x^{q_k}$, on a $T(1)=2.384$ à 10^{-3} près. Par ailleurs, et avec des majorations qui ne font pas dans la dentelle,

$$\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right| \le a_{q_5}+\sum_{l=6}^{\infty}\frac{1}{2^l-1} \le a_{q_5}+\sum_{l=5}^{\infty}\frac{1}{2^l} \le 2a_{q_5} \le 10^{-3}$$

et donc $S(1)$ est approchée par défaut par $T(1)=2.384$ à 10^{-3}

② Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe $y=S(x)$; on précisera la concavité.

Solution : Sur $[0,1]$ toutes les dérivées de S sont positives et en particulier la fonction y est croissante et convexe. La fonction de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$, $x\mapsto S(x)-S(0)=S(x)-1$ est impaire et le graphe de s est symétrique par rapport au point $(0,1)$. Sur l'intervalle $[-1,0]$ la fonction S est donc croissante et concave.

③ Etablir la formule : $\int_0^1 S(x)dx=\frac{2}{3}S(1)$.

Solution : Par une intégration par partie et un changement de variable $u=x^2$, on obtient

$$\int_0^1 S(x)dx=\left[xS(x)\right]_0^1-\int_0^1 xS'(x)dx=S(1)-\int_0^1 xS\left(x^2\right)dx=S(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 S(u)du$$

d'où le résultat.

❸ Soient $(a,b) \in [-1,1]^2$ tels que $a \le 0 \le b, a^2 \le b, J = [a,b]$ et $f \in E_j$.

① On suppose que $f(0) = 0$. On pose $M = \sup\{|f(t)| / t \in J\}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in J, |f(x)| \le M|x|^{q_n}.$$

Comme $q_0 = 0$, l'inégalité est vraie pour $n = 0$ par définition de M. Supposons qu'elle soit vrai jusqu'à $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème des accroissements finis on a

$$\forall x \in J, \exists \theta \in \lfloor 0,1 \rfloor, f(x) = f(x) - f(0) = (x-0) f'(\theta x) = xf\left((\theta x)^2\right)$$

et donc

$$|f(x)| \le |x| M \left|x^2\right|^{q_n} = M|x|^{2 q_{n+1}} = M|x|^{q_{n+1}}$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.

② En déduire que f est nulle.

Solution : On a, pour tout $x \in]a,b[, |x| < 1$ et donc $|f(x)| \le \lim\limits_{n \to +\infty} M|x|^{q_n} = 0$. La fonction f est donc nulle sur $]a,b[$ et, par continuité, elle est nulle sur $[a,b]$.

③ On ne suppose plus maintenant que $f(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in J$, $f(x) = f(0)S(x)$. En déduire que E_j est de dimension 1.

Solution : Soit pour $x \in [a,b], g(x) = f(x) - f(0)S(x). g$ est un élément de $E_{[a,b]}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $E_{[a,b]}$. Comme $g(0) = f(0) - f(0)S(0) = f(0) - f(0) = 0,\ g$ est nulle par la ①. Donc tout élément de $E_{[a,b]}$ est proportionnel à la restriction de S à $[a,b]$. $E_{[a,b]}$ est donc n espace vectoriel de dimension 1.

III - ETUDE DE $E_{]0,1[}$

Dans cette partie, le symbole J désigne l'intervalle $]0,1[$

❶ Soient $f \in E_j, p \in J$ et ($p_n, n \in \mathbb{N}$) la suite définie par

$$p_0 = p$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}\ .$$

① Démontrer que la suite ($p_n, n \in \mathbb{N}$) est strictement croissante et déterminer sa limite.

Solution : On a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p^{\frac{1}{2^n}}$ d'où la croissance et déterminer sa limite.

② Démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right), n \in \mathbf{N}\right)$ est convergente.

Solution : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \geq 1$, donc $\ln\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \geq 0$ et donc, la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right)\right), n \in \mathbf{N}\right)$ est croissante. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \leq p_{k+1}-p_k$, pour tout $\in$ $\mathbb{N}$, $\ln\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right)\right) = \prod_{k=0}^{k=n}\ln\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \leq \prod_{k=0}^{k=n}\left(p_{k+1}-p_k\right) = p_{n+1}-p_0 \leq 1$. La suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right), n \in \mathrm{N}\right)$ est donc convergente puisque croissante et majorée par e.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_n = \sup\left\{\left|f(x)\right| / x \in \left[p_n, p_{n+1}\right]\right\}$$

③ A l'aide de la relation $f(x) = f\left(p_n\right) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt$, démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n \leq M_{n-1}\left(1+p_{n+1}-p_n\right)$$

En déduire que la suite ($M_n, n \in \mathbb{N}$) est bornée.

Solution : On a $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f(t^2)dt$, et donc, comme $\left|f(p_n)\right| \leq M_{n-1}$, pour $x \in [p_n, p_{n+1}]$,

$$\left|f(x)\right| \leq M_{n-1} + \int_{p_n}^{p_{n+1}} \sup\left\{\left|f(t^2)\right| / t \in [p_n, p_{n+1}]\right\} \leq$$
$$M_{n-1} + (P_{n+1} - p_n)\sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in [p_{n-1}, p_n]\right\} = M_{n-1}(p_{n+1} - p_n)$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n \leq M_0 \prod_{k=0}^{k=n}(1 + p_{k+1} - p_k) \leq M_0 \prod_{k=0}^{+\infty}(1 + p_{k+1} - p_k)$$

et donc la suite ($M_n\ n \in \mathbb{N}$) est bornée.

④ Etablir que, pour tout $\alpha \in J, f$ et f' sont bornées sur $[\alpha, 1[$. Montrer que $f(x)$ a une limite λ quand x tend vers 1 et que, si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée appartient à $E_{]0,1]}$

Solution : Soit $p \in]0, \alpha]$. On a alors $[\alpha, 1[\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}[p_n, p_{n+1}]$ et $\sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in [\alpha, 1[\right\} \leq \sup\left\{\sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in [p_n, p_{n+1}]\right\}, n \in \mathrm{N}\right\} \leq \sup\left\{M_n / n \in \mathbb{N}\ \right\} < +\infty. f$ est donc bornée sur $[\alpha, 1[$ et donc f' est aussi bornée puisque, d'après $f'(x) = f(x^2)$ $\sup\left\{\left|f'(x)\right| / x \in [\alpha, 1[\right\} = \sup\left\{\left|f(x^2) / x \in [\alpha, 1[\right|\right\} = \sup\left\{\left|f(x) / x \in [\alpha^2, 1[\right|\right\} < +\infty$. L'application g de $]-1, -\alpha]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x]-1, -\alpha], g(x) = f(-x)$ vérifie donc les hypothèses du I ❹ et admet donc une limite quand x tend vers -1. La fonction f admet donc une limite notée λ quand x tend vers 1. Soit f la formation de $[\alpha, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(1) = \lambda$ et $f(x) = f(x)$ pour tout $x \in [\alpha, 1[$. f est bien sur dérivable sur $[\alpha, 1[$ et $f'(x) = f(x^2)$ pour tout $x \in [\alpha, 1[$. f' admet donc λ comme limite quand x tend vers 1. D'après I ❶ f est dans $E_{[\alpha,1]}$.

❷ Soit $f \in E_j$

① On suppose qu'il existe $\beta \in J$ tel que f soit majorée dans $]0,\beta]$. Etablir que $f(x)$ et $f'(x)$ ont une même limite finie μ quand x tend vers 0. En déduire que f est la restriction de μS à J.

Solution : Si f est majorée sur $]0,\beta]$, il en va de même de f' puisque $\sup\left\{f'(x) / x \in]0,\beta]\right\} = \sup\left\{f\left(x^2\right) / x \in]0,\beta]\right\} = \sup\left\{f(x) / x \in]0,\beta^2]\right\} \leq \sup\left\{f(x) / x \in]0,\beta]\right\}$ $< +\infty$. Que $f(x)$ admette une limite μ quand x tend vers 0 est alors une conséquence de I ❸. Par $f'(x) = f\left(x^2\right), f'(x)$ admet la même limite μ quand x tend vers 0 et l'application prolongée en 0 est donc un élément de $E_{[0,1]}$. D'après II ❸ ③ f est la restriction de la fonction μS à J.

② En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante, on a alors les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in J, \sup\left\{f(x) / x \in]0,\varepsilon]\right\} = +\infty \text{ et } \inf\left\{f(x) / x \in]0,\varepsilon[\right\} = -\infty$$

Solution : Si f est minorée sur $]0,\beta]$, la conclusion de la question précédente reste la même, en invoquant toujours I ❸. Donc si f n'est pas la restriction à $]0,1]$ su multiple de S par une constante, f n'est ni majorée ni minorée sur aucun intervalle $]0,\beta], \in J$. Ceux sont exactement les propriétés demandées.

③ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante

$$Card\left\{x / x \in]0,\varepsilon], f(x) = 0\right\} = +\infty$$

Solution : Si la fonction f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur un intervalle $]0,\varepsilon]$ avec $0 < \varepsilon \leq 1$, alors f ne s'annule pas sur un intervalle $]0,\varepsilon']$ avec $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, f reste de signe constant sur $]0,\varepsilon']$ et donc et majorée ou minorée, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. D'où le résultat.

La suite de cette partie est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de E_j qui ne soit pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❸ On Pose $r_0 = \dfrac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $r_{n+1} = \sqrt{r_n}$.

① Démontrer que la suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est bien définie et expliciter r_n .

Solution : On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $r_n = \left(1/4^{2^{-n}}\right)$. En effet, la formule est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors $r_{n+1} = \left(1/4^{2^{-n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1/4^{2^{-n+1}}\right)$ et donc elle est vrais pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si elle est vraie pour $-n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $r_{-n-1} = \left(1/4^{2^{n}}\right)^2 = \left(1/4^{2^{n+1}}\right)$ et donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

② Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $I_n = [r_n, r_{n+1}]$. Déterminer $\bigcup_{n\in Z} I_n$.

Solution : La suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est strictement croissante, $\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ et donc $\bigcup_{n\in Z} I_n =]0,1[$.

Soit λ un élément de D où D est défini en I ❹.

③ Démontrer que les formules suivantes

$$\forall x \in I_0\ \varphi_0(x) = \lambda(8x-3)$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_n, \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^{x} \varphi_{n-1}(t^2)dt$$

définissent pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application φ_n de I_n dans $\mathbb{R}$.

Solution : Si $x \in [r_0, r_1]$, alors $8x - 3 \in [-1, +1]$ et donc φ_0 est bien définie. Supposons par récurrence que, jusqu'à l'entier $n \in \mathbb{N}$, φ_k soit définie sur $[r_k, r_{k+1}]$. Pour $t \in [r_{n+1}, r_{n+2}], t^2 \in [r_n, r_{n+1}]$ et donc pour $x \in [r_{n+1}, r_{n+2}], \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(r_{n+1}) + \int_{r_{n+1}}^{x} \varphi_n(t^2)dt$ est bien définie.

④ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n admet dans I_n une dérivée continue et que $\varphi_n'(r_{n+1}) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$*, la dérivée à gauche de φ_{n-1} en r_n et la dérivée à droite de φ_n en ce même point sont égales.

Solution : La fonction φ_n est sur I_n une primitive de la fonction $t \mapsto \varphi_{n-1}\left(t^2\right)$. Elle est donc continuement dérivable dans cet intervalle et les dérivées aux bornes de l'intervalle vérifient

$$\varphi_n^{'}\left(r_n\right) = \varphi_{n-1}\left(r_n^2\right) = \varphi_{n-1}\left(r_{n-1}\right) = \varphi_{n-2}\left(r_{n-1}\right)$$
$$\varphi_n^{'}\left(r_{n+1}\right) = \varphi_{n-1}\left(r_{n+1}^2\right) = \varphi_{n-1}\left(r_n\right) = \varphi_n\left(r_n\right)$$

et donc

$$\varphi_{n-1}^{'}\left(r_n\right) = \varphi_{n-1}\left(r_{n-1}\right) = \varphi_n^{'}\left(r_n\right)$$

ce qui est demandé

❹ ① Démontrer que la formule suivante

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_{-m}, \varphi_{-m}(x) = \varphi_{-m+1}^{'}\left(\sqrt{x}\right)$$

définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une application φ_{-m} de I_{-m} dans $\mathbb{R}$.

Solution : Cela se fait par récurrence. Pour $x \in I_{-1} = \left[r_{-1}, r_0\right], \sqrt{x} \in \left[\sqrt{r_{-1}}, \sqrt{r_0}\right] = \left[r_0, r_1\right] = I_0$, et donc $\varphi_{-1}(x) = \varphi_0^{'}\left(\sqrt{x}\right)$ est bien défini. Supposons donc qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que φ_{-k} soit défini sur I_{-k} pour tout $k \in \mathbb{N}$ $, 1 \le k \le n$, alors pour $x \in I_{-n-1} = \left[r_{-n-1}, r_{-n}\right] = \left[r_{-n}^2, r_{-n-1}^2\right] \sqrt{x} \in I_{-n} = \left[r_{-n}, r_{-n+1}\right]$ et donc la formule $\varphi_{-n-1}(x) = \varphi_{-n}^{'}\left(\sqrt{x}\right)$ définit bien φ_{-n-1} sur I_{-n-1}

② Etablir que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, ϕ_{-m} est indéfiniment dérivable dans I_{-m} et que ϕ_{-m} et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de I_{-m}.

Solution : A nouveau par récurrence φ_0 est la composée de deux fonctions de classe C^∞ et donc de classe C^∞. La fonction λ et toutes ses dérivées s'annulent en ± 1, donc la fonction φ_0 et toutes ses dérivées s'annulent en r_0 et r_1. Supposons donc qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que φ_{-k} soit de classe C^∞ sur I_{-k} et s'annule ainsi que toutes ses dérivées en r_{-k} et r_{-k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n. \varphi_{n-1}$ est alors la composée de deux fonctions de classe C^∞ et donc est de classe C^∞. Comme $\varphi_{-n}^{'}$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées en r_{-n-1} et r_{-n}.

❺ Démontrer qu'il existe une application ψ_k de J dans ℝ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in I_n, \psi_k(x) = \varphi_n(x)$$

et montrer que cette fonction ψ_k appartient à E_j mais que, pour un choix convenable de λ, ψ_k n'est pas la restriction à J de produit de S par une constante.

Solution : la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \left]r_n, r_{n+1}\right[, \psi_k(x) = \varphi_n(x),$$

définie ψ_κ sur $\bigcup_{n\in Z}\left]r_n, r_{n+1}\right[$ et cette fonction ψ_κ est bien sur continuement dérivable sur $\bigcup_{n\in Z}\left]r_n, r_{n+1}\right[$. Il reste à vérifié que ψ_κ est bien définie aux points $\left\{\ r_n, n \in \mathbb{Z}\ \right\}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z},\ \varphi_n(r_{n+1}) = \varphi_{n+1}(r_{n+1})$. La formule de l'énoncé définit donc bien ψ_κ et la fonction est continue sur J. Comme pour tout $n \in \mathbb{Z},\ \varphi_n^{'}(r_{n+1}) = \varphi_{n+1}^{'}(r_{n+1})$.la fonction est aussi dérivable sur J. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in I_n, \varphi_n^{'}(x) = \varphi_{n-1}(x^2)$ et donc pour tout $x \in J, \psi_\lambda^{'}(x) = \psi_\lambda(x^2)$. La fonction ψ_κ est donc un élément de E_j. Cette fonction s'annule une infinité de fois au voisinage de 0. Si elle se prolonge en 0, sa limite en 0 est donc nulle et elle est la restriction à J de la fonction $\lim_{x\to 0} \psi_\kappa(x) S \equiv 0$ et λ est la fonction nulle. Il suffit donc de choisir $\lambda \in D, \lambda \equiv 0.$

❻ Démontrer que l'application de D dans $E_j, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire et injective. En déduire que E_j est un espace vectoriel de dimension infinie sur ℝ.

Solution : l'application de D dans $E_j, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire par construction, et si ψ_κ est la fonction nulle, alors λ est la fonction nulle par construction. Par un raisonnement identique au I ❹, E_j est alors de dimension infinie.

❼ On pose ici $\lambda = \theta$ où θ est défini au I ❹.

① Donner le sens de variation de ψ_θ et celui de $\psi_\theta^{'}$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Etudier le signe et le sens de variation de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

Solution : Par construction, ψ_θ est positive ou nulle sur l'intervalle I_0 et donc, strictement croissante et positive sur tous les intervalles $I_n, n \in \mathbb{N}^*$. Donc ψ_θ est positive et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et sa dérivée y est positive. Sur $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right], \psi_y(x) = \theta'\left(8\sqrt{x} - 3\right)$ est négative pour $x \in \left[\frac{1}{16}, \frac{9}{64}\right]$ et positive pour $x \in \left[\frac{9}{64}, \frac{1}{4}\right]$. De plus $\psi'_\theta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}\theta''\left(8\sqrt{x} - 3\right)$ s'annule en un seul point x_1 de $\left[\frac{1}{16}, \frac{9}{64}\right]$ et en un seul point x_2 de $\left[\frac{9}{64}, \frac{1}{4}\right], \psi_\theta$ est donc croissante sur $\left[\frac{1}{16}, x_1\right]$, décroissante sur $\left[x_1, x_2\right]$ et croissante sur $\left[x_2, \frac{1}{4}\right]$.

② Donner sommairement l'allure de la représentation graphique de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16}, 1\right[$.

③ Donner une minoration de nombre de 0 de ψ_θ dans $\left]r_n, r_{n+1}\right[$ pour $n < 0$.

Solution : Sur I_{-1}, ψ_θ admet un 0. On va démontrer par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sur I_{-n}, ψ_θ admet au moins n 0. La propriété est vrai pour $n = 1$. Supposons la vraie pour $n + 10$. Par le théorème des accroissements, finis sur I_{-n}, ψ'_0 admet au moins $n + 10$. Donc sur I_{-n-1}, ψ_θ admet au moins $n + 10$.

❽ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x)dx = (-2)^n \int_{r_0}^{r_1} \psi_\theta(x)dx$$

En déduire la nature de $\int_0^1 \psi_\theta(x)dx$.

Solution : Comme $\psi_\theta(x)$ admet une limite quand x tend vers 1, le seul problème pour la convergence de $\int_{r_0}^{r_1}\psi_\theta(x)dx$ est en 0. Si cette intégrale convergeait, on aurait

$$\int_0^{r_0}\psi_\theta(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{r_{-n-1}}^{r_{-n}}\psi_\theta(x)dx$$

cette dernière série étant convergente. Or pour $n \in \mathbb{N}$, en faisant une intégration par partie, puis en faisant le changement de variable $u = x^2$

$$\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}\psi_\theta(x)dx = \left[x\psi_\theta\right]_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} - \int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} x\psi_\theta'(x)dx$$
$$= 0 - \int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} x\psi_\theta\left(x^2\right)dx = \frac{-1}{2}\int_{r_{-n+1}}^{r_{-n}}\psi_\theta(u)du$$

d'où ensuite par récurrence, $\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}\psi_\theta(x)dx = (-2)^n\int_{r_0}^{r_1}\psi_\theta(x)dx$. Comme $\int_{r_0}^{r_1}\psi_\theta(x)dx > 0$, on en déduit la divergence de la série $\sum\int_{r_{-n-1}}^{r_{-n}}\psi_\theta(x)dx$ et donc la divergence de l'intégrale $\int_0^1\psi_\theta(x)dx$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

***CORRIGE DE LA* DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ On vérifie aisément que $A' A = I$.

❷ La matrice A est donc inversible et $A' = A^{-1}$. Cette égalité montre que A est une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3, les valeurs propres sont $1, e^{i\alpha} et\ e^{-i\alpha}$.

D'autre part, l'opérateur Trace est invariant par changement de base, donc : $-\frac{1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 1 + 2\cos\alpha$, d'où $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, puis $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Les deux autres valeurs propres sont $\frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - M$.

❷ On a $M^2 + M - 2I = 0$ et $P(x) = x^2 + x - 2$ répond à la question.

❸ M étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour λ valeur propre de M, on a : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, d'où $\lambda = 1$ ou -2. La trace étant invariante par changement de base, on a aussi : $1 - 2 + \lambda = Tr(M) = -3$, d'où $\lambda = -2$. En conclusion, $\lambda = 1$ est une valeur propre simple et $\lambda = -2$ une valeur propre double.

❹ Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est nécessairement un polynôme du premier degré, c'est-à-dire :

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + (aX + b)$$

Pour $X=1$, on obtient $1=a+b$ et pour $X=-2$, $(-2)^n=-2a+b$. La résolution du système donne :

$$a=\frac{1-(-2)^n}{3} \text{ et } b=\frac{2+(-2)^n}{3}$$

❺ $M^n=(M^2+M-2I)Q(M)+(aM+bI)$ et comme $M^2+M-2I=0$, on obtient $M^n=aM+bI$ ou encore,

$$M^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

❻ On obtient $U_{n+1}=M^n U_1=\begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+a\\b+a\\b+a\end{pmatrix}$, d'où

$x_{n+1}=y_{n+1}=z_{n+1}=1$

EXERCICE n° 3

❶ On vérifie aisément que l'on a une norme, en effet,

(1) $\|f\|=0 \Leftrightarrow \underset{x\neq 0}{Sup}\|f(x)\|=0 \Leftrightarrow f(x)=0,\ \forall x\neq 0 \Leftrightarrow f(x)=0,\ \forall x$ (car $f(0)=0$).
(2) $\forall \lambda \in R,\ \|\lambda f\|=|\lambda|\times\|f\|$
(3) $\forall f,g\in L(E),\ \|(f+g)(x)\|\leq\|f(x)\|+\|g(x)\|,\ \ \forall x\in E$, d'où $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

❷ Si $I-(P-Q)$ n'est pas inversible, alors
$\exists u\neq 0,\ (I-(P-Q))(u)=0$, d'où $u=(P-Q)(u)$ et $\|u\|=\|(P-Q)u\|\leq\|P-Q\|\times\|u\|<\|u\|$, ce qui est impossible.

Comme $I-(P-Q)$ est inversible, il existe un endomorphisme v de E tel que :
$(I-(P-Q))v=I$, d'où $P(I-(P-Q))v=P$ ou encore $(P-P^2+PQ)v=P$ et $PQv=P$ car $P^2=P$. Pour tout x de E, on a $P(x)=PQ(v(x))$.

Soit $y\in \mathrm{Im}(P)$, alors $y=P(x)=PQ(v(x))$ et $t=Q(v(x))\in \mathrm{Im}\,Q$ vérifie $y=P(t)$, donc P est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im}(Q)$ tel que $P(y) = 0$ et $Q(y) = y$, alors $(I - P - Q)y = 0$, d'où $y = 0$.

P est donc une application bijective de $\mathrm{Im}(Q)$ sur $\mathrm{Im}(P)$

P étant un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Im}(Q)$, les dimensions sont égales.

EXERCICE n° 4

❶ Soient $x_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})$, $x_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32})$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$. Pour $z = (1,0,0)$, on obtient $y_1 = x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}$ puis pour $z = (0,1,0)$, $y_2 = x_{31}x_{12} - x_{32}x_{11}$. Enfin avec $z = (0,0,1)$, on a $y_3 = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$.

❷ On vérifie que les composantes des deux vecteurs de l'égalité du double produit vectoriel sont identiques. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$, la première composante est $x_2 w_1 w_2 + x_3 w_1 w_2 + x_1(w_1^2 - 1)$, sachant que le vecteur w est unitaire. Il en est de même pour les deux autres composantes.

On a $u^2(x) = (x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$ et $u^3(x) = -u(x)$ car $w \wedge w = 0$.

Soit x un vecteur propre non nul, associé à la valeur propre réelle λ, on a :

$$u^3(x) = \lambda^3 x = -\lambda x \text{ et } \lambda^3 + \lambda = 0, \text{ d'où } \lambda = 0.$$

Le sous espace propre associé est défini par : $x \wedge w = 0$, ce qui correspond à la droite vectorielle engendrée par w.

❸ On a $\varphi_\alpha = id + \alpha u$. Si φ_α n'était pas inversible, il existerait $\alpha \neq 0$ tel que

$$\det(id + \alpha u) = 0 = \alpha^3 \det(u + \frac{1}{\alpha} id)$$

donc $-\dfrac{1}{\alpha}$ serait un vecteur propre de u.

Dans $u^3 + u = 0$, on remplace u en fonction de φ_α, à savoir

- si $\alpha \neq 0$, on trouve $\varphi_\alpha^3 - 3\varphi_\alpha^2 + (3 + \alpha^2)\varphi_\alpha - (1 + \alpha^2)id = 0$, et
- si $\alpha = 0$, $(\varphi_\alpha - id)^3 = 0$

On peut choisir,

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + (3+\alpha^2)x - (1+\alpha^2).$$

❹ On a $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = (1+\alpha^2)id$, d'où

$$\left(\varphi_\alpha\right)^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2}(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = id - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}u + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}u^2$$

EXERCICE n° 5

Une matrice A commute avec toutes les matrices si et seulement si elle commute avec toutes les matrices E_{ij} de la base canonique.

On vérifie que

$$\forall(\alpha,\beta) \in [1,n]\times[1,n], \text{ on a } A_{\alpha i}\delta_\beta^j = A_{j\beta}\delta_\alpha^i$$

Pour $\beta = j$, il vient $A_{\alpha i} = A_{jj}\delta_\alpha^i$.

Donc, si $\alpha \neq i$, $A_{\alpha i} = 0$ et si $\alpha = i$: $A_{ii} = A_{jj}$

Les termes diagonaux sont égaux et les termes non diagonaux sont nuls. A est nécessairement une matrice scalaire. La réciproque est évidente.

PROBLEME

❶ Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h, on a $p \circ p = p$ et $h = \lambda Id$. On obtient $f(x) = p \circ h(x) = \lambda p(x)$ donc $f \in L_\lambda$.

On pose $p(x) = \dfrac{1}{\lambda} f(x)$ et $h(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On vérifie que $p \circ p = p$.

❷ Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap Ker\ f$. On obtient : $f(y)=0$ et $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$, d'où $f(y) = f^2(x) = 0 = \lambda f(x)$ et $y = f(x) = 0$

❸ Soit $f, g \in L_\lambda$. $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f+g) \circ (f+g) = \lambda(f+g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f+g) \in L_\lambda$.

Réciproquement, on a

$$f \circ g + g \circ f = 0 \quad (1)$$

On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2);

La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

❹
$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g) \circ (f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f),$$
donc $\mu = \lambda_1 \lambda_2$.

❺ $v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aI) \circ (u - aI) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 I = \lambda(u - aI)$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abI = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abI$. On trouve donc $\lambda = b - a$.

De même $w \circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aI) + \beta(u - bI)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v \circ w = w \circ v = 0$.

D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

❻ Le polynôme caractéristique de A est $(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$(A+I)\left(A^2-A-2I\right)=(A+I)^2(A-2I)=0$$

Si un tel polynôme existe c'est forcément $(A+I)(A-2I)$, on calcule cette expression et on trouve $(A+I)(A-2I)=0$

On obtient, par exemple, $a=-1$ et $b=2$.

$$A^n=\frac{2^n}{3}(A+I)-\frac{(-1)^n}{3}(A-2I)=\frac{(2^n+(-1)^n)}{3}A+\frac{(2^n+2(-1)^n)}{3}I$$

Concours CESD 1999

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

Première Partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1. Supposons tout d'abord qu'il existe une approximation de Padé d'ordre (p, q) donnée par les polynômes P et Q ; en multipliant par $Q(x)$ l'inégalité donnée par la condition (C2) nous obtenons :

   $$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq M|Q(x)||x|^{p+q+1}.$$

   La fonction polynôme $Q(x)$ est bornée sur $]-\alpha, \alpha[$, mettons par M', d'où :

   $$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq MM'|x|^{p+q+1},$$

   ce qui fournit (C3) à notation près.
   Plus intéressant est la réciproque : partons de (C1), (C3). Avec les notations de l'énoncé, $Q(0) = 1$ d'où $\alpha' > 0$ tel que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-\alpha', \alpha'[$. Si $\beta = \min(-\alpha, \alpha')$, la fonction continue $1/Q(x)$ est bornée sur $]-\beta, \beta[$, mettons par M''. Il vient alors

   $$\text{pour tout } x \in]-\beta, \beta[\text{ on a } |f(x) - P(x)/Q(x)| \leq MM''|x|^{p+q+1},$$

   ce qui donne (C2).
   Soit enfin une approximation de Padé donnée par les polynômes P et Q, la fonction $h(x) = Q(x)f(x) - P(x)$ est de classe C^∞ et vérifie $h(x) = O(x^{p+q+1})$. Par l'unicité des développements limités :

   $$h(0) = h'(0) = \cdots = h^{p+q}(0) = 0.$$

   D'autre part h est développable en série entière au voisinage de 0 - en effet, f et Q le sont, et il suffit de réorganiser le produit $f(x)Q(x)$ sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ où le développment converge absolument - la nullité des dérivées de h en 0 jusqu'à l'ordre $p + q$ montre que :

   $$h(x) = \sum_{k \geq p+q+1} a_k x^k$$

   pour $x \in]-\alpha, \alpha[$, avec a_k réels. D'où la conclusion avec $h(x) = \sum_{k \geq 0} a_{p+q+1+k} x^k$.

2. Donnons nous deux approximations de Padé de f à l'ordre (p,q), soit (P_0, Q_0) et (P_1, Q_1) ; par inégalité triangulaire et (C2) nous obtenons $\beta > 0, C > 0$ tels que :
$$\text{pour tout } x \in]-\beta, \beta[\text{ on a } |\frac{P_0(x)}{Q_0(x)} - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}| \leq C|x|^{p+q+1}.$$
Q_0Q_1 étant bornée sur $]-\beta, \beta[$, il vient :
$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = O(x^{p+q+1}).$$
$P_0Q_1 - P_1Q_0$ est un polynôme de degré $\leq p+q$; l'unicité des développements limités amène $P_0Q_1 - P_1Q_0 = 0$. Comme P_0/Q_0 et P_1/Q_1 sont irréductibles et $Q_0(0) = Q_1(0) = 1$, nous obtenons $(P_0, Q_0) = (P_1, Q_1)$.
3. Visiblement, $[p/0]_f = P/1$ avec $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$.
4. Si P/Q est une approximation de Padé d'ordre (p,q), les fonctions de classe C^∞, f et P/Q, ont le même développement limité d'ordre $p+q$ en 0 puisque, g étant bornée au voisinage de 0
$$Q(x)f(x) - P(x) = O(x^{p+q+1}).$$
L'unicité du développement limité donne $f^{(k)}(0) = (P/Q)^k(0), k = 0, \ldots, p+q$. La réciproque est aussi simple.
5. Si une telle approximation de Padé existe elle prend la forme :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax+b}{cx+d},$$
dont le développement limité d'ordre 3 en 0 est :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = b + (a-bc)x + (bc^2 - ac)x^2 + O(x^3).$$
Il faut donc que $b = 1, a = c, bc^2 - ac = 1$, ce qui est impossible, puisque les premières deux équations entraînent $bc^2 - ac = 0$.
6. (a) Rappelons que la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ admet, pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, un développement en série entière de rayon 1 en 0. De ce fait, $(1+x)^{1/2}$ et $(1+3x)^{-1/2}$ admettent des développements en série entière absolument convergents sur $]-1/3, 1/3[$. On peut donc effectuer le produit et obtenir un développement de f en série entière $\sum b_nx^n$ sur $]-1/3, 1/3[$. Sie le rayon R de ce développement est $> 1/3$, la somme $g(x)$ de $\sum b_nx^n$ possède une limite finie en -1/3+0, donc f aussi, ce qui est exclu. Enfin, les trois premiers termes du développement limité de f sont 1, $-x$ et $5x^2/2$.
   (b) Par des développements limités, compte-tenu de la forme que peuvent prendre les les approximants de Padé, on trouve
$$h_1 = 1 - x + 5x^2/2, h_2 = 1/(1+x), h_3 = \frac{3x+2}{5x+2}.$$

(c)

$$f - h_3(0,1) = 1,3310^{-4},$$
$$f - h_3(0,2) = 6,4110^{-4},$$
$$f - h_3(0,5) = 31,8110^{-4},$$
$$f - h_3(0,1) = 71,7810^{-4},$$
$$f - h_3(0,1) = 197,0110^{-4}.$$
$$h_1 - f(0,1) = 0,005133,$$
$$h_1 - f(0,2) = 0,033975$$
$$h_1 - f(0,5) = 0,350403,$$
$$h_1 - f(1) = 1,792893,$$
$$h_1 - f(0,1) = \text{beaucoup}.$$

Deuxième Partie

Approximation de Padé d'ordre $(p,1)$ de la fonction exponentielle.

1. Toujours par les mêmes méthodes, on trouve :
$$\frac{2+x}{2-x}.$$
2. On cherche donc $b \in \mathbb{R}^*$ et un polynôme P de degré $\leq p$ tels que :
$$(1+bx)(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+O(x^{p+2}))-P(x)=O(x^{p+2}).$$
Il faut déjà annuler le coefficient de x^{p+1}, donc $\frac{b}{p!}+\frac{1}{(p+1)!}=0$, soit $b=-\frac{1}{p+1}$. De là :
$$P(x) = (1-\frac{x}{p+1})(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!})+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$
$$= 1+(\frac{1}{1!}-\frac{1}{p+1})+\cdots+(\frac{1}{p!}-\frac{1}{(p-1)!(p+1)})x^p.$$
Choisissons une entier $N > x$. Alors pour tout $p \geq N$ on a:
$$(1-\frac{x}{p+1})R_p(x) = P(x) = (1-\frac{x}{p+1})(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!})+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$
qui tend visiblement vers e^x lorsque p tend vers $+\infty$. Comme $\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$ et $1-\frac{x}{p+1}$ convergent uniformément vers 0 et 1 sur $[-A,A]$,
$$R_p(x) = (1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!})+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!(1-\frac{x}{p+1})}$$

converge uniformément vers e^x pour $p \geq [A]+1$.

3. (a) On reprend les calculs ci-dessus :

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!(1-\frac{x}{p+1}} - \sum_{k\geq p+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour $|x| < p+1$ on a

$$\frac{1}{1-\frac{x}{p+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(p+1)^k}$$

et

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k\geq 1} (\frac{1}{(p+1)^k} - \frac{1}{(p+2)\dots(p+k+1)}) x^{k-1},$$

donc $c_k := \frac{1}{(p+1)^{k+1}} - \frac{1}{(p+2)\dots(p+k+1)}$ conviennent. Enfin, le critère d'Alembert montre que le rayon de convergence de $\sum c_k x^k$ est $p+1$.

(b) Si $p > [A]+1$, le calcul ci-dessus montre que $R_p(x) - e^x$ est somme sur $[0, A]$ d'une série entière à coefficients positifs, d'où le premier point. La majoration demandée est alors issue du développement en série entière, par exemple :

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{A^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k\geq 1} (\frac{A}{p+1})^k,$$

d'où, pour tout $x \in [0, A]$ et $p \geq [A]+1$

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{1}{p+1} \frac{A^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1-\frac{A}{p+1}}.$$

(c) Ici $A = 1$, donc pour $p \geq 2$ et $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{1}{1-\frac{1}{p+1}} \frac{1}{p+1} \frac{x^{p+2}}{(p+1)!},$$

soit

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{x^{p+2}}{p(p+1)!} < e^x - S_p(x),$$

dès que $x > 0$. Donc $R_p(x)$ est plus proche que $S_p(x)$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

Il est clair que 1 et 2 sont des valeurs propres de multiplicité 2 (la matrice est triangulaire). Si on note E_1 (respectivement E_2) le sous-espace vectoriel propre associé à 1 (resp. 2), A est diagonalisable si et seulement si $Dim\,E_1 = 2$ et $Dim\,E_2 = 2$.

$$u = (x, y, z, t) \in E_1 \Leftrightarrow Au = u \Leftrightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ bx + cy + z = 0 \\ bx + cy + dz + t = 0 \end{cases}$$

et $Dim\,E_1 = 2$ si et seulement si *a=0.*
De même $Dim\,E_2 = 2$, si et seulement si *d=0*.
En conclusion la matrice est diagonalisable si et seulement si *a=d=0*.

EXERCICE n° 2

❶ $< f^2(x), y >=< f(f(x)), y >= -< f(x), f(y) >=< x, f^2(y) >$, et l'application f^2 est symétrique.

$< f(x), x >= -< x, f(x) >$, d'où $2 < f(x), x >= 0$ et $< f(x), x >= 0$
$< f^2(x), x >= -< f(x), f(x) >= -\| f(x)\|^2 \leq 0$

❷ Soit λ une valeur propre de f^2, il existe alors u, non nul, tel que $f^2(u) = \lambda u$. On a $< f^2(u), u >= \lambda \|u\|^2 \leq 0$, donc $\lambda \leq 0$.

❸ Soit (e_i) une base orthonormale, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Notons, $\forall i,\ f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$. On a :

$< f(e_i), e_j >=< \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, e_j >= a_{ij}$ et $< f(e_i), e_j >= -< e_i, f(e_j) >= -< e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i >= -a_{ji}$

En conclusion $a_{ij} = -a_{ji}$; la matrice est antisymétrique.

❹ Soit M la matrice associée à *f*, on a :

$$Q(u^2) = \det(M^2 - u^2 I) = \det(M - uI) \times \det(M + uI) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(-M - uI)$$

et comme *M* est antisymétrique,

$$Q(u^2) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(M' - uI) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(M - uI)'$$
$$Q(u^2) = (-1)^n \det(M - uI) \times \det(M - uI) = (-1)^n (P(u))^2$$

❺ Si λ est une racine de *P* dans *C* (existence assurée par le théorème de Cayley-Hamilton), λ^2 est une racine de *Q* (❹) et λ^2 est négative (❷), donc λ est un imaginaire pur.

EXERCICE n° 3

❶ La matrice Ω est orthogonale si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires, à savoir :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0$$

et si :

$$\det \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c = 1$$

Les deux conditions $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$ entraînent les conditions précédentes et sont suffisantes pour obtenir la propriété. Elles montrent que *a, b, c* doivent être solutions d'une équation de la forme : $t^3 - t^2 + k = 0$ dont les racines doivent être toutes réelles. En examinant les extrema locaux de cette fonction $t^3 - t^2 + k$, à l'aide du tableau de variation, on obtient : $0 \leq k \leq \dfrac{4}{27}$.

❷ Soit $k=\frac{4}{27}\sin^2\varphi$, où $0\leq\varphi\leq 2\pi$ et faisons dans l'équation le changement de variable $t=\frac{1}{3}+\lambda\cos\alpha$, on obtient :

$$\lambda^3\cos^3\alpha-\frac{\lambda}{3}\cos\alpha=\frac{2}{27}(1-2\sin^2\varphi)=\frac{2}{27}\cos 2\varphi$$

Rappelons que $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ et pour $\lambda=\frac{2}{3}$ l'équation devient,

$\frac{2}{27}(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)=\frac{2}{27}\cos 2\varphi$ ou $\cos 3\alpha=\cos 2\varphi$; On obtient alors : $\alpha=\pm(\frac{2}{3}\varphi+\frac{2n\pi}{3})$

A une permutation près, on a :

$$a=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi}{3},\quad b=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi+2\pi}{3},\quad c=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi-2\pi}{3}$$

L'axe de la rotation est le vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a+b+c=1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire : $\delta=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

Si ω est l'angle de la rotation ($0\leq\omega\leq 2\pi$), la matrice est semblable à

$$\Delta=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d'où $2\cos\omega+1=Tr\Delta=3a=1+2\cos\frac{2\varphi}{3}$ et en considérant en outre le transformé de $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, orthogonal à δ, par la rotation Δ, on obtient $\sin\omega=\sin\frac{2\varphi}{3}$, d'où $\omega=\frac{2\varphi}{3}$

En permutant *b* et *c*, on obtiendrait $\omega=-\frac{2\varphi}{3}$, l'axe étant le même. Dans une permutation circulaire, on obtiendrait $\omega=\frac{2\varphi+2\pi}{3}$

En conclusion trois rotations de même axe vérifient les conditions imposées.

EXERCICE n° 4

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

❶ On vérifie que $P(M) = M^2 + M - 2I$

❷ Le reste de la division euclidienne de X^n par *P(X)* est un polynôme de degré 1.

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + aX + b$$

Pour *X=1*, on obtient *a+b=1*

Pour *X=-2*, on a $(-2)^n = -2a + b$, d'où $a = \dfrac{1-(-2)^n}{3}$ et $b = \dfrac{2+(-2)^n}{3}$

❸ On a $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + aM + bI$ et $M^2 + M - 2I = 0$, donc $M^n = aM + bI$, à savoir : $M^n = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$

La résolution du système donne : $U_n = M^n U_0$ et plus précisément,

$$\begin{cases} x_n = b - a = 1/3\left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] \\ y_n = 3a - b = 1/3\left[1 - (-1)^n 2^{n+2}\right] \\ z_n = b - a = 1/3\left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] \end{cases}$$

EXERCICE n° 5

On calcule le $\det A_\lambda$ de la façon suivante : on ajoute la troisième colonne à la première, puis on soustrait la troisième ligne à la première, le terme λ^2 se met en facteur, puis on retranche la première colonne à la troisième pour obtenir :

$$\det A_\lambda = \lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & -1 \\ 1+\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 1+\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

d'où $\det A_\lambda = -\lambda^2(\lambda-1)(2\lambda^2+2\lambda+1)$.

- Pour $\lambda = 0$, la matrice devient $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le noyau est de dimension 2 et *rgA*=1

Le noyau est engendré, par exemple, par les vecteurs (1,-1,0) et (0,0,1). L'image est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (1,0,1).

- Pour $\lambda = 1$, $rgA_1 = 2$ et l'image est engendrée par les vecteurs (1,0,-1) et (3,1,0). Par conséquent, $\dim Ker A_1 = 1$ et le noyau est engendré par le vecteur (-2,1,1).

- Pour $\lambda \neq 0{,}1$, on vérifie que les 3 colonnes sont indépendantes, donc $\dim \operatorname{Im} A_\lambda = 3$ et $\dim Ker A_\lambda = 0$

PROBLEME

❶ On a $\dim Ker A + \dim \operatorname{Im} A = 3$.

On vérifie que $KerA = \{0\}$, d'où $\dim \operatorname{Im} A = 3$ et la résolution du système donne : $\operatorname{Im} A = \left\{(X,Y,Z,T) / Y - X = T - Z\right\}$.

Comme les vecteurs y_1, y_2, y_3 sont linéairement indépendants, ils forment une base de $\operatorname{Im} A$.

❷ E_3 et $\operatorname{Im} A$ ont la même dimension, il est donc possible de construire un isomorphisme entre ces 2 espaces vectoriels.
Pour déterminer $\tilde{A}$ pour la base canonique de R^3, il suffit de calculer les images des vecteurs de cette base, exprimées dans la base de $\operatorname{Im} A$.

$\tilde{A}(1,0,0) = A(1,0,0) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$, puis on calcule les valeurs λ_i en résolvant le système : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 + \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Finalement $\tilde{A}(1,0,0) = (-2,3,4)$.
De même pour les deux autres vecteurs, on obtient :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Comme $\tilde{A}$ est une bijection, il existe une matrice inverse $\tilde{A}^{-1}$. D'autre part, $E_4 = \operatorname{Im} A \oplus (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, on peut donc définir A^+ de la façon suivante :

$$A^+ y = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} y & si \quad y \in \operatorname{Im} A \\ 0 & si \quad y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp} \end{cases}$$

Par ailleurs A^+ est unique puisque la décomposition dans la somme directe est unique.

La matrice inverse de $\tilde{A}$ est :

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $y_4 = (1,-1,-1,1)$ un vecteur de $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$. La matrice A^+ relative aux bases $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ de E_4 et à la base canonique de R^3 est :

$$A^+ = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'obtenir dans les deux bases canoniques, il suffit de la multiplier à droite par la matrice de passage suivante :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion, on obtient :

$$A^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -38 & -2 & -14 & 22 \\ 13 & 3 & 3 & -7 \\ 5 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

❸ Notons X la matrice des vecteurs $\{y_1, y_2, y_3\}$, la matrice de projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$ s'écrit :

$P_A = X(X^{'}X)^{-1}X^{'}$, où $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient $(X^{'}X)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis

$$P_A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Le calcul des produits des matrices donne : $A^+A = I_3$ et $AA^+ = P_A$.

❹ $f(x+h) - f(x) = < A(x+h)-b, A(x+h)-b >_4 - < Ax-b, Ax-b >_4$
En développant cette expression, on obtient :

$$f(x+h) - f(x) = 2 < Ax-b, Ah >_4 + \|Ah\|^2$$

et $\|Ah\|^2 = o(\|h\|)$

La fonction *f* est donc différentiable et $df(x) : h \mapsto 2 < Ax-b, Ah >_4$.

Par ailleurs $< Ax-b, Ah >_4 = (Ah)^{'}(Ax-b) = h^{'}(A^{'}(Ax-b)) = < A^{'}Ax - A^{'}b, h >_3$

On vérifie que $A^{'}$ est une application de E_4 dans E_3, dont le noyau est engendré par le vecteur y_4. $Ker\, A^{'}$ est donc orthogonal à $\operatorname{Im} A$, d'où $A^{'}$ est une bijection de $\operatorname{Im} A$ sur E_3 et $A^{'}A$ est une bijection de E_3 sur E_3, donc elle est inversible. Par conséquent, il existe un unique $\bar{x}$ tel que : $\bar{x} = (A^{'}A)^{-1}A^{'}b$.

La fonction *f* étant strictement convexe et différentiable, x réalise le minimum de *f* si et seulement si $df(x)(h) = 0, \forall h$ ou encore $A^{'}Ax = A^{'}b$. Ce qui correspond au résultat précédent.

Le minimum est obtenu au point $\hat{b}$ qui est la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im} A$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

I Etudes de suites

❶ Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$P(n)$: c_n et λ_n existent et valent $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n}); \lambda_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

La propriété $P(1)$ est vraie.

Si l'on suppose $P(n)$ vraie alors c_n est positif (car $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$) donc c_{n+1} existe et vaut $c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

Comme c_{n+1} est positif alors λ_{n+1} existe et vaut :

$$\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}} = \frac{2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})}{\cos(\frac{\pi}{2^n})} = 2^{n+1} \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}) .$$

On pose alors $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$ et $\alpha_n = 2^n$. On a $\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{\pi}{2^n} = \pi.$$

❷ Rappelons la propriétée $\forall x \in R, \left|\sin^{(2p+3)}(x)\right| \leq 1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2p+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et x donne :

$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

En particulier pour p=0 et $x = \frac{\pi}{2^n}$ on déduit

$$|\pi - \lambda_n| = 2^n \left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n}\right| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$$

On peut prendre $N_1 = 12$ car on a $\frac{\pi^3}{6 \times 4^n} \leq 10^{-6}$

❸ L'inégalité de la question ❷ appliquée à $x = \frac{\pi}{2^n}$, après multiplication par 2^n, donne :

$$\left|\lambda_n - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{4^{nk}(2k+1)!}\right| \leq \frac{\pi^{2p+3}}{4^{n(p+1)}(2p+3)!}$$

Comme $\frac{1}{4^{n(p+1)}}$ est négligeable devant $\frac{1}{4^{np}}$, on déduit le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \ldots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right)$$

❹ Pour p=2 le développement précédent donne :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On en déduit : $\lambda_n^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

Et $\lambda_n^{(1)} - \pi \sim -\frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}}$

❺ Pour tout α la formule de la question ❹ donne :

$$\alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+4}}(15\alpha + 1) + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

le réel $\alpha = -\frac{1}{15}$ est l'unique réel tel que $\lambda_n^{(2)} - \pi$ est négligeable devant 16^{-n}.

❻ L'inégalité de la question ❸ pour p=2 prouve

$$-\frac{\pi^7}{7!4^{3n}} \leq \lambda_n - \pi + \frac{\pi^3}{6\times 4^n} - \frac{\pi^5}{120\times 16^n} \leq \frac{\pi^7}{7!4^{3n}}$$

En combinant les inégalités obtenues pour n et n+1 on déduit :

$$\left|\lambda_n^{(1)} - \pi + \frac{4\pi^5}{120\times 16^{n+1}}\right| \leq \frac{68\pi^7}{3\times 7!4^{3n+3}}$$

En combinant à nouveau ces inégalités pour n et n+1 on a :

$$-\frac{17\pi^7}{9\times 7!4^{3n+3}} \leq \lambda_n^{(2)} - \pi \leq \frac{17\pi^7}{9\times 7!4^{3n+3}}$$

Finalement $\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \leq \dfrac{17\pi^7}{576\times 7!4^{3n}}$ On constate que pour $N_2 = 3$ on a :

$$\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \leq 10^{-6}.$$

II Polynômes de Bernoulli

❶ L'application F définie par $F(x) = G(x) - A$, où A est le nombre réel $A = \int_0^1 G(t)dt$, convient car F est, comme G de classe C^1 et de dérivée f et en outre on a $\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 G(t)dt - A = 0$. Si F_1 et F_2 sont deux solutions, $C = F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur $[0,1]$, elle est donc constante sur $[0,1]$ et on a $C = \int_0^1 Cdt = 0$ Il existe donc une unique application de classe C^1 vérifiant les deux conditions

❷ D'après la question précédente les conditions données définissent une unique suite $(B_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de classe C^1.
Par définition de cette suite on a
$\forall n \in N, B_n^{(n)} = 1$ donc B_n est une fonction polynômiale de degré n et de terme dominant $\dfrac{X^n}{n!}$. D'après la question ❶ On a

$$\forall n \in N B_{n+1}(x) = \int_0^x B_n(t)dt - \int_0^1 B_n(t)dt$$

On en déduit

$B_1 = X - 0{,}5$ $B_2 = \frac{6X^2 - 6X + 1}{12}$ $B_3 = \frac{2X^3 - 3X^2 + X}{12}$ $B_4 = \frac{X^4 - 2X^3 + X^2}{24} - \frac{1}{24 \times 30}$

❸ Pour $n \geq 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$ .car :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n^{'}(t)dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

❹ La suite $(C_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions de définition de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. En effet, on a :

$C_à = B_0 = 1$ et si on a $B_n = C_n$, alors on a
$C_{n+1}^{'}(X) = (-1)^{n+1}(-B_{n+1}{}^{'}(1-X)) = (-1)^n(-B_n(1-X)) = C_n(X)$

Et en posant $u = 1 - t$

$$\int_0^1 C_{n+1}(t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(u)du = 0$$

L'unicité de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ assure l'égalité.
Ainsi on a pour tout n et tout x
$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$
Le graphe de B_n est donc symétrique par rapport à la droite d'équation x=0,5 si n est pair. Il est symétrique par rapport au point de coordonnées (0,5 , 0) si n est impair. En particulier pour n impair et x=0,5 on déduit

$B_n(0{,}5) = 0$ et pour x=0, tenant compte de $B_n(0) = B_n(1)$, on déduit

$B_n(0) = B_n(1) = 0$

❺ Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $m \in N$ tel que B_{2m+1} s'annule sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et considérons m_0 le plus petit de ces entiers m.

Comme $B_1 = X - 0{,}5$ on a $m_0 \geq 1$ On sait que B_{2m_0+1} s'annule sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$; il s'annule donc au moins trois fois $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. D'après le théorème de Rolle, $B_{2m_0} = B_{2m_0+1}^{'}$ s'annule donc au moins deux fois sur . Cette dernière propriété contredit le caractère minimal de m_0. L'hypothèse était absurde.

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = xB_{2m}^{'}(c) = xB_{2m-1}(c)$

Ainsi, sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ a le signe de B_{2m-1} . Il en est de même sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car pour $x > 0{,}5$ on a $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = B_{2m}(1-x) - B_{2m}(0) = (1-x)B_{2m}^{'}(c) = (1-x)B_{2m-1}(c)$$

III Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

❶ Pour tout N entier naturel non nul et $t \in \left]0,1\right[$ on a $e^{2ik\pi t} \neq 1$ et :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \sum_{k=-N}^{k=N} e^{2ik\pi t} = e^{-2iN\pi t}\,\frac{1 - e^{-2i(2N+1)\pi t}}{1 - e^{-2i\pi t}} = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

❷ Sur $\left]0,1\right[$ on a

$\varphi_n(t) = \dfrac{f(t)}{g(\pi t)}$ avec $f(t) = \dfrac{B_b(t) - B_n(0)}{\pi t}$ et $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Or f est une fonction polynomiale donc elle admet un prolongement C^{∞} sur R. On prolonge la fonction g en zéro en posant $g(0) = 1$, le prolongement de g est alors une fonction C^{∞} sur R car c'est une fonction développable en série entière de rayon infinie, de plus g ne s'annule sur R. Donc φ_n admet un prolongement continûment dérivable. à $[0,1]$.

❸ Soit f une fonction continûment dérivable sur $[0,1]$. Notons M_0 la borne supérieure de $|f|$ sur $[0,1]$ et M_1 la borne supérieure de $\left|f^{'}\right|$ sur $[0,1]$.

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(xt)dt\right| = \left|-\frac{1}{x}\left[f(t)\cos(xt)\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 f^{'}(t)\cos(xt)dt\right| \leq \frac{2M_0 + M_1}{x}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$

❹ Pour n impair le changement de variable $t=1-u$ montre que l'on a $I_{n,k}=0$.
Pour $n\geq 4$ pair on a $B_{n-1}(0)=B_{n-1}(1)=0$ et deux intégrations par parties donnent :

$$I_{n,k}=\left[B_n(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1-\int_0^1 B_n^{'}(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}dt$$

$$=\left[B_{n-1}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1-\int_0^1 B_{n-1}^{'}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}d$$

$$=-\int_0^1 B_{n-2}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}d=\frac{I_{n-2,k}}{4k^2\pi^2}.$$

Reprenons le calcul avec n=2, en tenant compte de
$B_1(1)=-B_1(0)=\frac{1}{2}$. On trouve
$I_{2,k}=\frac{1}{(2k\pi)^2}$. On déduit $I_{2p,k}=\frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$.

❺ Comme $\int_0^1\cos(2k\pi t)dt=0$ pour $k\geq 1$ on a pour $m\geq 1$ et N entier naturel :

$$\int_0^1\varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)dt=\int_0^1(B_{2m}(t)-B_{2M}(0)dt)+2\sum_{k=1}^N\int_0^1(B_{2m}(t)-B_{2M}(0)dt)\cos((2N+1)\pi t)dt$$

$$=-B_{2M}(0)+2\sum_{k=1}^N I_{2m,k}$$

$$=-B_{2M}(0)+2(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^N\frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$$

La fonction φ_{2m} étant C^1 sur $[0,1]$, la question ❸ prouve que :

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N\frac{1}{k^{2m}}=(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}(0)$$

Donc la série $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^{2m}}$ converge et a pour somme $(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}(0)$
En particulier on trouve

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\ \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^{42}}{90}.$$

❻ Pour $p \geq 2$ et $k \geq 1$ on a $k^p \geq k^2$. En majorant $\frac{1}{k^2}$ par $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$ pour $k \geq 2$, on obtient :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^P} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2$$

On en déduit

$$\left|B_{2m}(0)\right| \leq \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2m}}\right) 2^{1-2m} \pi^{-2m} \leq \frac{4}{\left(4\pi^2\right)^m}.$$

IV Formule sommatoire d'Euler

❶ Montrons cette formule par récurrence sur m.

Pour m=0 on a $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$ donc

$$\int_0^1 f'(t) B_1(t)dt = \left[f(t)B_1(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)dt$$

c'est la formule demandée.

Supposons cette formule vraie pour $m \geq 1$ et considérons f de classe C^{2m+3}. On a

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t)dt = \left[f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+3)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B'_{(2m+3)}(t)dt$$

Ce qui, d'après les résultats de la partie II prouve

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t)dt = -\int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(t)dt$$

Une intégration par partie donne

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t)dt - \left[f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+2)}(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B'_{(2m+2)}(t)dt =$$

$$B_{(2m+2)}(0) \frac{f^{(2m+1)}(1) - f^{(2m+1)}(0)}{2} + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t)dt$$

L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir la formule pour m+1.

❷ Une intégration par partie donne :

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt = \left[f^{(2m+1)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)\right]_0^1$$
$$- \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt$$
$$= -\int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt$$

Comme $B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)$ est de signe constant que l'on note ε sur $[0,1]$, on déduit :

$$-\varepsilon \inf_{t\in[0,1]} f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0) \le \varepsilon \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt \le -\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)$$

On a alors :

$$\inf_{t\in[0,1]}\left[f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)\right] \le \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt \le \sup_{t\in[0,1]}\left[f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)\right]$$

L'existence de c est conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
La majoration est alors :

$$\left|\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt\right| \le \left\| f^{(2m+2)}\right\| \left|B_{(2m+2)}(0)\right|$$

❸ Notons $T(f)=\frac{1}{n}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $h=\frac{1}{n}$.

Les formules obtenues aux questions IV ❶ et ❷ lorsque m=2 donnent l'existence de constantes C_i bornées en valeur absolue par $\left\|f^{(6)}\right\|$ telles que :

$$\frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} f(x)dx=\int_0^1 f(ih+ht)dt=\frac{f((i+1)h)+f(ih)}{2}-B_2(0)h\big(f'((i+1)h)-f'(ih)\big)$$
$$-B_4(0)h^3\left(f^{(3)}((i+1)h)-f^{(3)}(ih)\right)-B_6(0)h^6C_i$$

En sommant ces relations on obtient :

$$\int_0^1 f(t)dt=T(f)-B_2(0)\big(f'(1)-f'(0)\big)h^2-B_4(0)\left(f^{(3)}(1)-f^{(3)}(0)\right)h^4-r(h)$$

avec $\quad |r(h)|\leq h^6B_6(0)\left\|f^{(6)}\right\|\leq\left\|f^{(6)}\right\|\frac{h^6}{16\pi^6}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE I

a) f est continue, car composition des deux fonctions continues $x \mapsto \sin x$ et $t \mapsto |t|$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

donc *f* n'est pas dérivable en 0. La plus petite période est π .

b) $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (x-\frac{\pi}{2})^{2k}$. Rayon de convergence infini. $I = [0,\pi]$.

c) Comme *f* est une fonction paire on a $b_1 = b_2 = \cdots = 0$. Les autres coefficients sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x| \cos kx \mathrm{d}x.$$

En intégrant (deux fois) par parties on obtient

$$\int \sin x \cos kx \mathrm{d}x = \frac{\cos x \cos kx + k \sin x \sin kx}{k^2-1} + C, k \neq 1,$$

et

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^2}{2} + C.$$

Ainsi on arrive à $a_k = 0$ pour *k* impair et $a_k = -\frac{4}{(k^2-1)\pi}$ pour *k* pair.

d) $T_4(\frac{\pi}{4}) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})^{2k} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{1024} \approx 0{,}786700927.$

$$F_4(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\cos\pi}{15}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{15\pi} \approx 0{,}721502408.$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707106781.$$

Donc F_4 est une meilleure approximation en $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE II

1) $\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0,$ car l'exponentielle croît plus vite que toute puissance.

$\lim_{t\to +\infty} F(t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^4}{e^x} = 0,$ d'après la règle de l'Hôpital.

F est continue, strictement positive et tend vers 0 aux bords de son domaine de définition. Elle possède donc un maximum.

2)
$F(0{,}05) \approx 0{,}01$
$F(0{,}1) \approx 4{,}54$
$F(0{,}15) \approx 16{,}78$
$F(0{,}2) \approx 21{,}20$
$F(0{,}25) \approx 19{,}1$
$F(0{,}3) \approx 15{,}2$
$F(0{,}4) \approx 8{,}7$
$F(0{,}5) \approx 5{,}0$
$F(0{,}6) \approx 3{,}00$
$F(0{,}7) \approx 1{,}87$
$F(0{,}8) \approx 1{,}22$
$F(0{,}9) \approx 0{,}83$
$F(1{,}0) \approx 0{,}58$

Il y a donc un maximum en $0{,}2 \pm 5\times 10^{-2}$.

3) *F* est dérivable, donc si *t* est maximum de *F* alors $F'(t) = 0$.

$$F'(t) = -5t^{-6}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-1} + t^{-5}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-2} e^{\frac{1}{t}} t^{-2} = -t^{-7}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-2}\left(5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}\right).$$

Donc $F'(t) = 0$ si et seulement si $5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}} = 0.$

4) Avec $t = \dfrac{1}{x}$ l'équation $5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}} = 0,\ t > 0,$ devient $5(e^x-1)-xe^x = 0$ ou bien $5(1-e^{-x})-x = 0$, q.e.d.

5) $f'(x) = 5e^{-x} > 0,$ donc f est croissant.

$f(4) = 4{,}90\ldots > 4,$

$f(5) = 4{,}96\ldots < 5,$

ainsi $f([4,5]) \subset [4,5]$.

$q := \sup_{x\in[4,5]}|f'(x)| = 5e^{-4} = 0{,}09157\ldots < 1,$

donc d'après le théorème du point fixe il existe une solution unique de $f(x) = x$ dans l'intervalle $[4,5]$.

6) $f'(x) > 1$ pour $x < \ln 5$. Alors la fonction $f(x) - x$ est strictement croissante pour $x < \ln 5$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) > x$ pour tout $x \in\ ]0, \ln 5].$ Pour $x > \ln 5$ la fonction $f(x) - x$ est strictement décroissante, donc admet au plus une racine qui doit alors être celle qu'on a trouvé dans l'intervalle $[4,5]$ de la question précédente.

7) D'après 1) on sait que *F* possède un maximum et d'après les questions précédentes il est unique : $\tau = \xi^{-1}$, où ξ est l'unique solution de $f(x) = x$, $x > 0$.

9) D'après le théorème du point fixe la suite $x_0 := 5$, $x_n := f(x_{n-1}),$ converge vers ξ , et on dispose de la majoration

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = \frac{5e^{-4}}{1-5e^{-4}}|x_n - x_{n-1}| \le 0{,}101|x_n - x_{n-1}|.$$

Le calcul à $\pm 10^{-6}$ près donne

$x_0 = 5$

$x_1 = 4{,}966310\ldots$

$x_2 = 4{,}965155\ldots$

$x_3 = 4{,}964115\ldots$

$x_4 = 4{,}965114\ldots$

$x_5 = 4{,}965114\cdots$

Par suite $\xi = 4{,}965114 \pm 10^{-6}.$ Donc $\tau = \xi^{-1} = 0{,}2014052 \pm 10^{-7}$ est la maximum de *F*.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ On obtient $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^3$. $\lambda=1$ est donc une valeur propre triple. Le sous espace vectoriel propre associé est une droite engendrée par le vecteur $e_1=(1,1,1)$.

❷ A est semblable à la matrice M telle que : $Ae_1=e_1$, $Ae_2=e_1+e_2$ et $Ae_3=e_3+e_2$. On trouve $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $J^3=0$. Enfin $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

❸ $A^n=PM^n\,P^{-1}$ et $M^n=(\Delta+J)^n=I+nJ+\dfrac{n(n-1)}{2}J^2$. à savoir $M^n=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. En particulier $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$. L'expression de A^n s'en déduit par la relation précédente.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)(n-2)}{2} & n(2-n) & \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1-n^2 & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1}{2} & -n(2+n) & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix}.$$

❹ D'autre part, on obtient : $u_n = A^n u_0$ et $u_0 = A\ u_0$, d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La suite est donc stationnaire.

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie que $A' A = I$ (matrice unité).

❷ La matrice A est donc une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3 et le déterminant positif, les valeurs propres sont : 1, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
Par ailleurs la trace étant invariante par changement de base, on a : $TrA = \frac{-1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$, d'où $\alpha = Arc\cos(-\frac{2}{3})$

EXERCICE n° 3

❶ Le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (2,1,3) et l'image correspond donc au plan.

❷ Il existe x tel que : $p(u) = x(2,1,3) \in Kerf$ et la distance entre u et $Kerf$ est minimale. On a : $d^2\ (u, Kerf) = (1-2x)^2 + (1-x)^2 + (1-3x)^2$.
Cette expression est convexe et le minimum est atteint pour $x = \frac{3}{7}$, d'où $p(u) = \frac{3}{7}(1,2,3)$

❸ La matrice R de la rotation r est, dans la base canonique : $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient $r(u) = (-1,1,1)$

❹ Soit P la matrice associée à p, on a (le raisonnement est identique à celui de la deuxième question) : $P = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

On obtient : $P \circ R(u) = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$$R \circ P(u) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n° 4

❶ On vérifie aisément que f est linéaire et que $f(X^{2n}) = -2nX^{2n-1} - 2aX^{2n} \in E$, il en est de même pour tout $p,(p \leq n)$. f est donc un endomorphisme.

❷ Les valeurs propres sont de la forme $\lambda = -2a \pm 2k$, où $k = 0,1,...,n$.
La résolution de l'équation $f(P) = \lambda P$ permet de déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres précédentes, à savoir : $P(X) = (X-1)^{n+k}(X+1)^{n-k}$. où k varie de $-n$ à $+n$.

❸ f est diagonalisable car toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes. De plus f est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

❹ Les vecteurs propres forment donc une base de E et tout polynôme de E s'écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

EXERCICE n° 5

❶ Dans ce cas, la matice M est symétrique, donc elle est diagonalisable. D'autre part, $rg(M) = rg(AA^{'}) = rg(A) = p$, la matice M admet donc $n-p$ valeurs propres nulles et M est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage P orthogonale de la forme $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

La matice M s'écrit : $M = (P_1 \Delta_1^{1/2})(\Delta_1^{1/2} P_1)$, où $\Delta_1^{1/2}$ est la matrice diagonale dont les valeurs de la diagonale correspondent aux racines carrées des valeurs de la diagonale de Δ. Si $B = P_1 \Delta_1^{1/2}$, on a : $AA' = BB'$, d'où $B^{-1}A = B'A'^{-1}$ et $B^{-1}A = Q$ est une matrice orthogonale . On en déduit $A = Q P_1 \Delta_1^{1/2}$.

❷ On vérifie que $AA^{'} + \sigma^2 I_n \geq \sigma^2 I_n$, donc la matice M est symétrique définie positive et elle est diagonalisable dans le groupe orthogonale (notons P_1 la matrice de passage). Elle est semblable à une matrice Δ diagonale et définie positive. De même, la matrice A s'écrit alors: $A = Q P_1 (\Delta + \sigma^2 I)^{1/2}$.

❸ On a : $M \geq D$. D étant définie positive, il en est de même pour M et cette matrice est inversible.
On obtient $M^{-1} = D^{-1}(I + D^{-1}AA^{'})^{-1}$ à partir de la résolution de l'équation : $y = Mx$. On vérifie que $MM^{-1} = I$ (On vérifie que $I + D^{-1}AA'$ est inversible).

EXERCICE 6

❶ On vérifie que $AB - BA$ est une matrice antisymétrique.
Notons $C = AB - BA$. C est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Soit λ une valeur propre complexe et u un vecteur propre associé. On a :

$Cu = \lambda u$, d'où $\bar{u}^{'} C u = \lambda \bar{u}^{'} u = \lambda \|u\|^2$ et $\bar{u}^{'} C^{'} u = -\lambda \|u\|^2$ (i)

Par ailleurs, $(Cu)^{'} = (\lambda u)^{'} = u^{'} C^{'} = \lambda u^{'}$ et $\bar{u}^{'} C^{'} = \bar{\lambda} \bar{u}^{'}$. Il vient,en multipliant par u à droite : $\bar{u}^{'} C^{'} u = \bar{\lambda} \|u\|^2$ (ii).

D'après les résultats précédents (i) et (ii), on trouve $\bar{\lambda} = -\lambda$, les valeurs propres sont donc des imaginaires purs.

❷ Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à A et orthogonale pour la forme hermitienne associée à B. Soit P la matrice de passage associée à cette base, alors
$A=\overline{P}'P$ et $B=\overline{P}'DP$, où D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs (d_{ij}). Notons $d=Inf(d_{ii})$. On a :
$Tr\,AB=Tr(\overline{P}'P\overline{P}'DP)=Tr(P\overline{P}'P\overline{P}'D)\geq d\,Tr(A^2)$
Si $A=(a_{ij})$, comme A est symétrique, on obtient : $Tr(A^2)=\sum_{i,k}a_{ik}^2$. $Tr(A^2)>0$, car sinon on aurait $A=0$, donc $Tr(AB)>0$.

❸ Supposons que $I+M$ ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur u non nul tel que : $(I+M)u=0$, d'où $M\,u=-u$. Par transposition, $u'M'=-u'$ puis $u'M'u=-\|u\|^2$. D'autre part, comme M est antisymétrique $M'u=u$ et $u'M'u=\|u\|^2$. On obtient alors $\|u\|^2=-\|u\|^2$ et $u=0$. Ce qui conduit à une contradiction.

La matrice $A=(I-M)(I+M)^{-1}$ existe d'après la question précédente.
A est orthogonale si et seulement si $A'=A^{-1}$. Ce qui est équivalent à : $(I-M)^{-1}M=M(I-M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de la relation $(I-M)M=M(I-M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I-M)^{-1}$. On montre de même que $I-M$ est inversible.

Concours CESD 2001

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

1. Les trois vecteurs $(1,1,1),(2,4,8)$ et $(3,9,27)$ sont dans M_1, donc dans V_1. Ils sont linéairement indépendants, car

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} = 12 \neq 0.$$

Alors $\dim V_1 \geq 3$, et comme la dimension de V_1 est bornée par celle de $\mathbb{R}^3$ elle vaut 3.
Comme $(n+1, 2n+1, 3n+1) = n(1,2,3)+(1,1,1)$ on voit que V_2 est engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants $(1,2,3)$ et $(1,1,1)$. Par conséquent $\dim V_2 = 2$.

2. Soit a le remboursement annuel, c le montant du crédit et p le taux d'intérêt. Après le premier remboursement le montant restant du crédit est

$$(1+p)c - a.$$

Après le deuxième remboursement le montant restant du crédit est

$$(1+p)((1+p)c-a)-a.$$

En général, après le n-ième remboursement, $n = 0, \ldots, 5$ le montant restant est

$$(1+p)^n c - ((1+p)^{n-1} + (1+p)^{n-2} + \cdots + 1)a = (1+p)^n c - \frac{(1+p)^n - 1}{p} a.$$

Pour $n = 5$ ce montant doit être nul, car le prêt dure 5 ans. Alors

$$a = \frac{p(1+p)^5}{(1+p)^5 - 1} c = \frac{0,04(1,04)^5}{(1,04)^5 - 1} \times 100\,000\text{FF} = 22\,462,71\text{FF}.$$

3. (a) Montrons d'abord que $a_{n+1}^2 \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$a_n^4 + c^2 - 2a_n^2 c = (a_n^2 - c)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a_n^4 + c^2 + 2a_n^2 c \geq 4a_n^2 c$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{c^2}{4a_n^2} + \frac{c}{2} \geq c.$$

Maintenant montrons que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{2a_n} = a_n.$$

Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée et décroissante. Comme $\mathbb{R}$ est complet elle doit alors converger vers une limite a dans $\mathbb{R}$.

(b) De $a = \lim a_n = \lim a_{n+1}$ et de la définition récurrente on déduit $a = \frac{a}{2} + \frac{c}{2a}$, et de là $a^2 = c$. Comme $a \geq 0$ on a $a = \sqrt{c}$.

4. (a) L'ensemble D est le triangle fermé entre les points $(0,0), (0,\pi)$ et $(\pi, 0)$.

(b) La fonction f s'anulle sur le bord ∂D du triangle D, et elle est strictement positive sur l'intérieur D°. Donc tous les points sur ∂D sont des minima (globaux) et il n'y en a pas d'autres.

(c) La fonction f est de la classe C^∞ car ses composantes le sont. Tous les extrema $(x,y) \in D^\circ$ vérifient alors

$$\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0.$$

Ceci donne

$$\cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0,$$

$$\sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0.$$

Sur l'intérieur D° nous avons $\sin x \neq 0 \neq \sin y$, d'où

$$\cos x \sin(x+y) = -\sin x \cos(x+y), \ \cos y \sin(x+y) = -\sin y \cos(x+y).$$

De la première équation nous tirons que $\cos(x+y) \neq 0 \neq \cos x$, et de la deuxième que $\cos y \neq 0$. Donc par division

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

D'où $\tan x = \tan y$, et enfin $x = y$. La première équation donne alors

$$\cos x \sin(2x) + \sin x \cos(2x) = 0,$$

donc $\sin(3x) = 0$. Alors $x = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent seul le point $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ peut annuler $\partial_x f$ et $\partial_y f$ — et il le fait (vérification facile).
Maintenant $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique maximum de f. En effet la fonction f continue admet un maximum sur le compact D et $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique candidat.
On a $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}/8$.

(d) La série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 est

$$\begin{aligned} T_2 &= f(a,b) + (\partial_x f(a,b), \partial_y f(a,b)) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &\quad +(x-a, y-b) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(a,b) & \partial_x\partial_y f(a,b) \\ \partial_y\partial_x f(a,b) & \partial_y^2 f(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= 3\frac{\sqrt{3}}{8} + (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_x\partial_y f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \\ \partial_y\partial_x f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_y^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{3} \\ y-\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f &= 2\cos x \sin y \cos(x+y) - 2\sin x \sin y \sin(x+y), \\ \partial_y^2 f &= 2\sin x \cos y \cos(x+y) - 2\sin x \sin y \sin(x+y), \\ \partial_x\partial_y f &= \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) \\ &\quad + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} T_2 &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{3} \\ y-\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3}(x-\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}/2(y-\frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{3}/2(x-\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}(y-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - \sqrt{3}((x-\frac{\pi}{3})^2 + (x-\frac{\pi}{3})(y-\frac{\pi}{3}) + (y-\frac{\pi}{3})^2). \end{aligned}$$

5. Avec la substitution $t = \tan x$ on a $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\cos^2 x$. Alors

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\tan x|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} &= \ln\tan(\pi/3) - \ln\tan(\pi/6) \\ &= \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln 3. \end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned} Ona \sum_{k\geq 2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k\geq 2}^{n} (\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{4}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

(b) D'après de l'Hôpital on a

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e.$$

7. On a $V = \pi r^2 h$ et $S = 2\pi r(r+h)$. Comme V est constant on peut remplacer $h = \frac{V}{\pi r^2}$ dans l'expression pour S :

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r(r + \frac{V}{\pi r^2}) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}, r > 0, \\ S'(r) &= 4\pi r - 2\frac{V}{r}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{r\to 0^+} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$, on sait que S possède un minimum. De $S'(r) = 0$ on tire $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, et de là $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

SESSION D' AVRIL 2001

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1. (a) Le nombre $\sup_{x \in X} h_m(x)$ est un majorant des nombres $mx - f(x)$ lorsque $x \in X$. Donc :

$$\forall m \in X^{\circ},\ \forall x \in X,\ f^{\circ}(m) \geq mx - f(x)$$

Ainsi on a :

$$\forall m \in X^{\circ},\ \forall x \in X,\ f^{\circ}(m) + f(x) \geq mx$$

Fixons $x \in X$ alors on a :

$$\forall m \in X^{\circ},\ f(x) \geq mx - f^{\circ}(m)$$

$f(x)$ est un majorant des valeurs $mx - f^{\circ}(m)$ lorsque $m \in X^{\circ}$. Donc

$$f(x) \geq \sup_{m \in X^{\circ}} mx - f^{\circ}(m)$$

(b) Soit $m_1 \in X^{\circ}$ et $m_2 \in X^{\circ}$ alors

$$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m_1 x - f(x) \leq M_1$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m_2 x - f(x) \leq M_2$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$ en posant $M = \lambda M_1 + (1 - \lambda) M_2$ on obtient

$$\forall x \in X,\ (\lambda m_1 + (1 - \lambda) m_2) x - f(x) \leq M$$

Donc $\lambda m_1 + (1 - \lambda) m_2 \in X^{\circ}$

(c) Soit $m \in \mathbb{R}$. X est un compact, la fonction h_m est continue sur X donc h_m est bornée et atteint ses bornes. En particulier $X^\circ = \mathbb{R}$ et

$$\exists x_0 \in X,\ h_m(x_0) = \sup_X (mx - f(x))$$

$$\exists x_0 \in X, f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$$

2. (a) $h_m(x) = mx - e^x$ et $h'_m(x) = m - e^x$.

- Si $m < 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h_m(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h_m(x) = -\infty$. Donc $m \notin X^\circ$.
- Si $m = 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $lim_{x\to-\infty} h_m(x) = 0$, $\lim x \to \infty h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(0) = 0$.
- Si $m > 0$, la fonction h_m est croissante sur $]-\infty, \ln m]$ et décroissante sur $[\ln m, \infty[$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(m) = m\ln m - m$.

En résumé $X^\circ = \mathbb{R}^+$.

Notons $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$. On a $H_m(0) = 0$ et si $x > 0$, $H_m(x) = (m+1)x - x\ln x$. Sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $H'_m(x) = m - \ln x$. Donc H_m est croissante sur $]0, e^m]$ décroissante sur $[e^m, \infty[$. Elle atteint son maximun en $x = e^m$ et $H_m(e^m) = e^m$. Ainsi

$$\begin{array}{ll} X^\circ = \mathbb{R}^+ & f^\circ(0) = 0 \text{ si } x > 0\ f^\circ(x) = x(lnx - 1) \\ X^{\circ\circ} = \mathbb{R} & f^{\circ\circ}(x) = e^x \end{array}$$

(b) $h_m(x) = mx - \frac{x^3}{3}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} h_m(x) = \infty$ donc $X^\circ = \emptyset$

(c) $h_m(x) = (m - \alpha)x + \beta$

- Si $m \neq \alpha$, h_m est non bornée et $m \notin X^\circ$
- Si $m = \alpha$, h_m est constante et vaut β.

Finalement $X^\circ = \{\alpha\}$ et $f^\circ(\alpha) = \beta$. $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ est une fonction bornée et $\sup\limits_{x=\alpha}(mx - f^\circ(x)) = m\alpha - \beta$ Donc $X^{\circ\circ} = \mathbb{R}$ et $f^{\circ\circ}(x) = \alpha x - \beta$.

(d) $h_m(x) = mx - f(x)$. L'image de h_m est $h_m(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{-m - 1, 0, m - 2, 2m - 1\}$. Cet ensemble est toujours majoré, on trouve $X^\circ = \mathbb{R}$

$$f^\circ(m) = \begin{cases} -m - 1 & si \quad m \leq -1 \\ 0 & si \quad -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ 2m - 1 & si \quad m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En calculant $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ on trouve

$$H_m(x) = \begin{cases} (m+1)x+1 & si \quad x \leq -1 \\ mx & si \quad -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (m-2)x+1 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

Finalement H_m est majoré si est seulement si $m \in [-1, 2]$ $X^{\circ\circ} = [-1, 2]$ et $f^{\circ\circ}(x) = -x$ si $x \in [-1, 0]$ et $f^{\circ\circ}(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in [0, 2]$

3. (a) Si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (Z, h)$ alors $Z \subset X$ et $\forall x \in Z,\ f(x) \leq h(x)$ donc $(X, f) \leq (Z, h)$.
   Si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (X, f)$ alors $X = Y$ et $\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$ donc $(X, f) = (Y, g)$.

   (b) On suppose que $Y \subset X$, $\forall x \in Y,\ f(x) \leq g(x)$ et que X° est non vide. Soit $m \in X^\circ$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X,\ mx - f(x) \leq M$. Donc $\forall x \in Y,\ mx - g(x) \leq M$. Donc $m \in Y^\circ$. On a montrer que $X^\circ \subset Y^\circ$. Pour $m \in X^\circ, \forall x \in Y,\ mx - g(x) \leq mx - f(x)$. Pour $m \in X^\circ$

$$\sup_{x \in Y} mx - g(x) \leq \sup_{x \in Y} mx - f(x) \leq \sup_{x \in X} mx - f(x)$$

   Donc $g^\circ(m) \leq f^\circ(m)$.

   (c) On a l'équivalence de propositions suivantes :

$$(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$$

$$X \subset \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X,\ \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X,\ mx - f(x) \leq p$$

$$m \in X^\circ \text{ et } f^\circ(m) \leq p$$

   On a montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$.
   Soit $m \in X^\circ$ si $f^\circ(m) \leq p$ alors $\varphi(x) \geq \phi_{m,p}(x)$ En utilisant le résultat au dessus on obtient que si
   $m \in X^\circ$ et $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ alors $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. La droite d'équation $y = \varphi(x)$ est la droite au dessous de f la plus proche de f et de pente m.

4. (a) D'après la question 1)(a) soit $x \in X$ $\forall m \in X^\circ,\ xm - f^\circ(m) \leq f(x)$ Cela démontre que la fonction $H_x(m) = xm - f^\circ(m)$ pour $x \in X$ est bornée par $f(x)$ sur l'ensemble X°. Donc $X \subset X^{\circ\circ}$ et $f^{\circ\circ}(x) \leq f(x)$. Soit encore $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X, f)$.

(b) D'après la question 3)(b) et la question précédente

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \geq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

Par ailleurs la question précédente appliquée à la fonction f° prouve que :

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \leq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

En utilisant la question 3)(a) on conclu que

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) = (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

(c) D'après la question 1)(c) $X^{\circ} = \mathbb{R}$. Une droite passant par les points $A = (-a, f(-a))$ et $A' = (a', f(a')$ $(a' \neq -a)$ a pour pente $\frac{f(a')-f(-a)}{a'+a}$ Cette droite est tangente en A' si la pente de cette droite est la derivée de f au point a' . A' est solution du problème si et seulement si

$$\frac{a'^3 + a^3}{a' + a} = 3a'^2,$$

soit si a' est solution de $2(a' - \frac{a}{2})(a' - \frac{a}{2})(a' + a) = 0$ et $a' \neq a$, donc $a' = \frac{a}{2}$. Le point A' a pour coordonnées $(\frac{a}{2}, \frac{a^3}{24})$

PROBLEME II

1. (a) $y_n(-x) = \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n(\pi - \arccos x)) = (-1)^n \cos(n \arccos x)$ y_n est de la même parité que n. $z_n(-x) = \sin(n \arccos(-x)) = (-1)^{n+1} \sin(n \arccos x)$, z_n est de même parité que $n-1$.

   $y_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2})$.

   Si n est impair, $y_n(0) = 0$. Si n est pair, $y_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$. $z_n(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

   Si n est pair $z_n(0) = 0$, si n est impair $z_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

   $y_n(1) = 1$ et $z_n(1) = 0$

   (b) Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, donc les fonctions y_n et z_n sont dérivables sur $]-1, 1[$.

$$y'_n(x) = n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} z_n(x)$$

$$z'_n(x) = -n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} y_n(x)$$

   (c) Rappelons les équivalences :

$$(cosx - 1) \sim_0 \frac{-x^2}{2}$$

$$sinx \sim_0 x$$

   Elles impliquent :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos\theta - 1} = \lim_{\theta \to 0} \frac{n^2\theta^2}{\theta^2} = n^2$$

   Et comme la limite de la quantite $\frac{n\theta}{\theta^2}$ lorsque $\theta \to 0$ n'existe pas, la limite lorsque $\theta \to 0$ de $\frac{\sin(n\theta)}{\cos\theta - 1}$ n'existe pas. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(n \arccos x) - 1}{x - 1} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos\theta - 1} = n^2$$

   La fonction y_n est dérivable en 1 de nombre dérivée n^2. La fonction y_n étant de même parité que n, y_n est dérivable en -1 de dérivée $(-1)^{n-1}n^2$. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient que la fonction z_n n'est pas dérivable en 1. La fonction z_n étant de même parité que $n-1$, z_n n'est pas dérivable en -1.

(d) L'équation $y_n(x) = 0$ est équivalente à $n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où encore

$$\arccos x \in \{\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n},\ k \in \mathbb{N}\}$$

$\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ appartient a $[0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k \in \{0, \cdots, E(\frac{n-1}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0, 1]$ sont :

$$\{y_k = cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}),\ k \in \{0, \cdots, E(\frac{n-1}{2})\}\}.$$

$z_n(x) = 0$ est équivalente à $n \arccos x = k\pi$ où encore à

$$\arccos x \in \{k\frac{\pi}{n},\ k \in \mathbb{N}\}$$

$k\frac{\pi}{n}$ appartient a $[0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k \in \{0, \cdots, E(\frac{n}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0, 1]$ sont

$$\{z_k = cos(k\frac{\pi}{n}),\ k \in \{0, \cdots, E(\frac{n}{2})\}\}.$$

L'inéquation $y_n(x) \geq 0$ est équivalente à

$$n \arccos x \in (\cup_{k\in\mathbb{N}}[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]) \cap [0, \pi]$$

- si n est pair, $y_n(x) \geq 0$ est équivalent à

$$\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2n}] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}] \cup [-\frac{\pi}{2n} + \pi, \pi]$$

- si n est impair, $y_n(x) \geq 0$ est équivalente à

$$\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2n}] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}]$$

La fonction arccos est décroissante. A_n est l' ensemble :

- pour n pair

$$[\cos(\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \pi)] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi)] \cup [\cos(\frac{\pi}{2n}), \cos(0)]$$

- pour n impair

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi)] \cup [\cos(\frac{\pi}{2n}), \cos(0)]$$

L'inéquation $z_n(x) \geq 0$ est équivalent à $n \arccos x \in \cup_{k\in\mathbb{N}}[0+2k\pi, \pi + 2k\pi] \cap [0, \pi]$

$$\arccos x \in \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n}]$$

La fonction arccos est décroissante. B_n est l' ensemble

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\cos(\frac{\pi}{n} + \frac{2k}{\pi}), \cos(\frac{2k}{\pi})]$$

Le signe de $y'_n(x)$ est le même que de celui de $z_n(x)$. y_n est croissante sur A_n, décroissante ailleurs. Le signe de $z'_n(x)$ est l'opposé de celui de $y_n(x)$. z_n est décroissante sur B_n, croissante ailleurs.

2. (a) $y_0(x) = 1$ $z_0(x) = 0$ $y_1(x) = x$ et $z_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (b)
$$y_{n+2}(x) + y_n(x) = 2\cos((n+2)\arccos x) + \cos(n \arccos x)$$
$$= \cos((n+1)\arccos x)\cos(\arccos x).$$

   $y_{n+2}(x) + y_n(x) = 2xy_{n+1}(x)$.
   De même on trouve $z_{n+2}(x) + z_n(x) = 2xz_{n+1}(x)$

   (c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: y_n est une fonction polynôme de degré n et $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$z_n(x) = \sqrt{1-x^2}g_n(x)$$

   où g_n est une fonction polynôme de degré $n-1$. Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies. Si on suppose $n \geq 1$ et les propositons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $k \leq n$ alors $y_{n+1} = 2xy_n - y_{n-1}$, ainsi y_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. $z_{n+1} = 2xz_n - z_{n-1} = (2xg_n(x) - g_{n-1}(x))\sqrt{1-x^2}$ donc $g_{n+1} = 2xg_n(x) - g_{n-1}(x)$ est un polynome de degré n.

   (d) Les formules de Moivre sont

$$cos(n\theta) + isin(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=n}(i)^k C_n^k \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$

$$cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta)$$

$$sin(n\theta) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}(-1)^k C_n^{2k+1}\cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)$$

On obtient alors

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^{2k}$$

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} (1-x^2)^{2k+1}$$

(e) Les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

sont l'ensemble des fonctions $v(\theta) = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Maintenant on pose $\arccos x = \theta$. $f(x) = f(\cos\theta)$ $\frac{d}{d\theta}(f\circ\cos)(\theta) = -\sin(\theta)f'(\cos\theta)$ $\frac{d^2}{d\theta^2}(f\circ\cos)(\theta) = -\cos(\theta)f'(\cos\theta) + \sin^2(\theta)f''(\cos\theta)$ Une fonction $f(x)$ est solution de

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

si et seulement si $f(\cos\theta))$ est solution de :

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

On déduit que y_n et z_n sont deux solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

Les solutions générales sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle sont les fonctions $f(x) = \alpha y_n(x) + \beta z_n(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3. (a) Soit $y_1 \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, $y_2 \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$F(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha F(y_1) + \beta F(y_2).$$

F est une application linéaire.

Si $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ alors $F(y) \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, F est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$.

(b) La fonction $y = 0$ est solution de $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ Soit y une solution de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ qui s'annule en un point noté $x_0 \in]-1,1[$ alors $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. D'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles alors $y = 0$. Donc si y est une solution non nulle de

$f(x,y(x),y'(x)) = 0$, elle ne s'annule jamais sur l'intervalle $]-1,1[$. Elle vérifie :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (n-\frac{1}{2})\frac{-2x}{1-x^2}$$

Il existe $C \in \mathbb{R}^{+\star}$ telle que $y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x,y(x),y'(x)) = 0$ est

$$\{y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\ C \in \mathbb{R}^{+}\}.$$

$u \in \mathrm{Ker}(F)$ et $u(0) = 1$ est équivalent à $u(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$.

(c)

$$Y(x) = (1-x^2)y'(x) + (2x-1)xy(x)$$

En dérivant on obtient

$$Y^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (1-x^2)^{(p)} y^{(k-p+1)}(x) + \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (2n-1)x^{(p)} y^{(k-p)}(x)$$

$$Y^{(k)}(x) = ((2n-1)x-2kx)y^{(k)}(x)+(1-x^2)y^{(k+1}(x)+(k(2n-1)-k(k-1))y^{(k-1)}(x)$$

Cette relation pour u donne :

$$(1-x^2)u^{(k+1)}(x) = -((2n-1)x-2kx)u^{(k)}(x)-(k(2n-1)-k(k-1))u^{(k-1)}(x)$$

En particulier pour $x = 0$:

$$u^{(k+1)}(0) = -k(2n-k)u^{(k-1)}(0).$$

$u(0) = 1$ $u'(0) = 0$, une récurrence prouve :

$$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1\times 3\times 5\cdots\times(2p-1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2p+1)$$

$$u^{(2p-1)}(0) = 0,\ u^{(2n)}(0) = (-1)^n((2n-1)!)^2.$$

(d) Utilisons la méthode de variation des constantes. Soit y une solution posons $y(x) = c(x)u(x)$ où $c(x)$ est la nouvelle inconnue. $c(x)$ est solution de l'équation

$$(1-x^2)c'(x) = \lambda c(x).$$

Si c n'est pas la fonction nulle alors

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

L'espresssion de c est : $c(x) = D(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\lambda}{2}}$ avec $D \in \mathbb{R}^{+\star}$ En ajoutant la solution nulle on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x, y, y') = \lambda y$ est :

$$\{y(x) = D(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\lambda}{2}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\ D \in \mathbb{R}^+\}$$

$$\{y(x) = D(1+x)^{\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}},\ D \in \mathbb{R}^+\}$$

Les solutions sont des fonctions polynômes si et seulement si $\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ et $n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. Donc si on pose $\lambda = 2p-1$, il existe des solutions polynômes si et seulement si $p \in \mathbb{Z}$ et $-n+1 \leq p \leq n$. La solution, valant 1 en 0, est le polynôme $P_\lambda(x) = (1+x)^{n+p}(1-x)^{n-p}$.

SESSION D' AVRIL 2002

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

1. Si $(M, M') \in \Gamma^2$ alors $MM'^{-1} \in \Gamma$ car $\det(MM'^{-1}) = (\det M)(\det M')^{-1} = 1$. L'ensemble Γ, muni de la multiplication matricielle est un sous groupe de matrices carrées d'ordre deux inversibles, donc un groupe. L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

   Tout élément S de $\mathcal{S}$ s'écrit sous la forme $S = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels, ou encore $S = \frac{a+d}{2}I + \frac{a-d}{2}X + bY + cZ$. Les quatres matrices I, X, Y, Z sont linéairement indépendantes, elles engendrent $\mathcal{S}$ donc elles forment une base de $\mathcal{S}$.

2. Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on trouve $t(S) = \frac{a+d}{2}$ et $S^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Notons que $t(S) = t(S^{-1})$ si $S \in \mathcal{S}$.

3. $(\alpha S \alpha^\star)^\star = \alpha S^\star \alpha^\star = \alpha S \alpha^\star$. Donc $\alpha S \alpha^\star \in \mathcal{S}$.

4. T_α est une application linéaire donc d'après la question précédente T_α est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. $\mathrm{Ker} T_\alpha = \{S \in \mathcal{S}, \alpha S \alpha^\star = 0\} = \{0\}$ Donc T_α est un automorphisme de $\mathcal{S}$.

5. (a) Si $T_\alpha(S) = I$ alors

$$1 = \det(T_\alpha(S)) = \det(\alpha)\det(S)\det(\alpha^\star) = \det(S).$$

La matrice doit vérifiée $\det(S) = 1$. De plus $S = \alpha^{-1}\alpha^{\star -1} = (\alpha^\star\alpha)^{-1}$. Si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\alpha^\star\alpha = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b} & \overline{a}c + \overline{b}d \\ \overline{c}a + \overline{d}b & c\overline{c} + d\overline{d} \end{pmatrix}$

$$t(S) = t(S^{-1}) = \frac{1}{2}(a\overline{a} + b\overline{+}c\overline{c} + d\overline{d}) > 0$$

car $\alpha \neq 0$.

(b) Si α est solution de (1) alors on a les relations

$$(a\ \ b)S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 1$$

$$S\alpha^\star = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Donc

$$S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons que α vérifie (3). Notons

$$\alpha S \alpha^\star = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

D'après la première relation de (3) on trouve $A = 1$. Comme $S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$, on trouve $(c\ d)S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 0$, soit $C = 0$. La matrice $\alpha S \alpha^\star$ est hermitienne, donc $B = \overline{C} = 0$. Finalement, $\det(S) = 1 = AD - BC = D = 1$. La matrice α est solution de (1).

(c) Un calcul donne

$$Q_S(v) = (t(S) - x(S))m\overline{m} + (y(S) + iz(S))m\overline{n} + \\ (y(S) - iz(S))\overline{m}n + (t(S) + x(S))n\overline{n}.$$

En multipliant par $t(S) - x(S)$ et en utilisant la relation

$$\det(S) = 1 = t^2(S) - x^2(S) - y^2(S) - z^2(S)$$

on obtient :

$$(t(S) - x(S))Q_S(v) = |(t(S) - x(S))m + (y(S) + iz(S))n|^2 + |n|^2.$$

Par ailleurs $t(S) > 0$ et $t^2(S) - x^2(S) = 1 + y^2(S) + z^2(S) > 0$ donc $(t(S) - x(S)) > 0$. Cela implique $Q_S(v) > 0$ si $v \neq 0$ et $Q_S(v) = 0$ si $v = 0$.

(d) Si S vérifie les conditions (2). Soit $v = (m, n) \neq 0$. D'après la question précédente $Q_S(v) > 0$. Notons $a = \frac{m}{Q_S(v)^{\frac{1}{2}}}$, $b = \frac{n}{Q_S(v)^{\frac{1}{2}}}$ et

$$\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}.$$

Les relations (3) sont satisfaites donc l'équation (1) a des solutions.

Partie II

1. $\langle S, S \rangle = \det(S)$

2. Un calcul donne

$$\langle T_\alpha(S+S'), T_\alpha(S+S') \rangle = \langle T_\alpha(S), T_\alpha(S) \rangle + \langle T_\alpha(S'), T_\alpha(S') \rangle + 2\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S') \rangle$$

Par ailleurs pour tout $M \in \mathcal{S}$ $\langle T_\alpha(M), T_\alpha(M) \rangle = \det(T_\alpha(M)) = \det(M)$. Donc on trouve $2\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S') \rangle = \det(S+S') - \det(S) - \det(S') = 2\langle S, S' \rangle$.

3. (a) Le produit de la matrice

$$\begin{pmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ -x(S_1) & -x(S_2) & -x(S_3) & -x(S_4) \\ -y(S_1) & -y(S_2) & -y(S_3) & -y(S_4) \\ -z(S_1) & -z(S_2) & -z(S_3) & -z(S_4) \end{pmatrix}^t$$

par la matrice

$$\begin{pmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{pmatrix}$$

est égale à la matrice

$$(\langle S_i, S_j \rangle)_{(i,j)}.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}^2 = (-1)^3 \Pi_{i=1}^4 \langle S_i, S_i \rangle \in \{1, -1\}$$

Le nombre $\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}^2$ est positif, il vaut 1. On a montrer les relations $\Pi_{i=1}^4 \langle S_i, S_i \rangle = -1$, et $|\det(S_1, S_2, S_3, S_4)| = 1$.

(b) Comme $\det(S_1, S_2, S_3, S_4) \neq 0$, S_1, S_2, S_3, S_4 sont indépendantes.

(c) Si toutes les matrices étaient de genre $-$, on aurai

$$1 = \Pi_{i=1}^{4} \langle S_i, S_i \rangle = -1$$

. Ceci est impossible, l'une au moins des matrices est de genre $+$.

(d)

$$\det T_\alpha = \det(T_\alpha(I), T_\alpha(X), T_\alpha(Y), T_\alpha(Z))$$

Un calcul montre que les vecteurs $T_\alpha(I), T_\alpha(X), T_\alpha(Y), T_\alpha(Z)$ sont des vecteurs deux à deux orthogonaux et de genre $+$ ou $-$. Donc d'après la question II 3. (a) $(\det T_\alpha)^2 = 1$.

4. L'une des matrices est de genre $+$, soit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\det S_j = 1$. On a $t(S_j)^2 \geq 1$ (car $t^2(S_j) - x^2(S_j) - y^2(S_j) - z^2(S_j) = 1$) donc $t(S_j) \neq 0$. Si $t(S_j) > 0$ alors d'après la question I 5. (d) il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que $T_\alpha(S_j) = I$. Si $t(S_j) < 0$ alors $t(-S_j) > 0$ d'après la question I 5. (d) il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que $T_\alpha(-S_j) = I$ donc $T_\alpha(S_j) = -I$. Si deux des matrices sont de genre $+$, par exemple S_i et S_j avec $i \neq j$ alors $t(S_i)t(S_j) - x(S_i)x(S_j) - y(S_i)y(S_j) - z(S_i)z(S_j) = 0$ donc

$$(t(S_i)t(S_j))^2 \leq (x(S_i)x(S_j) + y(S_i)y(S_j) + z(S_i)z(S_j))^2 <$$
$$(x(S_i)^2 + y(S_i)^2 + z(S_i)^2)(x(S_j)^2 + y(S_j)^2 + z(S_j)^2)$$

D'où $(t(S_i)t(S_j))^2 < (1 - t(S_i)^2)(1 - t(S_j)^2)$ $t(S_i)^2 + t(S_j)^2 < 1$. Ceci est impossible car $t(S_i)^2 \geq 1$ et $t(S_i)^2 \geq 1$. On conclusion, nécessairement trois des matrices sont de genre $-$.

5.

$$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \ \ (1-t)\alpha + t\alpha' \in \Gamma$$
$$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \ \ \det((1-t)\alpha + t\alpha') = 1$$

L'application $t \to \det((1-t)\alpha + t\alpha')$ est un polynôme du second degré à valeur constante. Donc $\alpha \mathcal{R} \alpha'$ si et seulement si les coefficients devant t^2 et t du polynôme $t \to \det((1-t)\alpha + t\alpha')$ sont nuls.

(a) Un calcul donne $\det((1-t)\alpha + tI) = 1 + t(a + d - 2) + t^2(2 - d - a)$. On a $\alpha \mathcal{R} I$ si et seulement si $a + d = 2$.

(b) Un calcul donne $\det((1-t)\alpha + t\alpha') = (1-t) + t(ad' - cb')$. Finalement $\alpha \mathcal{R} \alpha'$ si et seulement si α' appartient à Γ (i.e. $ad' - cb' = 1$).

(c) $\det((1-t)\alpha + t\alpha'') = (1-t) + t(a'd - c'b)$. On a $\alpha \mathcal{R} \alpha''$ si et seulement si α'' appartient à Γ ($a'd - c'b = 1$).

(d) Cherchons α' et α'' sous la forme $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ et $\alpha'' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$
Le système

$$\alpha''\mathcal{R}I \;\; \alpha\mathcal{R}\alpha' \;\; \alpha'\mathcal{R}\alpha''$$

est équivalent à

$$ad' - cb' = 1 \; a'd' - c'b' = 1 \; a' + d' = 2$$

Ce système admet une solution par exemple si $c \neq 0$

$$d' = 0, b' = -\frac{1}{c}, a' = 2, c' = c$$

Si $c = 0$ alors $a \neq 0$ car $ad - bc = 1$. Une solution est alors

$$d' = \frac{1}{a}, b' = -\frac{1-a}{a}, a' = 2 - \frac{1}{a}, c' = \frac{a-1}{a}$$

(e) Notons $\alpha(t) = (1-t)\alpha + t\alpha'$ ou α' et α'' sont des solutions du système

$$\alpha''\mathcal{R}I, \;\; \alpha\mathcal{R}\alpha', \;\; \alpha'\mathcal{R}\alpha''$$

un calcul montre que $|\det(T_{\alpha(t)})| = 1$. La fonction $t \to \det(T_{\alpha(t)})$ est une fonction polynômial en t continue vérifiant $|\det(T_{\alpha(t)})| = 1$ donc c'est une fonction constante. Cela prouve que $\det(T_\alpha) = \det(T_{\alpha(0)}) = \det(T_{\alpha(1)}) = \det(T_{\alpha'})$. De la même façon on montre que $\det(T_{\alpha'}) = \det(T_{\alpha''})$. Puis $\det(T_{\alpha''}) = \det(T_I) = 1$. En résumé

$$\det(T_\alpha) = \det(T_I) = 1.$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

CORRIGE 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ Si $b=a+1$, $u_n=\dfrac{a}{a+n+1}$

Pour $b\leq a+1$, $\prod_0^n (b+k)\leq\prod_0^n (a+1+k)$, donc $u_n\geq\dfrac{a}{a+n+1}$. Or la série de terme général $\dfrac{a}{a+n+1}$ diverge puisque $\dfrac{a}{a+n+1}\approx\dfrac{a}{n}$, d'après le critère d'équivalence concernant des séries à terme général positif. Le critère de comparaison sur les séries à termes positifs prouve que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

❷ La démonstration se fait facilement par récurrence.

❸ Comme $(b-a-1)S_n\leq a$, on a : $S_n\leq\dfrac{a}{b-(a+1)}$. La suite S_n est croissante et majorée, donc elle converge.

❹ $\lim_{n\to+\infty}(b-a-1)S_{n-1}=(b-a-1)S$, donc $\lim_{n\to\infty}(n+b)u_n=a-(b-a-1)S$.

Supposons que $l=a-(b-a-1)S$ soit non nul, alors $u_n\approx\dfrac{l}{n+b}$, d'après le critère sur les séries dont le terme général garde un signe fixe. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ divergerait, ce qui est faux.

En conclusion $S=\dfrac{a}{b-a-1}$.

EXERCICE n° 2

❶ Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $a\in[0,1]$ telle que $f(a)>0$ (par exemple, sinon on remplace f par $-f$). Comme f est continue, il existe un voisinage de a, à savoir il existe un intervalle $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ f reste strictement positive.

❷ On construit un polynôme P qui vérifie $P(0)=0, P(\alpha)=1, P(\beta)=1$ et $P(1)=0$. Par exemple $P(x)=\sum_{k=0}^{3} a_k x^k$ avec les conditions:
$a_0=0,\ a_1+a_2+a_3=0,\ a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3=1,\ a_1\beta+a_2\beta^2+a_3\beta^3=1$ dans la cas général où $\alpha\neq 0$ et $\beta\neq 1$.

❸ On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\alpha f(x)(P(x))^n\,dx+\int_\alpha^\beta f(x)(P(x))^n\,dx+\int_\beta^1 f(x)(P(x))^n\,dx\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)(P(x))^n\,dx=+\infty,$$ (car $P(x)>1$ sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$)

❹ $$\int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx=\int_0^1 f(x)\Big(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\Big)^n\,dx=\sum_{k=0}^{np}\left(\int_0^1 f(x)b_k x^k\right)=0$$ par hypothèse.

L'hypothèse $f\neq 0$ est donc absurde puisque l'on obtient une contradiction entre les questions 3 et 4. En conclusion $f\equiv 0$.

EXERCICE n° 3

❶ $f_n'(x)=x^{n-1}\sin nx+x^n\cos nx=x^{n-1}(\sin nx+x\cos nx)$

Sur l'intervalle $[-a,a]$, on a $\sup_x\left|f_n'(x)\right|\le a^{n-1}(a+1)$ et $\sum a^{n-1}$ converge puisque $a\in]0,1[$.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[-a,a]$.

❷ Pour $x=0$, $f_n(0)=0$ et $\sum f_n(0)$ converge simplement.

Pour x fixé non nul, $\underset{n\to\infty}{Lim}\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\underset{n\to\infty}{Lim}|x|\dfrac{n}{n+1}\left|\dfrac{\sin(n+1)x}{\sin nx}\right|=|x|<1$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$ vers une fonction f d'après le théorème de d'Alembert.

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)$ est normalement convergente (question 1), elle converge uniformément et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=f^{'}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[-a,a]$.

❸ On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin nx+x^n\cos nx)=\frac{1}{x}\mathrm{Im}(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx})+\mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx})$$

Par ailleurs, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}=\sum_{n=1}^{+\infty}(xe^{ix})^n=\dfrac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}=\dfrac{x(\cos x-x)+ix\sin x}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$

En conclusion $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=\dfrac{x(\cos x-x)+\sin x}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$

❹ On vérifie que la dérivée de cette fonction $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$ est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=\dfrac{x(\cos x-x)+\sin x}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$

EXERCICE n° 4

❶ Par hypothèse

$$\exists\eta>0,\ \forall x,\ x\in]0,\eta[\Rightarrow x^2 f^{''}(x)\geq -k$$

Soit alors $\alpha>1$ fixé, et $x<\dfrac{\eta}{\alpha}$

$$f(\alpha x)=f(x)+(\alpha-1)x f^{'}(x)+\frac{(\alpha-1)^2}{2}x^2 f^{''}(\sigma)$$

où $\sigma\in]x,\alpha x[$, on en déduit

$$x f^{'}(x)=\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{2}x^2 f^{''}(\sigma)$$

mais

$$x^2 f''(\sigma)=\frac{x^2}{\sigma^2}\sigma^2\ f''(\sigma^2)\geq -k\frac{x^2}{\sigma^2}$$

donc

$$-\frac{(\alpha-1)}{2}x^2\ f''(\sigma)\leq \frac{\alpha-1}{2}k\frac{x^2}{\sigma^2}\leq \frac{\alpha-1}{2}k$$

Soit $\varepsilon>0$, on peut choisir $\alpha>1$ tel que $(\alpha-1)k<\varepsilon$ (k peut être supposé positif); pour α ainsi fixé $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}=0$, donc

$$\exists \eta_1<\eta,\ 0<x<\eta_1\ \Rightarrow\ \frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$x\in\left]0,\eta_1\right[\Rightarrow xf'(x)<\varepsilon$$

Fixons maintenant $0<\alpha<1$, on a de même

$$x\ f'(x)=\frac{f(x)-f(\alpha x)}{1-\alpha}+\frac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma),\quad \alpha x<\sigma<x$$

avec

$$\frac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma)\geq -\frac{1-\alpha}{2}k\frac{x^2}{\sigma^2}\geq -\frac{1-\alpha}{2\alpha^2}k$$

On peut choisir α tel que $\frac{1-\alpha}{\alpha^2}k<\varepsilon$, comme ci-dessus on obtient $\eta_2<\eta$ tel que

$$0<x<\eta_2\ \Rightarrow xf'(x)>-\varepsilon$$

On a donc

$$\forall x\in\left]0,Inf(\eta_1,\eta_2\right[\ ,\ \left|xf'(x)\right|<\varepsilon$$

et la propriété est démontrée.

❷ Soit $\varphi(x)=f(x)-\frac{x}{3}f'(x)$ et $\varphi(0)=0$

Par dérivation, on obtient :

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}f'(x)-\frac{x}{3}f''(x)\ \text{et}\ \varphi'(0)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}f''(x)-\frac{x}{3}f'''(x)\ \text{et}\ \varphi''(0)=0$$

$$\varphi'''(x)=-\frac{x}{3}f^{(4)}(x)\ \text{et}\ \varphi'''(0)=0$$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\left|f^{5}(x)\right|\leq M\Rightarrow\left|f^{(4)}(x)-f^{(4)}(0)\right|\leq M|x|$$

d'où

$$\forall x\in R,\ \left|\varphi'''(x)\right|\leq M\frac{x^2}{3}$$

Par application successive des accroissements finis, on obtient alors

$$\left|\varphi''(x)-\varphi''(0)\right|=\left|\varphi''(x)\right|\le M\,\frac{|x|^3}{9}$$

$$\left|\varphi'(x)-\varphi'(0)\right|=\left|\varphi'(x)\right|\le M\,\frac{x^4}{36}$$

$$\left|\varphi\;(x)-\varphi\;(0)\right|=\left|\varphi\;(x)\right|\le M\,\frac{|x|^5}{180}$$

En appliquant ceci à la fonction définie par : $f(x)=M\,\dfrac{x^5}{120}$ pour laquelle $f^{5}(x)=M$, on obtient :

$$\varphi(x)=\frac{x^5}{120}M-\frac{x^5}{72}M=\frac{x^5}{180}M$$

La valeur $\lambda=\dfrac{1}{180}$ est donc la meilleure valeur possible.

EXERCICE n° 5

❶ Supposons que la suite (x_n) soit croissante, alors :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\le\frac{1}{n}nx_n=x_n$$

Pour n fixé et $m>n$:

$$u_m=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{m}x_k\ge\frac{1}{m}\sum_{1}^{n}x_k+\frac{m-n+1}{m}x_n$$

Puis quand $m\to\infty$, $\underset{m\to\infty}{Lim}\,u_m=l\ge x_n$

donc $l\ge x_n\ge u_n$ et par passage à la limite $(x_n)\to l$

❷ La suite $(x_n)=(-1)^n$ n'est pas monotone et ne converge pas, pourtant $u_n=\dfrac{-1+(-1)^n}{n}$ tend vers zéro.

EXERCICE n° 6

❶ f est continue en 0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

En effet, si $x \in I - Q$, on a : $f(x) = \dfrac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ et

si $x \in I \cap Q$, $\left|\dfrac{p}{q}\right| < \alpha \Rightarrow |f(x)| = \left|\dfrac{x}{1+x+\frac{1}{q}}\right| \leq |x|$

❷ Soit $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} \in I \cap Q^*$,

$$\underset{\substack{x\to x_0\\ x\in I-Q}}{Lim} f(x) = \underset{x\to x_0}{Lim}\frac{x}{1+x} = \frac{x_0}{1+x_0} \neq f(x_0) = \frac{x_0}{1+x_0+\frac{1}{q_0}}$$

donc f n'est pas continue sur $I \cap Q^*$

❸ Montrons que f est continue sur $I - Q$

f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si $x \in I - Q$, la relation est vérifiée car f restreinte à $I - Q$ est continue.

Si $x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q^*$, alors

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{1+x+\frac{1}{q}} - \frac{x_0}{1+x_0}\right| = \frac{|x - x_0 - x_0/q|}{(1+x_0)(1+x_0+1/q+x+x_0)} \leq \frac{|x-x_0| + |x_0|/q}{1/2(1+x_0)^2}$$

dès que $|x - x_0| \leq 1/2(1+x_0)$, alors

$$1 + x_0 + \frac{1}{q} + x - x_0 \geq 1 + x_0 + \frac{1}{q} - |x - x_0| \geq \frac{1}{2}(1+x_0)$$

Considérons les rationnels tels que $\dfrac{|x_0|}{q} \geq \dfrac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon$ ou $q \leq \dfrac{4|x_0|}{(1+x_0)^2\varepsilon}$

Ces rationnels sont en nombre fini dans tout intervalle borné. Soit β le minimum de la distance de x_0 à ces points. On a pour $x \in I \cap Q^*$,

$$|x - x_0| < Inf\left(\frac{1}{2}(1+x_0), \beta, \frac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon\right) = \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

CONCOURS CESD 2002

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

1. (a) Comme la matrice M est symétrique, elle est diagonalisable. On calcule les valeurs propres et vecteurs propres de $(1+p)M$, et on trouve :

$$(1+p)M = ADA^{-1}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$M^n = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1-p}{1+p})^n \end{pmatrix} A^{-1}$$

ce qui donne pour $n \to \infty$:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les deux proportions sont égales. En effet, on peut raisonner sans calcul : après l'opération, la partie de bière dans la bouteille de vin prend un certain volume V qui avant était occupé par du vin. Or, lors de l'opération on ne perd pas de liquide et on a encore la même quantité dans chaque bouteille. Donc c'est précisément ce volume V de vin qui se trouve maintenant dans la bouteille de bière. (On peut aussi passer par un calcul, voir (c).)

(c) Soit a_n (resp. b_n) la proportion de bière dans la bouteille de vin (resp. de bière) après la n-ième opération. Evidemment, au départ, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Détaillons la $(n+1)$-ième opération. En transvasant une proportion p, $0 < 1 < p$, de la bouteille de vin dans la bouteille de bière, on obtient encore la proportion a_n dans la bouteille de vin et la proportion $\frac{1}{1+p}(b_n + pa_n)$ dans la bouteille de bière. En retransvasant on obtient alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-p)a_n + \frac{p}{1+p}(b_n + pa_n) = \frac{1}{1+p}(a_n + pb_n), \\ b_{n+1} &= \frac{1}{1+p}(b_n + pa_n). \end{aligned}$$

En écriture matricielle avec la matrice A de la partie (a), cela devient :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Donc avec le résultat de (a) on trouve $\lim a_n = \lim b_n = 1/2$.

2. Le chemin direct pour le bateaux est un grand cercle sur la terre, donc un cercle de circonférence 40000 km, tandis que le chemin direct pour le sous-marin est la droite entre les deux îles. On fera une esquisse du grand cercle, où O désigne le centre du cercle, M et R les deux îles, S le milieu du segment de droite entre M et S, et α l'angle MOR. On a

$$\begin{aligned} \alpha : (2\pi) &= 150 : 40000, \\ OM &= 40000\,\mathrm{km} : (2\pi), \\ OS : OM &= \cos(\alpha/2). \end{aligned}$$

La profondeur demandée est alors

$$\begin{aligned} OM - OS \quad &= OM - OM\cos(\alpha/2) = OM(1-\cos(\alpha/2)) \\ &= 20000\,\mathrm{km}/\pi(1-\cos(3\pi/800)) = 441,78\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

C'est donc beaucoup plus que la plupart parmi nous auraient estimé...

3. (a) Si les deux fonctions sont solutions, on doit avoir $ax^2 - 2x = -b$ et $ax^3 - 3x^2 = -b$, donc $a(x^3 - x^2) - 3x^2 + 2x = 0$, d'où

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{3x-2}{x(x-1)}, \\ b &= -\tfrac{x^2}{x-1}. \end{aligned}$$

(b) L'équation différentielle $(*)$ est linéaire, de premier ordre, et sur chaque intervalle I_j le coéfficient de y' ne s'annulle pas. Comme x^2 et x^3 sont deux solutions linéairement indépendantes, nous savons alors par la théorie des équations différentielles linéaires que la solution générale sur I_j est donnée par $y_j = x^2 + \lambda_j(x^3 - x^2)$, où $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$.

(c) D'après ce qui précède la restriction à l'intervalle I_j d'une solution f doit être de la forme $y_j = x^2 + \lambda_j(x^3 - x^2)$. La condition $f(-1) = 0$ détermine $\lambda_1 = -1/2$, et la condition $f(2) = 0$ détermine $\lambda_3 = -2$. Maintenant il faut choisir λ_2 convenablement, pour que la "recollée" f soit de classe C^1. D'abord par continuité il faut que $y_1(0) = y_2(0)$ et $y_2(1) = y_3(1)$. On voit immédiatement que ces deux conditions sont vérifiées pour tous les choix de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Pour que f soit continument différentiable en 0 il faut et il suffit que $y_1'(0) = y_2'(0)$. Mais encore ici $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ pour tous les choix de λ_1, λ_2. En revanche la dernière condition, $y_2'(1) = y_3'(1)$, donne $2 + \lambda_2 = 2 + \lambda_3$, donc $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. La fonction demandée existe alors et elle est unique.

(d) Pour avoir une fonction de classe C^2 on a les 2 conditions de "recollement" supplémentaires $y_1''(0) = y_2''(0)$ et $y_2''(1) = y_3''(1)$. Elles s'écrivent $2(1-\lambda_1) = 2(1-\lambda_2)$ et $2(1+2\lambda_2) = 2(1+2\lambda_3)$. Donc les conditions entrainent que pour toute solution de $(*)$ de classe C^2 on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, et ceci n'est pas vérifié pour l'unique solution de classe C^1 trouvée ci-dessus. Donc il n'y a pas de telle solution dans la classe C^2.

4. Une condition nécessaire pour que l'espace des solutions a la dimension 1, est que la matrice du système homogène associé a le rang 2. Cette matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $\det(M) = pqr - pq - pr - qr$. Pour trouver le rang de M avec $0 \leq p, q, r \leq 2$, il y a plusieurs cas à considérer :
– Au moins un parmi les p, q, r est nul.
Si $p = q = r = 0$, on voit immédiatement que rg(M)=1.
Si précisément 2 nombres parmi p, q, r sont nuls, alors $\det M = 0$ et il y a une sous-matrice 2×2 de rang 2. Donc rg(M)=2.
Si précisément 1 nombre parmi p, q, r est nul, alors $\det M \neq 0$. On a donc rg(M)=3.
– $p, q, r \geq 1$ et au moins un parmi les p, q, r vaut 1.
Supposons par exemple $p = 1$. Alors $\det M = -q - r < 0$, donc rg(M)=3.
– $p = q = r = 2$. Alors $\det(M) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \neq 0$, donc rg($M$)=3.
Ainsi l'espace vectoriel du système homogène a la dimension 1 précisément quand (p, q, r) est $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ou $(0, 0, 2)$. L'espace des solutions du système inhomogène est alors de dimension 1 précisément si (p, q, r) est l'un des ces 6 triplets et si le système inhomogène possède une solution, i.e., si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-r & 0 \end{pmatrix}.$$

a le même rang que M, donc est de rang 2. C'est le cas seulement pour $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ et $(p, q, r) = (2, 0, 0)$.

5. La fonction continue sin est Riemann-intégrable. La définition de l'intégrabilité nous donne :

$$\frac{2}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi/n)}{n}.$$

6. Les théorèmes d'addition donnent :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\cos x} &= \sqrt{1-\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} \\
&= \sqrt{2\sin^2(x/2)} \\
&= \sqrt{2}\ |\sin(x/2)|.
\end{aligned}$$

Donc on a comme primitive $-2\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $[0,2\pi]$ et $2\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $[-2\pi,0]$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{3\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2}(\cos(0)-\cos(-\pi/2)-\cos(3\pi/4)+\cos(0)) \\
&= 2\sqrt{2}(2+1/\sqrt{2}) \\
&= 2(1+2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

SESSION D' AVRIL 2003

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

1. $G_1 = \alpha_1^0 = 1$, $G_2 = \alpha_2^0 + \alpha_2 = 0$, $G_3 = i\sqrt{3}$ $G_4 = 2 + 2i$.

   Si n divise r alors $\alpha_n^r = 1$ et $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr} = n$.

   Si n ne divise pas r alors $\alpha_n^r \neq 1$ et $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr} = \frac{1-\alpha_n^{rn}}{1-\alpha_n^r} = 0$.

2. Les décompositions sont $X^5 - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(X - \alpha_5^k)$ sur $\mathbb{C}$

   et $X^5 - 1 = (X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

3. L'égalité $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ prouve $(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1)$.

   L'égalité des deux polynômes donne les relations $2 + 4\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = 1$ et $-2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 2\cos(\frac{4\pi}{5}) = 1$.

   Les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ sont les solutions de l'équation $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ est la solution négative.

   On trouve $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

   $$G_5 = 1 + \alpha_5 + \alpha_5^4 + \alpha_5^9 + \alpha_5^{16} = 1 + 2\alpha_5 + 2\alpha_5^{-1} = \sqrt{5}.$$

4. L'expression de A_n est $A_n = (\alpha_n^{(i-1)(j-1)})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$. $A_n^2 = (c_i^j)_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ avec $c_i^j = \sum_{k=1}^n \alpha_n^{(i+j-2)(r-1)} = H_{i+j-2}$. D'après le calcul de H_r, on obtient $A_n^2 = nB_n$.

   $\mathrm{Tr}A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{k^2} = G_n$.

   $B_n^2 = (\sum_{r=1}^n b_i^r b_r^j)_{i,j\in\{1,\cdots,n\}} = I_n$.

5. Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de A associé à λ alors $Au = \lambda u$ et $A^p u = \lambda^p u$, λ^p est une valeur propre de A^p.

   Si λ est une valeur propre de A_n alors λ^4 est une valeur propre de $n^2 I_n$ et donc $\lambda^4 = n^2$.

   A_n admet au plus quatre valeurs propres parmi $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$

6. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ alors $x = \frac{1}{2}(x - u(x)) + \frac{1}{2}(x + u(x))$,
   $\frac{1}{2}(x - u(x)) \in \ker(u + Id)$, $\frac{1}{2}(x + u(x)) \in \ker(u - Id)$.
   Si $y \in \ker(u - Id) \cap \ker(u + Id)$ alors $u(y) = y = -y$ donc $y = 0$. On a montré que
   $$\mathbb{C}^n = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id).$$
   Soit B_- une base de $\ker(u-Id)$ et B_+ une base de $\ker(u+Id)$, dans la base $B_- \cup B_+$ de $\mathbb{C}^n$, u admet une matrice diagonale. Donc U est diagonalisable. Comme $B_n^2 = I_n$, B_n est diagonalisable.

7. $v(e_1) = e_1$,

   pour tout $i \in \{0, \cdots, p\}$ $v(e_{i+2} + e_{n-i}) = e_{i+2} + e_{n-i}$ et

   $v(e_{i+2} - e_{n-i}) = -e_{i+2} + e_{n-i}$. Les vecteurs e_1, $(e_{i+2} - e_{n-i})_{i \in \in \{0,\cdots,p\}}$ et $(e_{i+2} + e_{n-i})_{i \in \in \{0,\cdots,p\}}$ forment une base de $\mathbb{C}^n$. Donc 1 est valeur d'ordre $p+1$ de base de vecteur propre $(e_{i+2} + e_{n-i})_{i \in \in \{0,\cdots,p\}} \cap (e_1)$ et -1 est valeur propre d'ordre p de base de vecteur propre $(e_{i+2} - e_{n-i})_{i \in \in \{0,\cdots,p\}}$.

   Le polynôme caractéristique de B_n est $\det(B_n - Xid) = -(X+1)^p (X-1)^{p+1}$.

8. $Q(X)$ et $(X - a_1)$ sont premiers entre eux car $a_i \neq a_1$ pour $i > 1$. Le théorème de Bezout prouve qu'il existe deux polynômes R et S tels que
   $$R(X)Q(X) + S(X)(X - a_1) = 1.$$
   Soit $x \in E$,
   $$x = R(w)Q(w)x + S(w)(w - a_1)x$$
   avec $R(w)Q(w)x \in \ker(w - a_1)$ et $S(w)(w - a_1)x \in \ker Q(w)$.

   Soit $y \in \ker(w - a_1 Id) \cap \ker Q(w)$ alors $y = R(w)Q(w)y + S(w)(w - a_1)y = 0$. Donc
   $$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$
   Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété “Pour tout espace vectoriel F de dimension n sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme v de F, et tout polynôme à racines simples de la forme $P(X) = \Pi_{i=1}^{d_P}(X - a_i)$ vérifiant $P(v) = 0$, alors
   $$F = \ker(v - a_1 Id) \oplus \ker(v - a_2 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(v - a_{d_P} Id).\text{”}$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vrai. On suppose que les propriétés $\mathcal{P}_j$ pour $j < n$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit w un endomorphisme tel que $P(w) = 0$ avec $P(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_d)$ sur E un espace vectoriel de dimension n. D'après le début de la question,

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$

Si $\ker(w - a_1 Id) = \{0\}$ alors $Q(w) = 0$ et on ré-applique la même propriété jusqu'à obtenir l'existence d'un j tel que

$E = \ker(w - a_j Id) \oplus \ker Q'(w)$ avec $\ker(w - a_j Id) \neq \{0\}$ pour $i < j$ $\ker(w - a_i Id) = \{0\}$ et $Q' = (X - a_{j+1})\cdots(X - a_d)$. L'application $w' = w|_{\ker Q'(w)}$ est un endomorphisme de $\ker Q'(w)$, $Q'(w') = 0$. $\ker Q'(w)$ est de dimension strictement inférieure à n. En appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\ker Q'(w) = \ker(w' - a_{j+1} Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w' - a_d Id).$$

Pour $k > j$ $\ker(w - a_k Id) \subset \ker(Q'(w))$ donc $\ker(w - a_k Id) = \ker(w' - a_k Id)$. Finalement

$$\ker Q'(w) = \ker(w - a_{j+1} Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id),$$

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id).$$

En prenant une base appropriée à cette décomposition on montre que w est diagonalisable.

9. A_n est solution de l'équation $A_n^4 - n^2 I_n = 0$.

   Soit $P(X) = (X + \sqrt{n})(X - \sqrt{n})(X + i\sqrt{n})(X - i\sqrt{n})$ on a $P(A_n) = 0$. Le résultat de la question précédente montre que A_n est diagonalisable de valeurs propres λ_k appartenant à l'ensemble $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$

10. La matrice D_n^2 est équivalente à la matrice A_n^2. Donc n est valeur propre de A_n^2 d'ordre $a + b$ et $-n$ est valeur propre d'ordre $c + d$. D'après la question 7, $a + b = p + 1$ et $c + d = p$.

11. Soit ϕ' de $T \times T$ sur $T \times T$ définie par $\phi'(u, v) = (u + v, v)$ si $u + v < n$ $\phi(u, v) = (u + v - n, v)$ si $u + v \geq n$. On a $\phi\phi' = Id$ donc ϕ est une bijection. Notons $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et en utilisant $\alpha_n^n = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} G_n \overline{G}_n &= \sum_{r \in T} \alpha_n^{r^2} \sum_{s \in T} \alpha_n^{-s^2} \\ &= \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{r^2 - s^2} = \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{\phi_1(r,s)^2 - \phi_2(r,s)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

On a $\alpha_n^n = 1$ donc $G_n\overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T^2} \alpha_n^{(r-s)^2-s^2}$.

$$G_n\overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T^2} \alpha_n^{r^2-2sr} = \sum_{r\in T} \alpha_n^{r^2} \sum_{s\in T} \alpha_n^{-2sr} = \sum_{r\in T} \alpha_n^{r^2} H_{-2r} \tag{2}$$

En utilisant le fait que H_{-2r} est non nul et vaut n si et seulement si n divise $2r$, donc si est seulement si n divise r (car n est impair), soit encore si et seulement si $r = 0$ (car $r \in T$). Finalement

$$G_n\overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T^2} \alpha_n^{r^2-2sr} = \sum_{r\in T} \alpha_n^{r^2} H_{-2r} = \alpha_n^0 n = n \tag{3}$$

Finalement $|G_n| = \sqrt{n}$.

12. $|\mathrm{Tr}A_n| = |a\sqrt{n} - b\sqrt{n} + ic\sqrt{n} - id\sqrt{n}| = n$.
    Donc $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$.

13. On suppose que $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. A_n est une matrice circulaire donc

$$\begin{aligned} \det A_n = \Pi_{(i,j)\in T^2, i<j}(\alpha_n^i - \alpha_n^j) &= \Pi_{(i,j)\in T^2, i<j}\alpha_n^i(1-\alpha_n^{j-i}) \\ &= i^{2(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{-k})^{n-k} \\ &= i^{2(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{n-k})^{n-k} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (\det A_n)^2 &= i^{4(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^k)^k \Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{-k})^{n-k} \\ &= i^{4(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{-k})^n \Pi_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(1-\alpha_n^{-k})}{(1-\alpha_n^k)}\right)^k \\ &= i^{4(n-1)} n^n \Pi_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(1-\alpha_n^{-k})}{(1-\alpha_n^k)}\right)^k = i^{2p(2p+1)}n^n \end{aligned} \tag{5}$$

Donc $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = i^{p(2p+1)}n^{\frac{n}{2}}$. On en déduit
$\det(A_n) = i^{c+d+2b+2d}(\sqrt{n})^n = i^{p(2p+1)}n^{\frac{n}{2}}$, donc il existe $m' \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p + 2b + 2d = p(2p+1) + 4m'.$$

En simplifiant on trouve $b + d = p^2 + 2m'$. Comme $p^2 - p$ est divisible par deux il existe $m'' \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 = p + 2m''$ et on trouve $b+d = p+2(m'+m'')$.

Comme $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$ et $a-b$ et $c-d$ sont des entiers, les valeurs de a b c et d vérifient l'un des quatre cas suivants $a = b$ et $c = d+1$, $a = b$ et $c+1 = d$, $a = b+1$ et $c = d$, $a+1 = b$ et $c = d$.

Ces quatre cas s'écrivent

$$a = b = \frac{p+1}{2}, d = \frac{p-1}{2}, c = \frac{p+1}{2}$$

$$a = b = \frac{p+1}{2}, c = \frac{p-1}{2}, d = \frac{p+1}{2}$$
$$a = 1 + \frac{p}{2}, b = \frac{p}{2}, c = \frac{p}{2}, d = \frac{p}{2}$$
$$a = \frac{p}{2}, b = 1 + \frac{p}{2}, c = \frac{p}{2}, d = \frac{p}{2}$$

La condition $b + d = p[2]$ exclut le deuxième et le quatrième cas.

Les coefficients a, b, c, d sont des entiers,

si p est pair $a = 1 + \frac{p}{2}$ $b = \frac{p}{2}$ $c = \frac{p}{2} d = \frac{p}{2}$ et

si p est impair $a = b = \frac{p+1}{2}$ $d = \frac{p-1}{2}$ $c = \frac{p+1}{2}$.

14. $\mathrm{Tr} A_n = \sqrt{n}(a - b + ic - id)$.

    Si p est pair $\mathrm{Tr} A_n = \sqrt{n}$, si p est impair $\mathrm{Tr} A_n = i\sqrt{n}$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère deux variables réelles discrètes X et Y définies par $X=(x_1,...,x_n)$ et $Y=(y_1,...,y_n)$.

❶ On pose : $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$. Cette fonction est strictement convexe et admet donc un minimum pour les valeurs qui annulent les deux dérivées partielles, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0$$

La résolution du système donne :

$$b=\overline{Y}-a\overline{X} \text{ et } a=\frac{\sum_i x_i y_i-n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_i x_i^2-n\overline{X}^2}$$

❷ On trouve $\overline{X}=14$, $\overline{Y}=50$, d'où $a=1{,}56$ et $b=28{,}125$

EXERCICE n° 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

❶ Pour $n = 2$, $r_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} = u_1 + \frac{u_2}{2}$. La relation est donc vérifiée.

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n(n+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1}$$

❷ $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$

La première série est convergente et le deuxième terme tend vers zéro par hypothèse. La suite (r_n) a donc une limite finie et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❸ Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Pour n grand, $|s_n| \leq l$ et $\left|\frac{s_n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{l}{n(n+1)}$, donc l'hypothèse 2a) est vérifiée. De plus $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est convergente d'après la question précédente.

❹ On vérifie que : $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ et que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ est convergente.

❺. On considère la suite (s_n) définie par :

$s_n = \begin{cases} 2k & si \;\; n = 2k \\ -(2k+1) & si \;\; n = 2k+1 \end{cases}$. Elle vérifie les relations demandées. En effet :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{E(n+1/2)-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{1}{2}$$

(série convergente) et $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}$ n'existe pas.

EXERCICE n° 3

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans A et un jeton dans B que l'on échange en les replaçant dans B et A (étape 1).Puis on recommence la même opération.
Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

❶ Les valeurs possibles de X_n sont 0, 1 ou 2.

❷ Calcul de la probabilité de passage d'un état n à un état $n+1$:

Etat n	Etat $n+1$	Probabilité P
(0, 0)	(0, 1)	1
(1, 1)	(0, 1)	1
(0, 1)	(0, 0)	1/4
(0, 1)	(0, 1)	2/4
(0, 1)	(1, 1)	1/4

❸ $a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} b_n$,

$c_{n+1} = P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} b_n$ et $b_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) = a_n + c_n + \frac{1}{2} b_n$, puis

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, d'où $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

❹ Du système précédent, on peut en déduire que si les suites convergent, alors $\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = 4 \underset{n}{Lim}\, b_n$

La matrice T admet pour valeurs propres : 1, 0 et –1/2. Comme ces valeurs sont distinctes la matrice est diagonalisable.
Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par (1, 4, 1).
Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par (1, 0, -1).
Le sous espace propre associé à la valeur propre -1/2 est engendré par (1, -2, 1).

On obtient : $T^n = P\Delta^n P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$V_{n+1} = T^n V_1 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1/2^n \\ 4-1/2^{n-1} \\ 1+1/2^n \end{pmatrix}$$

En conclusion $\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = \dfrac{1}{6}$ et $\underset{n}{Lim}\, b_n = \dfrac{2}{3}$

EXERCICE n° 4

❶ On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\underset{x\to 0}{Lim}\, f(x) = f(0) = 0$

❷ Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\underset{x\to 0}{Lim}\, \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{x\to 0}{Lim}\, \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \dfrac{u(x^2)}{x^2}$.

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur R^{+*}.

La fonction f est strictement croissante et continue sur R, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

❸ $e^{x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{(x^2)^2}{2!} + ... + \dfrac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2!} + ... + \dfrac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}e(x)$ avec $\underset{x\to 0}{Lim}\, e(x) = 0$.

On prolonge e en 0 par $e(0) = 0$

❹ $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$

Pour f^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ et

$$f^{-1} o\ f(x) = x \ \Rightarrow\ a_1 (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3 (x^3 + 3\frac{x^5}{2}) + a_5 x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3} a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{7}{12} x^5 + o(x^5)$

EXERCICE n° 5

❶ Comme A, B et $A+B$ sont des parties majorées non vides de R, les bornes supérieures respectives existent. Notons $a = SupA$ et $b = SupB$.

a) $\forall x \in A, x \le a$ et $\forall y \in B, y \le b$, donc $\forall z \in A+B, z \le a+b$.

$a+b$ est donc un majorant de $A+B$.

b) $\forall e > 0, \exists x \in A / x > a - \frac{e}{2}$ et $\exists y \in B / y > b - \frac{e}{2}$, donc

$\exists z = x + y \in A + B / z > a + b - e$.

$a+b$ est donc le plus petit des majorants de $A+B$.

Ces deux assertions montrent que

$$Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B)$$

❷ Comme A, B et AB sont des parties majorées non vides de R^+, les bornes supérieures respectives existent. Notons encore $a = SupA$ et $b = SupB$.

a) $\forall x \in A, x \le a$ et $\forall y \in B, y \le b$, donc $\forall z \in AB, z \le ab$ (car toutes les valeurs sont positives).

ab est donc un majorant de AB.

b) $\forall e > 0, \exists x \in A / x > a - e$ et $\exists y \in B / y > b - e$, donc

$\exists z = xy \in AB / z > ab - e(a + b - e)$. Il suffit de choisir $e < Min(a,b)$.

ab est donc le plus petit des majorants de AB.

Ces deux assertions montrent que

$$Sup(AB) = Sup(A) \times Sup(B)$$

EXERCICE n° 6

❶ Pour que l'intégrale $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ soit définie, il faut $1-t^2>0$, soit $-1<t<1$. Cette fonction étant impaire, il suffit de faire l'étude pour $x\geq 0$. Pour $x=1$, on a une intégrale généralisée de seconde espèce convergente (en effet au voisinage de 1, $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ et l'intégrale est convergente). Donc l'intégrale est définie sur $[-1,1]$.

Sa dérivée est : $f^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction est continue et strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque.

❷ - On a $g^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}$, g est impaire et $g^{''}(x)=\frac{\frac{-x^3}{2}}{(1+\frac{x^4}{4})^{3/2}}$.

La fonction est donc strictement croissante, concave sur R^+ et convexe sur R^-

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt$$

- Pour $0\leq x\leq 1$, $1\leq\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\leq\sqrt{\frac{5}{4}}$, d'où $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq g^{'}(x)\leq 1$

  Pour $x\geq 1$, $g^{'}(x)<\frac{2}{x^2}$ (on vérifie cette inégalité par élévation au carré)
- Pour $x\geq 1$, on a :

$$0\leq g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+\int_1^x \frac{2}{t^2}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+2$$

- La fonction g est continue, strictement croissante et majorée, donc elle admet une limite finie a quand $x\to+\infty$.

❸ g est inversible. Notons j l'application réciproque de g, on a :

$$j(x)=j(0)+xj^{'}(0)+\frac{x^2}{2!}j^{''}(0)+\frac{x^3}{3!}j^{3}(0)+o(x^3)$$

Par ailleurs, $j^{'}(x)=\sqrt{1+\frac{j^{''}(x)}{4}}$, $j^{'}(0)=1, j^{''}(0)=0$ (j *impaire*) et $j^{3}(0)=0$

On obtient : $j(x)=x+o(x^3)$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 heures

- **Exercice 1 :**

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\tilde{x})\frac{(x-x_0)^2}{2}$ avec $\tilde{x} \in \mathcal{B}(x_0; \|x - x_0\|_E)$.
2. Une partie de l'énoncé a été omise ici. Il fallait lire
$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \Longleftrightarrow f \text{ convexe}$$
Et ainsi avec le point précédent, on obtient $f'' > 0 \Longrightarrow f$ convexe.
3. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées du moment qu'elles mettent en application les points précédents. On peut par exemple étendre le résultat du point 2 au cas où $f" \geq 0$. Comme $f"(x) = 12x^2 \geq 0$, on applique ensuite la définition d'une fonction convexe avec $\lambda = \frac{1}{2}$.

- **Exercice 2 :**

1. On note
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$
Afin de simplifier les calculs, on peut effectuer un premier changement de variable défini par $\tilde{x} = \frac{x-m}{\sigma}$. On obtient
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} d\tilde{x}$$
Et, en passant par
$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2\pi} dxdy$$
Il suffit maintenant d'effectuer un changement de variables en coordonnées polaires classique pour obtenir $I = 1$.
2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.
Soit
$$\Phi_n(t) \quad = \quad \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$$

$$= \left(\exp\left(-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\sigma^2}{2}\right)\right)^n$$
$$= \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

Ainsi la limite de $\Phi_n(t)$ est égale à $\phi(t)$ pour tout t.

- **Exercice 3 :**
  1. $xf(x)$ est divergente de première espèce sur $\mathbb{R}^+$ car équivalente à $\frac{1}{x}$.
  2. $xf(x)$ est divergente de première espèce sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, ces deux intégrales valant $+\infty$ dans les deux cas. On obtient donc une intégrale sur $\mathbb{R}$ divergente de seconde espèce (i.e : la loi de Cauchy ne possède pas d'espérance).

- **Exercice 4 :**
  1. Soient $f, g \in C([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. $f = 0$ entraîne $\|f\|_1 = 0$, de plus comme f est continue sur $[0;1]$ et que $|f|$ est positive $\|f\|_1 = 0$ entraîne $f = 0$. Enfin $\|f\|_1$ est toujours positive.
     (a) On considère
     $$\begin{cases} f_n(x) = 0 \quad si\ x \in [0, 1/2] \\ f_n(x) = nx - n/2 \quad si\ x \in]1/2, 1/2 + 1/n[\\ fn(x) = 1 \quad si\ x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$
     (b) Soit n et p deux entiers non nuls quelconque, $|f_n - f_p| \leq |f_n| + |f_p|$ est toujours inférieur à 2. De plus f_n coincide avec f_p hors de $]1/2, 1/2 + 1/p[$. Soit n et p deux entiers avec $n > p$, on a alors
     $$\|f_n - f_p\|_1 = \int_{1/2}^{1/2+1/p} |f_n(x) - f_p(x)| dx \leq \frac{2}{p}$$
     Ce qui prouve que f_n est de Cauchy.
     (c) On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction f continue, limite de f_n au sens de la norme 1. On a
     $$\int_0^{1/2} |f(x)| dx = \int_0^{1/2} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_1$$
     et pour $n \geq p$,
     $$\int_{1/2+1/p}^{1} |1 - f(x)| dx \leq \int_{1/2+1/p}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_1$$
     (d) En passant à la limite dans les deux inégalités, on obtient d'une part
     $$\int_0^{1/2} |f(x)| dx = 0$$
     Et ainsi f est nulle sur $[0, 1/2]$. Et d'autre part, pour n et p tendant vers l'infini, on obtient également $\int_{1/2}^{1} |1 - f(x)| dx = 0$. Et ainsi, $f(1/2) = 1$. Ces deux points sont en contradiction ($f(1/2) = 0$ et $f(1/2) = 1$).
     On a donc trouvé une suite de Cauchy qui ne converge pas pour cette norme. L'espace associé avec cette norme n'est donc pas complet.

- **Exercice 5 :**
  1. On appelle $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1+i et 1-i respectivement.
  2. Les espaces propres associés sont engendrés par $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ et $\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$ sur la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
  3. $T = U + iV$ et $\bar{T} = U - iV$.
  4. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. la solution générale du système est

     $$X_n = \alpha(1+i)^n T + \bar{\alpha}(1-i)^n \bar{T}$$

     En développant les valeurs propres sous la forme trigonométrique on obtient

     $$X_n = \alpha\sqrt{2}^n (cos(\frac{n\pi}{4}) + isin(\frac{n\pi}{4}))T + \bar{\alpha}\sqrt{2}^n (cos(\frac{n\pi}{4}) - isin(\frac{n\pi}{4}))\bar{T}$$

     et en notant $\alpha = a + ib$ on a

     $$X_n = 2\sqrt{2}^n \left[a\left(cos(\frac{n\pi}{4})U - sin(\frac{n\pi}{4})V\right) - b\left(sin(\frac{n\pi}{4})U + cos(\frac{n\pi}{4})V\right)\right]$$

- **Exercice 6 :**
  A tout instant on a $r(t)/h(t) = tan(30) = 1/\sqrt{3}$ où $r(t)$ est le rayon du disque formé par la surface du liquide à l'instant t.
  L'aire $A(t)$ est donc de $\pi r^2(t) = \pi h^2(t)/3$. On a , par hypothèse $a = 5.10^{-5}m^2$. Ainsi, en utilisant la dynamique donnée, on obtient

  $$h'(t) = -\sqrt{2g}\frac{a}{A(t)\pi}\sqrt{h(t)} = -3a\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}}(t)$$

  On obtient l'équation différentielle du premier ordre

  $$h'(t) = -Kh^{-\frac{3}{2}}(t)$$

  avec $K = \sqrt{19,6}.15.10^{-5}/\pi$. Ainsi

  $$h(t) = (-2,5Kt + C)^{2/5}$$

  Puisque $h(0) = 0,1$, on a $C = (0,1)^{5/2} = 0,00316$. L'entonnoir est vide si $a = A$ et $h(t) = 6,9.10^{-3}$. On trouve $T = 6$ secondes.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

I. Soit $X = (x, y) \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, le calcul donne

$$^tXAX = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

En particulier si b est définie positive alors pour tout $x \neq 0$ on a $\alpha x^2 > 0$ donc $\alpha > 0$. On trouve

$$^tXAX = \alpha(x + \frac{\beta}{\alpha}y)^2 + (\gamma - (\frac{\beta}{\alpha})^2)y^2. \tag{1}$$

Cette quantité (définie pour α non nul) est positive pour tout couple de x, y non nul si et seulement si $\alpha > 0$ et $(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}) > 0$ donc si et seulement si $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$. Donc on a montré que si b est positive alors $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$. Inversement si $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$ alors on utilise l'expression (1) et on a montré que b est positive.

II.

1. Le vecteur $w = (\alpha, \alpha, -1)$ est orthogonal aux deux vecteurs u_α et v_α et une équation cartésienne du plan P_α est :
   un point de coordonnées (x, y, z) appartient à ce plan si et seulement si $\alpha x + \alpha y - z = 0$.
2. Soit $(x, y, z) \in P_\alpha$ alors $z = \alpha(x + y)$
   $$b_\alpha((x, y, z), (x, y, z)) = x^2 + y^2 - \alpha^2(x + y)^2.$$
   b_α est positive si et seulement si pour tout $(x, y) \neq 0$ alors $x^2 + y^2 - \alpha^2(x + y)^2 > 0$. D'après la question I on trouve b_α est positive si et seulement si $(1 - \alpha^2) > 0$ et $(1 - \alpha^2)^2 - \alpha^4 > 0$. Donc si et seulement si $|\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Pour premier vecteur on choisit
   $$e_1 = \frac{u_\alpha}{b(u_\alpha, u_\alpha)^{\frac{1}{2}}} = (\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, 0, \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}).$$
   Le deuxième vecteur est
   $$e_2 = (\frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}, \frac{1}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}, \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}).$$

4. Soit f de matrice associée A. Soit $\tilde{B}$ la matrice associée à B on a

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$B(f(x,y,z), f(x',y',z')) = \ ^t(x,y,z) \ ^tA\tilde{B}A(x',y',z'))$$

L'application f vérifie la propriété voulue si et seulement si

$$^tA\tilde{B}A = \tilde{B}.$$

III.

1. q change de signe si et seulement si q n'est pas positive et $-q$ n'est pas positive. D'après la question I, si on note

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

une matrice de f, la fonction q change de signe si et seulement si $\alpha\beta - \gamma^2 < 0$. Comme $\det f = \alpha\beta - \gamma^2$, q change de signe si et seulement si $\det f < 0$.

2. Supposons que Z_q est un sous-espace vectoriel et que q change de signe. Donc il existe u et v tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$. Alors u et v sont linéairement indépendants et forment une base de E. l'application $\alpha \to h(\alpha) = q(u + \alpha v)$ est continue , $h(0) < 0$ et $\lim_{h\to\infty} h(\alpha) = \infty$. Donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $q(u+\alpha_0 v) = 0$. l'application $\alpha \to g(\alpha) = q(u - \alpha v)$ est continue , $g(0) < 0$ et $\lim_{h\to\infty} g(\alpha) = \infty$. Donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $q(u - \alpha_1 v) = 0$. Les vecteurs $u + \alpha_0 v$ et $u - \alpha_1 v$ forment une base de E, et appartiennent à Z_q donc $Z_q = E$, et $q = 0$. Ceci contredit le fait que q change de signe. Supposons que q ne change pas de signe, sans perte de généralité supposons que q est positive, montrons que Z_q est un espace vectoriel. Notons

$$Q(x,y) = \frac{1}{2} < f(x), y > + \frac{1}{2} < f(y), x > .$$

Comme f est autoadjoint $Q(x,y) =< f(x), y >$. Pour tout $(x,y) \in E^2$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $q(x + \alpha y) \geq 0$. Comme

$$q(x + \alpha y) = q(x) + 2\alpha Q(x,y) + q(y),$$

on a la relation $|Q(x,y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$. Soit $x \in Z_q$ alors on obtient pour tout $y \in E$, $Q(x,y) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker} f$. Inversement si $x \in \mathrm{Ker} f$ alors $q(x) = 0$. Donc $Z_q = \mathrm{Ker} f$, et Z_q est un espace vectoriel.

3. Si q ne change pas de signe sur E, d'après la question précédente $Z_q = \text{Ker} f$ donc $\dim Z_q = 2 - \text{rang} f$.

4. La réponse est non. Prenons par exemple la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det C = 1$ et la forme quadratique associée à C change de signe. i.e. $C((x,y,z),(x,y,z)) = x^2 - y^2 - z^2$.

IV.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement si $a + d = 0$. Donc finalement $F = \{ae_1 + be_2 + ce_3, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ de base (e_1, e_2, e_3).

2. Le crochet est symétrique $\text{Tr}\,{}^tAB = \text{Tr}\,{}^tBA$, bilinéaire, positive $\text{Tr}\,{}^tAA = \sum_i \sum_j a_{i,j}^2$ si $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,2\}}$. Et $\text{Tr}\,{}^tAA = 0$ implique $A = 0$.

3. Le projeté orthogonal de A sur F est $A - P'(A)$ si $P'(A)$ désigne le projeté orthogonal sur l'orthogonal de F. L'orthogonal de F est l'espace engendré par Id, et le projeté $P'(A)$ est $1/2\text{Tr}(A)\text{Id}$. Le projeté orthogonal de A sur F est $A - 1/2(\text{Tr}A)\text{Id}$.

4. On trouve $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $f_2 = e_2$ et $f_3 = e_3$.

5. La forme quadratique $\det A$ définit une unique forme bilinéaire symétrique $q(A,B) = \frac{\det(A+B) - \det(A-B)}{4}$ telle que $q(A,A) = \det A$ qui définit une unique forme linéaire autoadjoint u par $q(A,B) =< u(A), B >$.

6. La matrice est donnée par les éléments

$$u = \begin{pmatrix} \det f_1 & q(f_1,f_2) & q(f_1,f_3) \\ q(f_2,f_1) & \det f_2 & q(f_2,f_3) \\ q(f_3,f_1) & q(f_3,f_1) & \det f_3 \end{pmatrix}.$$

On trouve $u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de u sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (valeur propre double) et la signature de la forme quadratique $A \in E \mapsto \det(A)$ est $(2,1)$.

V.

1. La forme bilinéaire associée est $q(A,B) = \text{Tr}AB$.

2. Si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\ {}^t(AB) = -\mathrm{Tr}\, BA = -\mathrm{Tr}\, AB = 0$$

3. L'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q contient les matrices antisymétriques. Soit $A = S + S'$ une matrice dans l'orthogonal des matrices symétriques, avec S symétrique et S' antisymétrique (une telle décomposition existe).

$$0 = \mathrm{Tr} AS = \mathrm{Tr} SS + \mathrm{Tr} S'S = \mathrm{Tr} SS = 0$$

   Comme S est symétrique $\mathrm{Tr}\ {}^tSS = \mathrm{Tr} SS = 0$ et, d'après la section V, $S = 0$. Donc A est antisymétrique. L'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q est l'ensemble des matrices antisymétriques.

4. Les matrices suivantes forment une base de G

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dans cette base q a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La signature de q est $(3, 1)$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On multiplie la relation par e^{-bt} pour obtenir :

$$f(t)e^{-bt} \leq ae^{-bt} + be^{-bt}\int_0^t f(u)\,du$$

d'où $f(t)e^{-bt} - be^{-bt}\int_0^t f(u)\,du \leq ae^{-bt}$ ou encore $\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t f(u)\,du) \leq ae^{-bt}$

Puis en intégrant sur $[0,t]$, on obtient :

$e^{-bt}\int_0^t f(u)\,du \leq \frac{a}{b}(1-e^{-bt})$ et $a+b\int_0^t f(u)\,du \leq ae^{bt}$, d'où $f(t) \leq a\,e^{bt}$

Exercice n° 2

L'intégrale étant dérivable, le produit $x\,f(x)$ est dérivable, donc f est dérivable sauf peut-être en 0, par dérivation on obtient donc une condition nécessaire sur f :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[f(x) + 2f(0)\right] + \frac{x}{3}f'(x)$$

f apparaît comme solution de l'équation différentielle :

$$x\,y' - 2y = -2f(0)$$

L'intégration immédiate donne :

$$f(x) = f(0) + m\,x^2$$

On vérifie facilement que ces fonctions conviennent.

Exercice n° 3

a) La matrice Ω est orthogonale droite si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad ab + bc + ca = 0$$

et si :

$$\det \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a + b + c = 1$$

Les deux conditions $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$

entraînent d'ailleurs les conditions précédentes et sont suffisantes pour entraîner la propriété ; elles montrent que a,b,c doivent être solutions d'une équation de la forme $t^3 - t^2 + k = 0$, dont les racines doivent être réelles, ce qui s'écrit, on le voit facilement d'après le tableau de variation de la fonction $f(t) = t^3 - t^2$, $0 = f(0) \leq k \leq f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$.

b) Posons $k = \frac{4}{27}\sin^2 j$, avec $0 \leq j \leq 2p$, et faisons dans l'équation le changement de variable $t = \frac{1}{3} + l \cos q$

Pour $l = \frac{2}{3}$, l'équation se simplifie et devient :

$$\frac{2}{27}(4\cos^2\theta - 3\cos\theta) = \frac{2}{27}\cos 2\varphi \quad \text{ou} \quad \cos 3\theta = \cos 2\varphi$$

ce qui donne : $q = \pm(\frac{2}{3}j + \frac{2np}{3})$. On obtient ainsi, à une permutation près :

$$a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2j}{3}, \qquad b = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2j + 2p}{3}, \qquad c = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2j - 2p}{3}$$

L'axe de la rotation est un vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a + b + c = 1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire $a\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice n° 4

❶ f étant une fonction continue et bornée, l'intégrale est convergente.

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx$ et effectuons le changement de variable $t = nx$, on obtient :

$$I_n - f(0) = \int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right) e^{-t}\, dt$$

Notons M la borne supérieure de la valeur absolue de f sur R^+.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe T tel que :

$$2M \int_T^{+\infty} e^{-t}\, dt = 2Me^{-T} < \frac{\varepsilon}{2}$$

T étant ainsi choisi,

$$\left| I_n - f(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^T \left| f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right| e^{-t}\, dt$$

La continuité de f en 0 assure que :

$$\exists h,\ \forall x,\quad 0 < x < h \ \Rightarrow\ \left| f(x) - f(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2T}$$

alors, $\forall n,\quad n > \dfrac{T}{h} \Rightarrow \left| I_n - f(0) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2T} \displaystyle\int_0^T e^{-t}\, dt < \varepsilon$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx = f(0)$.

❷ Dans la deuxième intégrale, le même changement de variable conduit à : $J_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n - f(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right) \frac{dt}{1+t^2}$

La même démonstration que dans la question précédente conduit à la même conclusion, à savoir $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\, f(x)}{1+n^2x^2}\, dx = f(0)$

❸ Si f est en outre dérivable en 0,

$$f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)=\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}e\left(\frac{t}{n}\right)$$

avec $\lim\limits_{u\to 0} e(u)=0$, donc :

$$I_n - f(0)=\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}e\left(\frac{t}{n}\right)\right)e^{-t}\,dt+\int_{\sqrt{n}}^{\infty}\left(f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right)e^{-t}\,dt$$

La deuxième intégrale est majorée par $2M\,e^{-\sqrt{n}}$, c'est donc un $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par ailleurs, $\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}e\left(\frac{t}{n}\right)\right)e^{-t}\,dt=\frac{f'(0)}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e^{-t}\,dt+\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}}te\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}\,dt$

On a : $\frac{f'(0)}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e^{-t}\,dt=\frac{f'(0)}{n}\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^{\sqrt{n}}\approx\frac{f'(0)}{n}$

Pour $t\in[0,\sqrt{n}\,]$, $\left|e\left(\frac{t}{n}\right)\right|<e$, car $\frac{t}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, et la deuxième intégrale précédente est aussi un $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En conclusion :

$$I_n - f(0)=\frac{f'(0)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice n° 5

Soit X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a)=\left\{u\in R^2\,/\,\exists(u_n)\in X,\exists(l_n)>0,\lim_{n\to\infty}u_n=a,\lim_{n\to\infty}l_n(u_n-a)=u\right\}$$

❶ On vérifie aisément que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$, en posant $l_n=n$ et $u_n=a$

❷

a) Si $u \in T(X,a)$ où $X = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ et $a = (1,0)$

Soit une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $l_n(u_n - a) \to u = (x,y)$.

En particulier, $l_n(x_n - 1) \to x$, $l_n y_n \to y$, $x_n \to 1$ et $y_n \to 0$.

Comme $u_n \in X$, $l_n x_n^2 + l_n y_n^2 = l_n$ ou encore $l_n(x_n - 1)(x_n + 1) + l_n y_n y_n = 0$

Et par passage à la limite, on obtient $x = 0$.

On vérifie la réciproque pour obtenir $T(X,a) = \{(x,y) / x = 0\}$. Par exemple $x_n = \sqrt{1-(1/n^2)}$, $y_n = (1/n)$ et $l_n = y_n$

b) Si $u \in T(X,a)$ où $X = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $a = (1,0)$

Soit une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $l_n(u_n - a) \to u$.

En particulier, $l_n(x_n - 1) \to x$, $l_n y_n \to y$, $x_n \to 1$ et $y_n \to 0$.

Comme $u_n \in X$, $l_n x_n^2 + l_n y_n^2 \leq l_n$ ou encore $l_n(x_n - 1)(x_n + 1) + l_n y_n y_n \leq 0$

Et par passage à la limite, on obtient $x \leq 0$.

Réciproquement, on pose $x_n = 1 + \frac{x}{n}$ et $y_n = \frac{y}{n}$, alors $x_n \to 1$ et $y_n \to 0$.

Et pour $l_n = n$, $l_n(x_n - 1) \to x$ et $l_n y_n \to y$.

Il reste à vérifier que la suite $u_n = (x_n, y_n)$ est bien dans X. En effet, pour *n* grand, $l_n x_n^2 + l_n y_n^2 \leq l_n$ pour $x \leq 0$.

On obtient : $T(X,a) = \{(x,y) / x \leq 0\}$

c) Si $u \in T(X,a)$ où $X = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0,\ -x^2 \leq y \leq x^2\}$ et $a = (0,0)$

Soit une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $l_n(u_n - a) \to u = (x,y)$.

En particulier, $l_n x_n \to x$, $l_n y_n \to y$, $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$.

Comme $u_n \in X$, $-l_n x_n^2 \leq l_n y_n \leq l_n x_n^2$ et $x_n \geq 0$.

Et par passage à la limite, on obtient $y = 0$ et $x \geq 0$

La réciproque est évidente en posant $x_n = \frac{x}{n}$ (avec $x > 0$), $y_n = 0$ et $l_n = n$, pour obtenir la demie droite :

$$T(X,a) = \{(x,y) / x \geq 0,\ y = 0\}$$

Exercice n° 6

❶ $j_0(n)=n$ et $j_1(n)=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

❷ $F_0(x)=1$ et $F_1(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e^x+1$

En 0, $F_t(x)$ est équivalent à $\frac{(1+t)x}{x}$. On peut donc prolonger F_t par continuité en 0 en posant $F_t(0)=1+t$.

En développant le numérateur à l'ordre 2, on obtient $\lim_{x\to 0}\frac{F_t(x)-F_t(0)}{x}=\frac{t(t+1)}{2}=F_t^{'}(0)$

❸ En identifiant un développement limité avec la formule de Taylor, on trouve $\psi_0(t)=F_0(t)-1=t$ et $\psi_1(t)=F_1^{'}(0)=\frac{t(t+1)}{2}$

❹ $F_n(x)=\frac{(e^x)^{n+1}-1}{e^x-1}=1+e^x+...+e^{nx}=\sum_{k=0}^{n} e^{kx}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{k^p x^p}{p!}$ et le coefficient de $\frac{x^p}{p!}$ est alors $\sum_{k=0}^{n} k^p$

❺ L'égalité $\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{j_i(t)}{i!}x^i+o(x^N)\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{x^j}{j!}+o(x^N)\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(1+t)^k}{k!}x^k+o(x^N)$

conduit par identification des coefficients de x^{p+1}, à :

$$\frac{1}{(p+1)!}+\frac{j_0(t)}{(p+1)!}+\frac{j_1(t)}{1!}\frac{1}{p!}+\frac{j_2(t)}{2!}\frac{1}{(p-1)!}+...+\frac{j_p(t)}{p!}\frac{1}{1!}=\frac{(t+1)^{p+1}}{(p+1)!}$$

soit, en multipliant les deux expressions par $(p+1)!$, on obtient la relation recherchée.

❻ Des relations :

$$p=0 \quad 1+j_0(t)=1+t$$

$$p=1 \quad 1+j_0(t)+C_2^1\, j_1(t)=(1+t)^2$$

$$p=2 \quad 1+j_0(t)+C_2^1\, j_1(t)+C_3^2\, j_2(t)=(1+t)^3$$

$$p=3 \quad 1+j_0(t)+C_2^1\, j_1(t)+C_3^2\, j_2(t)+C_4^3\, j_3(t)=(1+t)^4$$

on en déduit :

$$j_0(t)=t$$
$$j_1(t)=\frac{t(t+1)}{2}$$
$$j_2(t)=\frac{1}{6}(2t+1)t(t+1)$$
$$j_3(t)=\frac{1}{4}\,\frac{t^2(t+1)^2}{2}$$

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE OPTION MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I :
On choisit $\| f \|_a = sup_{x\in[0;1]}\{|f(x)|\}$ et $\| f \|_b = \int_{[0;1]} |f(x)|dx$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_a = 1$ et $\|f_n\|_b = \frac{1}{2n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice II :

1. L'intégrale de $\frac{r3^r x^k}{(3+x)^{r+1}}$ est de type Riemann et converge si et seulement si $r+1-k>1$ ou encore $k<r$. La quantité $M_{k;r}$ est définie pour tout $k \in \{0,\cdots,r-1\}$.
2. On effectue une intégration par parties avec $u(x) = x^k$ et $v'(x) = \frac{r3^r}{(3+x)^{r+1}}$. On obtient $u'(x) = kx^{k-1}$ et $v(x) = \frac{-3^r}{(3+x)^r}$ et pour tout $k \in \{0,\cdots,r-1\}$,

$$\begin{aligned} M_{k;r} &= \left[-\frac{3^r x^k}{(3+x)^r}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{3^r k x^{k-1}}{(3+x)^r}dx \\ &= \frac{3k}{r-1}\int_0^{+\infty} \frac{(r-1)3^{r-1}x^{k-1}}{(3+x)^{(r-1)+1}}dx \\ &= \frac{3k}{r-1}M_{k-1;r-1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} M_{0;r-k} &= \int_0^{+\infty} \frac{(r-k)3^{r-k}}{(3+x)^{r-k+1}}dx \\ &= \left[-\frac{3^{r-k}}{(3+x)^{r-k}}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Comme $k<r$, on montre par récurrence sur k que

$$M_{k;r} = \frac{3^k k!(r-k-1)!}{(r-1)!}M_{0;r-k}$$

ou encore, pour tout $k \in \{0;\cdots;r-1\}$, $\quad M_{k;r} = \frac{3^k}{C_{r-1}^k}$

Problème :

A) Préliminaires :

1. Par définition de la norme matricielle on a pour tout x non identiquement nul les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|B_1(B_2x)\|_a &\leq \|B_1\|_A\|B_2x\|_a \\ \|B_2x\|_a &\leq \|x\|_a\|B_2\|_A \end{aligned}$$

dont on tire $\|B_1B_2x\|_a \leq \|B_1\|_A\|B_2\|_A\|x\|_a$ pour tout x non nul et ainsi

$$\frac{\|B_1B_2x\|_a}{\|x\|_a} \leq \|B_1\|_A\|B_2\|_A$$

et qui est en particulier vraie pour le sup sur x.

2. (a) $\lim_{k\to+\infty} B^kv = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|B^kv\|_a = 0$ par définition d'une norme. Or comme B^k tend vers la matrice identiquement nulle avec k, $\|B^k\|_A$ tend également vers 0 avec k, et pour tout v non nul

$$\|B^k\|_A\|v\|_a \geq \|B^kv\|_a$$

ce qui nous permet de conclure avec le fait que $B^kv = 0$ lorsque v est nul.

(b) Soit v_{i_0} le vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0} (donc v_{i_0} est différent du vecteur nul) où λ_{i_0} est telle que $\rho(B) = |\lambda_{i_0}|$. On a $B^kv_{i_0} = \lambda_{i_0}^k v_{i_0}$. Ainsi $B^kv_{i_0}$ converge vers 0 si et seulement si $|\lambda_{i_0}| < 1$.

(c) Montrer que B^k tend vers 0 avec k est équivalent à montrer que $\|B^k\|_A$ tend vers 0 avec k. Or d'après le résultat établi en **A)1.** on a $\|B^k\|_A \leq \|B\|_A^k$. Comme il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ telle que $\|B\|_A < 1$ on obtient le résultat voulu.

B) Méthode

1. On pose $e_0 = u_0 - u$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= u_{k+1} - u \\ e_{k+1} &= Bu_k + c - (Bu + c) \\ e_{k+1} &= Be_k \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient facilement pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = B^ke_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} u_k &= u \\ \lim_{k\to+\infty} e_k &= 0 \\ \lim_{k\to+\infty} B^ke_0 &= 0 \end{aligned}$$

Et d'après le **A) (a)** on a $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$ équivalent à $\rho(B) < 1$ et "il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ telle que $\|B\|_A < 1$"

2. (a)

$$\begin{aligned} Au &= b \\ \Leftrightarrow\ (M-N)u &= b \\ \Leftrightarrow\ Mu &= Nu + b \\ \Leftrightarrow\ u &= M^{-1}Nu + M^{-1}b \quad \text{car } M \text{ est inversible} \\ \Leftrightarrow\ u &= Bu + c \quad \text{avec } B = M^{-1}N \text{ et } c = M^{-1}b \end{aligned}$$

La matrice A est inversible, c'est à dire que $(M-N)$ est inversible. Et on a

$$\begin{aligned}\left((M-N)^{-1}M\right)(I-M^{-1}N) &= \left(M(I-M^{-1}N)\right)^{-1}M(I-M^{-1}N)\\ &= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1}M^{-1}M(I-M^{-1}N)\\ &= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1}M^{-1}M(I-M^{-1}N)\\ &= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1}(I-M^{-1}N)\\ &= I\end{aligned}$$

De même avec la multiplication à droite, on obtient $I-M^{-1}N$ est inversible.

(b) On définit la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ par u_0 réel quelconque et pour tout k non nul,

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$$

C) Application :
On peut écrire $A = M - N$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (facilement) et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

A est inversible car son déterminant est non nul. La matrice $B = M^{-1}N$ est égale à $\frac{1}{2}N$ qui est inversible d'après **B)2.(a)**. Et $\|B\|_A < 1$ pour $\|\ .\ \|_a$= norme sup sur $\mathbb{R}^n$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}Nu_k + \frac{1}{2}b$$

converge vers u quelque soit u_0.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice :

1. Déterminons le rang de (u, v, w) : $\left|\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & : u \\ 0 & -1 & 2 & : w \\ 1 & 0 & 1 & : v \end{array}\right| \begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & : u \\ 0 & -1 & 2 & : w \\ 0 & 0 & -1 & : v-u-w \end{array}$.

   Le rang de (u, v, w) est 3, donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $f(u) = u$, $f(v) = 8u - 6v + 4w$, et $f(w) = 16u - 16v + 11w$; la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^\star = (u, v, w)$ est donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 0 & -6 & -16 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2})(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2})$. Il a donc 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$. En effectuant la division Euclidienne de X^n par $\mathcal{P}(X)$, on obtient

$$X^n = \mathcal{P}(X)Q(X) + R(X), \tag{1}$$

   où $R(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré du polynôme $\mathcal{P}$ c'est à dire de degré strictement inférieur à 3. Notons a, b, c les coefficients réels de $R(X)$ i.e. $R(X) = aX^2 + bX + c$.

   D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de la matrice A. En remplaçant X par A dans (1), on obtient

$$A^n = R(A) = aA^2 + bA + c = a\begin{pmatrix} 7 & -6 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ -10 & 10 & 22 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + c.$$

   Déterminer A^n revient alors à déterminer les réels a, b et c. Les valeurs propres annulant le polynôme caractéristique, il vient que a, b et c sont les solutions du système à trois équations suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a+b+c \\ \lambda_2^n & = & a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c \\ \lambda_3^n & = & a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{-\lambda_2+\lambda_2^n+\lambda_3-\lambda_2^n\lambda_3-\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(-1+\lambda_3)} \\ b & = & \frac{\lambda_2^2-\lambda_2^n-\lambda_3^2+\lambda_2^n\lambda_3^2+\lambda_3^n-\lambda_2^2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_2)(-1+\lambda_3)(-\lambda_2+\lambda_3)} \\ c & = & \frac{\lambda_2^2\lambda_3-\lambda_2^n\lambda_3-\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_2^n\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_3^n-\lambda_2^2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_3)(-\lambda_2+\lambda_2^2+\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)} \end{array}\right.$

Problème : Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0,1[$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1,\ 0 \leq y \leq M-1\} \\
F_1 &= \{(x,M) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1\} \\
F_2 &= \{(N,y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq y \leq M-1\} \\
F &= F_1 \cup F_2 \cup \{(N,M)\} \\
\overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup F
\end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (l,k) \in \mathcal{R},\ f(l,k) = pf(l+1,k) + (1-p)f(l,k+1). \tag{2}$$

I. Résultat préliminaire et Matrices Nilpotentes.

A. Résultat préliminaire

Résultat : Soient r et s deux entiers donnés ($r \geq 1$ et $s \geq 0$), il existe un unique couple de polynômes (U,V) de l'indéterminée x vérifiant les propriétés suivantes:

i)Le polynôme U est de degré strictement inférieur à r

ii) U et V satisfont la relation $(1-x)^{s+1}U + x^r V = 1$.

De plus les polynômes U et V sont définis par

$$U = \sum_{l=s}^{s+r-1} C_l^s x^{l-s} = \sum_{l=0}^{r-1} C_{l+s}^s x^l \tag{3}$$

$$V = \sum_{l=0}^{s} C_{r-1+l}^{r-1} (1-x)^l \tag{4}$$

B. Matrices Nilpotentes.

1. Soit λ une valeur propre de A et soit u un vecteur propre associé à λ, alors on a

$$A.u = \lambda u \ \Rightarrow\ A^r.u = \lambda^r u, \text{ comme } A^r = 0 \text{ on obtient } \lambda = 0.$$

Par définition $\mathcal{P}_A$, le polynôme caractéristique de A s'écrit $\mathcal{P}_A(x) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - x)^{\alpha_i}$, si $(\lambda_i)_{\{1 \leq i \leq p\}}$ désigne l'ensemble des valeurs propres distinctes de A et α_i désigne l'ordre de multipicité de λ_i.
Ici toutes les valeurs de A étant nulles, on a $\mathcal{P}_A(x) = (-1)^d x^d$.
A annulant son polynôme caractéristique, on a $\mathcal{P}_A(A) = 0$, ce qui signifie que $A^d = 0$; comme r est l'ordre de nilpotence de A, on a $r \leq d$.

2. Comme $A^r = 0$, $b = (I_d, A, A^2, \ldots, A^{r-1})$ est un système générateur de $\{A^k,\ k \geq 0\}$.

Montrons que $b = (I_d, A, A^2, \ldots, A^{r-1})$ est libre. Si $\sum_{n=0}^{r-1} \mu_n A^n = 0$. On note $P = \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n < r\ :\ \mu_n \neq 0\}$ et on suppose que $P \neq \emptyset$. Soit $n_0 = \inf P$, en multipliant les deux membres de l'égalité $\sum_{n=0}^{r-1} \mu_n A^n = 0$ par A^{r-1-n_0}, on obtiendrait que $\mu_{n_0} A^{r-1} = 0$ ce qui est impossible.

3. Soit s un entier naturel.

a. $(I_d - A)^{s+1} = \sum_{n=0}^{s+1} C_{s+1}^n (-1)^n A^n = \sum_{n=0}^{min(s+1,r-1)} C_{s+1}^n (-1)^n A^n$. On a alors que $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$ et ses coordonnées dans la base b sont $(C_{s+1}^n (-1)^n)_{\{0 \leq n \leq min(s+1,r-1)\}}$.

b. Le résultat préliminaire appliqué à l'indéterminée A assure l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes (U, V) tels que

$$(I_d - A)^{s+1} U + A^r V = I_d \quad \Rightarrow \quad (I_d - A)^{s+1} U = I_d.$$

Cela implique que $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible d'inverse $U(A) = \sum_{k=0}^{r-1} C_{k+s}^s A^k$.

4. **Exemple. a.** Pour $k = 2$, on a que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2,\ J_d^2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut montrer par récurrence que pour $k \geq 2$

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2,\ J_d^k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $j - i \leq d - 1$ par conséquent dès que $k \geq d$, la matrice J_d^k est nulle. L'ordre de nilpotence de la matrice J_d est d.

b. D'après la question I.**B.**3, pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)} = \sum_{k=0}^{d-1} C_{k+s}^s \lambda^k J_d^k$.

En utilisant l'expression des matrices J_d^k, pour $0 \leq k \leq d-1$, les éléments de la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$ sont

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2,\ (I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}(i,j) = \begin{cases} C_{k+s}^s \lambda^k & \text{si} \quad j - i = k,\ 0 \leq k \leq d-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II. Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (2).

A. Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\overline{\mathcal{R}}$ vérifiant (2).

1. $\mathcal{E}$ est non vide car l'application nulle appartient à $\mathcal{E}$. On vérifie facilement que $\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $\forall (\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2$, $\mu f + \nu g \in \mathcal{E}$.
2. **a.** Le terme général de $C_k(f)$ est le réel $f(l,k)$ $(0 \leq l \leq N)$, qui est déterminé de manière unique par $f(l+1,k)$ et $f(l,k+1)$ (Equation (2)). Or $f(l,k+1)$ appartient à la matrice $C_{k+1}(f)$. Donc $f(N,k)$ et $C_{k+1}(f)$ déterminent $f(N-1,k)$, puis successivement $f(N-2,k), f(N-3,k), \ldots, f(0,k)$ de manière unique.

   b. Tout élément f de $\mathcal{E}$ est par conséquent déterminé de manière unique par la dernière colonne $C_M(f)$ de la matrice $M(f)$ et par les éléments $\{f(N,k),\ 0 \leq k \leq M-1\}$ donc par les ensembles $\{f(l,M); 0 \leq l \leq N\}$ et $\{f(N,k); 0 \leq k \leq M-1\}$.

3. Tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par sa restriction à l'ensemble F donc par les éléments $\{f(N,k) = \mu_k,\ 0 \leq k \leq M-1\}$, $\{f(l,M) = \eta_l,\ 0 \leq l \leq N-1\}$ et $f(N,M) = \nu$. Les fonctions f de $\mathcal{E}$ et $\sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \phi_l + \nu\xi + \sum_{k=0}^{M-1} \mu_k \psi_k$ coincident alors sur F donc sur $\overline{\mathcal{R}}$. $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{N-1}, \xi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{M-1}\}$ engendre $\mathcal{E}$. Montrons que c'est un système libre. Si $\sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \phi_l + \nu\xi + \sum_{k=0}^{M-1} \mu_k \psi_k = 0$, la valeur de la fonction en (l,M), $\quad (0 \leq l \leq N-1)$ est égale à η_l, donc $\eta_l = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1)$, de même pour $\mu_k = 0 \quad (0 \leq k \leq M-1)$ et $\nu = 0$ en utilisant les valeurs en (N,k) pour $0 \leq k \leq M-1$ et en (N,M).
4. On a $C_M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L_N(\xi) = (0,0,\ldots,1)$.

$$\xi(l,M) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1), \quad \xi(N,M) = 1, \quad \xi(N,k) = 0 \quad (0 \leq k \leq M-1).$$

   Or ξ vérifie l'équation (2), on en déduit que $\xi(N-1,M-1) = p\xi(N,M-1) + (1-p)\xi(N-1,M) = 0$, donc $\xi(l,M-1) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1)$, et de proche en proche $\xi(l,k) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1,\ 0 \leq k \leq M-1)$. $M(\xi)$ est donc une matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme $\xi(N,M) = 1$.

B. Calcul des fonctions ϕ_i et ψ_j.

1. On note $C_k(\phi_i)(h)$ la h-ième composante de la matrice colonne $C_k(\phi_i)$ $(0 \leq h \leq N+1)$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k < M$ et pour tout entier l tel que $0 \leq l \leq N$, la matrice $(I_{N+1} - pJ_{N+1})C_k(\phi_i)$ est une matrice colonne à $(N+1)$ lignes dont le terme général

$$\begin{aligned} \tau_l &= \sum_{h=0}^{N} (I_{N+1}(l,h) - pJ_{N+1}(l,h))C_k(\phi_i)(h) \\ &= C_k(\phi_i)(l) - pC_k(\phi_i)(l+1) \\ &= \phi_i(l-1,k) - p\phi_i(l,k) \\ &= (1-p)\phi_i(l,k+1) \ \text{ d'après l'équation (2).} \end{aligned}$$

τ_l est donc la terme général de $(1-p)C_{k+1}(\phi_i)$.
Un calcul analogue donne $pL_{l+1}(\psi_j) = L_l(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)$.

2. Le terme général de $C_M(\phi_i)$ est $\phi_i(l, M)$ égal à 1 si $i = l$ et 0 sinon, pour tout l tel que $0 \leq l \leq N$. D'après la question précédente, on a $C_k(\phi_i) = (1-p)\ \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-1}\ \ C_{k+1}(\phi_i)$. En itérant la formule, on obtient $C_k(\phi_i) = (1-p)^{M-k}(I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}\ \ C_M(\phi_i)$. Le terme général de $C_k(\phi_i)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\phi_i(l,k) &= (1-p)^{M-k} \sum_{h=0}^{N}\ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}(l,h)\ \ \phi_i(h,M) \\
&= (1-p)^{M-k}\ \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}(l,i) \\
&= (1-p)^{M-k}(\sum_{h=0}^{N}\ \ C_{M-k-1+h}^{M-k-1}\ \ p^h\ J_{N+1}^h(l,i))
\end{aligned}$$

D'où,

$$\phi_i(l,k) = \begin{cases} (1-p)^{M-k} C_{M-k-1+h}^{M-k-1}\ \ p^h & \text{si } i - l = h \text{ et } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le terme général de $L_N(\psi_j)$ est $\psi_j(N,k)$ égal à 1 si $k = j$ et 0 sinon, pour tout k tel que $0 \leq k \leq M$. D'après la question précédente, on a $L_l(\psi_j) = pL_{l+1}(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-1}$. En itérant la formule, on obtient $L_l(\psi_j) = p^{N-l} L_N(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}$. Le terme général de $L_l(\psi_j)$(matrice ligne) s'écrit

$$\begin{aligned}
\psi_j(l,k) &= p^{N-l} \sum_{h=0}^{M} \psi_j(N,h)\ (I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}(h,k) \\
&= p^{N-l}\ \ (I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}(j,k) \\
&= p^{N-l}\ \sum_{h=0}^{N}\ C_{N-l-1+h}^{N-l-1}\ \ (1-p)^h\ ((J_{M+1})^t)^h(j,k).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\psi_j(l,k) = \begin{cases} p^{N-l}\ C_{N-l-1+h}^{N-l-1}\ (1-p)^h & \text{si } j - k = h \text{ et } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique de classe C^2 définie sur R telle que $f(0)=0$.

Pour tout $x \in R$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{x}{2}f(x)$

1. Comme f est de classe C^2, F est aussi de classe C^2 par opération sur les fonctions de classe C^2. On obtient :
   $F'(x)=f(x)-\frac{1}{2}(f(x)+xf'(x))$ et $F''(x)=-\frac{1}{2}x\,f''(x)$

2. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre 0 et x :

$F(x)=F(0)+xF'(0)+\int_0^x \frac{(x-t)}{2}F''(t)\,dt$. Comme $F(0)=F'(0)=0$, on obtient :

$$F(x)=-\frac{1}{4}\int_0^x t(x-t)f''(t)\,dt$$

Exercice n° 2

1. On a $|y_i|=y_i^+ + y_i^-$. Soit L le lagrangien du problème, à savoir :
   $L=\sum_{i=1}^{n}|y_i|+\lambda(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-1)$; sa dérivée est $L'=\pm 1+2\lambda\,y_i$. Cette dérivée est nulle pour $y_i=\pm\frac{1}{2\lambda}$. On obtient alors pour la contrainte : $\sum_{i=1}^{n}y_i^2=n\times\frac{1}{4\lambda^2}=1$, puis $\lambda=\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$ et $y_i=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Le maximum est donc égal à : $\sum_{i=1}^{n}|y_i|=\sqrt{n}$.

On peut aussi remarquer qu'il s'agit du maximum d'une fonction linéaire sur la sphère unité (cas identique dans R^n et R^2) et que ce maximum est atteint lorsque toutes les valeurs de y_i sont égales, à savoir pour la contrainte $n \times y_i^2 = 1$, d'où $y_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ et le maximum est égal à $\sqrt{n}$.

2. $Min\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i| \;/\; \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 1\right\} \Leftrightarrow Min\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i| \;/\; \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1\right\}$.

Ceci implique que chaque valeur de y_i est en valeur absolue inférieure à 1. Par conséquent $y_i^2 \leq |y_i|$. Le minimum de $\sum_{i=1}^{n}|y_i|$ est donc le même que celui de $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ qui est égal à 1. Ce minimum est atteint en tous les points de la sphère unité.

Exercice n° 3

1. M_3 correspond à une moyenne mobile arithmétique d'ordre 3. On obtient le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	4	7	4	10	13	10	16	19	16
$M_3\,X_t$	-	5	7	9	11	13	15	17	-

2. Les valeurs de $M_3\,X_t$ correspondent à une suite arithmétique de raison 2 d'où $M_3\,X_t = 2t+1$

3. Soit $S_t = X_t - M_3\,X_t$. On obtient :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_t	-	2	-3	1	2	-3	1	2	-

S_t est une fonction périodique de période 3, dont la somme sur une période est nulle.

4. L'équation $M_{2p+1}X_t = X_t$ est équivalente, pour $X_t = at+b$, à $a\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right)t + \left(\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right) + b\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right) = at+b$. Cette égalité est vérifiée pour

$\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right) = 1$ et $\left(\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right) = 0$

5. Pour $X_t = at^2+bt+c$, l'équation $M_{2p+1}X_t = X_t$ est équivalente à

$$a\left(t^2\sum_{i=-p}^{p}\theta_i + 2t\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i + \sum_{i=-p}^{p}i^2\theta_i + \right) + b\left(t\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i + \sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right) + c\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right) = at^2+bt+c$$

Cette équation est vérifiée pour $\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right) = 1$, $\left(\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right) = 0$ et $\left(\sum_{i=-p}^{p}i^2\theta_i\right) = 0$

Exercice n° 4

On définit une suite de matrices carrées de la façon suivante :

$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 2$.

1. On vérifie que $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. On a $\det(H_2 - \lambda I) = (2-\lambda I)^2(2+\lambda I)^2$ obtenu par combinaison linéaire des colonnes (à la première colonne on ajoute les trois autres, à la deuxième colonne la somme des deux dernières, puis la quatrième à la troisième). On peut aussi procéder de même sur les lignes. Donc –2 et +2 sont des valeurs propres doubles de H_2 .

   Soit un vecteur $e = (x, y, z, t)$ vérifiant $H_2 e = 2e$. Ce système est équivalent aux équations : $x - 2y - t = 0$ et $y = z$. Le sous espace propre E_2, de dimension 2, associé à la valeur propre 2 est engendré (par exemple) par les vecteurs propres orthogonaux suivants : $e = (1, 0, 0, 1)$ et $e' = (1, 1, 1, -1)$.

On procède de même pour la valeur propre –2 . Le sous espace propre associé à cette valeur propre vérifie les équations : $2x+2y+z=0$ et $x=-t$, d'où les vecteurs propres $e_{-2}=(0,1,-1,0)$ et $e'_{-2}=(1,-1,-1,-1)$. De plus ces 4 vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

3. On vérifie facilement par récurrence que $Tr(H_k)=0$ pour tout $k\geq 2$

Exercice n° 5

1. Soit $f(x)=\sqrt{x}$. On applique la formule de Taylor à f sur l'intervalle $[a^2,a^2+1]$. Il existe *c* dans cet intervalle ouvert tel que :

$f(a^2+1)=f(a^2)+f'(a^2)+\frac{1}{2}f''(c)$ ou encore $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8c\sqrt{c}}$, d'où

$$\sqrt{a^2+1}-a<\frac{1}{2a}$$

2. De même, on applique la formule de Taylor à l'ordre 3 à f sur l'intervalle $[a^2,a^2+1]$.

$f(a^2+1)=f(a^2)+f'(a^2)+\frac{1}{2}f''(a^2)+\frac{1}{6}f'''(c)$, d'où

$$\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}<\sqrt{a^2+1}-a$$

On peut aussi démontrer ces deux questions, par multiplication par la quantité conjuguée.

3. D'après la première question, $\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|=\sqrt{a^2+1}-a<\frac{1}{2a}\leq\frac{1}{2}$

On a : $\left|\sqrt{a^2+1}-k\right|=\left|a-k+\sqrt{a^2+1}-a\right|\geq|a-k|-\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|\geq 1-\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|>\frac{1}{2}$,d'où l'inégalité demandée $\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|<\left|\sqrt{a^2+1}-k\right|$

4. Soit $a=25$. D'après les deux premières questions on a :

$$\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}+a<\sqrt{a^2+1}<a+\frac{1}{2a}$$,d'où $25{,}01<\sqrt{626}<25{,}02$.

25,02 est une valeur approchée de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.
D'ailleurs, $\sqrt{626}\approx 25{,}0199920$

5. Notons Q l'ensemble des nombres rationnels et f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+\frac{1}{2a}(1+a^2-x^2)$, on a $f(Q)\subset Q$ car tous les coefficients de f sont rationnels. Le maximum de f est atteint en a et elle est décroissante sur l'intervalle $[a,+\infty]$.

$$f\left(\left[a,a+\frac{1}{2a}\right]\right)=\left[f(a+\frac{1}{2a}),f(a)\right]=\left[a+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3},a+\frac{1}{2a}\right]\subset\left[a,a+\frac{1}{2a}\right]$$

Soit $X=\left[a,a+\frac{1}{2a}\right]\cap Q$, on a $f(X)\subset X$. On démontre alors par récurrence que $t_n\in X$. Pour $n=0$, $t_0=a$ qui est un entier. Si $t_n\in X$, alors $t_{n+1}=f(t_n)\in f(X)\subset X$, donc $t_{n+1}\in X$.

6. La suite $(t_n)_{n\in N}$ est bornée (question 5). Notons encore f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+\frac{1}{2a}(1+a^2-x^2)$, sa dérivée est $f'(x)=1-\frac{x}{a}$, d'où le tableau de variation :

x	a	$a+1/2a$
f'	$\downarrow$	
f	$a+1/2a$	$a+1/2a-1/8a^3$

La fonction f étant décroissante, les suites extraites de $(t_n)_{n\in N}$ d'ordre pair et d'ordre impair sont monotones de sens contraire et comme elles sont bornées, elles sont convergentes vers une même limite l qui vérifie $f(l)=l$ du fait de la continuité de f et de l'unicité de la limite. L'équation $f(l)=l$ est équivalente à $l=l+\frac{1}{2a}(1+a^2-l^2)$, d'où $l=\sqrt{1+a^2}$

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique d'une variable réelle G définie par $G(t)=f(a+t(x-a))$. On applique le théorème des accroissements finis à G sur l'intervalle $[0,1]$, il existe un point c de cet intervalle ouvert tel que : $G(1)-G(0)=G'(c)$. Comme G est convexe comme composée d'une fonction convexe f et d'une fonction affine, on a : $G'(c)\geq G'(0)$ et $G'(t)=<df(a+t(x-a)),x-a>$ (par composition des différentielles).
On obtient alors :

$$G(1)-G(0)=f(x)-f(a)=G'(c)\geq G'(0)=<df(a),x-a>$$

2. Par hypothèse, on a :

$$\forall a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

et

$$\forall a, x \in A \qquad f(a) - f(x) \geq < df(x), a - x >$$

Par addition des deux lignes, on obtient :

$$\forall a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

3. On effectue une démonstration par l'absurde.

Supposons que $\exists a, x \in A \qquad f(x) - f(a) < < df(a), x - a >$

D'après la première question, $f(x) - f(a) = G^{'}(c) = < df(a + c(x - a)), x - a >$

Posons $z = a + c(x - a)$, on obtient : $< df(a) - df(z), a - x > < 0$. On multiplie cette inégalité par *c* (strictement positif) et comme $z - a = c(x - a)$, on a : $< df(a) - df(z), a - z > < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse :

$$\forall a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

donc

$$\forall a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I :

1. Pour tout $t \geq 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > \lambda t\Big)$$

La fonction exponentielle est strictement croissante donc,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\Big) = \mathbb{P}\Big(e^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} > e^{\lambda t}\Big)$$

La fonction exponentielle est toujours positive, et par l'inégalité de Markov, on obtient le résultat voulu.

2. La loi de $X_1, \cdots, X_n$ étant symétrique on a

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right).$$

3. On utilise les espérances conditionnelles avec la propriété suivante : soient Z et Y deux variables aléatoires, on a $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YZ|Y))$. De plus les σ_i sont indépendants entre eux et indépendants des X_i, aussi

$$\begin{aligned}\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right).\end{aligned}$$

4. On exprime la loi des σ_i qui est indépendante de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$, puis l'inégalité rappelée dans l'énoncé de cette question.

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(e^{\lambda \frac{X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} + e^{\lambda \frac{-X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\lambda^2 \frac{X_i^2}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda^2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}(e^{\frac{\lambda^2}{2}}) \\
&\leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}.
\end{aligned}$$

5. Pour Z une variable aléatoire de loi symétrique, on a toujours pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(|Z| > t) = \mathbb{P}((Z > t) \cup (-Z > t)) = \mathbb{P}(Z > t) + \mathbb{P}(-Z > t) = 2\mathbb{P}(Z > t)$. Ainsi pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right| > t) &= 2\mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t) \\
&\leq e^{-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}}.
\end{aligned}$$

La fonction qui à $\lambda > 0$ associe $-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}$ admet un minimum en $\lambda = \frac{t}{2}$. D'où le résultat voulu.

Problème :

Partie I.

1. (a) La fonction $t \mapsto \tilde{x}(t) + sh(t)$ est une combinaison linéaire de deux fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ elle est donc également une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (b) On a $x(t_i) + sh(t_i) = x_0 + s0 = x_0$ et $x(t_f) + sh(t_f) = x_1 + s0 = x_1$.

   (c) On a par définition de $\tilde{x}$,
   $$\forall s > 0, \quad \Phi(\tilde{x}) \geq \Phi(\tilde{x} + sh)$$

   (d) Pour tout s_0,
   $$g'(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x} + s_0 h)}{s - s_0}.$$
   Pour $s_0 = 0$ on obtient
   $$g'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0}.$$
   Et d'après la question précédente et par continuité de $g'(s)$ on a
   $$\lim_{s \to 0, s > 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0} = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0} \leq 0.$$

2. (a) Par définition de ϕ,
   $$g(s) = \int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt.$$

(b) La fonction qui à s associe $U(t,\tilde{x}(t)+sh(t),\tilde{x}'(t)+sh'(t))$ est continument dérivable par rapport à s car U est continument dérivable par rapport à chacune de ses variables. Ainsi sur le compact $[t_i,t_f]$ cette dérivée est bornée en tant que combinaison de fonctions continues (dérivée de U par rapport à sa deuxième et troisième variable, h, et dérivée de h) sur un compact. On peut donc intervertir le signe dérivation par rapport à s et le signe intégrale.

(c) D'une part, la dérivée de $U(t,\tilde{x}(t)+sh(t),\tilde{x}'(t)+sh'(t))$ par rapport à s vaut $\partial_{z_2}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))h(t)+\partial_{z_3}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))h'(t)$.
D'autre part $g'(0)\leq 0$ et $g'(0)$ vaut

$$\begin{aligned}0\geq g'(0) &= \frac{d}{ds}\left(\int_{t_i}^{t_f}U(t,\tilde{x}(t)+sh(t),\tilde{x}'(t)+sh'(t))dt\right)_{s=0}\\ &= \int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{ds}\left(U(t,\tilde{x}(t)+sh(t),\tilde{x}'(t)+sh'(t))\right)_{s=0}dt\\ &= \int_{t_i}^{t_f}\partial_{z_2}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))h(t)+\partial_{z_3}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))h'(t)dt\end{aligned}$$

(d) On pose une intégration par partie avec $h(t)$ qui a pour dérivée $h'(t)$ et $\partial_{z_2}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))$ qui a pour primitive $\int_{t_i}^{t}\partial_{z_2}U(v,\tilde{x}(v),\tilde{x}'(v))dv+A$ pour A constante quelconque. De plus $h(t_i)=h(t_f)=0$. Puis on place $h'(t)$ en facteur.

3. Soit $h(t)$ telle que

$$h'(t)=-\int_{t_i}^{t}\partial_{z_2}U(v,\tilde{x}(v),\tilde{x}'(v))dv+A+\partial_{z_3}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t)).$$

Il existe donc B constante telle que

$$h(s)=\int_{t_i}^{s}\left(-\int_{t_i}^{t}\partial_{z_2}U(v,\tilde{x}(v),\tilde{x}'(v))dv+A+\partial_{z_3}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))\right)dt+B.$$

. On choisit A et B tels que $h(t_i)=h(t_f)=0$. C'est à dire $B=0$ garantit que $h(t_i)=0$ et A etlq ue

$$\int_{t_i}^{t_f}\left(-\int_{t_i}^{t}\partial_{z_2}U(v,\tilde{x}(v),\tilde{x}'(v))dv+A+\partial_{z_3}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))\right)dt=0$$

(a) Comme U est continument dérivable ainsi que x, h est deux fois continument dérivable. De plus une primitive de h peut s'écrire comme

$$h(w)=\int_{t_i}^{w}\left(-\int_{t_i}^{t}\partial_{z_2}U(v,\tilde{x}(v),\tilde{x}'(v))dv+\partial_{z_3}U(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))\right)dw+a.$$

où a est une constante. Par définition de h, on a $h(t_i)=0$

(b) Avec cette expression pour h' et avec l'expression obtenue précédement, on a maintenant

$$\int_{t_i}^{t_f}(h'(t))^2dt\leq 0.$$

De plus h' est continue donc, $h'(t)=0$ pour tout $t\in[t_i,t_f]$.

(c) On exprime $h'(t)=0$ puis on dérive cette expression par rapport à t.

Partie II.

1. La fonction $y(t)$ étant le nombre de vis fabriquée en tout temps t, $w(s)$ est le nombre de vis fabriquées entre 0 et s.
2. $y(t) = w'(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
3. La vitesse de production est la dérivée du nombre de vis produite. C'est à dire $y(t) = w'(t)$.
4. $w(0) = 0$ et $w(T) = B$ si l'on veut honorer la commande.
5. $S(t) = c_1 w(t)$.
6. $F(t)$ est proportionnelle à la vitesse de production qui est $y(t)$. Le coût de fabrication instantanée vaut donc $y(t)$ nombre de vis produites en tout temps t multiplié par le nombre de vis produites en tout temps t. On a donc $F(t) = c_2 y^2(t)$, avec c_2 constante strictement positive (sinon, le coût de fabrication serait nul).
7. Le coût total instantané $C(t) = S(t) + F(t)$ où encore
$$C(t) = c_1 w(t) + c_2 (w'(t))^2$$
8. Le coût total $\mathcal{C}$ est la somme des coût instantanés. Il vaut
$$\mathcal{C} = \int_0^T c_1 w(t) + c_2 (w'(t))^2 dt$$
9.
   - $\min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2(w'(t))^2 + c_1 w(t) dt$ représente le plan de production $w(t)$ à respecter afin de minimiser le coût. On impose cependant qu'il doit y avoir une évolution "douce" dans l'évolution de ce plan de production avec l'hypothèse $w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
   - $w(0) = 0$ exprime la condition : il n'y a pas de stock de vis à la date $t = 0$.
   - $w(T) = B$ exprime le fait qu'il faut avoir B vis fabriquées à la date $t = T$.
   - $w(t) > 0$ induit un démarrage de la production dès la date de passage de la commande $t = 0$.
   - $w'(t) \geq 0$ impose qu'il ne peut pas avoir destruction des vis fabriquées.
10. On applique le résultat obtenu dans la partie I équation (3) puisque le minimum de l'intégrale de U est identique au maximum de l'intégrale de $-U$, avec $x = w$, $t_i = 0, t_f = T, x_0 = 0$ et $x_1 = B$. On a donc à résoudre pour tout temps $t \in [0, T]$,
$$c_1 = c_2 w''(t)$$
sous les conditions initiales et finales $w(0) = 0$ et $w(T) = B$. On obtient pour $t \in [0, T]$,
$$w(t) = t(\frac{c_1}{4c_2}(t - T) + \frac{B}{T}).$$
11. $w(t) > 0$ équivaut à $\frac{c_1}{4c_2}(t-T) + \frac{B}{T} > 0$ où encore $t > T - \frac{4c_2}{c_1}\frac{B}{T}$ ceci pour tout temps $t \in]0, T]$. Ce qui donne encore
$$\frac{4c_2}{c_1} B > T^2$$
La seconde condition $w'(t) \geq 0$ pour $t \in]0, T]$ donne $B \geq \frac{c_1}{4c_2} T^2$. Qui est la même condition. B doit donc être suffisament grand devant la période de temps T disponible pour des constantes de coût de stockage et de fabrication c_1 et c_2 données.
12. Si H_1 n'est pas respectée, il suffit de rendre plus petit le second terme c'est à dire qu'il convient de démarrer la production plus tard et de manière à ce que $\tilde{T}$ respecte $H1$.

Avril 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

$\mathbb{N}_n$ désigne $\{1, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

1. $|| \ \ ||_\infty$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car

$$\frac{||Ax||}{||x||} = \left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right|$$

montre que les ensembles $\left\{\dfrac{||Ax||}{||x||}, x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right\}$ et $\{||Ay||, y \in S^{n-1}\}$ où $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{C}^n / ||y|| = 1\}$ est la sphère unité, sont égaux. Comme S^{n-1} est un compact de $\mathbb{C}^n$ et comme l'application $y \longmapsto ||Ay||$ est continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en un point z de S^{n-1}, autrement dit, il existe $z \in S^{n-1}$ tel que

$$||Az|| = \max_{y \in S^{n-1}} ||Ay|| = \max_{x \neq 0} \left(\frac{||Ax||}{||x||}\right).$$

On constate que si $x \neq 0$,

$$||Ax|| = \frac{||Ax||}{||x||}||x|| \leq ||A||_\infty ||x||.$$

L'inégalité étant triviale pour $x = 0$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||Ax|| \leq ||A||_\infty ||x||.$$

On vérifie ensuite que $|| \ \ ||_\infty$ satisfait les trois axiomes d'une norme :
a) $||A||_\infty = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||Ax|| = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad Ax = 0 \Longrightarrow A = 0.$
b) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{||Ax + Bx||}{||x||} \leq \frac{||Ax||}{||x||} + \frac{||Bx||}{||x||} \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$$

et en passant à la borne supérieure dans cette inégalité pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $||A+B||_\infty \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$.

c) pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$,

$$\frac{||\lambda Ax||}{||x||} = |\lambda| \frac{||Ax||}{||x||}$$

et en passant supérieure dans cette inégalité pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on obtient $||\lambda A||_\infty = |\lambda| ||A||_\infty$.

2. $||A||_\infty = \max\limits_{||x||=1} ||Ax|| = \max\limits_{||x||=1} \left(\max\limits_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right)$. Pour tout $x \in S^{n-1}$ et tout $i \in \mathbb{N}_n$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{donc} \quad ||A||_\infty \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

D'autre part, si $i_0 \in \mathbb{N}_n$ désigne l'indice tel que

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \left(\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| \right),$$

posons $x = \left(\frac{\overline{a_{i_0 1}}}{|a_{i_0 1}|}, \cdots, \frac{\overline{a_{i_0 n}}}{|a_{i_0 n}|} \right) \in S^{n-1}$ en prenant comme convention de remplacer $\frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}$ par 0 si $a_{i_0 j} = 0$. Alors

$$||A||_\infty \geq ||Ax|| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right),$$

et l'on peut conclure à l'égalité demandée.

3. On utilise deux fois la propriété

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad ||Ax|| \leq ||A||_\infty$$

qui provient directement, on l'a vu, de la définition de la norme $|| \ \ ||_\infty$. On trouve

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad ||ABx|| \leq ||A||_\infty ||Bx|| \leq ||A||_\infty ||B||_\infty ||x||,$$

on en déduit
$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \frac{||ABx||}{||x||} \leq ||A||_\infty ||B||_\infty,$$
et en passant au *sup* dans cette inégalité, $||AB||_\infty \leq ||A||_\infty ||B||_\infty$.

Partie II

1. $|A+B| \leq |A|+|B|$, est triviale par l'inégalité triangulaire appliquée à chacun des coefficients. Posons $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), AB=(c_{ij})$ et $|A|.|B| = (d_{ij})$. On a
$$|c_{ij}| = \left|\sum_{k=}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{k=}^{n} |a_{ik}b_{kj}| = |d_{ij}|$$
de sorte que $|AB| \leq |A|.|B|$ et en appliquant l'inégalité avec $B = x$ on obteint $|Ax| \leq |A||x|$.

2. Si A est une matrice strictement positive et x est un vecteur positif non nul alors les coefficients de Ax sont $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_{k_0} > 0$. Comme $a_{ik} > 0$ et $x_k \geq 0$ pour tout k, on en déduit $y_i > 0$ d'où $Ax > 0$.

3. Montrons la contraposée : si $A \neq 0$, il existe i, j tels que $a_{ij} \neq 0$. Si $Ax = y$,
$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \geq a_{ij}x_j > 0.$$
ce qui entraine $Ax \neq 0$.

4. En élevant au carré on obtient
$$\begin{aligned} |z+z'| = |z|+|z'| \Longleftrightarrow 2\Re\left(z\overline{z'}\right) = 2|zz'| \quad &\Longleftrightarrow \quad z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+ \\ &\Longleftrightarrow \quad z'\overline{z} = r \in \mathbb{R}_+ \\ &\Longleftrightarrow \quad z' = \frac{r}{|z|^2}z \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z. \end{aligned}$$

5. Pour n complexes z_k, les inégalités triangulaires

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1 + z_k| + |z_2| + \cdots + |z_n| \leq |z_1| + |z_k| + |z_2| \cdots + |z_n|,$$

entraînent, si les extrémités sont identiques

$$|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$$

et d'après ce que l'on vient de voir,$z_k = \alpha_k z_1$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$. Cela implique $z_k = |z_k|e^{i\theta}$ où $\theta = \arg(z_1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

6. Soit A une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrons que

$$|Ax| = |A||x| \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

On a

$$|Ax| = A|x| \Longleftrightarrow \forall l \in \mathbb{N}_n \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}|x_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_{lk}x_k|$$

$z_k = a_{lk}x_k$, on trouve $|\sum_{k=1}^{n} z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et la question précédente montre l'existence d'un réel θ_l tel que pour tout k, $z_k = |z_k|e^{i\theta_l}$. En faite θ_k est indépendante de l puisque c'est l'argument de $z_k = a_{lk}x_k$ et $a_{lk} > 0$. Donc $a_{ik}x_k = |a_{ik}x_k|e^{i\theta}$ et a_{ik} étant strictement positif,

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \qquad x_k = |x_k|e^{i\theta}$$

ce qui traduit $x = |x|e^{i\theta}$.

Partie III

1. Un calcul élémentaire donne que les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 \neq c^2$, sont $\dfrac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ et $\dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$.

Clairement le rayon spectral est $\dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$, puisque $a^2 \neq c^2$.

2. Notons $Spec(A)$ le spectre de l'opérateur A. C'est par définition l'ensemble des valeurs propres de A. Si $\lambda \in Spec(A)$, il existe un vecteur

propre non nul $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Notons $[c_1, \cdots, c_n]$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de $\mathbb{C}^n$. Si $X = [x, x, \cdots, x]$,

$$AX = A[x, x, \cdots, x] = [\lambda x, \lambda x, \cdots, \lambda x] = \lambda X.$$

3. Si $\lambda \in Spec(A)$ avec les précédente notations,

$$||AX|| = |\lambda|||X|| \leq ||A||||X|| \Longrightarrow |\lambda| \leq ||A||.$$

Comme $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$, on déduit $\rho(A) \leq ||A||$.
4. Les polynômes caratéristique de A et $S^{-1}AS$ sont les mêmes puisque

$$\det(XI - A) = \det(S^{-1}(XI - A)S) = \det(XI - S^{-1}AS),$$

de sorte que $Spec(A) = Spec(S^{-1}AS)$ et $\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$. .
5. Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. En effet A est trigonalisable car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, il existe, donc, une matrice inversible S tel que $T = S^{-1}AS$ est triangulaire supérieure

$$T = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} t_1 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & t_n \end{pmatrix}$$

On a

$$T^k = S^{-1}A^kS = \begin{pmatrix} t_1^k & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & t_n^k \end{pmatrix}$$

de sorte que $\rho(T) = \rho(A)$ et $\rho(T^k) = \rho(A^k)$. Les valeurs propres des matrices triangulaires T et T^k sont situées dans la diagonale principale, donc

$$Spec(T) = \{t_1, \cdots, t_n\} \quad \text{et} \quad Spec\left(T^k\right) = \left\{t_1^k, \cdots, t_n^k\right\}$$

et

$$\rho(T^k) = \max_{i \in \mathbb{N}_n} |t_i^k| = \left(\max_{i \in \mathbb{N}_n} |t_i|\right)^k = \rho(T)^k.$$

On obtient bien $\rho(A^k) = \rho(A)^k$. Il résulte que $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq ||A^k||$, donc $\rho(A) \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$.

6. On vérifie sans peine que l'application $N : A \mapsto ||S^{-1}AS||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est sous-multiplicative car $||\ \ ||$ l'est. En effet

$$N(AB) = \left|\left|S^{-1}ABS\right|\right| = \left|\left|S^{-1}ASS^{-1}BS\right|\right| \leq \left|\left|S^{-1}AS\right|\right| \left|\left|S^{-1}BS\right|\right| = N(A)N(B).$$

7. Un Calcul élémentaire permet d'écrire que $(\triangle^{-1}T\triangle)_{ij} = t_{ij}d^{j-i}$.
Soit S une matrice inversible telle que $T = S^{-1}AS$. Supposons que T soit triangulaire supérieure. Alors $t_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Par la question précédente $N(X) = \left|\left|(S\Delta)^{-1}XS\Delta\right|\right|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$N(A) = \left|\left|(\Delta)^{-1}T\Delta\right|\right|_\infty = \max_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}d^{j-i}|\right).$$

En prenant $d \in]0,1[$ et en posant $t = \max_{i,j\in\mathbb{N}_n}(|t_{ij}|$, on trouve

$$N(A) = \max_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}d^{j-i}|\right)$$

avec

$$\sum_{j=i}^{n}|t_{ij}|d^{j-i} = |t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}|d^{j-i} \leq \rho(A) + \tau\sum_{j=i}^{n}d^{j-i} = \rho(A) + \tau\frac{d}{d-1}.$$

Comme $\lim_{d\longrightarrow 0}\tau\dfrac{d}{d-1} = 0$, si $\varepsilon > 0$ est donné à l'avance, on peut choisir $d \in]0,1[$ tel que $\tau\frac{d}{d-1} < \varepsilon$ et l'on obtient bien

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

8. La question précédente combinée avec la sous-multiplicative de N permettent d'écrire

$$N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k.$$

Comme $\rho(A) < 1$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$, de sorte que $\lim_{k\longrightarrow +\infty}(\rho(A) + \varepsilon)^k = 0$ et donc $\lim_{k\longrightarrow +\infty}N(A^k) = 0$. La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme N or tout les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie il résulte que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} A^k = 0$.

9. Considérons la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Il vient

$$\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$$

et par ce qui précéde $\lim_{k \longrightarrow +\infty} A_\varepsilon^k = 0$. On en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k > k_0$ on ait

$$\left||A_\varepsilon^k\right|| \leq 1 \Longrightarrow \left|\left|A^k\right|\right| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$$

On en déduit

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \rho(A) \leq \left|\left|A^k\right|\right|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A)+\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, i.e. $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left|\left|A^k\right|\right|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie IV

1. L'ensemble Λ est évidement majoré (par exemple par la somme des éléments de A) et par définition de λ_0, il existe (X_m) de $\mathcal{S}$ et (α_m) de Λ telle que

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \alpha_m = \lambda_0 \quad \text{et} \quad \forall m, AX_m \geq \alpha_m X_m.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc compact de sorte que l'on peut extraire de la suite (X_m) une sous-suite convergente (X_{m_l}). Notons $X \in \mathcal{S}$ sa limite. Comme $AX_{m_l} \geq \alpha_{m_l} X_{m_l}$, par passage à la limite on obtient $AX \geq \lambda_0 X$. Si $AX \neq \lambda_0 X$, on a $AX > \lambda_0 X$. En composant par A à gauche, on obtient, du fait que $A > [0]$, l'inégalité $AY > \lambda_0 Y$, où $Y = AX$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ suffisament petit tel que $AY \geq (\lambda_0 + \varepsilon)Y$, ce qui contredit la définition de λ_0 car quitte à multiplier Y par une constante positive non nulle, on peut supposer $Y \in \mathcal{S}$.
Ainsi $AX = \lambda_0 X$ avec $X \in \mathcal{S}$ or $A > [0]$ entraîne $AX > 0$ donc $\lambda_0 X > 0$ on en déduit $X > 0$.

2. Supposons que $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A et notons $Z = (z_i)$ un vecteur propre associé. On a

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \lambda z_i$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j| \geq |\lambda| |z_i|$$

i.e. $A|Z| \geq |\lambda||Z|$. On en déduit que $|\lambda| \in \Lambda$ car quite à multiplier $|Z|$ par une constante on peut toujours supposer que $|Z| \in \mathcal{S}$. Donc $|\lambda| \leq \lambda_0$. Il reste montrer que le cas d'égalité n'a pas lieu. Supposons que $\lambda = \lambda_0$. Comme $A > [0]$ il existe $\delta > 0$ suffisament petit tel que $A_\delta = A - \delta I_n \geq [0]$. Comme λ_0 est la plus grande valeur propre réelle positive de A, $\lambda_0 - \delta$ est la plus grande valeur propre réelle positive de A_δ. En répétant l'argument précédent à la matrice A_δ et à la valeur propre $\lambda - \delta$, on obtient $|\lambda - \delta| \leq \lambda_0 - \delta$. Mais

$$\lambda_0 = |\lambda| = |\lambda - \delta + \delta| \leq |\lambda - \delta| + \delta \leq \lambda_0,$$

de sorte que $|\lambda| = |\lambda - \delta| + \delta$, ce qui n'est possible que si λ est un réel positif. Donc $\lambda = |\lambda| = \lambda_0$, ce qui contredit que $\lambda \neq \lambda_0$. Donc $|\lambda| < \lambda_0$.

3. On sait qu'il existe un vecteur propre $X \geq 0$ tel que $X \in E_{\lambda_0}$. Supposons que $\dim(E_{\lambda_0}) \geq 2$, de sorte qu'il existe $Y \in E_{\lambda_0}$ tel que (X, Y) est une famille libre. Il existe μ tel que $X - \mu Y \geq 0$ (on peut prendre $\mu = \inf \left\{ \dfrac{x_i}{|y_i|}, y_i \neq 0 \right\}$). Comme $A > [0]$ on a $AX - \mu AY > 0$, i.e. $\lambda_0 (X - \mu Y)) > 0$, ce qui contredit le choix de μ. D'où le résultat.

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit A la matrice d'une application linéaire de R^n dans R^n.

1. On a $\text{Im}(A) \oplus (\text{Im}(A))^{\perp} = R^n$. Soit $u \in KerA'$, alors $A'u = 0$ et pour tout $v \in R^n$, $v'A'u = u'Av = 0$, donc u est orthogonal à $\text{Im}(A)$ et $Ker(A') \subset (\text{Im}(A))^{\perp}$. Réciproquement, si $u \in (\text{Im}(A))^{\perp}$ alors pour tout $v \in R^n$, $u'Av = v'A'u = 0$, d'où $u \in KerA'$. En conclusion : $Ker(A') = (\text{Im}(A))^{\perp}$.

2. Soit $f(v) = \|Av - b\|^2$, f est. une forme quadratique, donc convexe et elle admet un minimum en v si et seulement si sa différentielle est nulle en v. On a $df(v) = 2A'Av - 2A'b = 0$. La solution doit donc vérifier $A'Av = A'b$.
   Comme $\text{Im}(A) \oplus Ker(A') = R^n$, pour tout $b \in R^n$, $b = b_1 + b_2$, avec $b_1 \in \text{Im}(A)$ et $b_2 \in Ker(A')$. On a $A'b_2 = 0$ et il existe $u_0 \in R^n$ tel que $Au_0 = b_1$, d'où $A'b = A'(b_1 + b_2) = A'b_1 = A'Au_0$, donc u_0 vérifie la condition d'optimalité.

3. Soit u_1 est une autre solution du problème précédent de minimisation, alors $A'b = A'Au_1$ et $A'b = A'Au_0$.
   Posons $s = Au_1$ et $r = b - Au_1$, alors $r \in Ker(A')$.
   Comme $\text{Im}(A) \oplus Ker(A') = R^n$, la décomposition $b = b_1 + b_2$ est unique et $s = b_1$ et $b_1 = Au_1 = Au_0$.

4. Dans le cas où le rang de la matrice A est égal à *n*, la matrice est inversible et la condition d'optimalité $A'Av = A'b$ donne $Av = b$ et une seule solution $v = A^{-1}b$

Exercice n° 2

Comme f est non constante , il existe $x<y$ tels que $f(x)$ soit différent de $f(y)$. Soit la droite *D* passant par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ qui a pour équation $Y=aX+b$, avec $a=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}>0$ puisque f est croissante. Par convexité de f, la droite *D* est au dessus du graphe de f uniquement entre M et N. Donc si $z>y$, on a $f(z)>az+b$ comme $a>0$; $f(z)$ tend vers $+\infty$ lorsque z tend vers $+\infty$.

Exercice n° 3

Soit $n\geq 3$ un entier. On considère la fonction numérique f définie sur R^2 par $f(x,y)=x^n+y^n-nxy$.

1. Les points critiques de f correspondent aux solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=nx^{n-1}-ny=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=ny^{n-1}-nx=0 \end{cases}$$

On en déduit que $x^{n^2-2n}=1$, il n'y a que deux racines possibles, à savoir $x=\pm 1$.

Si n est pair, n^2-2n aussi, donc 1 et –1 vérifient $x^{n^2-2n}=1$. On vérifie réciproquement que les couples $(x,y)=(1,1)$ ou $(-1,-1)$ sont bien solutions du système.

Si n est impair, n^2-2n aussi, et 1 est la seule racine à retenir. On vérifie que $(1,1)$ est solution du système.

2. La fonction f définie par $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ est continue sur le compact $D=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\leq 4\}$, elle admet sur D un minimum et un maximum.

3. Dans la première question, on a trouvé deux minimums locaux de f sur D et ces deux points appartiennent au domaine D. On calcule $f(1,1)=-2$ et $f(-1,-1)=-2$. Le minimum est donc atteint simultanément en ces deux points.

4. L'inégalité $f(x,y) \leq 16 - 2x^2y^2 - 4xy$ est équivalente à $(x^2 + y^2)^2 \leq 16$ et donc à $(x,y) \in D$. Pour tout couple $(x,y) \in D$, on obtient donc $f(x,y) \leq 16$ si x et y sont de même signe. On remarque que $f(2,0) = 16$ et $f(x,y) = f(-x,-y)$. Si bien que l'on aura prouvé que 16 est le maximum de f sur D si l'on montre que $f(x,y) \leq 16$ lorsque $(x,y) \in D$ vérifie $-2 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$.

   Si $-2 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$,

   $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \leq x^4 + (4 - x^2)^2 - 4x\sqrt{4 - x^2}$

   De sorte que l'on puisse conclure à $f(x,y) \leq 16$ si l'on prouve que, en posant $t = -x$,

   $\forall t \in [0,2]$ $g(t) = t^4 + (4 - t^2)^2 + 4t\sqrt{4 - t^2} \leq 16$, ce qui revient à $4 \leq t^2(4 - t^2)$. Il est maintenant facile de vérifier que $4 \leq u(4 - u)$ pour tout $\forall u \in [0,4]$. En effet l'application $\varphi(u) = 4u - u^2$ est dérivable, sa dérivée $\varphi'(u) = 4 - 2u$ s'annule pour $u = 2$ et elle admet un minimum en ce point.

   Le maximum de f sur D est atteint en $(2,0)$, et en $(-2,0)$ et vaut 16.

Exercice n° 4

1. Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Cette fonction h est continue en 0, car $\underset{x \to 0}{Lim}\, h(x) = \underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 = h(0)$

Cette fonction h est continue sur l'intervalle $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et vérifie $h(a) = 0 = h(0)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,a[$ tel que $h'(c) = 0$, à savoir $cf'(c) - f(c) = 0$. L'équation de la tangente au graphe de f au point $M(c, f(c))$ a pour équation $y - f(c) = f'(c)(x - c)$, en $(0,0)$ on obtient l'expression précédente $cf'(c) - f(c) = 0$. Donc il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M au graphe de f passe par l'origine.

2. Comme $g''(x) \leq 0$ pour tout x de $[a,b]$, la fonction g est concave. Le graphe de g sur $[a,b]$ est donc en dessous de la corde qui joint les points $A(a, g(a))$ et $B(b, g(b))$, donc pour tout x de $[a,b]$, $g(x) \geq Min(g(a), g(b))$, d'où $g(x) \geq 0$. La relation $g(a) = g(b)$ n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat.

Exercice n° 5

1. On trouve pour $0<|x|<1$: $Ln(1-x)=-\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$

2. On a $a=S(1/2)$ et $\frac{1}{(n+1)(n-2)}=\frac{-1/3}{n+1}+\frac{1/3}{n-2}$.

   Pour $0<|x|<1$:

   $$S(x)=\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{(n+1)(n-2)}=-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{n+1}+\frac{1}{3}\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{n-2}=-\frac{1}{3x}\sum_{n\geq 3}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^2}{3}\sum_{n\geq 3}\frac{x^{n-2}}{n-2}$$

   $S(x)=-\frac{1}{3x}I(x)+\frac{x^2}{3}J(x)$, où $I(x)=-Ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ et $J(x)=-Ln(1-x)$.

   On a : $I(1/2)=Ln\,2-\frac{2}{3}$ et $J(1/2)=Ln\,2$, d'où $a=-\frac{7}{12}Ln\,2+\frac{4}{9}$.

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique continue sur R, périodique de période T.

1. En posant $u=nt$, on obtient :

   $$\int_a^b f(nt)\,dt=\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}f(u)\,du=\frac{1}{n}\int_{na}^{k_1T}f(u)\,du+\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T}f(u)\,du+\frac{1}{n}\int_{k_2T}^{nb}f(u)\,du,$$

   avec $k_1=E\left(\frac{na}{T}\right)$ et $k_2=E\left(\frac{nb}{T}\right)$.

   Or $\left|\frac{1}{n}\int_{na}^{k_1T}f(u)\,du+\frac{1}{n}\int_{k_2T}^{nb}f(u)\,du\right|\leq\frac{2}{n}\int_0^T|f(t)|\,dt$ qui tend vers zéro.

   Et $\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T}f(u)\,du=\frac{k_2-k_1}{n}\int_0^T f(u)\,du$ qui converge vers $\frac{(b-a)}{T}\int_0^T f(u)\,du$, d'où le résultat.

2. D'après la question précédente, le résultat est vrai pour une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$, et il le reste clairement pour une combinaison linéaire de telles fonctions.
3. Soit φ une fonction continue sur un intervalle borné $[a,b]$. Il existe une suite de fonctions en escalier φ_n qui converge uniformément vers φ (propriétés de l'intégrale de Riemann).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe p entier strictement positif tel que :

$\forall\, t \in [a,b],\ \left|\varphi(t) - \varphi_p(t)\right| < \varepsilon$

On peut toujours supposer que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)\,du = 1$, on a :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt)|\left|\varphi(t) - \varphi_p(t)\right| dt$$

$$+\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi_p(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(t)\,dt\right| + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(t) - \varphi_p(t)\right| dt$$

Pour n assez grand, chacune des trois expressions de la somme précédente peut être rendue inférieure à un $\varepsilon' > 0$ quelconque, d'où la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt$ vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

4. Pour $f(t) = |\sin t|$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin nt|\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |\sin u|\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin u|\,du = 2\int_0^{\pi/2} \sin u\,du = 2$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin nt|\,\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$

Pour $f(t) = \sin^2 t$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 t\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2}\,du = \frac{\pi}{2}$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 t\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGE DE l'EPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

I. Exercice

1. La série $\left|\sum_{n\geq 1} a_n z_0^n\right|$ converge par hypothèse. De plus, $\sup_{z\in\mathcal{B}(0;|z_0|)}\left\{\sum_{n\geq 1}|a_n||z|^n\right\}$ est convergente car $r=|z_0|$ est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$. Donc, comme $\left|\sum_{n\geq 1} a_n z^n\right| \leq \sum_{n\geq 1}|a_n||z|^n$, finalement, la série est uniformément convergente sur toute la boule de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

2. (a) Soit $a_n = \frac{x^n}{n}$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = |x||\frac{n}{n+1}|$. Or $|x||\frac{n}{n+1}| \leq |x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi d'après le critère de d'Alembert, cette série converge dés que $x| < 1$. La borne supérieure de cet ensemble est par définition r, le rayon de convergence de la série, donc $r = 1$.

   (b) $ln(x+1)$.

   (c) Cette série converge en tant que série alternée de Rieman dont le terme général tend vers 0.

   (d) La série converge sur $[0;1[$ car $r=1$, et la série converge en $x=1$; d'après la question 1, la série converge donc uniformément sur $[0,1]$.

   (e) La fonction $x \mapsto ln(x+1)$ est continue sur tout $]-1,+\infty$. La série est égale à $ln(x+1)$ sur $[0,1[$, et est uniformément convergente sur $[0,1]$, elle est donc continue sur $[0;1]$.

   (f) Calculer

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \sum_{n\geq 1}\lim_{x\to 1} x^n\frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= \lim_{x\to 1}\sum_{n\geq 1} x^n\frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ par convergence uniforme} \\
&= \lim_{x\to 1, x<1}\sum_{n\geq 1} x^n\frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ par continuité de la série en x=1} \\
&= \lim_{x\to 1, x<1} ln(x+1) \text{ d'après la question b)} \\
&= \lim_{x\to 1} ln(x+1) = ln(2) \text{ par continuité de la fonction} x \mapsto ln(x+1).
\end{aligned}
$$

(g) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n}$ a un rayon de convergence égal à $r=1$ (même méthode que la série précédente). Sur $[0;1[$, cette série est égale à $x-arctg(x)$. Cette fonction est continue, et comme la série converge (comme série alternée de Riemann) sur $[0;1]$, elle est continue sur $[0;1]$. Ainsi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}=\lim_{x\to 1}x-arctg(x)=1+\frac{\pi}{4}.$$

II. Problème

Estimation de l'erreur dans l'approximation des intégrales par la méthode de Poncelet.

Méthode 1

- **A. Question préliminaire**

1. (a) On applique deux fois successivement le théorème de Rolle, une fois sur $[0,1]$ aboutissant à l'existence d'un réel $\eta\in[0,1]$, annulant la fonction G, et la seconde fois sur $[0,\eta]$ aboutissant à l'existence du réel θ demandé.

   (b) On applique le théorème des accroissements finis.

2. On pose $g(t)=h(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2})$. Comme $h\in C^2([a;b]))$ avec $a<b$, on a $g\in C^2([0,1])$. En appliquant le **A.**1.(b) et le changement de variable $u=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$, on obtient le résultat demandé.

- **B. Application**

1. Il s'agit d'une série de Riemann lorsque l'intervalle $[0;1]$ est découpé en intervalle de longueur $1/n$ en démarrant en $1/(2n)$. L'application f étant continue sur $[0;1]$ cette série converge vers une limite l égale à $\int_0^1 f(x)dx$.

2.

$$\begin{aligned}
|S_n-l| &= |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-\int_0^1 f(x)dx| \\
&= |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx| \\
&= |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)+\frac{1}{n^3 24}f''(\varepsilon_k))| \quad \text{avec } \varepsilon_k\in[k/n;(k+1)/n] \\
&\leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^3}
\end{aligned}$$

   où $\|f''\|_\infty=\sup_{x\in[0;1]}|f''(x)|$.

3.

$$\begin{aligned}
l-S_n &= \int_0^1 x^2dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{2n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=0}^{n-1}k^2+\sum_{k=0}^{n-1}k+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}1\right) \\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4}\right) \\
&= \frac{1}{12n^2}.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, $f''(x) = 2$ ainsi $\|f''\|_\infty \leq 2$ et la borne (1) vaut $\frac{1}{12n^2}$. La borne (1) est donc optimale.

Méthode 2

1. Soit f affine, c'est à dire qu'il existe a et b deux réels tels que $f(x) = ax + b$, pour tout x réel. On a alors (après calculs)

$$
\begin{aligned}
R_n(f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a\frac{2k+1}{2n} + b) - \int_0^1 ax + bdx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Il s'agit simplement du développement de Taylor avec reste intégral.

3.

$$
\begin{aligned}
R_n(f) &= R_n(f(0) + xf'(0)) + R_n(\int_0^1 \varphi_t(x)f''(t)dt) \text{ car } R_n \text{ est linéaire} \\
&= 0 + \int_0^1 (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_t(\frac{2k+1}{2n}) - \int_0^1 \varphi_t(x)dx)f''(t)dt \\
&= \int_0^1 R_n(\varphi_t)f''(t)dt.
\end{aligned}
$$

4. (a) $K_n(t)$ est un polynôme de degré 3 par dérivables par morceaux.

   (b)

$$
\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{1}{24n^2}.
$$

   (c)

$$
\begin{aligned}
|R_n(f)| &= |\int_0^1 R_n(\varphi_t)f''(t)dt)| \\
&\leq \int_0^1 |R_n(\varphi_t)||f''(t)|dt \\
&\leq \int_0^1 |K_n(t)||f''(t)|dt \\
&\leq \sup||f''||\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}.
\end{aligned}
$$

Avril 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

$\mathbb{N}_n$ désigne $\{1, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

1. On a bien

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt &= \int_0^1 \sum_{0 \le i,j \le n} x_i x_j t^{i+j} dt \\ &= \sum_{0 \le i,j \le n} x_i x_j \frac{1}{i+j+1} = q_n(X)\cdot\end{aligned}$$

Il en résulte que q_n est définie positive.

2. a) Par linéarité, il suffit de vérifier l'égalité pour $P(t) = t^k$. Or

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 t^k dt &= \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} \\ \text{et } \ i\int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta &= \frac{1}{(k+1)}\left(e^{i(k+1)\pi} - 1\right) = \frac{1}{k+1}\left((-1)^{(k+1)} - 1\right)\cdot\end{aligned}$$

La somme de ces quantités vaut 0.

b) Si $X \neq 0$, le polynôme $P(t) = x_0 + \cdots + x_n t^n$ est non nul. Donc

$$\begin{aligned}q_n(X) &= \int_0^1 P(t)^2 dt < \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \\ &= |\int_{-1}^1 P(t)^2 dt| = |i\int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta|,\end{aligned}$$

On en déduit que $q_n(X) < \displaystyle\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta\cdot$

c) On a

$$\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \le j,k \le n} x_k x_j \int_0^\pi e^{i(j-k)\theta} d\theta,$$

puisque les x_j sont réels. Donc

$$\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \le j \neq k \le n} x_k x_j \frac{(-1)^{(j-k)} - 1}{j-k} + \pi \sum_0^n x_j^2 = \pi ||X||_2^2\cdot$$

Ainsi $q_n(X) < \pi ||X||_2$.

3. A étant symétrique, il existe alors une matrice orthogonale O telle que

$$A = {}^tO\Lambda O$$

avec $\Lambda_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\Lambda_{i,i} = \lambda_i$, les λ_i étant les valeurs propres de A. Il résulte que si on pose $Y = OX$, on aurrait

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Ainsi, si les λ_i étaient strictement positifs on aurait ${}^tXAX \geq 0$ et inversement en prenant le vecteur X_i tel que $OX_i = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq n}$, avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$, on obtient ${}^tXAX = \lambda_i > 0$.

4. Puisque H_n est définie positive il résulte des questions 3. et 2. c) que $Sp(H_n) \subset]0, \pi[$.

5. a) Les valeurs propres de $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ sont les racines de $\lambda^2 - \dfrac{4}{3}\lambda + \dfrac{1}{12}$,
soit

$$\lambda_1 = \frac{4+\sqrt{13}}{6}, \lambda_2 = \frac{4-\sqrt{13}}{6}$$

.
b) $q_1(X)$ s'écrit dans une base de vecteurs propres

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

c) Il résulte que l'équation de Γ s'écrit

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1.$$

où $a_i^2 = \dfrac{1}{\lambda_i}$.
d) Le tracé en découle, il s'agit d'une ellipse.

6. Puisque H_1 est définie positive, N est une norme dont Γ est la sphère unité.

Partie II

1. Soit ${}^tX = ({}^tY, y_n) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$. On a

$${}^tXBX = {}^tYAY + 2y_n{}^tCY + y_n^2 a. \tag{1}$$

Clairement A est symétrique et si $Y = 0$ et $y_n = 1$ on obtient que $a > 0$ car ${}^tXBX > 0$. De même, si $y_n = 0$ et Y est non nul on obtient ${}^tYBY > 0$ car ${}^tXBX > 0$.

2. Comme dans la question I.3., on choisit une base telle que $q_B(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Il résulte que si $||X||_2 = 1$ alors $q_B(X) \geq \alpha_1$, avec égalité pour le vecteur dont les coordonnées sont toutes nulles sauf celles d'indice i qui vaut α_1. D'où $\min\limits_{||X||_2=1}(q_A(X)) = \alpha_1$, de même pour $\beta_1 = \max\limits_{||X||_2=1}(q_A(X))$.

3. En prenant dans (1), $y_n = 0$, il résulte que $q_B(X) = q_A(Y)$ par suite $q_A(Y) \geq \alpha_2$ et ainsi $\alpha_1 \geq \alpha_2$. De même pour $\beta_2 \geq \beta_1$.

4. a) Appliquer (1) avec $y_n = u$ et $Y = X$.

b) En calculant le second membre et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|^t XC| \leq ||X||_2 ||C||_2$$

et par suite l'inégalité recherchée.

5. Prenons un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre β_2. Il vient

$$q_B(X) = \beta_2 \leq \max_{u^2+v^2=1} \left\{ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}.$$

Où $D = \begin{pmatrix} \beta_2 & ||C||_2 \\ ||C||_2 & a \end{pmatrix}$. Donc $\beta_2 \leq \max_{\lambda \in Sp(D)} \lambda = \frac{1}{2}\left\{\beta_1 + a + \sqrt{4||C||_2^2 + (\beta_1 - a)^2}\right\}$.

5. Clairement par ce qui précède (II.3) (α_n) est une suite décroissante et (β_n) est croissante. L'inégalité découle du la question II.4 .c) qui permet d'obtenir

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left\{\beta_n + \frac{1}{2n+3} + \sqrt{\left(\beta_n - \frac{1}{2n+3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right)}\right\}$$

Or pour tout $a, b \geq 0$, on a

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Il résulte que

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left\{\beta_n + \frac{1}{2n+3} + \left|\beta_n - \frac{1}{2n+3}\right| + 2\sqrt{\left(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right)}\right\}$$

Mais $\beta_n \geq \beta_0 = 1$. Donc $\beta_n \geq \dfrac{1}{2n+3}$ et

$$\beta_n + \frac{1}{2n+3} + \left|\beta_n - \frac{1}{2n+3}\right| = 2\beta_n.$$

D'autre part

$$\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

D'où l'inégalité recherchée.

Partie III

1. Facile à voir.

2. Il suffit de voir que $\delta_n = \inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]} \left\{||e_n - P||^2\right\}$, avec $e_n(t) = t^n$ et la norme $|| \ ||$ étant associée au produit scalaire définie dans III 1. Il vient qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tel que $||e_n - P||^2 = \delta_n$ et pour tout $i \in [0, n-1]$,

$$< e_n - P, e_i >= 0.$$

3. a) Constatons que pour tout $k \in [0, n-1]$ on a

$$F(k) = \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) t^k dt = 0.$$

b) On peut écrire

$$F(X) = \frac{A(X)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$$

avec $deg(A) \leq n$ et de a) on déduit que $A(0) = \cdots = A(n-1) = 0$, ainsi

$$A(X) = \lambda X(X-1)\cdots(X-n+1)\cdot$$

Donc

$$F(X) = \lambda \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}\cdot$$

Or par la définition de F, on a $F(X)(X+n+1)$ pris en $X = -n-1$ a pour valeur 1. Il résulte que $\lambda = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et par suite

$$F(X) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}\cdot$$

c) $\delta_n = F(n) = \frac{(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}$ ·

4. Prendre $X = (a_0, \cdots, a_{n-1}, 1)$, il résulte que $\delta_n = q_n(X)$ et par suite

$$\alpha_n \leq \frac{\delta_n}{||X||_2^2} \leq \frac{(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!} = u_n\cdot$$

Il est facile de voir que $u_n \leq \frac{1}{12.15^n}\cdot$ D'où le résultat.

Partie IV

1. On a $AX = B$ et $\Delta X = A^{-1}\Delta B$, car $A\Delta X = \Delta B$ donc $||B||_2 \leq ||A||\ ||X||_2$ et $||\Delta X||_2 \leq ||A^{-1}||\ ||\Delta B||\cdot$ D'où

$$\frac{||\Delta X||_2}{||X||_2} \leq C(A)\frac{||\Delta B||_2}{||B||_2}$$

2. La matrice ${}^tAA$ est symétrique, on peut alors choisir une base orthonormale de vecteurs propres, ainsi, on obtient que $||A||^2 = \max(Sp({}^tAA))$. Par ailleurs ${}^tAA = {}^tA(A{}^tA){}^tA^{-1}$. Donc $Sp({}^tAA) = Sp(A{}^tA)$ et donc

$$||A^{-1}||^2 = \max(Sp(({}^tAA)^{-1})) = \frac{1}{\min(Sp({}^tAA))}\cdot$$

D'où le résultat.

3. Si A est symétrique définie positive alors ${}^tA = A$, il vient que

$$C(A) = \frac{\max(Sp(A))}{\min(Sp(A))}$$

4. Si $C(A) = 1$ alors $\max(Sp(({}^tAA)^{-1})) = \min(Sp({}^tAA))$. Donc la valeur propre $\min(Sp({}^tAA))$ est de multiplicité n. Il résulte que ${}^tAA = \min(Sp({}^tAA))Id$ et donc $\frac{A}{\sqrt{\min(Sp({}^tAA))}}$ est orthogonale.

5. On a ${}^tQAQA = {}^tAA$ Donc $C(A) = C(QA)$.
6. On a
$$C(H_n) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \geq \frac{\beta_1}{\alpha_n} \geq \frac{4+\sqrt{13}}{6} \times 12 \times 15^{n-1}.$$

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit l'équation $(E_n): x^n + x - 1 = 0$

1. Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

2. f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Ln\,n}{2n}) \approx \frac{Ln\,n}{2} > 0$ et

$f_n(2\frac{Ln\,n}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Ln\,n}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Ln\,n}{n}$

3. $Ln(\frac{Ln\,n}{2n}) \leq Ln(u_n) \leq Ln(2\frac{Ln\,n}{n})$ implique $Ln(u_n) \approx -Ln\,n$, puis $nLn(1-u_n) = -Ln\,u_n$ implique $-nu_n \approx -Ln\,n$, d'où $u_n \approx \frac{-Ln\,n}{n}$ et enfin $x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$

Exercice n° 2

1. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, on effectue le changement de variable $x = e^t$, d'où $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2t}}{1+e^{4t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2t)} dt$, avec $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. On a : $ch2t = 1 + 2sh^2 t$. En posant $u = sht$, on obtient : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+2u^2} du$, puis en posant $t = \sqrt{2}u$, $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} [Arctg(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2. A l'aide du changement de variable $x = 1/t$, on a : $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Exercice n° 3

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues sur R f

qui vérifient : $f(x) = -1 - \int_0^x (x-t) f(t) dt$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x) = -1 - x\int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t) dt$ et en particulier $f(0) = -1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f'(x) = -\int_0^x f(t) dt - xf(x) + xf(x)$, soit $f'(x) + \int_0^x f(t) dt = 0$.

Posons $y(x) = \int_0^x f(t) dt$, on obtient l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = 0$.

La solution générale est $y(x) = A\cos x + B\sin x$, et avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, $y(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\cos x$

On vérifie aisément que $f(x) = -\cos x$ est solution de l'équation proposée.

Exercice n° 4

Soit $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-\frac{x^2}{2n^2})} = \underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2n^2} = 0$

2. L'intégrale $\int_R g(x) f_n(x)\,dx = \int_a^b g(x) f_n(x)\,dx$ est bien définie. En posant $x = t/n$, on obtient $\int_R g(x) f_n(x)\,dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\,dt = \int_R h_n(t)\,dt$ avec

$h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^2}\right)^{2n^4} g(t/n) I_{[na,nb]}(t)$

Pour n assez grand tel que $a/n, b/n \le 1$ on ait pour tout
$t \in [na, nb]$, $\left|t^2/2n^4\right| \le 1/2 < 1$,
$|h_n(t)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-t^2/2n^4)} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \varphi(t)$. Cette inégalité reste encore valable pour $t \notin [na, nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur R, on peut alors appliquer le théorème de converge dominée et conclure $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_R g(x) f_n(x)\,dx = g(0)$, sachant que $\int_R e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$

Exercice n° 5

On note $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\,dx$,

1. $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + tg^2 x) tg^n x\,dx = \frac{1}{n+1}$

2. La suite I_n est décroissante et minorée par zéro donc elle converge.

3. On a $I_n + I_{n+2} \le 2I_n \le I_{n-2} + I_n$, d'où $I_n \approx \frac{1}{2n}$.

Exercice n° 6

1. On suppose que $l \leq a$.

   a. La représentation géométrique montre qu'il y a chevauchement si $\frac{l}{2}\cos\theta \geq d$.

   b. On note ω un lancer de l'aiguille. Les applications $\omega \to d$ et $\omega \to \theta$ sont considérés comme des variables aléatoires uniformes. Elles sont susceptibles de prendre n'importe quelles valeurs dans les intervalles respectifs $[0, a/2]$ et $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit G le graphe de la fonction $\theta \to \frac{l}{2}\cos\theta$ à l'intérieur du pavé $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{a}{2}\right]$. A un lancer de l'aiguille correspond point de coordonnées (θ, l) dans ce pavé. Il y aura chevauchement si et seulement si ce point est en dessous du graphe G. La probabilité de chevauchement est égale à l'aire sous la courbe (cas favorables) divisée par l'aire du pavé (cas possibles) :

$$p = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}$$

2. On suppose maintenant $l > a$.

Le raisonnement précédent est encore valable, mais cette fois le graphe G sort du pavé. Pour calculer l'aire incluse dans le pavé il faut évaluer les abscisses $-\alpha$ et α des points d'intersection entre G et le segment supérieur du pavé. On obtient $\alpha = Arc\cos(\frac{a}{l})$.

$$p = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\pi/2}^{-\alpha}\cos\theta \, d\theta + 2\alpha\frac{a}{2} + \frac{l}{2}\int_{\alpha}^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l(1-\sin\alpha) + 2a\alpha}{\pi a}$$

Exercice n° 7

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$\forall x \in R, \quad f(x) = (1-x) f(\alpha x) \text{ où } f \text{ est une fonction continue sur } R.$$

1. Si f est solution de (E) alors $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x) f(\alpha^{n+1}x)$. Quand n tend vers plus l'infini, $f(\alpha^{n+1}x) \to f(0)$ tandis que la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)$ converge. En effet, pour N assez grand, $\forall n \geq N, \prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x) > 0$ et $Ln(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)) = \sum_{k=N}^{n} Ln(1-\alpha^k x)$ et $Ln(1-\alpha^k x)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $\forall x \in R, \quad f(x) = f(0)\prod_{k=0}^{\infty}(1-\alpha^k x)$. La fonction g a une expression de la même forme, d'où l'égalité de f et g lorsque $f(0) = g(0)$.

2. Par calculs, on obtient que pour $a_0 \in R$ et pour tout n, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha^n}{(1-\alpha^{n+1})} a_n$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in R$ et sa fonction somme $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation prenant la valeur a_0 en 0.

   Ainsi toutes les fonctions f solutions de (E) sont développables en série entière sur R et on vérifie $f(x) = f(0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{\alpha^k}{1-\alpha^{k+1}}\right)x^n$.

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGE DE l'EPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1.

1. Soit le rationnel 1. On a pour tout rationnel $x = \frac{p}{q}$, $x + 1$ qui est un rationnel puisque $\frac{p}{q} + 1 = \frac{p+1}{q}$ qui est également un rationnel. Ainsi $f(x) = f(x + 1) = 1$. Maintenant, soit x irrationnel, $x + 1$ est alors un irrationnel, et $f(x + 1) = g(x) = 0$. Ainsi 1 est une période non nulle de f, et f est périodique.

2. Soit a une période de f. On a pour tout x réel $f(x+a) = f(x)$. En particulier, si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et $q \neq 0$ deux entiers relatifs, $f(x) = 1$ donc $f(x + a) = 1$. Ce qui implique que $x + a$ est rationnel. Ainsi il existe p' et $q' \neq 0$ tels que $x + a = \frac{p'}{q'}$ où encore $a = \frac{p'q-pq'}{qq'}$. Ainsi a est rationnel.

3. Soient a un rationnel quelconque et x un réel. On a alors soit x et $x + a$ rationnels soit x et $x + a$ irrationnels.

4. Ainsi tout rationnel est une période de f or le groupe des rationnels n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 2.

1. On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La suite de terme général f_n converge donc uniformément vers la fonction identiquement nulle.

2. Pour tout n entier non nul, f_n est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$. Enfin, la fonction identiquement nulle est également dérivable, de dérivée nulle.

3. Soit $x = \pi$, $f_n'(\pi) = (-1)^n\sqrt{n}$ est une série alternée divergente. Ainsi, bien que la suite (f_n) soit uniformément convergente, que f_n soit dérivable en tout point et que la limite de (f_n) soit dérivable, la suite des dérivées (f_n') n'est pas convergente.

Problème

- **Préliminaires.**

  1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx &= \int_{x\geq t} x^2 f(x)dx + \int_{x<t} x^2 f(x)dx \\
&\geq \int_{x^2\geq t^2} x^2 f(x)dx \quad \text{car le second terme est toujours positif} \\
&\geq t^2 \int_{x\geq t} f(x)dx \quad \text{car le second terme est toujours positif.}
\end{aligned}$$

Ou encore

$$\forall t > 0, \quad 1 - F_Y(t) \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{t^2} \tag{1}$$

2. Comme f est une densité strictement positive on a $F_Y'(x) = f(x) > 0$. On a F_Y est strictement croissante.
3. $P(Y - \mu > t) = 1 - P(Y \leq t + \mu) = 1 - F_Y(t + \mu)$.
4.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P(\sigma Z + \mu \leq t) \\ &= P(Z \leq \frac{t - \mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

5. $\mathbb{E}[(t - \mathbf{Y})^2] = t^2 - 2t\mu + \sigma^2 + \mu^2$. Pour $t = \mu$, $\mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mu)^2] = \sigma^2$.
6. On considère ici $\mu = 0$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$:

$$\begin{aligned} t &= \mathbb{E}(t - Y) \\ &= \mathbb{E}((t - Y)(\mathbb{1}_{Y<t} + \mathbb{1}_{Y \geq t})) \\ &\leq \mathbb{E}((t - Y)(\mathbb{1}_{Y<t})) \quad \text{car } \mathbb{E}((t - Y)\mathbb{1}_{Y \geq t}) \text{ est négatif} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}((t - Y)^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y<t}^2)} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy Schwarz.} \end{aligned}$$

- **Question 1.**

1. Soit t tel que $F_Y(t) = p$. Par 1, on a, en remplaçant $F_Y(t)$ par p, et pour t et p tels que $1 - p \neq 0$,

$$1 - p \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

   On conclut en appliquant une racine carrée.
2. Comme $F_Y(\tilde{t}) = \tilde{p} = F_Z(\tilde{t} - \mu)$, et que Z à une espérance nulle, on applique le résultat de la question précédente avec $t = \tilde{t}\mu$ et $p = \tilde{p}$.
3. On cherche un majorant de t tel que $F_Y(t) = 90\% = p$. On utilise la question précédente pour conclure.

- **Question 2.**

1. On utilise le préliminaire 5 et on obtient $\mathbb{E}((t - Y)^2) = t^2 + 1$. Puis en injectant ce résultat dans (1) on a $t \leq \sqrt{(t^2 + 1)\mathbb{P}(Y < t)}$ ce qui permet de conclure.
2. Comme $F_Y(t) = p$, avec la question précédente on conclut.
3. On pose $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ avec $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $var(Z) = 1$. En remarquant que $F_Y(t) = p \Longleftrightarrow F_Z(\frac{t-\mu}{\sigma}) = p$ et en posant $\tilde{t} = \frac{t-\mu}{\sigma}$ et $\tilde{p} = p$, avec le résultat de la question précédente on conclut.
4. On remplace par $p = 90\%$.

- **Question 3.**

1. Il permet de donner très rapidement un majorant de tout décile qui n'est pas trop grossier.

2. Ce résultat est généralisable à toute variable aléatoire admettant une variance. Le problème qui peut se poser est au niveau de l'inverse de la fonction de répartition. En effet dans le cas de variable dont la densité s'annule, ou de variable discrète par exemple, la fonction de répartition n'est pas toujours strictement croissante. Il suffit alors de considérer l'inverse comme étant le sup de l'ensemble des réels t pour lesquels $F_Y(t) = p$. Tous les résultats énoncés s'appliquent alors en raison du sens des inégalités montrées.

Avril 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n, $(n \geq 1)$.

Partie I

a. Si μ et ν sont deux valeurs co-propres associées au vecteur co-propre x, alors $(\mu - \nu)x = 0$ ce qui entraîne que $\mu = \nu$.
b. Il est clair que E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car $\overline{\lambda} = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Soit $x \neq 0$ un vecteur co-propre associée à μ. Nous avons :

$$u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}\mu x = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$$

et donc $e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ est un vecteur co-propre pour $e^{i\theta}\mu$.
d) On en déduit de la question précédente que E_μ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
e) Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$u \circ v(x + \lambda y) = (u \circ v)(x) + u(\overline{\lambda} v(y)) = (u \circ v)(x) + \lambda(u \circ v)(y),$$

donc $u \circ v$ est linéaire.

Partie II

a. A est la matrice de u dont les vecteurs colonnes sont Ae_i, exprimés dans la base (e_i). Or $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et comme u est semi-linéaire, on a $A\overline{X} = \sum_{i=1}^n x_i A e_i = Y$, où Y est la matrice colonne associée au vecteur $y = u(x)$.

b. Soient x et y des vecteurs liés par $y = u(x)$. Si X et X' (resp. Y et Y') sont les matrices-colonnes de x (resp. y) dans les bases (e_i) et (f_i), alors on a les relations suivantes :

1. $Y = A\overline{X}$.
2. $Y' = A\overline{X'}$.
3. $X = SX'$ et $Y = SY'$. Alors $Y = SY' = SB\overline{X'} = SB\overline{S^{-1}}\overline{X}$, et donc $A = SB\overline{S^{-1}}$.

c. Si μ est une valeur co-propore asscoiée au vecteur co-propore X alors $-\overline{b} = \mu a$ et $\overline{a} = \mu b$. Comme X n'est pas nul alors $a \neq 0, b \neq 0$ et $\mu \neq 0$. On trouve $|\mu|^2 = -1$, ce qui est impossible. La matrice A n'admet pas de valeurs co-propres.

d. Si A est une matrice réelle qui admet une valeur propre réelle λ, alors elle admet pour cette valeur propre un vecteur propre réel non nul X. Il résulte que $A\overline{X} = AX = \lambda X$. λ est ainsi une valeur co-propre.

Partie III

a. Soit X un vecteur co-propre pour μ. Alors, on a

$$A\overline{A}X = A\overline{A\overline{X}} = \overline{\mu}A\overline{X} = |\mu|^2 X,$$

On en déduit que $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\overline{A}$.

b. *) Cas $A\overline{X}$ et X sont liés. Il existe donc un complexe μ tels que $A\overline{X} = \mu X$. Alors

$$A\overline{A}X = A(\overline{\mu}\overline{X}) = |\mu|^2 X = \lambda X.$$

En particulier, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = \lambda$ et μ est une valeur co-propre de A. La question précédente permet d'affirmer qu'en fait $\sqrt{\lambda}$ est lui-même une valeur co-propre de A.
*) Cas $A\overline{X}$ et X sont indépendants. Alors

$$\begin{array}{rcl} \overline{A}(A\overline{X} - \sqrt{\lambda}X) & = & \overline{A}A\overline{X} - \sqrt{\lambda}\overline{A}X \\ & = & \lambda\overline{X} - \sqrt{\lambda}\overline{A}X \\ & = & -\sqrt{\lambda}(\overline{A}X - \sqrt{\lambda}\overline{X}) \\ & = & -\sqrt{\lambda}(\overline{A\overline{X} - \sqrt{\lambda}X}) \end{array}$$

et $-\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A. Donc $\sqrt{\lambda}$ aussi.

c. Découle facilement des deux questions précédentes.

d. Comme T est triangulaire supérieure, $T\overline{T}$ l'est aussi, les coefficients sur la diagonale étant le module au carré des coefficients sur la diagonale de T. Soit λ une valeur propre de T. Comme T est triangulaire supérieure, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, et $|\lambda|^2$ est une valeur propre de $T\overline{T}$. Il en résulte que $|\lambda|$ est valeur co-propre de T. Nous concluons toujours grâce à I.c.

e. Si μ est une valeur co-propre de T, $|\mu|^2$ est une valeur propre de $T\overline{T}$. Comme les valeurs propres de $T\overline{T}$ sont les modules (au carrée) des valeurs propres de T, il existe λ un complexe tel que $|\lambda| = |\mu|$, et λ est une valeur propre de T.

f. 1 est valeur co-propre de S, car i est valeur propre de S, et $1 = ie^{-\frac{\pi}{2}i}$. En outre

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a-d) + b + c \\ ic + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}$$

Nous résolvons l'équation. Par exemple, le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur co-propre pour 1.

g. Soit X une matrice-colonne de taille n, qu'on décompose en $X = U + iV$, où U et V sont réelles. Alors,

$$A\overline{X} = (BU + CV) + i(CU - BV).$$

Si X est un vecteur co-propre associé à μ, on a en particulier : $BU + CV = \mu U$ et $CU - BV = \mu V$. D'autre part, si on considère la matrice-colonne de taille $2n$, $Y = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, alors :

$$DY = \begin{pmatrix} BU + CV \\ CU - BV \end{pmatrix}$$

Donc, si X est un vecteur co-propre pour μ relativement à D, Y est vecteur propre pour μ relativement à D. Réciproquement, si μ est valeur propre de D, comme D est réelle, il existe un vecteur propre réel (décomposer n'importe quel vecteur propre en partie réelle/partie imaginaire) Y , qu'on décompose comme ci-dessus. Alors le vecteur $X = U + iV$ est un vecteur co-propre de μ (relativement à D).

Partie IV

1. Un simple calcul montre que $A\overline{A} = PD\overline{D}P^{-1}$, où $D\overline{D}$ est diagonale, ses coefficients étant positifs ou nuls. En outre, nous avons :

$$\mathrm{rg}(A\overline{A}) = \mathrm{rg}(D\overline{D}) = \mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(A).$$

2. On a

$$B\overline{B} = P^{-1}A\overline{P}\overline{P}^{-1}\overline{A}P = P^{-1}A\overline{A}P = \Lambda.$$

D'autre part

$$\overline{B}B = \overline{P}^{-1}\overline{A}PP^{-1}A\overline{P} = \overline{P}^{-1}\overline{A}A\overline{P} = \Lambda$$

Il résulte que $B\overline{B} = \overline{B}B$. Il s'en suit que $B\Lambda = BB\overline{B} = \overline{B}BB = \Lambda B$.

3. Comme B commute avec Λ, le noyau de $\Lambda - \lambda_p I_n$ est stable par B. On peut alors écrire B sous la forme demandée.

4. Du fait que $B\overline{B} = \Lambda$, chaque matrice B_p vérifie que $B_p\overline{B_p} = \lambda_p I_{n_p}$. Si $\lambda_p \neq 0$, on utilise alors le résultat de III.c., appliqué à la matrice $A = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_p}}B_p$, pour prouver que B_p est co-semblable à une matrice diagonale. Le cas litigieux de $\lambda_k = 0$ se traite de la façon suivante : comme le rang de $A\overline{A}$ vaut le rang de A, le rang de B est celui de Λ . Dans le cas où $\lambda_k = 0$, le rang de Λ est $n_1 + \cdots + n_{k-1}$. Le rang de B est $rg(B_1) + \cdots + rg(B_k)$. Mais le calcul $B_p\overline{B_p} = \lambda_p I_{n_p}$ prouve que pour $p < k$, le rang de B_p est exactement n_p. On trouve donc que le rang de B_k est nul, ou encore que $B_k = 0$. En résumé, pour tout p de 1 à k, il existe des matrices inversibles S_p et des matrices diagonales D_p telles que $B_p = S_p D_p \overline{S_p}^{-1}$. Nous posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & S_2 & \cdots & \\ \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & S_k \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & D_2 & \cdots & \\ \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & D_k \end{pmatrix}$$

Nous avons $B = PD\overline{P}^{-1}$, et donc B est co-diagonalisable. Comme cette notion est invariante par matrice co-semblable, A est aussi co-diagonalisable.

5. Il suffit de constater que les conditions i) et ii) pour une matrice symétrique réelle sont très faciles à vérifier. Il reste à montrer que le rang de A et A^2 sont les mêmes. Pour cela, constatons que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont orthogonaux. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(A)$ et $y = Az$, pour un certain z on a

$$< x, y >=< x, Az >=< Ax, z >=< 0, z >= 0.$$

Il résulte que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont en somme direct et A est co-diagonalisable.

6. Nous essayons d'appliquer comme dans la question précédente les conditions $i), ii)$ et $iii)$. On a

$$B\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, D\overline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E\overline{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- B est co-diagonalisable et non diagonalisable.
- C est diagonalisable mais pas co-diagonalisable.
- D est ni diagobalisable ni co-diagonalisable.
- E est diagonalisable et co-diagonalisable.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soient $f(x) = \cos x\, Ln(\sin x)$ et $g(x) = \cos x\, Ln(tg\, x)$.
En 0, $\sqrt{x}\, f(x) \to 0$ et $f(\pi/2) = 0$, donc f est intégrable sur l'intervalle $]0,\pi/2[$.
En $\pi/2$, on peut prolonger g par continuité en posant $g(\pi/2) = 0$. En 0, $\sqrt{x}\, g(x) \to 0$, donc g est intégrable sur l'intervalle $]0,\pi/2[$.

2. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, Ln(\sin x) dx = \int_0^1 Ln u\, du$, en posant $u = \sin x$,

et $\int_0^1 Ln u\, du = [uLnu - u]_0^1 = -1$

3. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, Ln(tg\, x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 Ln(1-u^2)\, du = \frac{1}{2}\left[-(1-u)Ln(1-u^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{1+u} du = Ln2 - 1$

Exercice n° 2

Soit la fonction gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$

1. Au voisinage de 0, $e^{-t}t^{x-1}$ est équivalent à t^{x-1} qui est intégrable pour $x > 0$ et l'intégrale est convergente à $+\infty$. Son domaine de définition est R^{+*}.

2. En effectuant une intégration par parties, on obtient :
$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)} .$$

3. $(1-\frac{t}{n})^n = e^{n Log(1-t/n)}$ qui tend vers e^{-t}.

4. $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)...(x+n)}$ d'après les questions précédentes.

Exercice n° 3

Soit $y(x)$ une fonction de classe C^2 sur R. On considère l'équation différentielle suivante :
$y''(x)+xy'(x)+2y(x)=0$ avec les conditions : $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$

1. Soit $y(x)=-xe^{-x^2/2}$, $y'(x)=e^{-x^2/2}(x^2-1)$, $y''(x)=e^{-x^2/2}(3x-x^3)$ et l'équation différentielle précédente est vérifiée ainsi que les conditions. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (sans tenir compte des conditions initiales) est un espace vectoriel de dimension 2 et en fixant les deux conditions, on obtient une unique solution.

2. On suppose que f est solution de l'équation
$$f(x)=-1-\int_0^x (2x-t)f(t)\,dt$$
Alors $f(x)=-1-\int_0^x 2xf(t)\,dt+\int_0^x tf(t)\,dt$

On a $f(0)=-1$ et f est dérivable avec $f'(x)=-2\int_0^x f(t)\,dt-2xf(x)+xf(x)$

La fonction $y: x \to x\int_0^x f(t)\,dt$ est donc solution de l'équation différentielle $y''(x)+xy'(x)+2y(x)=0$ avec les conditions initiales précédentes. D'après la première question $y(x)=-xe^{-x^2/2}$ et $f(x)=(x^2-1)e^{-x^2/2}$

Exercice n° 4

Pour $k>1$ et $x\in R$ positif, on pose
$$f_k(x)=\frac{\left((k-1)x+1\right)^{k/k-1}-kx-1}{k}$$
et
$$f_k^*(y)=\underset{x\in R}{Sup}\,(xy-f_k(x))$$

1. Pour $k=2$, $f_k(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $f_k^*(y)=\underset{y}{Sup}(xy-\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{2}y^2$. Cette borne supérieure est atteinte pour $x=y$.

2. Etude de la convexité de $f_k(x)$. On a : $k\,f_k^{'}(x)=k(((k-1)x+1)^{k/k-1}-1)$. Posons $u=((k-1)x+1)^{k/k-1}-1$, on obtient : $u^{'}=((k-1)x+1)^{-k/k-1}>0$, la dérivée seconde de $f_k(x)$ étant strictement positive, la fonction est convexe. (Comme $k>1$ et $x\in R$ positif, la racine est bien définie).

3. Calcul de $f_k^*(y)$ pour tout $k>1$. Soit $g(x)=xy-f_k(x)$, alors $g^{'}(x)=y-f_k^{'}(x)=0$ pour $x=\dfrac{(y+k)^{k-1}-1}{k-1}$ et $f_k^*(y)=\dfrac{(1+y)^k-ky-1}{k(k-1)}$

Exercice n° 5

Soit A une partie non vide de R^2 et $a\in A$. On pose,

$$T(A,a)=\{u\in R^2\,/\,\exists(x_n)\in A,\ \exists\lambda_n>0,\ x_n\to a,\ \lambda_n(x_n-a)\to u\}$$

1. $(0,0)\in T(A,a)$, il suffit de prendre $x_n=a$ et $\lambda_n=1$.

2. Soit $u\in T(A,a)$, $\forall\,\mu>0$, $\mu\lambda_n(x_n-a)\to\mu u$ et $\mu u\in T(A,a)$, donc cet ensemble est stable par homothétie positive.

3. Montrons que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2. Soit u^i une suite de points de $T(A,a)$ et $u=\lim_i u^i$. Comme $u^i\in T(A,a)$, $\exists\lambda^i_{p_i}>0$, $\exists x^i_{p_i}\in A$, $x^i_{p_i}\to a$,

$\lambda^i_{p_i}(x^i_{p_i}-a)\to u^i$. Pour tout n, $\exists k_n>0$ tel que $\left|\lambda^n_{k_n}(x^n_{k_n}-a)-u^n\right|<\dfrac{1}{n}$ et alors

$x^n_{k_n}\to a$, $\lambda^n_{k_n}(x^n_{k_n}-a)\to u$ et $u\in T(A,a)$, ce qui montre que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2.

4. Montrons que $T(A,a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe de R^2. Soient $u,v\in T(A,a)$ et $0<\lambda<1$:

$\exists(u_n)\in A,\ \exists\lambda_n>0,\ u_n\to a,\ \lambda_n(u_n-a)\to u$

$\exists(v_n)\in A,\ \exists\alpha_n>0,\ v_n\to a,\ \alpha_n(v_n-a)\to v$ et

$\lambda\lambda_n(u_n-a)+(1-\lambda)\alpha_n(v_n-a)\to\lambda u+(1-\lambda)v$.

Par ailleurs,

$\lambda\lambda_n(u_n-a)+(1-\lambda)\alpha_n(v_n-a)=(\lambda\lambda_n+(1-\lambda)\alpha_n)\left(\dfrac{\lambda\lambda_nu_n+(1-\lambda)\alpha_nv_n}{\lambda\lambda_n+(1-\lambda)\alpha_n}-a\right)$, ou encore,

$\lambda\lambda_n(u_n-a)+(1-\lambda)\alpha_n(v_n-a)=\beta_n(w_n-a)$ avec

$\beta_n(w_n-a)\to\lambda u+(1-\lambda)v$,

$w_n\in A$, car A est une partie convexe de R^2,

$w_n=\dfrac{\lambda\lambda_nu_n+(1-\lambda)\alpha_nv_n}{\lambda\lambda_n+(1-\lambda)\alpha_n}\to a$ car $\|w_n-a\|\le Max(\|u_n-a\|,\|v_n-a\|)$.

En conclusion $\lambda u + (1-\lambda)v \in T(A,a)$

5. Soit $A = R^+ \times R^+$, explicitons $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$. On vérifie facilement que $T(A,a) = R^+ \times R^+$

6. Soit $A = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$, explicitons $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.
Soit $u = (x,y) \in T(A,a)$,
$\exists (x_n, y_n) \in A,\ \exists \lambda_n > 0, x_n \geq 0, y_n \geq 0, y_n \geq x_n^2, x_n \geq y_n^2, \lambda_n x_n \to x, \lambda_n y_n \to y$

En multipliant par λ_n les inégalités, on obtient :
$y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \lambda_n (y_n - x_n^2) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n y_n - \lambda_n x_n x_n \geq 0$ et par passage à la limite, $y \geq 0$. De même, $x \geq 0$. On a donc $T(A,a) \subset R^+ \times R^+$. Réciproquement, on pose, pour $(x,y) \in R^+ \times R^+$, $x_n = x/n, y_n = y/n, \lambda_n = n$ et on vérifie que cette suite (x_n, y_n) appartient à l'ensemble A pour n grand.

Exercice n° 6

On a $u_n = Ln(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}}) = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$. Ces deux séries de terme général v_n et w_n convergent si et seulement si $2\alpha > 1$, donc la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice n° 7

Soit $Y = (y_1, ..., y_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs.

1. Le $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha)^2$ est atteint pour $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ (il suffit d'annuler la dérivée de cette fonction convexe). La valeur du minimum est égale à $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{Y}^2$, où $\overline{Y}$ est la moyenne des éléments du n-uplet.

2. Soit $X=(x_1,...,x_n)$ un autre n-uplet de valeurs positives réelles, trouver le nombre réel a solution du problème de minimisation suivant :
$\underset{a\in R}{Min}\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2$. On pose $f(a)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2$, on obtient
$f^{'}(a)=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-ax_i)$ et la dérivée de cette fonction convexe s'annule pour
$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$.

3. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$. Pour tout réel $\lambda>0$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda y_i)^2\geq 0$ et donc le discriminant de cette inéquation du second degré est toujours négatif, ce qui donne l'inégalité recherchée.

4. Soit $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha)^4$, $f^{'}(\alpha)=-4\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha)^3$, $f^{''}(\alpha)=12\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha)^2$.
La fonction f est donc strictement convexe et il existe une unique solution au problème de minimisation. L'étude de l'équation $f^{'}(\alpha)=0$ (regarder le sens de variation de $f^{'}$ et utiliser la question 3), montre d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la solution est strictement positive.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1.

On rappelle le critère d'Abel : dans le cas d'une série à terme général v_n à valeurs réelles du type $\forall n \geq n_0 \quad v_n = (-1)^n y_n$ avec $\forall n \geq n_0, \quad y_n \geq 0$, on obtient la convergence de la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ si $(y_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

1. D'après Abel appliqué 2 fois, ainsi que le fait qu'une somme de 2 séries convergentes est une série convergente, on a $\sum_n w_n$ converge.

2. D'après Abel et les séries de Riemann, ainsi que le fait que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente, on a $\sum_n u_n$ diverge.

3.
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4. Lorsque 2 séries positives sont équivalentes, elles sont de même nature. Ici nous avons bien 2 séries équivalentes, mais de nature différente, ceci est possible car elles ne sont pas positives.

Exercice 2.

1.
$$\begin{cases} u_{2n} = 2n(1+(-1)^{2n}) \\ u_{2n+1} = (2n+1)(1+(-1)^{2n+1}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_{2n} = 4n \\ u_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

2. La limite de la sous-suite impaire est 0 qui est donc une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

3. Comme la sous-suite paire est de limite $+\infty$, la suite $(u_n)_n$ est divergente.

4. Il est nécessaire que la valeur d'adhérence soit unique et finie pour que la série converge.

Exercice 3.

1. Tous ces graphes sont des graphes de fonctions résolvant le système (*). Ces fonctions sont de la forme y^3 soit sur tout $\mathbb{R}$ soit sur $\mathbb{R}^+$ soit sur $\mathbb{R}^-$ complété par la fonction identiquement nulle sur les parties complémentaires ou sur tout $\mathbb{R}$.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier l'unicité de la solution dès lors qu'une condition de Lipschtiz est remplie. Hors de ces conditions, il est possible d'avoir plusieurs solutions comme c'est le cas ici.

Exercice 4.

1. (a) Evident car $|sin(y)| \leq 1$ pour tout y réel.
   (b) f est continue sur $\mathbb{R}^*$. En 0, avec le 1.(a) on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.
   (c) Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables sur tout $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^*$. De plus

$$\begin{aligned} f'(x) &= sin(\frac{1}{x}) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)cos(\frac{1}{x}) \\ &= sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}cos(\frac{1}{x}). \end{aligned}$$

   (d) La fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}cos(\frac{1}{x})$ admet une limite nulle. Donc g n'est pas continue en 0.
   (e) Le taux de variation de f en 0 est égal à la fonction g qui n'est pas continue en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.
2. (a)

$$\begin{aligned} \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \bigcup_{n\geq 1}\left([\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[\cup[\frac{2}{4^n};\frac{3}{4^n}[\cup[\frac{3}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\right) &= \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\\ &= \{0\} \cup [1;+\infty[\cup]0;1[\\ &= \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

   De plus h est définie par parité donc définie sur tout $\mathbb{R}$.
   (b)
   (c) $h(\frac{3}{4^n}) = 1$. La fonction h est continue (comme fonction affine) sur chacun des intervalles en $\frac{1}{4^n}$ de $]0;1[$. Il reste à établir la continuité de h en 0, 1 et pour tout n en $\frac{2}{4^n}$ et $\frac{3}{4^n}$, ce qui se fait aisément. La continuité sur les parties négatives s'obtient par parité. h est bien continue sur tout $\mathbb{R}$.
   (d) Sur $[\frac{2}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[$ la graphe de h forme un triangle égal à un demi rectangle de hauteur 1 et de largeur $\frac{2}{4^n}$. On a donc

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \frac{1}{4^n}.$$

   Comme h vaut 0 sur $[\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[$ on a

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \frac{1}{4^n}.$$

Enfin
$$\int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \frac{1-\frac{1}{4^n}}{3}.$$

(e)
$$\int_0^1 h(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx = \frac{1}{3}.$$

(f) h est donc intégrable sur $[0; y]$ pour tout y positif et par parité sur $[y; 0]$ pour tout y négatif.

(g) i. La continuité de h sur $\mathbb{R}^*$ assure la dérivabilité de H pour tout y non nul.

ii. $\forall y > 0, \quad H'(y) = h(y)$ et $H'(y) \leq 1$.

iii.
$$H(\frac{1}{4^n}) = H(\frac{2}{4^n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}.$$

iv. Ainsi
$$\mathcal{H}(\frac{1}{4^n}) = \frac{1}{3}$$
et
$$\mathcal{H}(\frac{2}{4^n}) = \frac{1}{6}.$$

(h) La fonction $\mathcal{H}$ n'admet donc pas de limite en 0 ce qui prouve que H n'est pas dérivable en 0.

Avril 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Partie I

a. La bilinéarité et l'antisymétrie se vérifient aisément. Pour le reste, remarquons que :

$$\omega(x,y) = 0 \Longleftrightarrow < \eta(x), y >= 0.$$

Le produit scalaire euclidien étant non-dégénéré,

$$\omega(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \eta(x) = 0.$$

Comme on est en dimension finie, la nullité du noyau est équivalente à l'inversibilité et le résultat est prouvé.

b. On considère, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé :

$$\begin{array}{cccc} \phi_x : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \omega(x,y) \end{array}$$

ϕ_x est linéaire et il existe un unique $\eta(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad < \eta(x), y >= \phi_x(y) = \omega(x,y).$$

En outre, $x \longmapsto \eta(x)$ est linéaire. En effet, pour tout x_1, x_2, λ, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{array}{rcl} < \eta(\lambda x_1 + x_2), y > & = & \omega(\lambda x_1 + x_2, y) \\ & = & \lambda\omega(x_1, y) + \omega(x_2, y) \\ & = & \lambda < \eta(x_1), y > + < \eta(x_2), y > \\ & = & < \lambda\eta(x_1) + \eta(x_2), y >, \end{array}$$

et c'est l'unicité qui permet de conclure à la linéarité de η. En outre,

$$\begin{array}{rcl} < \eta^*(x), y > & = & < x, \eta(y) > \\ & = & < \eta(y), x > \\ & = & \omega(x,y) \\ & = & -\omega(x,y) \\ & = & < -\eta(x), y >, \end{array}$$

et donc $\eta^* = -\eta$. En outre, la question précédente donne directement que η est inversible.

c. S'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, il existe en particulier un endomorphisme inversible η de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$. Mais alors, si λ est valeur propre de η de multiplicité k, $-\lambda$ est valeur propre de η^* de multiplicité k, et donc $-\lambda$ est valeur propre de η de multiplicité k (les endomorphismes sont réels, mais les valeurs propres peuvent être complexes). Comme 0 n'est pas valeur propre de η, et que n est la somme des multiplicités des valeurs propres de η, en regroupant chaque valeur propre avec son opposée, on trouve que n est pair.

d. 1) Comme $\underline{J}^* = -\underline{J}$ (vérification triviale sur les matrices), et $\underline{J}$ est inversible, ω_0 est symplectique.
2) Si $1 \leq k \leq m$ alors $\underline{J}e_k = e_{k+m}$ et par suite

$$\omega_0(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k+m; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

si $m+1 \leq k \leq 2m$ alors $\underline{J}e_k = -e_{k-m}$ et par suite

$$\omega_0(e_k, e_l) = \begin{cases} -1 & \text{si } l = k-m; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II

1. Remarquons d'abord que J est inversible (son déterminant vaut 1). On a donc : $(\det(M))^2 \det(J) = \det(J)$, et $\det(M) = \pm 1$.
2. Clairement I_{2m} est symplectique. Si A, B sont symplectiques, alors

$${}^t(AB)JAB = {}^tB\,{}^tAJAB = J.$$

Finalement si A est symplectique alors A est inversible de plus ${}^tA^{-1}JA^{-1} = J$. Or

$${}^tAJA = J \Longleftrightarrow {}^tA^{-1}JA^{-1} = J$$

Il résulte que A^{-1} est symplectique. En conclusion, l'ensemble des matrices symplectiques est un groupe pour la multiplication.
3. On a $J^{-1} = {}^tJ$, ceci prouve que J est symplectique.

4. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} AJ\,{}^tA & = & {}^t(A\,{}^tJ\,{}^tA) \\ & = & {}^t(AJ^{-1}\,{}^tA) \\ & = & {}^t((A^{-1})^{-1}J^{-1}({}^tA^{-1})^{-1}) \\ & = & {}^t({}^t(A^{-1})JA^{-1})^{-1} \end{array}$$

Comme l'inverse d'une matrice symplectique est symplectique, la transposée d'une matrice symplectique est aussi symplectique.
5.a) Un calcul immédiat donne

$${}^tMJM = \begin{pmatrix} -{}^tAC + {}^tCA & -{}^tAD + {}^tCB \\ -{}^tBC + {}^tDA & -{}^tBD + {}^tDB \end{pmatrix}$$

M est symplectique si et seulement si

i) $-{}^tAC + {}^tCA = 0_m$.

ii) $-{}^tAD + {}^tCB = -I_m$.

iii) $-{}^tBC + {}^tDA = I_m$.

iv) $-{}^tBD + {}^tDB = 0_m$.

Les conditions $i)$ et $iii)$ sont identiques, tandis que $i)$ et $iv)$ se retraduisent en ${}^tAC$ et ${}^tBD$ sont symétriques.
b) Si une telle matrice existe, on a :

$$\begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-QC & 0_m \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & QD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On pose donc $Q = BD^{-1}$. Refaire le produit prouve que M s'écrit sous la forme demandée. On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(A-QC)det(D) \\ &= \det({}^tA - {}^tC^tQ)det(D) \\ &= \det({}^tAD - {}^tC^tD^{-1t}BD), \end{aligned}$$

comme ${}^tBD$ est symétrique,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det({}^tAD - {}^tC^tD^{-1t}DB) \\ &= \det({}^tAD - {}^tCB) = 1. \end{aligned}$$

Partie III

1. Soit M une matrice symplectique, que l'on écrit sous la forme $M = J^{-1t}M^{-1}J$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par P_A son polynôme caractéristique. Rappelons que 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, et que le polynôme caractéristique d'une matrice et de sa transposée sont identiques. Nous avons alors :

$$P(\lambda) = P_{J^{-1t}M^{-1}J}(\lambda) = P_{{}^tM^{-1}}(\lambda) = P_{M^{-1}}(\lambda).$$

Mais,

$$\begin{aligned} P_{M^{-1}}(\lambda) &= \det(M^{-1} - \lambda I_{2m}) \\ &= \det(M^{-1}(I_{2m} - \lambda M)) \\ &= \det(M^{-1})\det(-\lambda(I_{2m} - \frac{M}{\lambda})) \\ &= (-\lambda)^{2m}\det(I_{2m} - \frac{M}{\lambda}) \\ &= (-\lambda)^{2m}P(\frac{1}{\lambda}). \end{aligned}$$

2. Rappelons que λ_0 est valeur propre de multiplicité d de M si et seulement si λ_0 est racine de multiplicité d de P. Il suffit de prouver le résultat demandé pour $\dfrac{1}{\lambda_0}$ et $\overline{\lambda_0}$:

- Pour $\overline{\lambda_0}$: P est à coefficient réels, si λ_0 est racine de multiplicité d de P, $\overline{\lambda_0}$ aussi.
- Pour $\dfrac{1}{\lambda_0}$: C'est une application directe de III.1).

3. Rappelons que $\det(M) = 1$. Si d est la multiplicité de -1, on a :

$$(-1)^d \prod_{\lambda_i \mathrm{vp} \neq -1} \lambda_i^{d_i} = 1.$$

Maintenant, on regroupe dans le produit chaque valeur propre avec son inverse qui est de même multiplicité, et $\dfrac{1}{\lambda_i^{d_i}}\lambda_i^{d_i} = 1$. On trouve donc : $(-1)^d = 1$, et donc -1 est de multiplicité paire. Comme la somme des multiplicités fait $2m$, et que si λ_i est de multiplicité d_i, on a :

$$\mathrm{mult}(\lambda_i) + \mathrm{mult}(\frac{1}{\lambda_i}) = 2d_i$$

Il résulte que la multiplicité de 1 est paire aussi.
4.

(a) I_4 est symplectique, et a une seule valeur propre.

(b) $J_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est symplectique, son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 + 1$ donc J_2 admet deux valeurs propres doubles distinctes i et $-i$.

(c) Considérons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que M est symplectique. En outre, M a bien une valeur propre double et deux valeurs propres simples.

(d) Expliquons briévement comment choisir M. Si par exemple $2i$ est une valeur propre de M, les autres valeurs propres sont $0.5i$,$-0.5i$ et $-2i$. Nous posons donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que M est symplectique, et les valeurs propres de M sont $2i$,$0.5i$,$-0.5i$ et $-2i$.

Partie IV

1. On a

$$\begin{aligned} (i) &\iff \forall x,y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad <\underline{J}(\phi(x)),\phi(y)> = <\underline{J}(x),y> \\ &\iff \forall x,y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad <\phi^*(\underline{J}(\phi(x))),y> = <\underline{J}(x),y> \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \phi^*(\underline{J}(\phi(x))) = \underline{J}(x) \\ &\iff M \quad \text{est symplectique.} \end{aligned}$$

2. Remarquons que nous avons le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisque toutes les normes y sont équivalentes. ϕ ayant des valeurs propres distinctes, ϕ est $\mathbb{C}-$diagonalisable. Soit $(x_1,\cdots,x_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres, $\phi(x_i) = \lambda_i x_i$, $|\lambda_i| = 1$. Pour $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ de $\mathbb{C}^n$, nous choisissons $||x|| = |a_1| + \cdots + |a_n|$, qui définit aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$ par restriction. Alors :

$$\begin{aligned} ||\phi^p(x)|| &= ||\lambda_1^p a_1 x_1 + \cdots + \lambda_n^p a_n x_n|| \\ &= |\lambda_1^p a_1| + \cdots + |\lambda_n^p a_n| \\ &= |a_1| + \cdots + |a_n| = ||x||. \end{aligned}$$

En particulier, ϕ est stable.

3. a. En écrivant les produits matriciels, on prouve aisément que l'endomorphisme que nous noterons ϕ est symplectique si, et seulement si, ${}^t\Omega\Omega = I_m$, c'est-à-dire si, et seulement si, Ω est orthogonale. Maintenant, une matrice orthogonale conserve la norme euclidienne, notée $|| \; ||_2$. En particulier, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{2m}$, alors :

$$||\phi(X)||_2^2 = ||\Omega(x)||_2^2 + ||\Omega(y)||_2^2 = ||X||_2^2.$$

Il résulte que l'endomorphisme considéré est stable, par suite la CNS recherchée est : Ω est orthogonale.

b. Si cet endomorphisme ϕ possède une valeur propre de module $\lambda \neq 1$, alors d'aprés III.2., il en posséde une de module > 1. En particulier, il existe z dans $\mathbb{C}^n$ tel que

$$||\phi^k(z)|| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \infty \qquad (*).$$

Or si ϕ était stable, en écrivant $z = x + iy$, où x et y sont dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$||\phi^k(z)|| \leq ||\phi^k(x)|| + ||\phi^k(y)|| \leq M,$$

absurde en vue de $(*)$.
4. a. Nous considérons par exemple l'endomorphisme symplectique dont la matrice écrite dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} RI_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{R}I_m \end{pmatrix}$$

b. On a ϕ est symplectique $\Longleftrightarrow \phi^*$ est symplectique et

$$\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1})) = \omega_0(e_1, e_{m+1}) = 1.$$

D'autre part,

$$\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1})) = (\underline{J}(\phi^*(e_1)), \phi^*(e_{m+1})),$$

si $||\phi^*(e_1)|| < 1$ et $||\phi^*(e_{m+1})|| < 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1}))| < 1,$$

ce qui est absurde.
c. Supposons par exemple que $||\phi^*(e_1)|| \geq 1$, et posons $x = \dfrac{\phi^*(e_1)}{||\phi^*(e_1)||} \in B$. Si $y = \phi(x) = \sum y_i e_i$, alors

$$\begin{aligned} y_1 &= \; < y, e_1 > \\ &= \; < \phi(x), e_1 > \\ &= \; < x, \phi^*(e_1) > \\ &= \; ||\phi^*(e_1)|| \geq 1, \end{aligned}$$

En particulier $y \notin \Gamma_R$ et $\phi(B) \not\subset \Gamma_R$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Calculer $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt$ pour tout réel x strictement positif.

   Sans perte de généralité, on peut supposer que $x>1$,

   dans ce cas : $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt=\int_{1/x}^{1}\frac{Lnt}{1+t^2}dt+\int_{1}^{x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt$. Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ et on obtient moins la deuxième, d'où $I(x)=0$.

2. On effectue le changement de variables : $x=au\cos\theta$ et $y=bu\cos\theta$ pour obtenir $J=\iint_D(x^2-2y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}(\int_0^1(a^2u^2\cos^2\theta-2bu\sin\theta)abu\,du)d\theta=\frac{ba^3\pi}{16}-\frac{2}{3}ab^2$.

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in Q\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Comme les ensembles Q et $R-Q$ sont denses dans R, tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et réciproquement. La fonction f n'est continue en aucun point de $[0,1]$. Pour $x\in Q$, $\exists(u_n)\in R-Q$ telle que : $(u_n)\to x$ et $\lim_{u_n\to x}f(u_n)=0\neq f(x)=1$.

2. La fonction g est continue seulement en $x=1/2$ et non dérivable en tout point de $[0,1]$.

3. La fonction h est continue et dérivable seulement en $x=1/2$ et non dérivable ailleurs sur $[0,1]$.

Exercice n° 3

1. Si *p* est un nombre premier, $f(p^2)=pf(p)+pf(p)=2p$, puis $f(p^3)=pf(p^2)+p^2f(p)=3p^2$.

On vérifie par récurrence que $f(p^\alpha)=pf(p^{\alpha-1})+p^{\alpha-1}f(p)=\alpha\, p^{\alpha-1}$.

On calcule ensuite $f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2})=p_2^{\alpha_2}f(p_1^{\alpha_1})+p_1^{\alpha_1}f(p_2^{\alpha_2})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2})$

Cela nous conduit à vérifier par récurrence sur *k*, l'expression :

$$f(n)=n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i} \text{ où } n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}.$$

2. L'égalité $f(n)=n$ implique $0\le\frac{\alpha_i}{p_i}\le 1$, soit $0\le\alpha_i\le p_i$, d'où $\frac{\alpha_i}{p_i}=1-\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j}$

$\alpha_i=p_i(1-\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j})$ ou encore $(\prod_{j\ne i}p_j)\times\alpha_i=p_i(1-\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j})(\prod_{j\ne i}p_j)$

$(\prod_{j\ne i}p_j)\times\alpha_i=p_i\times(\prod_{j\ne i}p_j-A)$ avec $A=(\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j})(\prod_{j\ne i}p_j)$

Ainsi p_i divise le produit $(\prod_{j\ne i}p_j)\times\alpha_i$ et il est premier avec le premier terme. Le théorème de Gauss montre que p_i divise α_i. Comme $0\le\alpha_i\le p_i$, on en déduit que :

$$\forall i\in\{1,...,k\}\quad \alpha_i=0 \quad ou \quad \alpha_i=p_i$$

Comme $\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}=1$, il n'existera qu'un indice *j* pour lequel $\alpha_j\ne 0$, et vaut p_i.

En conclusion *n* est bien de la forme $n=p^p$. La réciproque est évidente.

Exercice n° 4

1. $u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(Lnx)^n (Lnx - 1)dx < 0$. La suite (u_n) est positive et décroissante, donc elle converge. On peut aussi remarquer, en intégrant par parties que :
que : $u_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} u_{n-1} > 0,$ d'où $u_{n-1} < \frac{e^2}{n},$ et la suite converge vers 0.

2. La suite (v_n) est positive et majorée par $\frac{Ln2}{n+1}$, donc elle converge vers 0.

Exercice n° 5

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x) = -1 - x\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^x tf(t)\, dt$ et en particulier $f(0) = -1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f^{'}(x) = -\int_0^x f(t)\, dt - xf(x) + xf(x)$, soit $f^{'}(x) + \int_0^x f(t)\, dt = 0$.

Posons $y(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, on obtient l'équation différentielle : $y^{''}(x) + y(x) = 0$.

La solution générale est $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et avec les conditions $y(0) = 0$ et $y^{'}(0) = -1,$ $y(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\cos x$.

On vérifie aisément que $f(x) = -\cos x$ est solution de l'équation proposée.

Exercice n° 6

D'après l'énoncé, on a donc 10 boissons de type B1 et 40 de type B2. Il y a $\binom{50}{4}$ façons de choisir 4 boissons parmi les 50.

1. On prélève, au hasard, 4 boissons dans une livraison de 50 boissons.

- La probabilité d'avoir 4 boissons de type B1 est égale à $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290} \cong 0{,}00091$

- La probabilité d'avoir 1 boisson de type B1 et 3 boissons de type B2 est égale à $\frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303} \cong 0{,}429$

- La probabilité d'avoir au moins une boisson de type B1 est égale à $1 - \frac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{13891}{23030} \cong 0{,}603$

2. On prélève maintenant une boisson, on note son type et on la remet dans le lot. On réalise *n* fois cette expérience et on note X le nombre de boissons B1 obtenues.

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (4/5)^n$
- Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins une boisson B1 ? Il faut que $P(X \geq 1) = 1 - (4/5)^n > 0{,}9$. Soit, en utilisant le logarithme décimal : $n > \frac{1}{\log(5/4)}$, d'où *n*=11.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

1. (a) Première méthode
   i. Pour tout entier $n \geq 1$,
   $$u_n - v_n = \frac{1}{n^2(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n})}.$$
   Donc la série de terme général (t.g.) $u_n - v_n$ est une série positive équivalente à la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ qui est convergente par Riemann.
   ii. Comme v_n est le t.g. d'une série alternée dont le terme de signe constant est $\frac{1}{n}$ tendant vers 0. Ainsi, la série de t.g. v_n converge. Comme $u_n - v_n$ est le t.g. d'une série convergente on a la série de t.g. qui est la somme des deux précédentes $u_n - v_n + v_n = u_n$ qui est donc convergente.

   (b) Seconde méthode
   i. Pour x au voisinage de 0, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$.
   ii. Pour tout n grand, on a $\frac{(-1)^n}{n}$ qui est proche de 0, ainsi
   $$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o(\frac{1}{n})\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$
   iii. Le premier terme du développement de u_n est convergent comme t.g. d'une série alternée, tandis que le second est le t.g. d'une série convergente d'après Riemann. Enfin $|o(\frac{1}{n^2})| < \frac{1}{n^2}$ qui sont des t.g. positifs, avec le majorant t.g. d'une série convergente.

2. (a) Première méthode
   i. Pour tout entier $n \geq 1$, on prend $v_n = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
   ii. Le t.g.
   $$u_n - v_n = \frac{C - 1}{(n+1)(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}})}$$
   est un t.g. à termes de signes constants équivalent à $\frac{C-1}{n+1}$. Ce t.g converge si et seulement si $C = 1$.
   iii. Comme v_n est le t.g. d'une série convergente (série alternée), on en conclut que u_n est le t.g. d'une série convergente si et seulement si $C = 1$.

(b) Seconde méthode

i. On effectue un DL à l'ordre 1 autour de 0 de la fonction $\frac{1}{1-x}$. Soit $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$.

ii. On développe u_n autour de $x = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

iii. Comme précédemment, on a une somme de t.g. d'une série alternéee et d'une série convergente si et seulement si $C = 1$.

Problème

1. Matrice de Vandermonde

(a)

$$VM_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$VM_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$det(VM_1(x)) = x_1 - x_0.$$

(d)

$$\begin{aligned} det(VM_2(x)) &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_0^2 - x_0^2 & x_1^2 - x_0x_1 & x_2^2 - x_0x_2 \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ 0 & x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \prod_{0=j<k=2} (x_k - x_j). \end{aligned}$$

(e) On suit l'indication donnée pour $p \geq 2$

$$det(VM_p(x)) \quad = \quad \prod_{k_0=0}^{p} (x_{k_0} - x_0)det(VM_{p-1}(x_1, \ldots x_p))$$

Or, par hypothèse de récurrence

$$det(VM_{p-1}(x_1, \ldots, x_p)) = \prod_{1=j<k=p} (x_k - x_j).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} det(VM_p(x)) &= \prod_{k_0=1}^{p}(x_{k_0}-x_0)\prod_{1=j<k=p}(x_k-x_j) \\ &= \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $p=2$, par ailleurs $det(VM_1(x))$ vérifie également cette hypothèse, ce qui achève la preuve pour tout $p \geq 1$.

(f) $det(VM_p(x)) = 0 \Longleftrightarrow \prod_{0=j<k=p}(x_k - x_j) = 0 \Longleftrightarrow \exists (j,k) \in \{0,\ldots,p\}$ avec $j<k$, tels que $x_j = x_k$.

2. Matrice de Hankel

(a)

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_0 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 \\ x_0 & x_1^2 & x_2^3 \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^4 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$H_3(x) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & x_3^3 \\ x_0 & x_1^2 & x_2^3 & x_3^4 \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^4 & x_3^5 \\ x_0^3 & x_1^4 & x_2^5 & x_3^6 \end{pmatrix}.$$

(d) $det(H_1(x)) = x_1^2 - x_0x_1$ ou encore (en utilisant les substitutions de lignes)

$$\begin{aligned} det(H_1(x)) &= det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_1^2 - x_0x_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_1-x_0). \end{aligned}$$

Et, suivant la même méthode, $\det(H_2(x)) = x_1x_2^2(x_2-x_1)(x_2-x_0)(x_1-x_0)$

(e)

$$\det(H_2(x)) = \prod_{j=1}^{2} x_j^j \prod_{0=j<k=p}(x_k - x_j).$$

(f) On utilise les substitutions de lignes préconisées

$$det(H_3(x)) = \prod_{j=1}^{3} x_j^j det(VM_3(x_0,\ldots,x_3)).$$

(g) On procédera par récurrence. L'hypothèse de récurrence étant :

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j det(VM_p(x_0,\ldots,x_p)).$$

Cette hypothèse est vérifiée au rang $p = 1$. Et on a

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j det(VM_p(x_0, \dots, x_p)).$$

(h)

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j \prod_{0=j<k=p} (x_k - x_j).$$

(i) $det(H_p(x)) = 0$ signifie soit qu'il existe une valeur x_k nulle soit (sans exclusivité) qu'il existe deux valeurs x_j et x_k telles que $x_j = x_k$.

3. Aléa et matrice de Hankel.

(a)

$$EH_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$EH_2(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) \\ \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) \end{pmatrix}.$$

(c)

$$EH_3(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) \\ \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) & \mathbb{E}(X^5) \\ \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) & \mathbb{E}(X^5) & \mathbb{E}(X^6) \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p)) = \mathbb{E}\left(\left(X_j^{i+j}\right)_{i,j=0,\dots,p}\right) = \left(\mathbb{E}(X^{i+j})\right)_{i,j=0,\dots,p}.$$

(e) $EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p))$.

(f) On a $(p+1)!$ permutations possibles. Et comme $\mathbb{E}(X_k^j) = \mathbb{E}(X_{\sigma(k)}^j)$ quelle que soit la permutation σ considérée de $\mathcal{S}_{p+1} = \{0, \dots, p\}$, on a $EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}))$. Ou encore

$$EH_p(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} \frac{1}{(p+1)!} \mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)})).$$

(g) $(X_1, X_0, X_2, \dots, X_p)$ est une permutation de $(X_0, \dots, X_p)$, et l'espérance d'une matrice étant égale à la matrice des espérances (car somme finie) d'après ce qui précède, on a

$$EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_1, X_0, X_2 \dots, X_p)).$$

(h)

$$\begin{aligned} det(EH_p(X)) &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} det(\mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}))) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} \mathbb{E}\left(det((H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)})))\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p+1}}\left(\prod_{i=0}^{p} X^i_{\sigma(i)}\epsilon(\sigma)\prod_{0=j<k=p}(X_k - X_j)\right)\right)\\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\prod_{0=j<k=p}(X_k - X_j)\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p+1}}\left(\epsilon(\sigma)\prod_{i=0}^{p} X^i_{\sigma(i)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\prod_{0=j<k=p}(X_k - X_j)^2\right)
\end{aligned}$$

(i) $det(EH_p(X)) = 0$ implique qu'il existe deux valeurs prises par X_k et X_j égales. Or comme X ne peut prendre que q valeurs distinctes, on a $q < p$. Pour tout $q \geq p$, on aura $det(EH_p(X)) > 0$

4. Ainsi la quantité $det(EH_p(X))$ permet à partir de la connaissance des $2p$ premiers moments de la variable X, d'établir le nombre de valeurs $a_1, \ldots, a_q$ distinctes sur lesquelles la variable X prend ses valeurs. Il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs a_i elles-mêmes pour cela car le calcul de $det(EH_p(X))$ ne les demande pas.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit p un projecteur, il vérifie par définition $p = p^2$. Soit λ une valeur propre de p, on a alors :

$\exists x \neq 0 / p(x) = \lambda x$. D'où : $p(x) = p^2(x) = \lambda p(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda x = \lambda^2 x$, et comme x est non-nul : $\lambda \in \{0,1\}$. La trace de p est donc une somme de 0 et de 1, c'est un entier naturel.

$Tr(S) = Tr(A) + \sqrt{2}Tr(B) + \sqrt{3}Tr(C)$ par linéarité.

On veut $\sqrt{2}Tr(B) + \sqrt{3}Tr(C) \in \mathbb{N}$, avec $Tr(B) \in \mathbb{N}$ et $Tr(C) \in \mathbb{N}$. Montrons que ce n'est possible qu'avec $Tr(B) = Tr(C) = 0$:

Soit $(a,b,c) \in N^3 / a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$.

En élevant au carré, on a : $2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = c^2 \Leftrightarrow 2ab\sqrt{6} = c^2 - (2a^2 + 3b^2)$

Le terme de droite est un entier relatif, comme $\sqrt{6}$ est irrationnel il faut que $2ab$ soit nul pour vérifier l'égalité. Mais si $a = 0$, on a $b\sqrt{3} = c$ et donc forcément b et c doivent être nuls car $\sqrt{3}$ est irrationnel. De même si $b = 0$. Conclusion : $(a,b,c) = (0,0,0)$, et donc $Tr(B) = Tr(C) = 0$.

Les matrices B et C sont donc des projecteurs sur le vecteur nul, ce sont des matrices nulles.

La réciproque est triviale, si B et C sont nulles, $S = A$ donc S est idempotente.

Exercice n° 2

Question 1 : $\deg(f(P)) \le \deg(P)-1$ car on perd le terme dominant. En effet, en posant $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$, on a $P(X+1)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i$ et le coefficient devant X^{n-1} est dans les deux cas p_{n-1}.

De même, $\deg(f^2(P)) \le \deg(f(P))-1 \le \deg(P)-2$, et par une récurrence immédiate : $\deg(f^k(P)) \le \deg(P)-k, \forall k \in \{0,...,n-1\}$.

Or le degré de P est au plus $n-1$ donc $\deg(f^{n-1}(P)) \le 0$. Ainsi, $f^{n-1}(P)$ est un polynôme constant ou nul, donc $f^n(P)$ est le polynôme nul.

Question 2 : Montrons par récurrence la relation demandée :

C'est trivialement vrai pour $r=0$, il reste à montrer l'hérédité :

$$f^{r+1}(P)(X)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}f(P(X+k))=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}(P(X+k+1)-P(X+k))$$

$$=\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{r-k+1}\binom{r}{k-1}P(X+k)-\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}P(X+k)$$

$$=(-1)^{r+1}\binom{r}{0}P(X)+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k+1}\left(\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}\right)P(X+k)+(-1)^0\binom{r}{r}P(X+r+1)$$

$=\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^{r+1-k}\binom{r+1}{k}P(X+k)$, car $\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}=\binom{r+1}{k}$, de plus $\binom{r}{0}=\binom{r+1}{0}=1$, et $\binom{r}{r}=\binom{r+1}{r+1}=1$

La formule est donc démontrée.

On a donc :

$$\forall X \in R, \quad 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$$

$$(-1)^{n+1}P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$$

$$P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}P(X+k)$$

C'est la formule demandée, avec $a_k=(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice n° 3

Question 1 :

On a : $u(e_i)=\sum_{j=1}^{n}<u(e_i),f_j>f_j$

Donc $\|u(e_i)\|^2=\sum_{j=1}^{n}<f_j,u(e_i)>^2$

Question 2 :

Ainsi, $A=\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2=\sum_{i=1}^{n}<u(e_i),u(e_i)>$

En appelant u^* l'adjoint de u (il existe et est unique puisque $u\in L(E)$) :

$$A=\sum_{i=1}^{n}<e_i,u^*\circ u(e_i)>\quad =Tr(u^*\circ u)$$

Exercice n° 4

Question 1 :

« $\Leftarrow$ » : $B(f(x),f(x))=B(x,x)\Leftrightarrow q(f(x))=q(x)\Rightarrow f\in G$

« $\Rightarrow$ » : $B(f(x),f(y))=\frac{1}{2}(q(f(x)+f(y))-q(f(x))-q(f(y)))$

$=\frac{1}{2}(q(f(x+y))-q(f(x))-q(f(y)))$ par linéarité de f

$=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$ car $f\in G$

$=B(x,y)$

Question 2 :

- $q(f\circ g(x))=q(g(x))$ car $f\in G$

  $=q(x)$ car $g\in G$

  donc $f\circ g\in G$

- $q(Id(x))=q(x)\Rightarrow Id\in G$

- $Ker(f)=\{x/f(x)=0\}$, $x\in Ker(f)\Rightarrow q(f(x))=q(x)=0\Rightarrow x=0$ car q n'est pas dégénérée.

f est un endomorphisme de R^n, la dimension est finie, f est injective (car le noyau est réduit à l'élément nul), donc f^{-1} existe.
$q(f\circ f^{-1}(x))=q(x)=q(f^{-1}(x))$ car $f\in G$
Donc $f^{-1}\in G$
$(G,\circ)$ est un sous groupe de $GL(R^n)$

Question 3 :

On a $f(x)=AX$ et $q(x)={}^tXMX$, d'où : ${}^tX\,{}^tAMAX={}^tXMX\ \ \forall X$, par définition de $f\in G$.

Cela implique que ${}^tAMA=M$.
Comme A et M sont des matrices carrées, $(Det(M))(Det(A))^2=DetM$.
D'où $DetA=1$ ou -1 car $(Det(M))\neq 0$.

Question 4 :

$$q(f(e_4))=q\begin{pmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\\a_{44}\end{pmatrix}=a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2-a_{44}^2$$

$q(f(e_4))=q(e_4)=-1$
D'où $a_{44}^2=1+a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2\geq 1$
${}^tAMA=M\Rightarrow{}^tAM=MA^{-1}\ \Rightarrow M^{-1}\,{}^tAM=A^{-1}$

Or ici $M^{-1}=M$ car $M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, et on voit que $M^2=I_4$.

D'où $A^{-1} = M\,{}^tAM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$

Exercice n° 5

Question 1 : Montrons que $\varphi^{-1}(H) = \{n \in Z \,/\, g^n \in H\}$ est un sous-groupe de $(Z,+)$:

- $0 \in \varphi^{-1}(H)$ car $g^0 = e_G$, où e_G représente l'élément neutre pour la multiplication. H étant un groupe, il contient e_G.
- $\forall (m,n) \in (\varphi^{-1}(H))^2$, $g^{m+n} = g^m g^n \in H$ car g^m et g^n appartiennent à H, stable par multiplication interne. D'où $m+n \in \varphi^{-1}(H)$.
- $\forall n \in \varphi^{-1}(H)$, $-n \in \varphi^{-1}(H)$ car $g^n g^{-n} = g^0 = e_G$, donc $g^{-n} \in H$ en tant qu'inverse de g^n.

Donc $\varphi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(Z,+)$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in N$ tel que $\varphi^{-1}(H) = sZ$.
Montrons rapidement ce résultat : soit $a \in N$.

- $0 \in A$, par existence de l'élément neutre pour l'addition.
- $\forall n \in N^*, na \in A$ car l'addition est interne.
- $\forall n \in N^*, -na \in A$ par existence de l'inverse pour l'addition.

Cela nous donne l'inclusion dans un sens, pour la réciproque il suffit de noter que l'addition dans aZ est associative, et que donc $(aZ,+)$ est un groupe.

Soit r l'ordre du groupe G :
$\varphi^{-1}(H) \supset \varphi^{-1}(\{e_G\}) = rZ$. Donc $rZ \subset sZ$, on en conclut que s divise r.

Question 2 : G est engendré par $\{g\}$ donc $g_0 \in G$, $\exists k \in N \,/\, g_0 = g^k$ donc φ est surjective.

On a trivialement que $\varphi(\varphi^{-1}(H)) \subset H$, montrons l'autre inclusion : soit $h \in H$, on veut qu'il existe n_0 tel que $n_0 \in \varphi^{-1}(H)$ et $h = g^{n_0}$. Or comme H est inclus dans G et que φ est surjective, l'existence de ce n_0 est assurée, et il appartient bien à $\varphi^{-1}(H)$ par définition de cet ensemble. On a donc : $H = \varphi(\varphi^{-1}(H))$.

Question 3 : $H = \varphi(sZ) = \{g^{sn} \,/\, n \in Z\}$. Les sous-groupes de G sont donc les groupes engendrés par $\{g^s\}$, avec s divisant r.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - 2ay - b)^2$, où a et b sont deux constantes réelles données.

1. *f* est-elle bornée ? A quelle condition *f* peut-elle être nulle ?

f étant toujours positive, elle est minorée par zéro. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty$, donc *f* n'est pas majorée.

$f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $x^2 = 2ay + b$, soit $y^2 - 2ay - b = 0$. Cette équation admet des racines pour $a^2 + b \geq 0$.

Si $a^2 + b > 0$, f admet un minimum absolu égal à zéro, en deux points (cf. question 3).

2. On suppose que $a^2 + b < 0$, trouver, s'ils existent, les extrema de *f*.

Les conditions du premier ordre doivent être satisfaites pour obtenir des extrema.

$f'_x(x,y) = 2(x-y) + 4x(x^2 - 2ay - b) = 0$ et $f'_y(x,y) = -2(x-y) - 4a(x^2 - 2ay - b) = 0$.

Par addition, on obtient : $(x-a)(x^2 - 2ay - b) = 0$.

Si $(x^2 - 2ay - b) = 0$, alors $x = y$ et $(x^2 - 2ay - b) = 0$, mais comme $a^2 + b < 0$, on n'a pas de solution. Par conséquent $x = a$, puis $y = \dfrac{2a^3 - 2ab + a}{1 + 4a^2}$. On a une seule solution qui correspond à un minimum local.

3. On suppose que $a^2 + b > 0$. Chercher les extrema locaux et absolus de *f*.

Comme $a^2 + b > 0$, on a un minimum absolu (nul) atteint en deux points (cf . question 1) et un minimum local pour $x = a$ (cf. question 2).

Exercice n° 2

Soit $f : R^* \to R$ définie par : $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$.

1. Tracer avec précision le graphe de f .

La dérivée de f est égale à $f^{'}(x) = \dfrac{2^x}{x^2}(xLog2 - 1)$. Cette fonction est croissante pour $x \geq 1/Log2$ et décroissante sinon. Elle admet un minimum local en $x = 1/Log2$ égal à $eLog2$. Son graphe présente une branche parabolique dans la direction y (en $+\infty$) et les axes sont des asymptotes.

2. Résoudre l'équation : $2^x = x^2$ (on donnera des valeurs approchées avec une erreur inférieure à 0,5).

L'équation $2^x = x^2$ est équivalente à $\dfrac{2^x}{x} = x$ ($x = 0$ n'est pas solution). Les solutions de cette équation correspondent aux points d'intersection entre le graphe de f et la première bissectrice. On a 3 solutions graphiques : deux solutions évidentes $x = 2,$ et $x = 4,$ et une solution négative. La racine négative est comprise entre -1 et -1/2 (on calcule la valeur de f en ces points et on compare à x).

Exercice n° 3

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ définie, pour $x > -1$ et $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = nx\frac{(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 1.$$

1. Etudier la continuité de la fonction f_n pour tout $x > -1$.

f_n est continue pour $x \neq 0$ comme quotient de fonctions continues.

Et $\underset{x\to 0}{Lim}\, f_n(x) = \underset{0}{Lim}\; nx\dfrac{(1+nx)}{nx} = 1 = f_n(0)$. Donc f_n est continue en zéro.

2. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe pour tout $x > -1$.

On trouve $f_n^{'}(x) = n\dfrac{(1+x)^{n-1}}{((1+x)^n - 1)^2}\left[(1+x)^{n+1} - (n+1)x - 1\right]$ et $f_n^{'}(x)$ est du signe de $g(x) = (1+x)^{n+1} - (n+1)x - 1$. On a : $g^{'}(x) = (n+1)((1+x)^n - 1)$, cette dérivée est positive pour $x > 0$, nulle pour $x = 0$, négative sinon et $g(0) = 0$. Donc la dérivée de f_n est toujours positive et f_n est croissante de $\left]-1,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$. D'ailleurs, on peut prolonger f_n par continuité à droite en -1 en posant : $f_n(-1) = 0.$ Elle admet une asymptote d'équation $y = nx$.

Exercice n° 4

On pose : $P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.

On vérifie, par division euclidienne, que $P(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)$

2. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$, trouver une primitive de $f(x)$ que l'on notera $F(x)$.

La fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ admet une décomposition de la forme :

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}$$

Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles complexes des fractions ou en prenant des valeurs particulières. Par exemple :

- On multiplie la relation par x, puis $x \to +\infty$, on obtient : $a + c = 0$
- Pour $x = 0$, on obtient : $1/2 = b + d/2$
- Pour $x = 1$, on obtient : $1 = 5(a + b) + 2(c + d)$
- Pour $x = -1$, on obtient : $1 = b - a + 2(-c + d)$

La résolution du système donne : $a = -\dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{1}{5}$, $c = \dfrac{2}{5}$, $d = \dfrac{3}{5}$.

En conclusion : $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2x + 1}{x^2 + 1} + \dfrac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2}\right)$

On peut encore écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{-2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\right).$$

Une primitive est de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{5}(-Ln(x^2 + 1) + Arctgx + Ln(x^2 + 2x + 2) + Arctg(x + 1))$$

3. Vérifier que $F(x)$ admet des limites finies lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$

$$\lim_{+\infty} F(x) = \frac{1}{5}\left(Ln\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}\right)\right) + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \text{ et } \lim_{-\infty} F(x) = \frac{1}{5}\left(Ln\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}\right)\right) - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$$

Exercice n° 5

1. Trouver deux nombres réels A et B tels que la relation : $4n^3 = An^2(n+1)^2 + Bn^2(n-1)^2$ soit vérifiée pour tout entier n.

Par identification des polynômes, on obtient : A=1 et B=-1 (en particulier ; $A+B=0$).

2. Déduire de la relation précédente la somme S_n des cubes des n premiers nombres entiers.

On écrit la relation précédente pour *n*, *n-1*, *n-2*,…*2*, *1*, puis on somme les égalités obtenues, d'où $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. Montrer que l'on peut obtenir la somme S_n directement par récurrence.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^3}{4}$$

4. On pose $u_n = \dfrac{s_n}{S_n}$, où s_n désigne la somme des n premiers nombres entiers. Calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$. On a : $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{-2}{n+1} + \dfrac{2}{n}$.

On en déduit par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Exercice n° 6

Soient X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 / \exists(u_n), \exists(\lambda_n) > 0, \ \underset{n\to\infty}{Lim}\, u_n = a, \ \underset{n\to\infty}{Lim}\, \lambda_n(u_n - a) = u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

On vérifie aisément que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$, en posant $\lambda_n = n$ et $u_n = a$.

2. Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

a) $X=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2=1\}$ et $a=(1,0)$

Soit $u\in T(X,a)$, il existe une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n(u_n-a)\to u$. En particulier, $\lambda_n(x_n-1)\to x$, $\lambda_n(y_n)\to y$, $x_n\to 1$, $(y_n)\to 0$.

Comme $(u_n)\in X$, $\lambda_n x_n^2+\lambda_n y_n^2=\lambda_n$ ou encore $\lambda_n(x_n-1)(x_n+1)+\lambda_n y_n y_n=0$ et par passage à la limite, on obtient $x=0$. On vérifie la réciproque pour obtenir :

$$T(X,a)=\{(x,y)/ x=0\}$$

b) $X=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\le 1\}$ et $a=(1,0)$

Le raisonnement est identique au cas précédent pour obtenir :

$$T(X,a)=\{(x,y)/ x\le 0\}$$

c) $X=\{(x,y)\in R^2 / x\ge 0, -x^2\le y\le x^2\}$ et $a=(0,0)$

Soit $u\in T(X,a)$, il existe une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n(u_n-a)\to u$. En particulier, $\lambda_n(x_n)\to x$, $\lambda_n(y_n)\to y$, $x_n\to 0$, $(y_n)\to 0$.

Comme $(u_n)\in X$, $-\lambda_n x_n^2\le \lambda_n y\le \lambda_n x_n^2$ et comme $(u_n)\in X$, $x_n\ge 0$

La réciproque est évidente en posant $x_n=\frac{x}{n}, y_n=0, \lambda_n=n$ pour obtenir la demi-droite :

$$T(X,a)=\{(x,y)/ x\ge 0, y=0\}$$

Exercice n° 7

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B, deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans l'urne A et un jeton dans B que l'on échange en les plaçant dans B et A (étape1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après *n* échanges.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

Les valeurs possibles de X_n sont 0, 1 et 2.

2. Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1}=k$ sachant que $X_n=i$.

Etat n	Etat $n+1$	Probabilité
(0,0)	(0,1)	1
(1,1)	(0,1)	1
(0,1)	(0,0)	¼
(0,1)	(0,1)	½
(0,1)	(1,1)	¼

3. On pose $a_n = P(X_n = 0),\ b_n = P(X_n = 1),\ c_n = P(X_n = 2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où

P désigne la probabilité. Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

$$a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} b_n$$

$$c_{n+1} = P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} b_n \text{ et}$$

$$b_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) = a_n + c_n + \frac{1}{2} b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ d'où } T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Etudier la suite vectorielle (V_n). Déterminer, si elles existent, les limites des suites $(a_n),\ (b_n)$ et (c_n).

Du système précédent, on peut en déduire que si toutes les suites convergent, alors $\lim_n a_n = \lim_n c_n = 4 \lim_n b_n$

La matrice T admet pour valeurs propres : 1, 0 et -1/2. Comme ces valeurs sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par (1, 4, 1).

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par (1, 0,-1).

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est engendré par (1,-2,1).

On obtient $T^n = P\Delta^n P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis $V_{n+1} = T^n V_1 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1/2^n \\ 4-1/2^{n-1} \\ 1+1/2^n \end{pmatrix}$

En conclusion :

$\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = \dfrac{1}{6}$ et $\underset{n}{Lim}\, b_n = \dfrac{2}{3}$

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

Soit la matrice C_n définie par

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

où les complexes $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(b_j)_{j=1,\dots,n}$ sont tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et j variant entre 1 et n.
On notera pour tout ce qui suit : $l_1, \dots, l_n$ les numéros de lignes 1 à n, et $c_1, \dots, c_n$ les numéros de colonnes 1 à n.

1.
$$C_1 = \left(\frac{1}{a_1 + b_1} \right).$$

2.
$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{pmatrix}.$$

3. $det(C_1) = \frac{1}{a_1+b_1}$

4.
$$\begin{aligned} det(C_2) &= \frac{1}{a_1+b_1}\frac{1}{a_2+b_2} - \frac{1}{a_1+b_2}\frac{1}{a_2+b_1} \\ &= \frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1) - (a_1+b_1)(a_2+b_2)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{-a_1(b_2-b_1) + a_2(b_2-b_1)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{\prod_{i<j=1,2}(b_j-b_i)(a_j-a_i)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
det(C_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{a_2+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_2+b_2}{a_1+b_2} \\ \frac{a_2+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_2+b_2}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \text{ étape (a)} \\
&= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{a_2-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_2-a_1}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ étape (b)} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{b_2-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ étape (c)} \\
&= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq 2}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)}.
\end{aligned}$$

Etape (d) . On retrouve bien le déterminant calculé en 4).

6. On retrouve tout très précisément, mais on doit compléter à la fin avec un récurrence sur le $det(C_n)$, puisqu'on obtiendra

$$det(C_n) = \frac{\prod_{i,j=1,\ldots,(n-1)}(a_n-a_i)(b_n-b_j)}{\prod_{j=1,\ldots,n;i=1,\cdots,n-1}(a_n+b_j)(a_i+b_n)} det(C_{n-1}).$$

Problème

A. Préliminaires :

1. Il suffit d'intégrer f entre t et $+\infty$. On obtient $S(t) = \exp(-\frac{t}{\sigma})\mathbb{1}(t)_{]0;+\infty[}$.
2. En dérivant par rapport à t de part et d'autre du signe égal, on a $f(t) = -S'(t)$. Ainsi
   (a) Pour $\gamma \neq 0$, on obtient
   $$f(t) = \frac{1}{\sigma}\left(1+\frac{\gamma}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}.$$
   (b) Dans le cas $\gamma = 0$, on calcule $lim_{\gamma\to 0}S(t) = \exp(-\frac{t}{\sigma})\mathbb{1}(t)]0;+\infty[$ qui est la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre σ.
3. On remarque alors que
   $$\lim_{q\to 1} H_q(x) = -\int f(x)ln(f(x))dx = H(x).$$
   L'entropie de Shannon n'est que le cas limite $q = 1$ de l'entropie de Rényi-Tsallis.

B. Maximisation sous contraintes

1.

$$\begin{aligned} B(f,g) &= \int d_F(f,g) \\ &= \int -f(x)^q + g(x)^q + qg(x)^{q-1}(f(x)-g(x))dx \end{aligned}$$

2. (a) Comme G^* et G vérifient (1), on a

$$B(G,G^*) = -\int (G(x)^q - G^*(x)^q)dx - \alpha \int (G(x)G^*(x)^{q-1} - G^*(x)^q)dx$$

(b) Grâce à la définition de G^* et au fait que G vérifie (1), on a

$$\int G(x)G^*(x)^{q-1}dx = \int G^*(x)^q dx.$$

(c) Ainsi on obtient

$$B(G,G^*) = -\int (G(x)^q - G^*(x)^q)dx.$$

Et B positive ou nulle entraîne $G = G^*$ de manière évidente. La réciproque est elle aussi triviale.

(d) Comme $B(G,G^*) \geq 0$ on a $H_q(G^*) \geq H_q(G)$ puisque $H_q(G^*) = \frac{1}{1-q}\left(\int (G^*)^q - 1\right)$.

(e) Ainsi, G^* est le maximum de l'entropie de Rényi-Tsallis avec $0 < q < 1$ dans l'ensemble des fonctions vérifiant les contraintes de (1).

(f) On trouve $G^*(x) = \alpha \exp(-\beta x)$ avec α et β tels que

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta^2}, \theta = \frac{\alpha}{\beta}.$$

et l'entropie de Shannon est

$$H_1(f) = -\frac{\alpha}{\beta}\log(\alpha) + \alpha.$$

AVRIL 2011
CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

1. On a
$$D_n = \begin{vmatrix} u+v & uv & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & u+v & uv & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & uv & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & u+v & uv \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & u+v \end{vmatrix}.$$
On développe par rapport à la première colonne, pour obtenir
$$D_n = (u+v)D_{n-1} - uvD_{n-2}.$$

2. On vérifie que $D_n = \sum_{k=0}^{n} u^k v^{n-k}$.

Problème

Partie 0

1. Le logarithme népérien est deux fois dérivable, de dérivée seconde négative ($x \mapsto -1/x^2$), donc il est concave.

2. On en déduit que
$$\log(m_g) = \frac{1}{n}(\log x_1 + \ldots + \log x_n) \leq \log\left(\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right) = \log(m_a),$$
d'où le résultat par croissance de la fonction exponentielle.

3. Pour tout $x > -1$, $\log(1+x) \leq x$. Donc pour tout entier naturel n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \leq \exp(n/n) = e,$$

toujours par croissance de la fonction exponentielle.

Partie I

1. Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique de la question 0.2. appliquée à
$$x_k = \alpha_k\beta_k.$$
2. On intervertit l'ordre de sommation
$$\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j \leq \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j\alpha_j\beta_j.$$
3. Avec ce choix particulier de β_n on a
   (a) $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$. Donc la série de terme général γ_n/n, $n \in \mathbb{N}^*$, est bien convergente.
   (b) Son reste vaut $\Gamma_k = \frac{1}{k}$, où on a utilisé le fait que $\frac{\gamma_n}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et un résultat de sommes téléscopiques.
4. On a donc
   (a) $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j\alpha_j\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\frac{\beta_j}{j} = \sum_{j=1}^{n}(1+1/j)^j\alpha_j \leq e\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$. Puisque la série $\sum \alpha_j$ est convergente, il en est de même de la série $\sum U_k$.
   (b) On déduit directement une majoration de sa somme par
$$e\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j.$$

Partie II

Propriété

$$L_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; L_n \geq 1, \; L_n^2 \leq L_{n+1}L_{n-1}. \qquad (1)$$

1. La propriété (1) s'obtient pour la suite ($L_n = n!$) en partant de l'inégalité triviale $n \leq n+1$.
   La suite identiquement égale à 1 vérifie trivialement la propriété (1).

2. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} \geq \frac{L_n}{L_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_1}{L_0} = L_1 \geq 1,$$

   ce qui montre que cette suite est nécessairement croissante.

3. En multipliant les termes de gauche et les termes de droite de la suite d'inégalités suivantes

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k}} \geq \ldots \geq \frac{L_k}{L_{k-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_1}{L_0},$$

   on obtient bien

$$\frac{L_n}{L_{n-k}} \geq L_k.$$

4. Par simplifications successives, on a

$$v_1 v_2 \ldots v_n = \frac{L_0}{L_1}\frac{L_1}{L_2} \ldots \frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{1}{L_n} = u_n^n.$$

5. On a

   (a) $v_{n+1}/v_n \leq 1$ d'après (1), donc (v_n) est décroissante,

   (b) et

$$\begin{aligned} u_{n+1}/u_n &= (v_1 v_2 \ldots v_n v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} / (v_1 v_2 \ldots v_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= (v_1 v_2 \ldots v_n)^{\frac{-1}{n(n+1)}} (v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leq (v_{n+1})^{\frac{-1}{n+1}} (v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = 1, \end{aligned}$$

   par décroissance de (v_n). Donc (u_n) est décroissante.

6. On applique directement la décroissance de (v_n).

7. Immédiat d'après la question 4.

8. L'implication $\Longleftarrow$ se déduit directement de la question précédente.
   On démontre la réciproque par application de la Partie I: avec $\alpha_n = v_n$ (qui définit bien une série convergente par hypothèse) la suite $U_n = u_n$ (d'après la question 4 de la partie présente) est bien convergente.

Partie III

1. Pour $n = 0$, on a $c_0 = f(y)$. Ensuite, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'égalité se déduit par n dérivations successives, en remarquant que f est supposée de classe C^∞.

2. Montrons que $R(f)$ est ouvert. Soit $y \in R(f)$: pour tout n, $f^{(n)}(y) = 0$, soit $c_n = 0$. Par définition d'une fonction analytique, il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de y sur lequel f s'écrit

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n = 0,$$

   ce qui montre que $\mathcal{V} \subset R(f)$, donc $R(f)$ est ouvert.
   Pour montrer que $R(f)$ est fermé, nous allons prouver que son complémentaire est ouvert. Soit $y \in \mathbb{R} \backslash R(f)$. Il existe au moins une dérivée qui ne s'annule pas en y. Soit n_0 le plus petit ordre. Alors il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de y sur lequel f s'écrit

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n = f^{(n_0)}(y)(x-y)^{n_0} + o\left((x-y)^{n_0}\right),$$

   avec $f^{(n_0)}(y) \neq 0$. Donc il existe un voisinage de y dans $\mathcal{V}$ sur lequel f ne s'annule pas, donc qui est inclus dans $\mathbb{R} \backslash R(f)$. Ce qu'on souhaitait montrer.

3. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et ϕ. Donc $R(f)$ est soit $\mathbb{R}$, soit ϕ. Si $R(f) \neq \phi$, on déduit que $R(f) = \mathbb{R}$, ie la fonction f est identiquement nulle.

Partie IV

1. Cf question 1. Partie I.

2. Soient α et β comme dans la définition de $E(L)$. On utilise la formule de Taylor suivante: pour tout y, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y tel que pour tout x de $\mathcal{V}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + o(x-y)^n.$$

Si on choisit x dans $\mathcal{V}$ qui vérifie la condition supplémentaire $\rho_x = \beta\,|x-y| < 1$, alors la série dont la somme partielle est la somme ci-dessus est une série convergente car

$$\left|\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k\right| \leq \alpha\beta^k\,|x-y|^k = \alpha\rho_x^k.$$

Sur ce voisinage de y, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k,$$

ce qui achève la preuve que f est analytique.

3. Ce résultat s'obtient par application directe de la Partie III.

4. Les fonctions f et g sont de classe C^∞ dans $E(L)$, donc il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N} : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \alpha\beta^n L_n,\ \left|g^{(n)}(x)\right| \leq \lambda\gamma^n L_n.$$

   (a) Stabilité par addition

$$\left|(f+g)^{(n)}(x)\right| \leq \left|f^{(n)}(x)\right| + \left|g^{(n)}(x)\right| \leq \left(\alpha\beta^n + \lambda\gamma^n\right) L_n \leq AB^n L_n,$$

   avec $A = \alpha + \lambda$ et $B = \beta + \mu$.

   (b) Stabilité par multiplication

$$\begin{aligned}\left|(fg)^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k L_k \lambda\gamma^{n-k} L_{n-k} \leq \alpha\lambda L_n \sum_{k=0}^{n} \beta^k\gamma^{n-k},\end{aligned}$$

où on a utililisé un résultat de la Partie II. Avec $A = \alpha\lambda$ et $B = \beta + \gamma$, on obtient bien $\left|(fg)^{(n)}(x)\right| \leq AB^n L_n$.

(c) Stabilité par translatation et homothétie

$$\left|h^{(n)}(x)\right| = \sigma^n \quad \left|f^{(n)}(\mu + \sigma x)\right| \leq \alpha(\beta\sigma)^n L_n.$$

5. Si f est à support compact, alors il existe un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f s'annule, donc sur lequel toutes les dérivées de f s'annulent. Donc $R(f) \neq \phi$. Par hypothèse, f est donc identiquement nulle.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Pour tout entier *n* strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n),\ \ \alpha_1 = 1,\ \text{et}\ \ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de *n* et calculer sa limite.

L'équation associée à la relation de récurrence s'écrit :

$2x^2 - x + 1 = 0$ et les solutions sont : $x = -1$ ou $x = 1/2$.

Le terme général de la suite (α_n) est de la forme : $\alpha_n = \lambda(-1)^n + \mu(1/2)^n$ avec $\alpha_1 = 1 = -\lambda + \mu(1/2)$ et $\alpha_2 = -1/2 = \lambda + \mu(1/4)$. La résolution du système donne : $\lambda = -2/3$ et $\mu = (2/3)$. On obtient :

$$\alpha_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

Et la limite de $(-1)^n$ n'existe pas, donc la suite (α_n) n'a pas de limite.

2. Pour tout entier *n*, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

On vérifie aisément que cette suite (x_n) est bien définie, car toujours strictement positive.

On peut calculer quelques premiers termes, par exemple : $x_2 = 2^{-1/2}$ $x_3 = 2^{3/4}$, $x_4 = 2^{-7/8}$.

On montre alors par récurrence que $x_n = 2^{\alpha_n}$ (on peut aussi passer au logarithme en base 2, puisque la suite est strictement positive. En effet : $x_{n+2} = \sqrt{\frac{2^{\alpha_n}}{2^{\alpha_{n+1}}}} = (2^{\alpha\alpha_n - \alpha_{(n+1)}})^{1/2}$ et x_{n+2} est de la forme $2^{\alpha_{n+2}}$ si et seulement si on a la relation : $\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ avec $\alpha_1 = 1$, et $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. On se trouve dans la situation de la question précédente, donc :

$$x_n = 2^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

3. Déterminer la limite de x_n quand $n \to +\infty$.

Cette limite n'existe pas à cause du terme $(-1)^n$.

Exercice n° 2

1. Montrer l'existence d'une fonction φ définie implicitement par la relation $Arctg\,(x-y)+1 = e^{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$.

Soit $f(x,y) = Arctg\,(x-y)+1-e^{x+y}$. On a : $f(0,0)=0$, f est de classe C^2 au voisinage de l'origine et $f_y^{'}(0,0) = -2 \neq 0$. Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont donc vérifiées. Il existe I un voisinage de 0, J un voisinage de 0 et une fonction φ de I dans J telle que :

- φ est da classe C^2 au voisinage de l'origine,
- $\varphi(0) = 0$ et
- $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = y,\ \forall x \in I, \forall y \in J$

De plus $\varphi'(0) = -\frac{f_x^{'}(0,0)}{f_y^{'}(0,0)}$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour $y = \phi(x)$ au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor, on a : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi^{'}(0) + \frac{x^2}{2}\varphi^{''}(0) + o(x^2)$

On obtient : $f_x^{'} = \frac{-1}{1+(x-y)^2} - e^{x+y}$ et $f_x^{'}(0,0) = 0$, donc $\varphi^{'}(0) = 0$.

Dans la relation explicite de $f(x,y)$ en remplace y par $\phi(x)$, puis on calcule la différentielle seconde à l'origine, on obtient : $d^2 f(0,0) = f_{xx}^{''}(0,0) + f_y^{'}(0,0) \times \varphi^{''}(0) = 0$ avec $f_{xx}^{''}(0,0) = -1$ et $f_y^{'}(0,0) = -2$, d'où $\varphi^{''}(0) = -1/2$.

En conclusion :

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

On décompose la fraction rationnelle : $\frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3/4}{2x-1}$ pour obtenir :

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}Ln|2x-1|\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{8}Ln3$$

2. $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$. On pose $t = e^x$.

$$I_2 = \int_{1}^{e} \frac{t-1}{(t+1)t}dt = \int_{1}^{e} \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right)dt = [2Ln(t+1) - Lnt]_1^e = 2Ln(\frac{e+1}{2}) - 1$$

3. $I_3 = \int_{2}^{3} \frac{2x}{(x^2-1)^2} Ln(x)\,dx$ (on donnera le résultat sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, où p et q sont des nombres rationnels). On effectue une intégration par parties. On pose : $u'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$ et $v(x) = Lnx$, pour obtenir

$$I_3 = \left[-\frac{Lnx}{x^2-1}\right]_2^3 + \int_{2}^{3} \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = -\frac{1}{8}Ln3 + \frac{1}{3}Ln2 + \int_{2}^{3} \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx.$$

On décompose la fraction rationnelle du deuxième terme :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

Enfin $I_3 = -\frac{1}{8}Ln3 + \frac{1}{3}Ln2 + \left[-Lnx + \frac{1}{2}Ln(x-1) + \frac{1}{2}Ln(x+1)\right]_2^3 = \frac{17}{6}Ln2 - \frac{13}{8}Ln3$

Exercice n° 4

Une entreprise produit des biens A, B et C. La production de ces biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés pour chaque unité produite sont donnés dans le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Profit
A	1	3	1	2	5
B	6	1	3	3	5
C	3	3	2	4	5

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 84, 42, 21 et 42.

Déterminer la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

Notons x le nombre de biens A, y le nombre de biens B et z le nombre de biens C pour obtenir un profit maximal. Le problème de maximisation s'écrit sous la forme :

$$Max\{5x+5y+5z \,/\, x+6y+3z \le 84,\ 3x+y+3z \le 42,\ x+3y+2z \le 21,\ 2x+3y+4z \le 42\}.$$

La résolution « classique » de ce problème peut s'avérer un peu longue, mais il est parfois préférable de réfléchir un peu avant de se lancer dans des calculs.

Sachant que le profit est le même pour chaque produit, fabriquons au maximum le produit le plus rapide à obtenir, soit le produit A (7) (contre 13 pour B et 12 pour C), en respectant les contraintes d'utilisation des machines. Le maximum de A est donc x=14 (inéquation 2 saturée). Dans ce cas : y=z=0. Le profit est donc de 70.

Exercice n° 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.

On a : $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, donc $\lambda = 2$ est une valeur propre simple et $\lambda = 1$ est une valeur propre double.

Le vecteur $e_1 = (1,0,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Le sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, engendré par $e_2 = (1,1,0)$. Complétons la base par la recherche d'un vecteur e_3 vérifiant $Ae_3 = e_2 + e_3$. On trouve $e_1 = (1,1,1)$.

La matrice A est donc semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta + J$, et comme $J^2 = 0$, on obtient :

$T^n = (\Delta + J)^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1} J$.

Puis $A^n = PT^n P^{-1}$, avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En conclusion :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^n + n + 1 & n \\ -n & n+1 & n \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$.

Calculer $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$, puis montrer que $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$(ensemble des polynômes de la variable X à coefficients entiers).

On vérifie aisément que : $P(-1) = P(1) = P(2) = -1$, donc $P(X)+1$ est divisible par $X+1, X-1, X-2$ et on obtient :
$P(X) = (X+1)(X-1)(X-2)+1$

Supposons que $P(X)$ ne soit pas irréductible dans $Z[X]$, alors $P(X) = A(X)B(X)$, avec $A(X), B(X) \in Z[X]$. Comme $d^0 B \geq 1$, $d^0 A < 3$, de même $d^0 B < 3$ et $d^0 (A+B) < 3$.

On a : $P(-1) = A(-1)B(-1) = -1$ et les entiers relatifs $A(-1), B(-1)$ sont opposés et égaux à +1 ou -1, d'où $A(-1) + B(-1) = 0$, de même $A(1) + B(1) = 0$ et $A(2) + B(2) = 0$.

Le polynôme $A(X) + B(X)$ de degré strictement inférieur à 3 admet 3 racines, il est donc nul et $A(X) = -B(X)$, donc $P(X) = -A(X)^2 < 0$.

Par ailleurs, $P(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$, ce qui est contradictoire.

En conclusion $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$.

Exercice n° 7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On pose $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$, où α est un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. On suppose que *X* (respectivement *Y*) suit une loi normale de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2) et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. Déterminer la loi de *Z*.

Notons m la moyenne de Z et σ son écart type. On a : $m = \alpha m_1 + (1-\alpha) m_2$ et $\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2}$. La somme de deux lois normales étant une loi normale, Z suit donc une loi normale de paramètres m et σ.

2. On ne suppose pas de lois a priori sur *X* et *Y*, ni qu'elles sont indépendantes, mais on suppose toutefois qu'elles admettent des moments d'ordre1 et 2.

Déterminer α de façon que la variance de Z soit minimale.

On note $V = \begin{pmatrix} Var\, X & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var\, Y \end{pmatrix}$ la matrice de variance-covariance de X et Y, où $Var\, X$ (resp. $Var\, Y$) désigne la variance de *X* (resp. *Y*) et $Cov(X,Y)$ la covariance de ces deux variables. On suppose que cette matrice *V* est inversible.

On cherche donc à résoudre le problème d'optimisation $\underset{\alpha}{Min}\, Var(Z)$. Il s'agit d'une forme quadratique définie positive, donc strictement convexe et le problème admet une unique solution.

On a

$$Var(Z) = \alpha^2\, VarX + (1-\alpha)^2\, VarY + 2\,\alpha\,(1-\alpha)\,Cov(X,Y)$$

Puis,

$$\frac{\partial Var(Z)}{\partial \alpha} = 2\alpha\; VarX - 2(1-\alpha)VarY + 2(1-2\alpha)\,Cov(X,Y)$$

Cette expression s’annule pour :

$$\alpha = \frac{VarY - Cov(X,Y)}{VarX + VarY - 2Cov(X,Y)},$$

car $Var\,(X-Y) = VarX + VarY - 2Cov(X,Y) > 0$.

.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

1. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i).$$

Le polynôme caractéristique étant scindé dans $\mathbb{C}$, la matrice est diagonalisable.

2. Le vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ vérifie $A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1$, c'est-à-dire $x_1 = -y_1$ et $z_1 = 0$. On peut prendre, par exemple, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De la même manière on obtient pour $\lambda_2 = 1+i$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$, que $x_2 = -(1+i)y_2$ et $y_2 = -(1-i)z_2$. Donc, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_3 = 1-i$ et $Av_3 = \lambda_3 v_3$, que $x_3 = -(1-i)y_3$ et $y_3 = -(1+i)z_3$. Donc, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -i & -i & 1+i \\ i & i & 1-i \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la diagonalisation de la matrice pour écrire $A^9 = P \cdot D^9 \cdot P^{-1}$. On obtient

$$A^9 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 16(1-i) \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 32 & -2 \\ -1 & 0 & -30 \\ 16 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème I. *Polynômes d'interpolation de Lagrange*

1. On a $L_k(x_\ell) = \frac{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x_\ell - x_j)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x_k - x_j)}$. Si $\ell = k$ alors on a les mêmes termes au numérateur et au dénominateur et $L_k(x_k) = 1$, si $\ell \neq k$ il y a forcément un facteur au numérateur qui s'annule, donc $L_k(x_\ell) = 0$.

2. On a

$$L(x_\ell) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x_\ell) = f_\ell.$$

Pour chaque terme dans la somme, il y a n facteurs au numérateur, donc le degré du polynôme L est inférieur ou égal à n.

3. Supposons, par absurde, qu'il existe L et P deux polynômes de degré au plus n et tels que $L(x_\ell) = P(x_\ell) = f_\ell$ pour tout $\ell \in \{0, ..., n\}$. Alors, le polynôme $L - P$ est de degré au plus n et il a $n+1$ racines distinctes. Ça implique que $L(x) - P(x) = 0$ pour tout x, d'où l'unicité.

II. *Intégration numérique*

1. **a)** Le développement de Taylor à l'ordre n, de $f(x)$ en a, avec reste intégral s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit P_n le polynôme de degré n et R_n le reste dans le développement de Taylor précédent.

Il est évident que $(x-t)^n I_{[a,x]}(t) = (x-t)_+^n I_{[a,b]}(t)$ et R_n s'écrit comme demandé.

b) On remarque que $E(f)$ est linéaire en f et on remplace f par son développement de la question précédente, donc $E(f) = E(P_n) + E(R_n)$.

Par hypothèse, le procédé est exact pour les polynômes de degré au plus n et P_n est de degré au plus n, donc $E(P_n) = 0$. Ensuite

$$\begin{aligned}
E(f) &= E(R_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k R_n(x_k) - \int_a^b R_n(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x_k) dt - \int_a^b \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x) dt dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k G_t(x_k) - \int_a^b G_t(x) dx \right) dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) K_n(t) dt.
\end{aligned}$$

c) On en déduit

$$\begin{aligned}
|E(f)| &\leq \frac{1}{n!} \int_a^b |f^{(n+1)}(t)| |K_n(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \int_a^b |K_n(t)| dt
\end{aligned}$$

d) La fonction $g(x) = x^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ et $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, donc $E(g) = (n+1) \int_a^b K_n(t) dt$. De plus, K_n est de signe constant, alors $\int_a^b |K_n(t)| dt = (n+1)^{-1} |E(g)|$. En conclusion,

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| |E(g)|.$$

2. **a)** D'après I, le polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

de degré au plus n. Le procédé d'intégration est exact si

$$\int_a^b L(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Puisque, $\int_a^b L(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x)dx$ on prend

$$\lambda_k = \int_a^b \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)} dx.$$

Si $\tilde{f}$ est une fonction polynômiale de degré maximal n, telle que $\tilde{f}(x_k) = f(x_k)$, par l'unicité du polynôme d'interpolation (voir question I.3.) $\tilde{f}$ est nécessairement égale à L.

b) Pour $n = 1$, nous avons $x_0 = a$ et $x_1 = b$,

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{b-a}{2} \text{ et } \lambda_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}.$$

Le procédé d'intégration s'écrit $f \mapsto \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.

Pour le noyau, $G_t(x) = (x-t)_+$ pour $x \in [a, b]$ et

$$\begin{aligned} K_1(t) &= E(G_t) = \frac{b-a}{2}(G_t(a) + G_t(b)) - \int_a^b (x-t)_+ dx \\ &= \frac{(b-a)(b-t)}{2} - \int_t^b (x-t)dx \\ &= \frac{(b-a)(b-t)}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}\Big|_t^b = \frac{(t-a)(b-t)}{2}, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Pour l'erreur d'approximation on utilise la question II.1, pour $n = 1$, donc si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$

$$E(f) = \int_a^b f^{(2)}(t) \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt.$$

Comme K_1 est de signe constant sur $[a, b]$

$$|E(f)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| \cdot \int_a^b K_1(t)dt = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12}.$$

III. *Méthode de Gauss*

1. Il suffit de décomposer S sur la base $P_0, ..., P_n$ de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

$c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b P_{n+1}(x)S(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b P_{n+1}(x)P_k(x)dx = 0.$$

2. **a)** On a

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} Q(u_k)L_k(x), \text{ où } L_k(x) = \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x-u_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(u_k-u_j)}.$$

b) Puisque $Q(u_k) = L(u_k)$, $Q - L$ est divisible par $(x - u_k)$ pour tout $k = 0, ..., n$, donc par P_{n+1}.
On peut donc écrire $Q - L = S \cdot P_{n+1}$ pour un polynôme S de degré au plus $(2n+1)-(n+1) = n$. Ceci implique que

$$\int_a^b Q(u)du = \int_a^b L(u)du = \sum_{k=0}^{n} Q(u_k) \int_a^b L_k(u)du. \tag{1}$$

On peut donc poser $\lambda_k = \int_a^b L_k(u)du = (\Pi_{j\neq k}(u_k - u_j))^{-1} \int_a^b \Pi_{j\neq k}(u - u_j)du$, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.

c) Si on prend $Q = L_j^2$, polynôme de degré $2n$, dans (1) on trouve

$$0 < \int_a^b L_j^2(u)du = \sum_{k=0}^{n} L_j^2(u_k) \int_a^b L_k(u)du = \int_a^b L_j(u)du = \lambda_j,$$

pour tout $j \in \{0, ..., n\}$.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

1.1 Partitions entières pour $k = 2, 3$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $r_k(n) \leq \dfrac{p_k(n)}{k-1}$.

   Correction : Étant donnée une décomposition $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} ib_i$ de l'entier n. Alors il suffit de poser $a_i = ib_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Donc il devient évident que $r_k(n) \leq p_k(n)$. Le facteur $1/(k-1)$ est obtenu par les $k-1$ permutations circulaires des coefficients $(a_1, \ldots, a_k)$.

2. Calculer $r_2(n)$, $p_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Correction : On cherche x et y tels que $x + 2y = n$. Supposons que n soit pair et s'écrive $n = 2p$. Alors y peut prendre ses valeurs dans $\{0, \ldots, p\}$ et x est alors fixé ($x = n - 2y$). Donc $r_2(2p) = p+1$. Lorsque n est impair et s'écrit $n = 2p+1$ alors on a encore $r_2(2p+1) = p+1$. D'où $r_2(n) = E[n/2] + 1$.
   Pour $p_2(n)$, on cherche x et y tels que $x + y = n$ alors y peut prendre ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et x est alors fixé ($x = n - y$). D'où $p_2(n) = n$.

3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

   Correction : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a convergence de toutes les séries donc

$$\mathcal{R}_3(z) = \sum_{n\geq 0} r_3(n) z^n = \sum_{p\in\mathbb{N}} z^p \sum_{q\in\mathbb{N}} (z^2)^q \sum_{r\in\mathbb{N}} (z^3)^r = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

4. En utilisant l'égalité

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = 1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6,$$

valable pour tout complexe z, montrer que pour tout $n \geq 6$, on a

$$r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6) = 0.$$

<u>*Correction :*</u> On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
1 &= (1-z)(1-z^2)(1-z^3)\mathcal{R}_3(z) \\
&= \left(\sum_{n\geq 0} r_3(n)z^n\right)(1-z-z^2+z^4+z^5-z^6) \\
&= \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^n - \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+2} \\
&+ \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+4} + \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+5} - \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+6} \\
&= \sum_{n\geq 6}(r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6))z^n + \sum_{n\leq 5} *_n z^n,
\end{aligned}$$

où $(*_n)_{n=0,1,2,3,4,5}$ désigne 6 coefficients dont le calcul explicite est inutile.

5. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{17}{72}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-jz} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}.$$

<u>*Correction :*</u> On a $(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = (1-z)^3(1+z)(1-jz)(1-j^2z)$ d'où la décomposition

$$\mathcal{R}_3(z) = q_1\frac{1}{1-z} + q_2\frac{1}{(1-z)^2} + q_3\frac{1}{(1-z)^3} + q_4\frac{1}{1+z} + q_5\frac{1}{1-jz} + q_6\frac{1}{1-j^2z}.$$

avec

$$\begin{aligned}
q_6 = \lim_{z\to 1/j^2}(1-j^2z)\mathcal{R}_3(z) &= (1-1/j^2)^3(1+1/j^2)(1-1/j) \\
q_5 = \lim_{z\to 1/j}(1-jz)\mathcal{R}_3(z) &= (1-1/j)^3(1+1/j)(1-j) \\
q_4 = \lim_{z\to -1}(1+z)\mathcal{R}_3(z) &= 2^3(1+j)(1+j^2) \\
q_3 = \lim_{z\to 1}(1-z)^3\mathcal{R}_3(z) &= 2(1-j)(1-j^2) \\
q_2 = \lim_{z\to 1}[(1-z)^3\mathcal{R}_3(z)]' &= -\frac{1}{(1+1)^2}\frac{1}{1-j}\frac{1}{1-j^2} + \frac{1}{1+1}\frac{j}{(1-j)^2}\frac{1}{1-j^2} + \frac{1}{1+1}\frac{1}{1-j}\frac{j^2}{(1-j^2)^2} \\
q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 &= \mathcal{R}_3(0) = 1.
\end{aligned}$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_3(n) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}.$$

Correction : On développe les fractions en série

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3(z) &= \frac{17}{72}\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3}+\frac{1}{8}\frac{1}{1+z}+\frac{1}{9}\frac{1}{1-jz}+\frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}\\
&= \frac{17}{72}\sum_{n\geq 0} z^n+\frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n+\frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)(n+1)}{2}z^n\\
&+ \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n+\frac{1}{9}\sum_{n\geq 0} j^n z^n+\frac{1}{9}\sum_{n\geq 0} j^{2n}z^n
\end{aligned}$$

Donc

$$r_3(n)=\frac{17}{72}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+2)(n+1)}{12}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{1}{9}(j^n+j^{2n}).$$

7. En déduire que $r_3(n)=E\left[\frac{(n+3)^2}{12}\right]$ où $E[x]$ est l'entier le plus proche de x, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $|x-n|\leq|x-p|$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
Par exemple, $E[6.8]=7$ *et* $E[2.5]=2$.

Correction : On remarque que

$$r_3(n)=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{9}{12}+\frac{47}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}=\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{-7+9(-1)^n+16\cos(2\pi n/3)}{72}$$

avec $|-7+9(-1)^n+16\cos(2\pi n/3)|\leq 32<36$ donc $\left|r_3(n)-E\left[\frac{(n+3)^2}{12}\right]\right|<1/2.$

1.2 Séries entières rationnelles

Soit $S(z)$ une série entière de rayon de convergence $r>0$:

$$S(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad \text{pour } |z|<r.$$

On admet le théorème suivant :
La série entière $S(z)$ coïncide avec une fonction rationnelle $F(z)$ de la forme $\frac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont deux fonctions polynômes telles que Q ne s'annule pas dans le disque ouvert $D(0,r)$ de rayon r, lorsqu'il existe $d\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$ et $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_q\in\mathbb{R}^{q+1}$ (non tous nuls) tels que pour tout $n\geq d$, $\lambda_0 a_n+\lambda_1 a_{n+1}+\cdots+\lambda_q a_{n+q}=0$.

On dit alors que la fonction rationnelle est définie par :

- les conditions initiales : c'est-à-dire la donnée de $q+d$ nombres $(a_0, a_1, \ldots, a_{d+q-1})$
- et la relation de récurrence linéaire donnée par les $q+1$ coefficients $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.

On admet que deux fonctions rationnelles sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Elles sont donc égales si et seulement si les conditions initiales et la relation de récurrence sont identiques.

8. Soit $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fonction rationnelle telle que Q ne s'annule pas dans dans le disque ouvert $D(0,r)$, avec $r > 0$. Ses conditions initiales sont constituées de $q+d$ nombres. Montrer qu'il existe une fonction polynôme S de degré $d-1$ tel que

$$F(z) = S(z) + z^d G(z) \text{ pour tout } z \in D(0,r),$$

où G est une fonction rationnelle possédant la même relation de recurrence que F, mais dont les conditions initiales ne sont constituées que de q nombres.

Correction : On pose $S = \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n$ et $G = \sum_{n \geq 0} a_{n+d} z^n$ alors $F = S + z^d G$.

La question précédente permet de se limiter au cas $d = 0$. Dans toute la suite du problème, on considérera qu'on est toujours dans ce cas et on notera encore F une telle fonction rationnelle. Les conditions initiales permettent alors de définir la famille de polynômes suivante

$$P_0(X) = 0 \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, q\}, \quad P_k(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n.$$

On note également $R(X) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i}$ le polynôme associé à la relation de reccurence.

9. Montrer que $Q(X) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i} P_i(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à q.

Correction : C'est évidemment un polynôme de degré inférieur ou égal à q. Mais son terme de degré q vaut

$$\sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_{i-1} = 0$$

10. Montrer que $\lambda_q (P_q(X) - F(X)) = \lambda_0 X^q F(X) + \sum_{j=1}^{q-1} \big(\lambda_j X^{q-j} [F(X) - P_j(X)]\big)$.

Correction : On a la suite des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_q\left(P_q(X)-F(X)\right) &= \lambda_q\left(\sum_{n=0}^{q-1}a_nX^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n\right)\\
&= -\lambda_q\sum_{n=q}^{+\infty}a_nX^n\\
&= -\lambda_q\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+q}X^nX^q\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{q-1}\left(\lambda_ia_{n+i}X^{n+i}X^{q-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{q-1}\lambda_iX^{q-i}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+i}X^{n+i}\\
&= \sum_{i=0}^{q-1}\lambda_iX^{q-i}\sum_{n=i}^{+\infty}a_nX^n\\
&= \lambda_0X^qF(X)+\sum_{j=1}^{q-1}\left(\lambda_jX^{q-j}\left[F(X)-P_j(X)\right]\right).
\end{aligned}$$

11. En déduire que $F(X) = Q(X)/R(X)$.

Correction : On met F en facteur dans l'identité précédente d'où

$$F\left(\lambda_q+\lambda_0X^q+\sum_{j=1}^{q-1}\lambda_jX^{q-j}\right)=FR=\lambda_qP_q+\sum_{j=1}^{q-1}\left(\lambda_jX^{q-j}P_j\right)=Q.$$

12. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $(\xi_1,\ldots,\xi_r)\in\mathbb{C}^r$ et $(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}^r$ tels que

$$R(X)=(1-\xi_1X)^{m_1}\ \cdots\ (1-\xi_rX)^{m_r}.$$

Correction : Les ξ_i sont les inverses des racines de R comptées avec leur multiplicité m_i.

13. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de Q/R, montrer qu'il existe une famille $\left((b_{i,j})_{j=1,\ldots,m_i}\right)_{i=1,\ldots,r}$ telle que

$$a_n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}b_{i,j}C_{n+j-1}^{j-1}\xi_i^n.$$

Correction : Q/R est une fraction rationnelle avec $\deg Q < \deg R$ donc la décomposition en éléments simples n'a que des parties polaires. On utilise donc la réponse de la question précédente pour écrire :

$$Q/R=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}b_{i,j}\frac{1}{(1-\xi_iX)^j}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{n\geq 0}b_{i,j}C_{n+j-1}^{j-1}(\xi_iX)^n.$$

Afin de trouver un équivalent de a_n, on ne conserve de la somme précédente que la valeur ξ_i de plus grand module et le terme polynomial de plus haut degré (c'est-à-dire pour $j = m_i$). Dans le cas de plusieurs racines de même module maximal, on ne garde que celle de plus grande multiplicité.

14. Soit i_0 l'indice du ξ_i de plus grand module (ou de plus grande multiplicité en cas de plusieurs racines de même module maximal). Montrer qu'un équivalent de a_n s'écrit sous la forme suivante
$$a_n \sim b_{i_0,m_{i_0}} \xi_{i_0}^n \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}.$$

<u>*Correction :*</u> Il suffit de montrer que $C_{n+m_{i_0}-1}^{m_{i_0}-1} \sim \dfrac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}$. Or on a
$$C_{n+m_{i_0}-1}^{m_{i_0}-1} = \frac{(n+m_{i_0}-1)!}{n!(m_{i_0}-1)!} = \frac{\prod_{k=1}^{m_{i_0}-1}(n+k)}{(m_{i_0}-1)!} = \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!} + O(n^{m_{i_0}-2}).$$

15a. On considère la fonction rationelle $\tilde{F}$ définie par les conditions initiales (1,1,2,3,4,5) et la relation de récurrence (-1,1,1,0,-1,-1,1). Trouver une expression explicite de la fonction $\tilde{F}$ en fonction de $\mathcal{R}_3$.

<u>*Correction :*</u> La relation de récurrence est celle donnée par la question 4. De plus, on a

$$\begin{aligned}
r_3(0) = 1 &\quad \leftrightarrow \quad 0\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 0 \\
r_3(1) = 1 &\quad \leftrightarrow \quad 1\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 1 \\
r_3(2) = 2 &\quad \leftrightarrow \quad 2\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 0\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 2 \\
r_3(3) = 3 &\quad \leftrightarrow \quad 3\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 1\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 0\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 = 3 \\
r_3(4) = 4 &\quad \leftrightarrow \quad 4\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 2\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 \\
&\qquad\quad = 0\times 1 + 2\times 2 + 0\times 3 = 4 \\
r_3(5) = 5 &\quad \leftrightarrow \quad 5\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 3\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 2\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 \\
&\qquad\quad = 1\times 1 + 2\times 2 + 0\times 3 = 0\times 1 + 1\times 2 + 1\times 3 = 5
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{F} = \mathcal{R}_3$.

15b. En utilisant la question 14, montrer qu'un équivalent du n-ième coefficient de $\tilde{F}$ (noté $a_n(\tilde{F})$) est donné par
$$a_n(\tilde{F}) \sim \frac{n^2}{12}$$
Ce résultat est-il en conformité avec le résultat de la question 8 ?

<u>*Correction :*</u> Avec les notations de la question 14, on choisit $i_0 = 1$ l'indice de la racine 1 de multiplicité 3 d'où
$$a_n(\tilde{F}) \sim b_{1,3}\ 1^n\ \frac{n^2}{2!}$$

Or $b_{1,3}$ est le coefficient q_3 de la question 5 qui vaut $\frac{1}{6}$.
Évidemment, on est en conformité avec la question 8 puisque

$$r_3(n) = E\left[\frac{(n+3)^2}{12}\right] = \frac{n^2}{12} + O(n) \sim \frac{n^2}{12} \sim a_n(\tilde{F}).$$

1.3 Partitions entières pour k quelconque

16. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\mathcal{R}_k(X) = \frac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ puis

$$\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \ \cdots \ \frac{1}{1-z^k}.$$

<u>*Correction :*</u> On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k(z) &= \sum_{n\geq 0} r_k(n) z^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{b_1+\cdots+kb_k=n} z^{b_1+\cdots+kb_k} \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{b_k=1}^{n/k} \sum_{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}=n-kb_k} z^{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}} z^{kb_k} \\
&= \sum_{b_k\geq 0} \sum_{n\geq kb_k} \sum_{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}=n-kb_k} z^{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}} z^{kb_k} \\
&= \sum_{b_k\geq 0} z^{kb_k} \sum_{m\geq 0} \sum_{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}=m} z^{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}} \\
&= \left(\sum_{b_k\geq 0} z^{kb_k}\right) \mathcal{R}_{k-1}(z) = \frac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient directement $\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \ \cdots \ \frac{1}{1-z^k}$. L'initialisation étant par exemple fournie par la question 3.

17. En déduire que

$$r_k(n) = r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots$$

où on utilise la convention : $r_k(n-ik) = 0$ si $n < ik$.

<u>*Correction :*</u> Puisque $\mathcal{R}_k(z) = \frac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ alors en reindexant le produit des deux séries, on

obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} r_k(n)z^n &= \left(\sum_{n\geq 0} r_{k-1}(n)z^n\right)\sum_{i\geq 0} z^{ki} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{ki+n=p} r_{k-1}(n)z^{n+ki} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{i=0}^{p/k} r_{k-1}(p-ki)z^p \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n/k} r_{k-1}(n-ki)z^n
\end{aligned}$$

18. En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto x^{k-1}$ est convexe, montrer que pour tout $k \geq 2$

$$x^{k-2} \geq \frac{1}{k(k-1)}\left(x^{k-1} - \max\left\{(x-k)^{k-1}; 0\right\}\right), \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

<u>*Correction :*</u> La dérivée au point x est plus grande que l'accroissement entre $x-k$ et x ou qu'entre 0 et x si $x-k<0$. Lorsque $x=0$ l'inégalité est triviale. Soit $x>0$, lorsque $x \geq k$ on a bien

$$(k-1)x^{k-2} \geq \frac{(x^{k-1}-(x-k)^{k-1})}{x-(x-k)} = \frac{(x^{k-1}-(x-k)^{k-1})}{k},$$

et lorsque $0<x<k$, on a

$$(k-1)x^{k-2} \geq \frac{(x^{k-1}-0)}{x-0} \geq \frac{(x^{k-1}-0)}{k}.$$

19. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$r_k(n) \geq \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

<u>*Correction :*</u> Lorsque $k=1$ on a bien $r_1(n) = 1 \geq \dfrac{n^0}{1!0!} = 1$.

Ou même $k=2$, on a $r_2(n) = [n/2]+1 \geq \dfrac{n^1}{2!1!} = \dfrac{n}{2}$.

Supposons l'inégalité vraie au rang $k-1$ (pour $k\geq 2$ ou même 3) alors par la question 17 et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
r_k(n) &= r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots \\
&\geq \frac{n^{k-2}}{(k-1)!(k-2)!} + \frac{(n-k)^{k-2}}{(k-1)!(k-2)!} + \cdots \\
&\geq \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}\left(\frac{n^{k-1}-(n-k)^{k-1}}{k(k-1)} + \frac{(n-k)^{k-1}-(n-2k)^{k-1}}{k(k-1)} + \cdots\right) \\
&\geq \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}\frac{n^{k-1}-0}{k(k-1)} = \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.
\end{aligned}$$

2 Formes quadratiques

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$q(x) = \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E, on note $U \oplus V$ l'espace qui est la somme directe de U et V, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $U + V$ sous la condition $U \cap V = \{0\}$.

2.1 Diagonalisation

1. Soit q une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ (appelée forme polaire de q) telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout x de E. Vérifier en particulier que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)).$$

Correction : Pour l'existence, on pose φ comme dans la définition, alors $\varphi(x,x) = \frac{1}{4}(q(2x) - q(0)) = q(x)$. Pour l'unicité, s'il existait $\psi \neq \varphi$ telle que $\psi(x,x) = \phi(x,x)$ alors

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) = \frac{1}{4}(\psi(x+y,x+y) - \psi(x-y,x-y)) \\
&= \frac{1}{4}(\psi(x,x) + 2\psi(x,y) + \psi(y,y) - \psi(x,x) + 2\psi(x,y) - \psi(y,y)) = \psi(x,y).
\end{aligned}$$

On dit que la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie positive) si, pour tout x de E, $\varphi(x,x) \geq 0$ (resp. si, pour tout $x \neq 0$, $\varphi(x,x) > 0$). On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots,n}$.

2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = {}^tP \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

Correction : Par définition $f_j = \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} e_i$ d'où

$$\begin{aligned}
\left({}^t P \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P\right)_{kl} &= \sum_{i=1}^{n} ({}^t P)_{k,i} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{i,j} P_{j,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_{i,k} \sum_{j=1}^{n} P_{j,l} \varphi(e_i, e_j) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} P_{i,k} e_i, \sum_{j=1}^{n} P_{j,l} e_j\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi))_{k,l}\,.
\end{aligned}$$

Dans la suite du problème, on appelle rang de la forme quadratique q (associée à la forme bilinéaire symétrique φ) le rang de la matrice de φ dans une base de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ (ou de façon équivalente pour la forme quadratique associée q) si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Etant donnés x et y deux vecteurs de E, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\varphi(x, y)$ en fonction des x_i et des y_i.

   Correction : On a évidemment

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \alpha_i.$$

4. Soit f_1 un vecteur de E tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. On note $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie pour tout x de E par $\varphi_1(x) = \varphi(f_1, x)$, et $F = \ker(\varphi_1)$. Montrer que $E = \mathbb{R}f_1 \oplus F$ où $\mathbb{R}f_1$ désigne le sous espace vectoriel de E de dimension 1 engendré par f_1.

   Correction : Soit $x \in \mathbb{R}f_1 \cap F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda f_1$ d'où $0 = \varphi_1(x) = \varphi(f_1, \lambda f_1) = \lambda \varphi(f_1, f_1)$. Nécessairement $\lambda = 0$ doù $\mathbb{R}f_1 \cap F = \{0\}$. Soit maintenant $z \in E$, on pose $y = z - \dfrac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} f_1$ et $x = \dfrac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} f_1$. Ainsi $z = x + y$ avec $x \in \mathbb{R}f_1$. Il suffit donc pour conclure de montrer que $y \in F$:

$$\varphi_1(y) = \varphi\left(f_1, z - \frac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} f_1\right) = \varphi(f_1, z) - \varphi(f_1, f_1) \frac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} = 0.$$

5. En déduire que toute forme bilinéaire symétrique sur E admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

   Correction : Par raisonnement par récurrence, on voit de suite que

$$E = \oplus_{i=1}^{p} \mathbb{R} f_i + \ker \varphi_p$$

où $\varphi_p : \ker \varphi_{p-1} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi_p(x) = \varphi(f_p, x)$, si on est capable de trouver $f_1, \ldots, f_p$ tels que $\varphi(f_i, f_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 1, \ldots, p$. Lorsqu'on ne peut plus exhiber un tel élément, c'est que φ est identiquement nulle sur $G := \ker \varphi_p$. En effet, par la question 1, si pour tout $x \in G$, $\varphi(x, x) = q(x) = 0$, alors $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in G^2$. La matrice de φ sur G est alors la matrice identiquement nullle (donc diagonale). Et bien évidemment, la matrice de φ est diagonale sur $\oplus_{i=1}^{p} \mathbb{R} f_i$.

6. Déterminer une telle base pour la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

(On pourra commencer par préciser la forme bilinéaire symétrique φ associée à q et la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$).

<u>*Correction :*</u> Par la question 1, on sait que

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)) \\
&= \frac{1}{4}((x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + (x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + (x_1 + y_1)(x_4 + y_4) \\
&\quad +(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) + (x_2 + y_2)(x_4 + y_4) + (x_3 + y_3)(x_4 + y_4) \\
&\quad -(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1)(x_3 - y_3) + (x_1 - y_1)(x_4 - y_4) \\
&\quad +(x_2 - y_2)(x_3 - y_3) + (x_2 - y_2)(x_4 - y_4) + (x_3 - y_3)(x_4) - y_4)) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_1y_4 + x_4y_1 \\
&\quad +x_2y_3 + x_3y_2 + x_2y_4 + x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{canonique}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche un vecteur f_1 tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. Un tel vecteur (le plus simple) est donné par $f_1 = e_1+e_2+e_3+e_4$. En effet, il est tel que $\varphi(f_1, f_1) = \frac{1}{2}(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 6 \neq 0$ et la forme φ_1 associée est $x \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. On itère le processus en posant $f_2 = -e_1 - e_2 + e_3 + e_4$, $f_3 = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ et $f_4 = -e_1 + e_2 + e_3 - e_4$. On note $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On aurait aussi pu calculer $\det(2\mathrm{Mat}_{canonique}(\varphi) - \lambda I_d)$, mais ce n'est pas l'esprit du sujet.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E et deux entiers p et q tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & -J_q & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où J_r désigne une matrice identité de taille $r \times r$.

<u>*Correction :*</u> On diagonalise, puis en renormalisant la base, on trouve naturellement la décomposition.

2.2 Sous-espaces totalement isotropes

On appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique φ (noté ker (φ)) le noyau de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. On dit que φ est non-dégénérée si ker $(\varphi) = \{0\}$.

On appelle signature de φ le couple d'entiers $(n_+; n_-)$ où n_+ est la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel F de E tel que la restriction de φ à F soit définie positive, et n_- la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel G de E telle que la restriction de φ à G soit définie négative.

Dans les questions suivantes, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour φ, et $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \dots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p+1, \dots, p+q$, et $\alpha_i = 0$ sinon.

8a. Montrer que $p \leq n_+$.

<u>*Correction :*</u> Si $p > n_+$ alors la base $(e_1, \dots, e_{p+1})$ génère un espace de dimension $p+1$ sur lequel φ est définie positive. Ce qui est en contradiction avec la définition de n_+.

8b. Soit F_+ un sous-espace vectoriel de E de dimension n_+ tel que la restiction de φ à F_+ (notée $\varphi|_{F_+ \times F_+}$) soit définie positive, et $G = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \dots e_n)$. Montrer que F_+ et G sont en somme directe. En déduire que $n_+ \leq p$.

<u>*Correction :*</u> Soit $x \in F_+ \cap G$ alors il existe $(\lambda_i)_{i=p+1,\dots,n}$ tels que

$$0 \leq \varphi(x,x) = \varphi\left(\sum_{i=p+1} n\lambda_i e_i, \sum_{i=p+1} n\lambda_i e_i\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 \leq 0.$$

Comme φ est définie positive sur F_+ alors on en déduit $F_+ \cap G = \{0\}$ et les espaces sont bien en somme directe. Nécessairement $n \geq dim(F_+) + dim(G) = n_+ + (n-(p+1)+1)$ donc $n_+ \leq p$.

8c. En déduire le théorème de Sylvester : Dans toute base orthogonale de E, la matrice de φ possède n_+ éléments strictement positifs et n_- éléments strictements négatifs.

<u>*Correction :*</u> Soit $\mathcal{C}$ une base de E orthogonale pour φ. On peut noter $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{C}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \dots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p+1, \dots, p+q$, et $\alpha_i = 0$

sinon. Nécessairement $n_+ = p$ et par analogie $n_- = q$. D'où le théorème de Sylvester.

9. Exprimer le rang de φ en fonction de sa signature, et déterminer la signature d'une forme bilinéaire définie positive.

   Correction : Avec les notations précédentes, le rang de φ vaut $p + q = n_+ + n_-$. Pour une matrice définie positive, le rang vaut n d'où $n_+ + n_- = n$. Et 0 est la dimension maximale de tout espace sur lequel la forme définie positive serait définie négative. On en déduit que la signature de toute forme bilinériare définie positive est $(n, 0)$.

On appelle cône isotrope de la forme quadratique q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\}.$$

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique φ si $\varphi(x, y) = 0$. Pour A une partie de E, on appelle orthogonal de A selon φ l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A \quad \varphi(x, y) = 0\}.$$

10a. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction : $A^\perp$ est stable par addition car φ est linéaire par rapport à la seconde variable. Il est également stable par produit extérieur car φ est homogène par rapport à la seconde variable. Étant de plus non vide, il est un sous-espace vectoriel de E.

10b. Montrer que pour toute partie F de E, on a

$$F \subset F^{\perp\perp}.$$

Correction : Soit $x \in F$, alors soit $y \in F^\perp$ on a bien $\varphi(x, y) = 0$. Donc $x \in F^{\perp\perp}$.

10c. Montrer que pour A et B deux parties de E on a l'implication suivante

$$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

Correction : Supposons que $A \subset B$ alors soit $x \in B^\perp$, montrons que $x \in A^\perp$. Pour cela, prenons $z \in A$ quelconque et montrons que $\varphi(x, z) = 0$. Or comme $x \in B^\perp$, alors pour tout $y \in B$ on a $\varphi(x, y) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in B$, cela est *a fortiori* vrai pour tout $z \in A$.

On appelle sous-espace totalement isotrope (SETI en abrégé) un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout x de F, $q(x) = 0$. On appelle SETI maximal (SETIM en abrégé) un sous espace totalement isotrope G vérifiant la propriété : si F est un SETI contenant G, alors $F = G$ (G est maximal pour l'inclusion).

Soit F un SETI.

11a. Montrer que $F \subset F^{\perp}$.

<u>*Correction :*</u> Soit $x \in F$ et $y \in F$. Il s'agit de montrer que $\varphi(x,y) = 0$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par addition, donc $x+y \in F$ et $x-y \in F$, d'où $q(x+y) = 0 = q(x-y)$. On conclut en écrivant $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) = 0+0$.

11b. Montrer que $\dim F \leq n - \dfrac{r}{2}$, où r est le rang de la forme quadratique q.

<u>*Correction :*</u> Soit s la dimension de F. On note $(f_1, \ldots, f_s)$ une base de F. On complète ensuite cette base en une base de E qu'on note alors $\mathcal{C}$. La matrice de φ dans cette base est alors donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0_s & *_{s,n-s} \\ *_{n-s,s} & *_{n-s,n-s} \end{pmatrix}$$

où 0_s désigne la matrice de taille $s \times s$ identiquement nulle et $*_{p,q}$ désigne une matrice quelconque de taille $p \times q$. Le rang étant inchangé dans toute base, le rang de cette matrice est r. Mais nécessairement son rang est inférieur au rang de la matrice du coin en bas à droite additionné au rang de la matrice du coin en haut à droite. Ainsi $r \leq rang(*_{n-s,n-s}) + rang(*_{s,n-s}) \leq n - s + min(s, n-s)$. Ainsi $r \leq n-s+n-s$ d'où $s \leq n - \dfrac{r}{2}$.

11c. Montrer que F est inclus dans un SETI maximal.

<u>*Correction :*</u> Soit F un SETI. Si c'est un SETIM c'est fini. Supposons donc que F ne soit pas un SETIM. Alors il existe H un SETI qui contient F tel que $F \neq H$ donc tel que $F \subsetneq H$. Cette opération peut donc se répéter. Mais elle se termine nécessairement lorsque la dimension de H vaut $n - r/2$ (ou avant). Si elle se termine avant, c'est fini, sinon elle se termine lorsque dim $(H) = n - r/2$. Dans ce cas, soit H est un SETIM qui contient F et c'est terminé, soit il existe G un SETI qui contient H tel que $H \subsetneq G$ donc dim $(G) > n - \dfrac{r}{2}$, ce qui est impossible.

On suppose que φ est non dégénérée. Etant donnés deux SETIM G_1 et G_2, on note $F = G_1 \cap G_2$, S_1 un supplémentaire de F dans M_1 (de sorte que $F \oplus S_1 = G_1$) et S_2 un supplémentaire de F dans M_2 (de sorte que $F \oplus S_2 = G_2$).

12a. Montrer que $S_1 \cap S_2^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2 = \{0\}$. En déduire que $\dim G_1 = \dim G_2$.

<u>*Correction :*</u> Soit $x \in S_1 \cap S_2^{\perp}$ alors $x \in G_1$. De plus, tout $y \in G_2$ se décompose en $z+t$ avec $z \in F$ et $t \in S_2$ d'où $\varphi(x,y) = \varphi(x,z) + \varphi(x,t)$. Comme $z \in F$ alors $z \in G_1$ qui est un SETI donc $\varphi(x,z) = 0$. Et comme $x \in S_2^{\perp}$ et $t \in S_2$, alors $\varphi(x,t) = 0$. Donc $x \in G_1 \cap G_2^{\perp}$. Supposons que $x \neq 0$ alors on peut définir $H = G_2 + \mathbb{R}x$. C'est un SETI car tout élément $h \in H$ s'écrit $g + \lambda x$ d'où $\varphi(h,h) = \varphi(g,g) + 2\lambda\varphi(g,x) + \varphi(x,x)$. Le premier et le dernier terme sont nuls car G_1 et G_2 sont des SETI et le deuxième terme est nul car $x \in G_2^{\perp}$. De plus comme $x \notin G_2$ (en effet $x \in G_2$ implique $x \in G_1 \cap G_2 = F$ donc $x \in F \cap S_1$ qui sont supplémentaires et ceci imposerait $x = 0$) alors on a construit un SETI qui contient strictement G_2 ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant que dim $(S_1) >$ dim $(S_2) = s$ avec $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de S_2 alors on pose

$$\psi : \begin{array}{rcl} S_1 & \rightarrow & \mathbb{R}^s \\ x & \mapsto & (\varphi(x, e_1), \ldots, \varphi(x, e_s)). \end{array}$$

Le théorème du rang nous donne

$$\dim\,(S_1) = \dim\,(\ker(\psi)) + rang(\psi) = \dim\,(S_1 \cap S_2^{\perp}) + rang(\psi) \leq s.$$

Donc dim $(S_1) =$ dim (S_2) et par suite dim $(G_1) =$ dim (G_2).

12b. Tous les SETIM ayant donc la même dimension, on appelle indice de la forme quadratique q la dimension commune de tous les SETIM. Calculer l'indice de q en fonction de sa signature $(n_+; n_-)$.

<u>*Correction :*</u> Soit une base qui orthonormalise φ comme démontré en question 7. φ est non dégénérée donc $n_+ + n_- = n$, ainsi on peut noter cette base $(e_1, \ldots, e_{n_+}, f_1, \ldots, f_{n_-})$. On pose $d = min(n_+, n_-)$ et on construit G le SETI engendré par $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d)$. Montrons que ce SETI est maximal pour conclure que l'indice est donc $min(n_+, n_-)$. Supposons que $n_+ = d$ (le cas $n_- = d$ se traite de la même manière).

On complète la famille $(e_1+f_1, \ldots, e_d+f_d)$ avec les éléments de la base $(e_1, \ldots, e_{n_+}, f_1, \ldots, f_{n_-})$. Cette nouvelle base peut donc s'écrire $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d, e_1, \ldots, e_d, f_{d+1}, \ldots, f_{n_-})$. Soit F un SETI contenant G. Si $G \subsetneq F$ alors il existe un élément g tel que $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d, g)$ soit une famille libre de F. Donc il existe $(\mu_i)_{i=1,\ldots,d}$ et $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n_-}$ tels que

$$g = \sum_{i=1}^{d} \mu_i(e_i + f_i) + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i + \sum_{i=d+1}^{n_-} \lambda_i f_i.$$

Les conditions $(\varphi(g, e_k + f_k) = 0)_{k=1,\ldots,d}$ imposent $(\lambda_k = 0)_{k=1,\ldots,d}$. Et la condition $\varphi(g, g) = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \mu_i\mu_j\varphi(e_i + f_i, e_j + f_j) + 2\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=d+1}^{n_-} \mu_i\lambda_j\varphi(e_i + f_i, f_j) + \sum_{i=d+1}^{n_-}\sum_{j=d+1}^{n_-} \lambda_i\lambda_j\varphi(f_i, f_j) \\ &= 0 + 0 - \sum_{i=d+1}^{n_-} \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Nécessairement tous les $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n_-}$ sont donc nuls et la famille $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d, g)$ n'est pas libre, ce qui fournit une contradiction.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, qui converge vers une limite *l*.

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.

$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} - u_0$ qui converge vers $l - u_0$.

$\sum_{k=0}^{n} w_k = Ln\, u_{n+1} - Ln\, u_0$ qui converge vers $Lnl - Lnu_0$ si *l* est non nulle et qui est divergente si *l*=0.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, dont le premier terme u_0 est strictement compris entre 0 et 1.

- Etudier la convergence de la suite (u_n).

On a : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$,donc la suite est décroissante et on vérifie par récurrence que : $0 < u_n < 1$. La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation : $l = f(l)$, à savoir *l*=0.

- En déduire la convergence des séries de terme général : u_n^2, $Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n.

On a : $\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$ qui converge vers $-u_0$.

Puisque *l*=0, la série de terme général $Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente (questions 1 et 2).

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$, on a : $Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \approx -u_n$ et ces deux séries sont de même nature donc la série de terme général u_n est divergente.

Exercice n° 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels et f une application de E dans F qui vérifie les deux assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2)\ \forall K > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K$$

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.

$f(0+0) = 2\,f(0)$, donc $f(0) = 0$ et $f(x-x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, donc f est impaire.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall \lambda \in Q, \quad f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$, où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

On vérifie par récurrence que : $f(nx) = n\,f(x)$ pour tout entier n.

Pour q entier non nul, $f(x) = f(q \times \frac{x}{q}) = qf(\frac{x}{q})$, donc $f(\frac{x}{q}) = \frac{1}{q}\,f(x)$

Pour $\frac{p}{q} \in Q,\ f(\frac{p}{q}x) = f(p \times \frac{x}{q}) = pf(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}\,f(x)$

3. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers zéro, calculer la limite de la suite $f(x_n)$.

Par hypothèse f est bornée sur la boule unité et (x_n) converge vers zéro, donc :

$$\forall\, 0 < \varepsilon < 1,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x_n)\| \leq K,$$

Pour $\lambda \in Q^+$ et $\|\lambda x_n\| \leq 1 \quad f(\lambda x_n) = \lambda\, f(x_n)$ et $\lambda\,\|f(x_n)\| \leq K$.

D'où $\|f(x_n)\| \leq K/\lambda$ et quand λ tend vers l'infini, $f(x_n)$ tend vers zéro.

4. Montrer que f est continue en 0 et en déduire que f est continue et linéaire.

D'après la question précédente, f est continue au voisinage de zéro.
Soit une suite (x_n) qui converge vers x, alors $f(x_n - x) = f(x_n) - f(x)$ converge vers 0 et f est continue sur R.

Comme l'ensemble Q est dense dans R : $\forall \lambda \in R,\ \exists \lambda_p \in Q,\ \lim\limits_{p \to \infty} \lambda_p = \lambda$.

On a (question 3) : $f(\lambda_p\, x) = \lambda_p\, f(x)$ et par passage à la limite, puisque f est continue :

$$f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x) \text{ et } f \text{ est linéaire.}$$

Exercice n° 3

1. Pour t nombre réel compris strictement entre 0 et 1, calculer l'intégrale suivante :

$$A(t) = 2\int_0^1 Max(\omega(1-t), t(1-\omega))d\omega$$

On a $0 < t < 1$, et $\omega(1-t) < t(1-\omega)$ pour $\omega < t$, donc

$A(t) = 2\int_0^t t(1-\omega)d\omega + 2\int_t^1 \omega(1-t)d\omega = 2\left[t\omega - t\omega^2/2\right]_0^t + 2\left[(1-t)\omega^2/2\right]_t^1$, puis

$A(t) = t^2 - t + 1$

2. Pour x, y>0, on pose : $V(x,y) = 2\int_0^1 Max(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y})d\omega$

Calculer cette intégrale.

On a : $\frac{\omega}{x} < \frac{1-\omega}{y}$ si et seulement si $\omega < \frac{x}{x+y}$.

$$V(x,y) = 2\int_0^{x/(x+y)} \frac{1-\omega}{y}d\omega + 2\int_{x/(x+y)}^1 \frac{d\omega}{x}\left[\frac{\omega-\omega^2/2}{y}\right]_0^{x/(x+y)} + 2\left[\frac{\omega^2/2}{x}\right]_{x/(x+y)}^1$$

$$V(x,y) = 2\left(\frac{x}{y(x+y)} - \frac{x^2}{2y(x+y)^2}\right) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{(x+y)^2}\right)$$

$$V(x,y) = \frac{x^2+y^2+xy}{xy(x+y)^2} = \frac{x+y}{xy} - \frac{1}{(x+y)}$$

Exercice n° 4

Soient E un espace vectoriel normé réel et f une fonction numérique définie sur E. On dit que f est quasi-convexe si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \le \alpha\}$ est convexe.

(1) Si f est quasi-convexe, $\forall x, y \in A_\alpha$, $f(x) \le \alpha$, $f(y) \le \alpha$.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le Sup(f(x), f(y)) \le \alpha$ et A_α est convexe.

(2) Réciproquement, si A_α est convexe.

Pour $x, y \in E$, et $\lambda \in [0,1]$, on choisit $\alpha = Sup(f(x), f(y))$
et $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq Sup(f(x), f(y))$

2. Montrer que toute fonction monotone est quasi-convexe.
Si f est monotone, alors $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est un intervalle, donc convexe et f est quasi convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe.
Par exemple le logarithme ou la racine carrée.

4. Soit f_i une famille de fonctions numériques quasi-convexes définies sur E, telle que, pour tout x de E, $\underset{i}{Sup}\ f_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction $g(x) = \underset{i}{Sup}\ f_i(x)$ est quasi-convexe.
Pour $x \in E$, on vérifie que : $\{x \in E / g(x) \leq \alpha\} = \bigcap_i \{x \in E / f_i(x) \leq \alpha\}$ et une intersection d'ensembles convexes est convexe, donc $g(x) = \underset{i}{Sup}\ f_i(x)$ est quasi-convexe.

5. Soient X un sous ensemble convexe ouvert non vide de E et f une fonction numérique différentiable définie sur X. On suppose que f quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x, y \in X,\ f(y) \leq f(x) \Rightarrow df(x)(y-x) \leq 0$$

$\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $f(y) \leq f(x)$, on a : pour tout $t \in [0,1]$, $f(x + t(y-x)) \leq f(x)$.

On pose, pour $t \in R$, $t \neq 0$, $\varepsilon(t) = \dfrac{f(x+t(y-x)) - f(x) - df(x)(t(y-x))}{\|t(y-x)\|}$.

Puisque f est différentiable en x, $\underset{t \to 0}{Lim}\, \varepsilon(t) = 0$. On en déduit que :
$t[\varepsilon(t) \times \|(y-x)\| + df(x)(y-x)] \leq 0$, puis en simplifiant par t et par passage à la limite, on obtient l'inégalité demandée.

6. Soient X un sous ensemble convexe ouvert non vide de E et f une fonction numérique deux fois différentiable définie sur X. On suppose que f quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x \in X,\ \forall h \in E,\ df(x)(h) = 0 \Rightarrow d^2 f(x)(h,h) \geq 0$$

Faisons une démonstration par l'absurde : $\exists x \in X$, $\exists h \in E$, $df(x)(h) = 0\ et\ d^2 f(x)(h,h) < 0$.
On pose : $\varphi(t) = f(x + th)$ qui est définie sur un intervalle $]-a, a[$, pour a suffisamment petit (de façon que φ soit définie sur X ,convexe ouvert).

D'après la formule de Taylor :

$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi^{'}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi^{''}(0) + o(t^2)$. En particulier pour *t* petit et positif :

(1) $\varphi(t) - \varphi(0) = f(x+th) - f(x) < 0$ et $\varphi(-t) - \varphi(0) = f(x-th) - f(x) < 0$

Remarquons que $x = \frac{1}{2}(x+th) + \frac{1}{2}(x-th)$. Puisque *f* est quasi convexe, on en déduit que : $f(x) \le Sup(f(x+th), f(x-th))$, ce qui contredit (1).

Exercice n° 5

On considère la suite $(u_n(\lambda))$ pour un paramètre réel λ strictement positif par :

$$u_n(\lambda) = \frac{e^{nLn\lambda-\lambda}}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n(\lambda))$ est convergente pour tout $\lambda > 0$.

$\frac{u_{n+1}(\lambda)}{u_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{n+1} < 1$ pour *n* grand, donc la suite st décroissante et positive, donc elle converge.

2. Déterminer le maximum de $(u_n(\lambda))$ pour *n* fixé.

La dérivée de $(u_n(\lambda))$ est égale à $u_n^{'}(\lambda) = \frac{1}{n!}(\frac{n-x}{x})e^{nLnx-x}$. Le maximum est atteint pour *x*=*n* et vaut $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$

3. Peut-on prolonger $(u_n(\lambda))$ par continuité en $\lambda = 0$?

On a $\lim_{\lambda\to 0} \frac{e^{nLn\lambda-\lambda}}{n!} = 0$ et on peut prolonger par zéro.

Exercice n° 6

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1,...,x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif :

$$P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a} \text{ (inégalité de Markov),}$$

où *P* désigne la probabilité et *E(X)* l'espérance mathématique de *X*.

(1) Si toutes les valeurs $x_1,...,x_n$ sont strictement inférieures à a, alors : $P(X \geq a) = 0$ et l'inégalité est évidente.

Dans le cas contraire, il existe au moins une plus petite valeur x_k supérieure ou égale à a.

(2) Si k = 1, toutes les valeurs e X sont supérieures à a et $P(X \geq a) = 1$, ainsi que : $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i \geq a \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$ et $E(X) \geq a$ et l'inégalité est évidente.

(3) Si k>1, alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i)\, x_i + \sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)\, x_i$.

On peut minorer le deuxième terme : $\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)\, x_i \geq a \sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)$ et $\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)\, x_i \geq a\, P(X \geq a)$, d'où $E(X) \geq a\, P(X \geq a)$ et comme a>0 , $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

2. Un fabricant produit en moyenne 20 produits par semaine. Cette production est plus ou moins aléatoire, car elle dépend des fournisseurs et de la disponibilité des matières premières. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

D'après l'inégalité de Markov : $P(X \geq 40) \leq \frac{1}{2}$. Le producteur a au plus une chance sur deux de doubler sa production.

3. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Où $\sigma(X)$ correspond à l'écart-type de X.

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$.

$P((X - E(X))^2) \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2}$ et $E((X - E(X))^2) = \sigma^2(X)$;

Et par croissance de la racine carrée, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I

1. Le polynôme P peut, dans le meilleur des cas, avoir 1 ou -1 comme racines. En 1, si $P(1) \neq 0$, on a

$$\frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sim_{x \to 1, x<1} \frac{P(1)}{\sqrt{2(1-x)}}$$

et cette fonction est intégrable sur $[1/2, 1]$, par exemple. Pareil en -1.

2. Il est facile de vérifier que pour tous P, $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $w_\theta(P + \lambda Q) = w_\theta(P) + \lambda w_\theta(Q)$.

3. Il suffit de considérer P dans $\{1, X, X^2, X^3\}$, successivement, et d'écrire le système linéaire de 4 équations :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 3 \cdot c (= \pi) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1 + x_2 + x_3)(= 0) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(= \frac{\pi}{2}) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(= 0).
\end{aligned}$$

Solution : $\theta = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice II

1. Pour $n = 1$, nous avons $P_1(X) = 1 + X$ et $P_2(X) = 1 + X + X \cdot 1 = 1 + 2X$ des polynômes de degré 1. Si l'hypothèse est vérifiée jusqu'à n, alors le degré de $P_{2n+1}(X) = P_{2n}(X) + XP_{2n-1}(X)$ est n, ainsi que celui de $P_{2n+2}(X) = P_{2n+1}(X) + XP_{2n}(X)$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 - r - X = 0$. Si $1 + 4X \neq 0$, elle admet deux racines distinctes $r_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+4X})/2$. Il vient $P_n(X) = Ar_1^n + Br_2^n$ et, en utilisant P_0 et P_1, on obtient

$$P_n(X) = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}, \text{ si } X \neq -\frac{1}{4}.$$

Si $1+4X = 0$, l'équation caractéristique admet l'unique racine $r_0 = \frac{1}{2}$. Il vient $P_n(-\frac{1}{4}) = (A+Bn)r_0^n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)\frac{1}{2^n}$.

3. Comme $P_n(-\frac{1}{4})$ ne s'annule pas, il suffit de considérer $P_n(X) = 0$ pour $X \neq -\frac{1}{4}$. Ceci implique que

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1, \text{ avec } \frac{r_1}{r_2} \neq 1.$$

Donc, $r_1/r_2 = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n+1}\right)$, pour k entre 1 et n (les racines $(n+1)$ème de l'unité, sauf la racine 1).

Nous pouvons, par exemple, utiliser les propriétés $1 = r_1 + r_2 = r_2(1 + r_1/r_2)$ et $-X = r_1 \cdot r_2 = r_2^2(r_1/r_2)$, déduites de l'équation caractéristique, pour obtenir

$$x_k = -\frac{r_1/r_2}{(1 + r_1/r_2)^2} = \frac{-1}{\left(\exp\left(\frac{-ik\pi}{n+1}\right) + \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right)^2} = \frac{-1}{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

Pour k allant de 1 à n, nous avons $\frac{k\pi}{n+1} \in \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{n\pi}{n+1}\right] \subseteq]0, \pi[$, donc nous avons trouvé les n racines réelles du polynôme P_n.

Exercice III

1. Avec le changement de variable $y = 1 - \frac{x}{n}$, on a $I_n = n\int_0^1 \sqrt{1 + y^n}\, dy$. Si on note $f_n(y) = \sqrt{1 + y^n}$ pour $y \in [0, 1]$, alors elle est dominée par $\varphi(y) = \sqrt{2}$ pour $y \in [0, 1]$, qui est intégrable sur ce domaine. De plus, $lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$, où $f(y) = 1$ si $y \in [0, 1[$ et $f(1) = \sqrt{2}$. Par le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 f_n(y)dy \to \int_0^1 f(y)dy = 1$, quand $n \to \infty$. Ceci permet de conclure que $I_n \sim n$, quand n tend vers l'infini.

2. On commence par le changement de variable $y = n(x - 1)$. On a $J_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}\, dy$. Maintenant on pose

$$f_n(y) = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}, \quad \varphi(y) = \sqrt{1 + e}, \quad f(y) = \sqrt{1 + e^y}.$$

Alors $|f_n(y)| \leq \varphi(y)$ sur $[0, 1]$ et φ est intégrable sur le domaine. De plus, $lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$. Par le théorème de convergence dominée, $J_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1 + e^y}\, dy = \frac{2}{n}(\sqrt{1 + e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{1 + e} + 1) + \ln(\sqrt{2} + 1))$.

Exercice IV

I. 1. Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \in]a, b[$ où $g(u) = 0$. Par le théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a, u]$, il existe $v \in]a, u[$ tel que $g'(v) = 0$. Le même théorème sur $[u, b]$ implique qu'il existe $w \in]u, b[$ tel que $g'(w) = 0$. Le même théorème appliqué à g' sur $[v, w]$, implique qu'il existe $z \in]v, w[$ tel que $g''(z) = 0$ ce qui contredit les hypothèses de départ.

2. Par absurde, supposons qu'il existe un $u \in]a, b[$ tel que $g(u) > 0$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à g sur $[a, u]$, on trouve $v \in]a, u[$ tel que $g(u)/(u - a) = g'(v)$, donc $g'(v) > 0$. Le même théorème sur l'intervalle $[u, b]$ implique qu'il existe $w \in]u, b[$, tel que $-g(u)/(b - u) = g'(w) < 0$. Pour finir, on applique le même théorème à g' sur $[v, w]$ et on trouve $z \in]v, w[$ tel que

$$g''(z) = \frac{g'(w) - g'(v)}{w - v} < 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse $g'' > 0$ sur $[a, b]$.

II. 1. La fonction f étant continue sur $[a, b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, il existe au moins un point à l'intérieur de l'intervalle où elle s'annule. Si le point n'est pas unique, on aboutit à une contradiction de manière similaire à la partie I. Donc il existe une unique racine c de $f(x) = 0$, dans l'intervalle.

2. Les fonctions f' et f'' sont continues sur $[a, b]$, donc leurs images sont des intervalles (théorème des valeurs intermédiaires). Comme $f'(x) > 0$, alors $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} f(x) > 0$. On peut prendre $m_2 = \sup_{x\in[a,b]} f''(x)$.

3. En effet, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) = f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. D'après I.2. on a $g(c_1) < 0$, donc $f(c_1) < 0 = f(c)$. Comme f est strictement croissante, on a que $a < c_1 < c$.

III. 1. Le polynôme

$$P_n(x) = (x - c_n)\frac{f(b) - f(c_n)}{b - c_n} + f(c_n), \text{ admet la racine } c_{n+1} = c_n - f(c_n)\frac{b - c_n}{f(b) - f(c_n)},$$

donc $c_{n+1} = \varphi(c_n)$ avec $\varphi(x) = x - f(x)(b - x)/(f(b) - f(x))$.

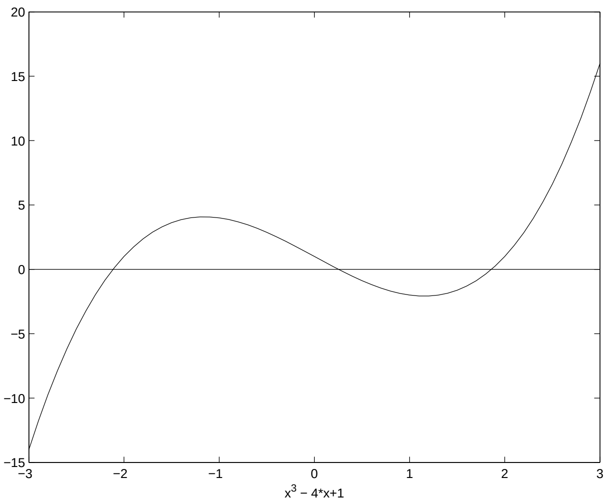
2. Nous avons démontré $a < c_1 < c$. Par récurrence, on peut appliquer la partie II.3 sur $[c_n, c]$ et vérifier que $c_n < c_{n+1} < c$.

3. La suite $\{c_n\}_{n\geq 1}$ est croissante et bornée supérieurement par c, donc elle converge. En supposant que $c_n \to c'$, quand $n \to \infty$, avec $c' \leq c$, on obtient par continuité de φ sur $[a, c]$ que $c' = \varphi(c')$, ce qui implique que $f(c') = 0$ et par unicité (partie II.1) on a $c' = c$.

Par un développement de Taylor de $f(c_n)$ autour de c, on obtient pour un u compris entre c_n et c :

$$f(c_n) = f(c) + (c_n - c)f'(u), \text{ donc } |c_n - c| = \frac{|f(c_n)|}{f'(u)} \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Application numérique : Si on pose $a = 1,5$ et $b = 2$, on a $c_1 = 1.8095$, $c_2 = 1,8549$ et $c_3 = 1,8601$. L'erreur commise est, d'après IV.3., inférieure à $|f(c_3)|/f'(1,5) = 0,0042/2,75 = 0,0015$.



AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Etant donné un nombre réel positif r, on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\bar{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

On appelle *série entière* associée à la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute série de fonction de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe. On rappelle le lemme suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiere, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors

(i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) Pour tout nombre réel r tel que $0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\bar{D}(r)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est alors défini par

$$R = \sup\{r \geq 0, \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée } \}.$$

On appelle alors *disque de convergence* le disque $D(R)$.

Le but du problème est d'étudier sur quelques exemples le comportement d'une série entière au voisinage du cercle $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.

1.1 Préliminaires

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque $D(1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

On note de plus $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. En remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$, montrer que pour tout $z \in D(1)$,

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n - 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - z^n) = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n. \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \Delta$. On note $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$. Montrer que

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$

On a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$

3. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D(1)$

$$|f(z) - S| \leq |z-1|\left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Comme la série est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. D'après la première question, pour $|z| < 1$:

$$|f(z) - S| \leq |z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| + \varepsilon|z-1|\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right)$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{z\to 1, z\in\Delta} f(z) = S.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|z-1| < \alpha$, $|z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| < \varepsilon$, et pour $\rho \leq \cos(\theta_0)$, $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$. Ainsi, pour $z \in \Delta$ et $|z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, $|f(z) - S| \leq \varepsilon(1 + 2/\cos\theta_0)$.

5. **Application :** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

$$\ln(2) = \lim_{z\to 1, z\in\Delta} \ln(1+z) = \lim_{z\to 1, z\in\Delta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1.2 Un théorème Taubérien

Le but des questions suivantes est d'établir une réciproque partielle du résultat précédent.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Pour $x \in]-1, 1[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = S.$$

6. Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $(1 - x^k) \leq k(1 - x)$.
   Pour tout $x \in]0, 1[$

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + x \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x)$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]0, 1[$,

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0; 1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

   d'où

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k$$

8. Justifier que le réel $M = \sup\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M + 1)\varepsilon.$$

La suite $(k|a_k|)$ tend vers 0, elle est donc majorée, et une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup qu'on note M. Pour $x = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$,

$$\begin{aligned}\left|S_n(x) - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| &\leq \frac{\varepsilon}{n}Mn + (1-x)a_0 \times 0 + \frac{1}{n}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right) x^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\ &\leq M\varepsilon + \frac{1}{n}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right)\frac{1}{1-x} \\ &\leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right)\end{aligned}$$

Pour N choisi tel que $\sup\limits_{k>n} k|a_k| < \varepsilon^2$, on a le résultat.

9. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

D'après les hypothèses, $f(x)$ tend vers S en 1^-. Il existe $N' > N$ tel que pour $n \geq N'$, $\left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geq N'$, $|S_n - S| \leq (M+2)\varepsilon$.

1.3 Un exemple de comportement sur le cercle $C(1)$

On considère dans cette partie la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} z^n$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du nombre x. Le but est de montrer que cette série est convergente en tout point du cercle $C(1)$ mais qu'elle n'est nulle part absolument convergente.

10. Dans cette question, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose $\sigma_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

(a) On suppose que la suite (σ_n) est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Justifier que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n$$

et en déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{k} a_m(b_k - b_{k+1}) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m}^{n-1} a_m(b_k - b_{k+1}) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} a_m(b_m - b_n) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n = \sum_{m=1}^{n-1} a_m b_m + a_n b_n.\end{aligned}$$

Soit M un majorant de $|\sigma_n|$. La série $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge donc absolument puisque $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M|b_n - b_{n+1}|$. De plus, $\sigma_n b_n$ tend vers 0, d'où le résultat.

(b) On suppose que la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Soit M un majorant de $|\sigma_n/\sqrt{n}|$. La série $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge donc absolument puisque $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M\sqrt{n}|b_n - b_{n+1}|$. De plus, $|\sigma_n b_n| \leq M\sqrt{n}|b_n|$ tend vers 0, d'où le résultat.

11. (a) Etablir que pour tout entier naturel impair p, on a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2.$$

On a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + \sum_{n=(p+1)^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = (-1)^p(2p+1) + (-1)^{p+1}(2p+3) = 2.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0+1)^2 \leq N$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

D'après ce qui précède

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{n=(2k+1)^2}^{(2k+3)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

(c) Etablir :

$$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq 8(N_0+1).$$

Comme $(2N_0+1)^2 \leq N < (2N_0+3)^2$,

$$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq N+1-(2N_0+1)^2 \leq (2N_0+3)^2-(2N_0+1)^2 \leq 8(N_0+1).$$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ est une série convergente.

On applique le résultat de la question 10(b) en remarquant que les sommes partielles de $\sum(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ sont majorées en valeur absolue par $10(N_0+1)$ et $N_0+1 \leq \sqrt{N}$.

12. Dans cette question, θ est un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$.

(a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée.

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

(b) Montrer que la série $\sum |c_n - c_{n+1}|$ avec $c_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Si $n+1 = p^2$ pour un entier naturel p, alors $|c_n - c_{n+1}| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{p^2-1} + \dfrac{1}{p^2}$. Sinon, $p^2 \leq n < n+1 < (p+1)^2$, alors $|c_n - c_{n+1}| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Et les séries de terme général $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{1}{p^2}$ et $\dfrac{1}{p^2-1}$ sont convergentes.

(c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} e^{in\theta}$ est convergente.

On conclut avec la question 10(a) avec $b_n = c_n$ et $a_n = e^{in\theta}$.

13. Conclure.

On a montré que la série est convergente sur tout le cercle. Et elle n'y est évidemment pas absolument convergente.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on cherche à étudier des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une formule de récurrence linéaire afin de trouver une formule simple donnant u_n en fonction de n.

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si μ est une valeur propre d'une matrice M de taille $n \times n$, on note E_μ le sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre μ, c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $M - \mu I_n$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\mu = \{x \in R^n : Mx = \mu x\} = Ker(M - \mu I_n).$$

2.1 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle récurrente d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0, \\ u_1 & = & 1, \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.
   $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ et $u_4 = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ tel que

   $$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer qu'on peut écrire la relation $(\star)$ sous la forme

   $$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = M\ U_n,$$

   où M est l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dira que M est la matrice de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M\ U_n.$$

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M.
   Ce sont les racines de $-X(1-X) - 1 = X^2 - X - 1$. Avec $\Delta = 5$, on trouve $x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
   On résoud les systèmes

   $$Mu = x_+ u \Leftrightarrow u_2 = x_+ u_1 \text{ et } Mv = x_- v \Leftrightarrow v_2 = x_- v_1.$$

   d'où les vecteurs propres $u = (1, x_+)$ et $v = (1, x_-)$.
5. Identifier une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

   $$D = P^{-1} M P. \qquad (1)$$

   On a

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_+ & x_- \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} x_+ & 0 \\ 0 & x_- \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$M^n P = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels à déterminer.

En élevant la relation précédente à la puissance n, les matrices de passage se simplifient. D'où

$$M^n P = PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_+ & x_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+^n & 0 \\ 0 & x_-^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+^n & x_-^n \\ x_+^{n+1} & x_-^{n+1} \end{pmatrix}.$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule suivante :

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}.$$

On calcule l'inverse de la matrice P

$$P^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x_- & -1 \\ -x_+ & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+^n & x_-^n \\ x_+^{n+1} & x_-^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Et puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a

$$u_n = x_+^n \times \frac{1}{\sqrt{5}} + x_-^n \times \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

8. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Puisque $|x_+| > |x_-|$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(1+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}$.

2.2 Suite récurrente d'ordre p

Dans cette partie, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence d'ordre p de la forme :

$$v_{n+p} = \mu_0 v_n + \mu_1 v_{n+1} + \cdots + \mu_{p-1} v_{n+p-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

où $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$. De plus, on se donne une condition initiale pour les p premiers éléments de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme

$$v_0 = v^0, v_1 = v^1, \ldots, v_p = v^p, \tag{3}$$

où $(v^0, \ldots, v^p)$ est une autre famille de réels fixée.
Une telle suite possède également une matrice de récurrence $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = M\ V_n,$$

avec $V_n = (v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+p-1})^t$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$.

9. Montrer que la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Tout comme dans la première partie, on trouve la forme attendue pour la matrice M.

10. Déterminer le polynôme caractéristique (noté χ_M) de la matrice M.

La matrice M est la matrice compagnon d'un polynôme. On le trouve en développant par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - X \end{vmatrix} \\ &= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - X \end{vmatrix} + (-1)^p \mu_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^p \mu_0 - X \times \chi_{M'}(X) \end{aligned}$$

où M' est une autre matrice de la même forme que M. Par récurrence, on trouve $\chi_M(X) = (-1)^p(\mu_0 + \mu_1 X + \cdots + \mu_{p-1}X^{p-1} - X^p)$.

11. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{p-1,p-1} & t_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{p,p} \end{pmatrix},$$

où les $t_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, telles que

$$T = P^{-1}MP. \tag{4}$$

Une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ peut se voir comme une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}$ étant un corps algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable d'où l'existence des matrices T et P.

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire
$$V_n = PT^nP^{-1}V_0.$$

En élevant T à la puissance n, les matrices de passage se simplifient, et on a la relation voulue.

2.3 Diagonalisation

On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M définie par
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$
où on rappelle que $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$.

13. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 qui soit colinéaire à un vecteur de la forme
$$(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{p-1}).$$

On note v le vecteur précédent. Il suffit de calculer le produit matrice-vecteur Mv
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^{p-1} \\ \mu_0 + \mu_1\mu_1 + \cdots \mu_{p-1}\mu_1^{p-1} \end{pmatrix}.$$
Et puisque μ_1 est racine de χ_M alors la dernière ligne vaut μ_1^p. Donc $Mv = \mu_1 v$. Ainsi v est un vecteur propre donc il existe bien un vecteur propre qui lui soit colinéaire...

14. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ suivante
$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$
est de rang supérieur ou égal à $p-1$.
Puisque la matrice est en forme d'escalier, on peut simplifier les lignes une à une. Le rang de la matrice est alors au moins égal à $p-1$.

15. En déduire que les sous-espaces propres de la matrice M sont tous de dimension 1, c'est-à-dire

$$\text{Pour tout } i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \dim(E_{\lambda_i}) = 1.$$

Par le théorème du rang et la question précédente, la dimension du noyau E_{λ_1} est inférieure à 1. Elle est évidemment supérieure à 1 puisque λ_1 est une valeur propre. Donc $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$. Et idem pour toutes les autres valeurs propres.

Dans la suite de cette partie, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Et on note D la matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

16. Montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_p \\ \nu_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_1^{p-1} & \nu_2^{p-1} & \cdots & \nu_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ une famille de réels à déterminer telle que $D = P^{-1}MP$.
Puisque toutes les valeurs propres sont distinctes, alors on a bien égalité entre la multiplicité d'une valeur propre ($= 1$) et la dimension du sous-espace propre associé ($= 1$). La matrice est donc diagonalisable. Il suffit d'écrire la matrice de passage P dans le bon ordre pour obtenir la forme de la matrice diagonale désirée. D'après les questions précédentes, et puisque les espaces propres sont de dimension 1, les vecteurs propres ont tous la forme donnée à la question 13. Donc la matrice de passage P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

Et la famille $(\nu_i)_{i=1,\ldots,p}$ est en fait la famille $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,p}$.

17. **Application :** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 &=& 0, \\ a_1 &=& 1, \\ a_2 &=& 0, \\ a_{n+3} &=& a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} b_0 &=& 0, \\ b_1 &=& 0, \\ b_2 &=& 1, \\ b_{n+3} &=& b_{n+2} - b_{n+1} + b_n \end{array}\right. \tag{5}$$

vérifient $a_n = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$ et $b_n = \dfrac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $n/2$.
Les deux suites ont la même matrice de récurrence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc $1 - X + X^2 - X^3$. Une racine évidente est $\lambda_3 = 1$. Puis $1 - X + X^2 - X^3 = (1-X)(1+X^2)$. Donc $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Les racines sont toutes différentes donc la matrice est diagonalisable. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $-4i$ et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{-4i}\begin{pmatrix} -i+1 & -(i+1) & -2i \\ -2 & 2 & 0 \\ 1+i & -(1-i) & -2i \end{pmatrix}^t = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -i+1 & -2 & 1+i \\ -(i+1) & 2 & -(1-i) \\ -2i & 0 & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i^{n+1} \\ -2(-i)^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2i^{n+1} - 2(-i)^{n+1} \\ 2i^n + 2(-i)^n \\ 2i^{n+1} + 2(-i)^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $a_n = \dfrac{-2i^{n+1} - 2(-i)^{n+1}}{4} = \dfrac{-2i(i^n - (-i)^n)}{4} = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i^n + i^{n+1} \\ -(-i)^n + (-i)^{n+1} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i^n + i^{n+1} - (-i)^n + (-i)^{n+1} + 2 \\ -i^{n+1} + i^{n+2} - (-i)^{n+1} + (-i)^{n+2} + 2 \\ i^n - i^{n+1} + (-i)^n - (-i)^{n+1} + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $b_n = \dfrac{-i^n + i^{n+1} - (-i)^n + (-i)^{n+1} + 2}{4}$.
En particulier si $n = 2p$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left((-1)^{p+1} + i(-1)^p + (-1)^{p+1} - i(-1)^p + 2\right) = \frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}.$$

Et si $n = 2p+1$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left(i(-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} - i(-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} + 2\right) = \frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}.$$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n$

Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

On a : $0 < (2n)u_{2n} = 2(u_{2n} + ... + u_{2n}) \leq 2\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n)$, car la suite est décroissante.

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim\limits_{n\to\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)u_{2n} = 0$

De même, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \to 0$. Donc les suites de rangs pairs et impairs extraites de la suite (nu_n) convergent et ont la même limite 0. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = 0$

2. Donner un exemple de suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers zéro.

Il faut choisir une suite non monotone. Par exemple, la suite définie par :
$u_0 = 0,\ u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est un carré parfait non nul et 0 ailleurs. La suite est positive, on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^2} < +\infty$ et pourtant $p^2 u_{p^2} = 1 \to 1$. La suite (nu_n) admet une suite extraite qui converge vers 1, donc on ne peut avoir $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = 0$

3. Soit σ une application injective de N^* (ensemble des entiers naturels non nuls) dans lui-même. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Montrons que la suite $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sigma(k)}{k^2}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \frac{1}{4n^2}(1 + 2 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}$$

Si la suite (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. La série considérée est donc divergente.

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout x nombre réel, on a : $1+x \le e^x$
On applique la formule de Taylor à l'exponentielle, à l'ordre deux, entre 0 et x, pour obtenir :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\theta x}, \text{ d'où } e^x - (1+x) = \frac{x^2}{2}e^{\theta x} \ge 0$$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$u_n = (1+k)(1+k^2) + ... + (1+k^n)$, pour $n \in N^*$ et pour $0 \le k < 1$

On applique le résultat précédent avec $x = k^p$, il vient : $1 \le 1 + k^p \le e^{(k^p)}$
Et par récurrence : $1 \le u_n = (1+k)....(1+k^n) \le e^{(k+k^2+...k^n)}$

Or $k + k^2 + ... = k^n = k\dfrac{1-k^n}{1-k} \le \dfrac{k}{1-k}$, car k est compris entre 0 et 1. Comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{(k+k^2+...k^n)} \le e^{k/(1-k)}$ et on obtient : $1 \le u_n \le e^{k/(1-k)}$.

Par ailleurs la suite est croissante, en effet $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + k^{n+1} \ge 1$.

En conclusion la suite est convergente car elle est majorée et croissante.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,Ln(k)}$ (cette question est indépendante des deux précédentes)

On considère la fonction $Ln|Ln\,x|$ qui est dérivable sur $R^{+*} - \{1\}$ et on applique le théorème des accroissements finis :

$$\forall\, p \ge 2,\ \exists \theta \in \left]0,1\right[,\ Ln(Ln(p+1)) - Ln(Ln\, p) = \frac{1}{(p+\theta)Ln(p+\theta)}$$

La croissance de la fonction logarithmique implique : $Ln(Ln(p+1)) - Ln(Ln\, p) \le \dfrac{1}{pLn(p)}$

En additionnant membre à membre les inégalités de 2 à n, on obtient :

$$Ln(Ln(n+1)) - Ln(Ln\,2) \le \frac{1}{2\,Ln\,2} + ... + \frac{1}{n\,Ln\,n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} Ln(Ln(n+1)) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,Ln(k)} = +\infty$

Exercice n° 3

1. Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n nombres réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & a_0 \\ 1 & . & . & . & a_1 \\ 0 & . & . & . & . \\ ... & . & . & 0 & . \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre

n (elle présente des 1 sur la sous diagonale, les a_i sur la dernière colonne et partout ailleurs des zéros). Calculer le polynôme caractéristique de *A*.

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$Det\,(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(a_{n-1} - \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k+1} a_k Det\,(A_k)$, où A_k est une matrice par blocs

définie par : $A_k = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & ... & 0 \\ \lambda & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ \lambda & ... & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \lambda & ... & ... & \lambda \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \lambda & ... & ... & \lambda \end{pmatrix}$ et

$D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & ... & \lambda \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & \lambda \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient $Det\,(A_k) = (-\lambda)^k$ et

$$Det\,(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(a_{n-1} - \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k+1} a_k\,(-\lambda)^k = (-1)^{n+1}(\lambda^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k)$$

2. Trouver une matrice carrée A d'ordre 4 qui vérifie l'équation : $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$

D'après la relation précédente :
$\lambda^4 - a_0 - a_1\,\lambda - a_2\,\lambda^2 - a_3\,\lambda^3 = 0 \Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur *y* de R^3 qui vérifie :

$$Det(x_1, x_2, z) = y.z, \ \forall z \in R^3$$

Où *y.z* désigne le produit scalaire euclidien de ces deux vecteurs et *Det* le déterminant. Le vecteur *y* s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 et on note $y = x_1 \wedge x_2$.

1. Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de *y* en fonction de celles de x_1 et x_2.

Soient $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$

Pour $z = (1,0,0)$ on obtient $y_1 = x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}$
Pour $z = (0,1,0)$ on obtient $y_2 = x_{13}x_{21} - x_{23}x_{11}$
Pour $z = (0,0,1)$ on obtient $y_3 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

2. On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme *u* de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$

- Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

On vérifie que les composantes des deux vecteurs de l'égalité du double produit vectoriel sont identiques. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$, la première composante est $x_2w_1w_2 + x_3w_1w_2 + x_1(w_1^2 - 1)$ sachant que le vecteur *w* est unitaire. Il en est de même des deux autres composantes.

- Montrer qu'il existe un réel *k* tel que : $u^3 = ku$
- En déduire les valeurs propres réelles de *u* et les sous espaces propres associés.

On a : $u^2(x) = (x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$ et $u^3(x) = -u(x)$ car $w \wedge w = 0$

Si *x* est un vecteur propre, associé à la valeur propre λ
$u^3(x) = \lambda^3 x = -\lambda x$ et $\lambda^3 + \lambda = 0$ et $\lambda = 0$

Le sous espace propre associé est défini par $x \wedge w = 0$, soit la droite vectorielle engendrée par *w*.

3. Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par : $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$

- Montrer que φ_α est une bijection de R^3

On a : $\varphi_\alpha = id + \alpha u$

Si cette application n'était pas inversible, il existerait un alpha non nul tel que :

$Det(id + \alpha u) = 0 = \alpha^2 Det(u + \frac{1}{\alpha} id)$ et donc $-1/\alpha$ serait un vecteur propre de *u*.

Contradiction avec le résultat précédent.

- Montrer qu'il existe un polynôme *P* de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

Dans $u^3 + u = 0$, on remplace *u* par $\frac{1}{\alpha}(\varphi_\alpha - Id)$

Si alpha est non nul, on trouve : $\varphi_\alpha^3 - 3\varphi_\alpha^2 + (3+\alpha^2)\varphi_\alpha - (1+\alpha^2)id = 0$ +

On peut choisir : $P(x) = x^3 - 3x^2 + (3+\alpha^2)x - (1+\alpha^2)$

- En déduire l'expression de l'application réciproque de φ_α en fonction de α et *u*.

On a : $\varphi_\alpha o(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id = (1+\alpha^2)id$

D'où, $\varphi_\alpha^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2}(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = id - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}u + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}u^2$

Exercice n° 5

Les deux questions sont indépendantes. R_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et C^k les fonctions *k* fois continûment dérivables.

1. Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \lim_{x\to 0} f(x)$ et que dans un voisinage de zéro, $f''(x) \geq -\frac{p}{x^2}$, où *p* est une constante positive. Déterminer $\lim_{x\to 0} x f'(x)$

On va montrer que : $\lim_{x\to 0} x f'(x) = 0$

Par hypothèse, $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]0,\eta[, \Rightarrow x^2 f''(x) \geq -p$

Pour $\alpha > 1$ et $x < \frac{\eta}{\alpha}$

$$f(\alpha x) = f(x) + (\alpha - 1)x f'(x) + \frac{(\alpha-1)^2}{2} x^2 f''(\sigma)$$

Et on en déduit, $x\, f^{'}(x) = \dfrac{f(\alpha x) - f(x)}{\alpha - 1} - \dfrac{(\alpha-1)}{2} x^2\ f^{''}(\sigma)$, mais :

$x^2\ f^{''}(\sigma) = \dfrac{x^2}{\sigma^2}\sigma^2\ f^{''}(\sigma^2) \geq -p\dfrac{x^2}{\sigma^2}$ donc $-\dfrac{(\alpha-1)}{2}x^2\ f^{''}(\sigma) \leq \dfrac{\alpha-1}{2}p\dfrac{x^2}{\sigma^2} \leq \dfrac{\alpha-1}{2}p$

Soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\alpha > 1$ tel que $(\alpha-1)\,p < \varepsilon$, ainsi $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{f(\alpha\, x) - f(x)}{\alpha - 1} = 0$, donc $\exists \eta_1 < \eta,\ 0 < x < \eta_1 \Rightarrow \dfrac{f(\alpha\, x) - f(x)}{\alpha - 1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Et par suite, $0 < x < \eta_1 \Rightarrow x\, f^{'}(x) < \varepsilon$

Fixons, $0 < \alpha < 1$, on a de même $x\, f^{'}(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha\, x)}{1-\alpha} + \dfrac{1-\alpha}{2}x^2\ f^{''}(\sigma)$ avec :

$\dfrac{1-\alpha}{2}x^2\ f^{''''}(\sigma) \geq -\dfrac{1-\alpha}{2}p\dfrac{x^2}{\sigma^2} \geq -\dfrac{1-\alpha}{2\alpha^2}p$

On peut choisir α tel que $\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}p < \varepsilon$, comme ci-dessus on obtient $\eta_2 < \eta$ tel que $0 < x < \eta_2 \ \Rightarrow x\, f^{'}(x) > -\varepsilon$

On a donc $\forall\, x \in \left]0, Inf(\eta_1, \eta_2)\right[, \left|x\, f^{'}(x)\right| < \varepsilon$ et $\underset{x\to 0}{Lim}\ x\, f^{'}(x) = 0$

2. Soit $f \in C^5(R,R)$ une fonction impaire qui vérifie :

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists M > 0, \forall\, x \in R, \left|f^{(5)}(x)\right| \leq M$

Montrer que pour tout réel *x*, on a : $\left|f(x) - \dfrac{x}{3}f^{'}(x)\right| \leq \lambda\, M\,|x|$.

Déterminer la meilleure constante possible λ.

Soit $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{x}{3}f^{'}(x)$ et $\varphi(0) = 0$ Par dérivation, on obtient :

$$\varphi^{'}(x) = \frac{2}{3}f^{'}(x) - \frac{x}{3}f^{''}(x) \text{ et } \varphi^{'}(0) = 0$$

$$\varphi^{''}(x) = \frac{1}{3}f^{''}(x) - \frac{x}{3}f^{'''}(x) \text{ et } \varphi^{''}(0) = 0$$

$$\varphi^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}f^{(4)}(x) \text{ et } \varphi^{(3)}(0) = 0$$

D'après le théorème des accroissements finis : $\left|f^{(5)}(x)\right| \le M \Rightarrow \left|f^{(4)}(x) - f^{(4)}(0)\right| \le M|x|$,

d'où $\forall x \in R$, $\left|\varphi''(x)\right| \le M\dfrac{x^3}{3}$

Par application successive des accroissements finis,

$\left|\varphi''(x) - \varphi''(0)\right| = \left|\varphi''(x)\right| \le M\dfrac{|x|^3}{9}$, $\left|\varphi'(x) - \varphi'(0)\right| = \left|\varphi'(x)\right| \le M\dfrac{x^4}{36}$ et $\left|\varphi\ (x)\right| \le M\dfrac{|x|^5}{180}$

On applique à $f(x) = M\dfrac{x^5}{120}$ et $f^{(5)}(x) = M$.

On obtient : $\varphi(x) = M\dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^5}{72}M = \dfrac{x^5}{180}M$

La meilleure constante possible est $\lambda = 1/180$.

Exercice n° 6

Soient $X = (X_1, ..., X_n)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ deux suites indépendantes de variables de Bernoulli de même paramètre λ, où $0 < \lambda \le 1/2$. On a :

$\lambda = P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - P(Y_i = 0).$

On note L_n la longueur de la plus grande suite Z commune à X et Y.

L'ordre des valeurs dans une suite ne peut pas être changé. Il est possible d'introduire des cases vides entre les valeurs d'une suite pour obtenir la plus grande suite commune.

Par exemple, pour n=9, si X=(0 0 0 1 0 0 1 0 0) et Y= (0 0 1 0 0 0 0 1 0), on peut noter :

X=	0	0	0	1	0	0			1	0	0
Y=	0	0		1	0	0	0	0	1	0	
Z=	0	0		1	0	0			1	0	

Et $L_n = 7$.

1. Pour n=2, calculer l'espérance de L_2 en fonction de λ .

L_2 peut prendre 3 valeurs : 0, 1 ou 2 et on a au total 16 cas (2 pour la valeur zéro, 10 pour la valeur 1 et 4 pour la valeur 2).

$E(L_2) = 0 \times 2\lambda^2(1-\lambda)^2 + 1 \times \left[1 - 2\lambda^2(1-\lambda)^2 - (\lambda^2 + (1-\lambda\ )^2)^2\right] + 2 \times (\lambda^2 + (1-\lambda)^2)^2$

$E(L_2) = 1 + \lambda^4 + (1-\lambda)^4$

2. Pour quelle valeur de λ, l'espérance de L_2 est-elle minimale ?

Soit $f(\lambda) = 1 + \lambda^4 + (1-\lambda)^4$

La dérivée s'annule pour $\lambda = 1/2$

Et on a un minimum pour cette valeur.

3. Quelle est la probabilité que $L_n = n$, sachant que la suite X est fixée avec uniquement trois 1 et que Y a aussi uniquement trois 1 (n>3)?

Pour obtenir $L_n = n$ il faut que les deux suites soient identiques (elles ont la même longueur).

$$\Pr ob(L_n = n) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ total\ de\ cas} = \frac{1}{C_n^3}$$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I

1. En appliquant la formule de Taylor avec reste Lagrange on trouve

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{3! \cdot 8}(1+\theta x)^{-5/2}x^3,$$

pour un certain θ dans $]0,1[$. Ainsi, $P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ et, pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous avons

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{3|x|^3}{48(1/2)^{5/2}} = \frac{\sqrt{2}|x|^3}{4} \leq \frac{|x|^3}{2}.$$

2. Soit $N_x = [1/\sqrt{x}]$ appartenant à $\mathbb{N}$. En utilisant un développement de Taylor de f autour de 0, avec reste Lagrange, on obtient

$$f(kx) = f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2, \text{ pour } \theta \in]0,1[.$$

En remplaçant dans la somme :

$$\begin{aligned} S(x) &:= \sum_{k=1}^{N_x} f(kx) = \sum_{k=1}^{N_x}(f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2) \\ &= f'(0)x\frac{N_x(N_x+1)}{2} + \eta(x), \end{aligned}$$

où $\eta(x) = \frac{x^2}{2}\sum_{k=1}^{N_x} k^2 f''(\theta kx)$. Puisque f'' est bornée dans un voisinage de 0 et comme

$$\sum_{k=1}^{N_x} k^2 = N_x(N_x+1)(2N_x+1)/6,$$

nous avons $\eta(x) \to 0$ quand x décroit vers 0.

Par ailleurs, $xN_x(N_x+1)$ est compris entre $1-x$ et $1+x$ et tend vers 1, quand x décroit vers 0. Au final,

$$S(x) \to \frac{f'(0)}{2}, \text{ quand } x \to 0+.$$

3. En posant $y = a/\sqrt{x}$, nous avons le développement de Taylor de f en 0 : $f(y) = 1 - y^2/2(1+\varepsilon(y))$, où $\varepsilon(y) \to 0$ quand $y \to 0$. De plus, $\ln(1 - y^2/2(1+\varepsilon(y))) = -y^2/2(1+\varepsilon'(y))$ avec $\varepsilon'(y) \to 0$ quand $y \to 0$. Nous en déduisons,

$$\begin{aligned} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x &= \exp\left(x \ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= \exp\left(x \ln(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x}(1+\varepsilon(\frac{a}{\sqrt{x}}))\right) \\ &= \exp(-\frac{a^2}{2}(1+\varepsilon'(\frac{1}{\sqrt{x}})). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\lim_{x\to\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = \exp(-\frac{a^2}{2}).$$

Exercice II

1. On peut diagonaliser A et on obtient $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et mettons $C = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Alors, l'équation de départ $B^2 = A$ est équivalente à $C^2 = D$. De plus, $tr(C) = tr(B) = 0$. Ces équations donnent

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + bc = 1$. Pour finir, il faut transformer via $B = P \cdot C \cdot P^{-1}$, ce qui donne

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4a - 3b + c & 9a - 9b + 2c & 5a - 6b + c \\ -a + b & -2a + 3b & -a + 2b \\ -a - c & -3a - 2c & -2a - c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}^3, \ a^2 + bc = 1 \right\}.$$

Exercice III

1. Si $b = c = 0$ la matrice est diagonale.

Si $b = 0$ et $c \neq 0$, la matrice est triangulaire inférieure, donc elle admet a comme valeur propre de multiplicité 3. L'espace propre associé à a est $\{(0,0,X)^\top, \ X \in \mathbb{C}\}$.

De manière similaire, si $b \neq 0$ et $c = 0$, a est valeur propre de multiplicité 3 et l'espace propre associé est $\{(X,0,0)^\top, \ X \in \mathbb{C}\}$.

Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on obtient, soit par calcul de déterminants, soit par les équations de la question suivante, que les valeurs propres sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_{2,3} = a \pm \sqrt{2bc}$. Les sous-espaces propres sont de rang 1, associés aux vecteurs propres $v_1 = (b, 0, -c)^\top$, $v_2 = (b, \sqrt{2bc}, c)^\top$ et $v_3 = (b, -\sqrt{2bc}, c)^\top$, respectivement.

2. Soit X un vecteur de taille n à éléments complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation $AX = \lambda X$ donne les équations

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 &= \lambda X_1 \\ cX_1 + aX_2 + bX_3 &= \lambda X_2 \\ &\cdots \\ cX_{n-1} + aX_n &= \lambda X_n \end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire aussi sous forme récurrente

$$bX_{k+1} + (a - \lambda)X_k + cX_{k-1} = 0,$$

en posant $X_0 = X_{n+1} = 0$. Nous allons résoudre l'équation caractéristique $br^2 + (a - \lambda)r + c = 0$ de cette suite récurrente. Le déterminant de cette équation est $\Delta = (a - \lambda)^2 - 4bc$. Si ce déterminant s'annule l'équation admet une solution double $r_0 = \frac{\lambda - a}{2b}$ qui est différente de 0 (car $c \neq 0$). Il existe donc des nombres complexes α et β tels que

$$X_k = \alpha r_0^k + \beta k r_0^{k-1}.$$

Comme $X_0 = X_{n+1} = 0$, on en déduit $\alpha = \beta = 0$, donc $X = 0$. Ceci est exclu, donc le déterminant Δ ne peut s'annuler.

Nous avons donc $\Delta \neq 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, ce qui donne $X_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$. En tenant compte de $X_0 = X_{n+1} = 0$, on trouve $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$. Il existe donc p entre 1 et n tel que $r_2 = r_1 \exp(\frac{2ip\pi}{n+1})$. Ceci donne, pour p de 1 à n,

$$r_1 = \sqrt{\frac{c}{b}} \exp\left(-\frac{ip\pi}{n+1}\right), r_2 = \sqrt{\frac{c}{b}} \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right) \text{ et } \lambda = a + \sqrt{2bc} \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right).$$

Comme nous avons ici n valeurs propres 2 à 2 distinctes, la matrice est diagonalisable. Le vecteur propre associé à λ est

$$v = \left((\frac{c}{b})^{1/2} \sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right), ..., (\frac{c}{b})^{n/2} \sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right)\right)^\top.$$

En effet, les vecteurs trouvés à la première question sont proportionnels à v, pour $n = 3$.

Exercice IV

1. Nous avons

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{10+x}\,dx = \ln\left(\frac{11}{10}\right).$$

De plus,

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x}{10+x}\cdot x^n\,dx = \int_0^1 x^n dx - 10\int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx = \frac{1}{n+1} - 10\cdot I_n.$$

2. Nous avons $\epsilon_n = 10\epsilon_{n-1}$. Donc $\epsilon_{10} = \epsilon_0 \cdot 10^{10} = 5\cdot 10^5$. Par contre, $\epsilon_{10} = \epsilon_{20}\cdot 10^{-10}$. Il est donc préférable de calculer d'abord une approximation numérique de I_{20} car l'erreur numérique ne se propage pas quand n décroit, alors qu'elle augmente de manière exponentielle quand n croit.

3. Nous avons

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{10+x}\,dx,$$

donc cette quantité est positive et, de plus,

$$I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10}\left(\int_0^1 x^n\,dx - \int_0^1 x^{n+1}\,dx\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{10(n+1)(n+2)}.$$

En utilisant la relation de récurrence donnée précédemment, nous en déduisons que

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{10}\cdot I_{n+1} - I_{n+1} \geq 0,$$

ce qui implique que

$$I_n \geq I_{n+1} \geq \frac{1}{11(n+1)}.$$

Par ailleurs,

$$I_n \leq I_{n+1} + \frac{1}{10(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - 10\cdot I_n + \frac{1}{10(n+1)(n+2)},$$

ce qui donne l'autre inégalité

$$I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\frac{d^n}{dX^n}$ la dérivation n-ième par rapport à la variable X, $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées.

1 Problème d'analyse

Le but du problème d'analyse est d'étudier quelques propriétés des polynômes dit de Legendre.

1.1 Préliminaires

1. Calculer les dérivées des fonctions polynômes $X^2 - 1$, $(X^2-1)^2$ et $(X^2-1)^3$.
   On a les dérivées suivantes : $2X$, $4X(X^2-1)$ et $6X(X^2-1)^2$.

On définit les polynômes $P_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $P_0(X) = 1$.

2. Donner une expression simple des polynômes P_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
   Avec les questions précédentes comme base, on a les dérivées suivantes :

$$
\begin{aligned}
P_1(X) &= X, \quad P_2(X) = \frac{1}{8}\frac{d}{dX}(4X(X^2-1)) = \frac{1}{2}(3X^2-1), \\
P_3(X) &= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dX^2}(6X(X^2-1)^2)) = \frac{1}{48}\frac{d}{dX}(6(X^2-1)^2 + 24X^2(X^2-1)) \\
&= \frac{1}{2}X(X^2-1) + X(X^2-1)) + X^3 = \frac{1}{2}(5X^3 - 3X).
\end{aligned}
$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le degré de P_n et donner son coefficient dominant.
   P_n est la dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$, donc il est de degré n. Son coefficient dominant est donné par

$$\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1) = \frac{(2n)!}{2^n n! n!}.$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi la famille $(P_n)_{n\leq N}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_N[X]$.

   La famille $(P_n)_{n\leq N}$ est une famille échelonnée en degrés de $\mathbb{R}_N[X]$ donc c'est nécessairement une base.

5. Montrer que
$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dX^n}(X(X^2-1)^n)$$

   Si on dérive une fois $\dfrac{(X^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ on obtient
$$\frac{(n+1)2X(X^2-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{X(X^2-1)^n}{2^n n!}$$

   d'où le résultat demandé.

1.2 Autre expression

6. Soit f une fonction réelle. Déduire de l'égalité
$$f(X) = \frac{f(X)+f(-X)}{2} + \frac{f(X)-f(-X)}{2}$$
   que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Trivial
7. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire).
   Trivial
8. Conclure sur la parité des fonctions polynômes P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   P_n est la dérivée n-ième d'un polynôme pair. Il est donc pair si n est pair et impair si n est impair.

Soit k un entier entre 0 et n. On note $a_k^{(n)}$ le coefficient d'ordre k du polynôme P_n tel qu'on ait la formule suivante :
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} X^k.$$

9. En développant $(X^2-1)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que les coefficients $a_k^{(n)}$ sont donnés par la formule
$$\begin{cases} a_{n-2k}^{(n)} = \dfrac{(-1)^k}{2^n} C_n^k C_{2n-2k}^n = \dfrac{(-1)^k}{2^n}\dfrac{n!}{(n-k)!k!}\dfrac{(2n-2k)!}{n!(n-2k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n/2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
   où C_n^k désigne le nombre de combinaison de k éléments pris parmi n.
   On écrit
$$(X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{2n-2k}(-1)^k.$$

Puis on dérive n fois, ce qui donne (modulo le facteur $2^n n!$) un coefficient $a_{n-2k}^{(n)}$ égal à

$$(-1)^k C_n^k (2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(2n-2k-n+1) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}$$

d'où le résultat demandé. Les autres coefficients étant évidemment nuls.

On obtient donc la forme équivalente

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^n X^{n-2k},$$

où E est la fonction partie entière.

10. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X).$$

Avec le calcul des coefficients dominants de la question 3, on trouve un coefficient d'ordre $n+1$ égal à

$$\frac{(n+1)(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!} - (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n! n!} = \frac{(2n)!}{2^{n+1}n!(n+1)!}((2n+2)(2n+1) - 2(2n+1)(n+1)) = 0.$$

Ce n'est donc pas le coefficient dominant. Par la question 9, le coefficient d'ordre n est nul. il faut donc utiliser le coefficient d'ordre $n-1$. Celui du polynôme $(n+1)P_{n+1}(X)$ est donné par

$$(n+1)a_{n+1-2\times 1}^{(n+1)} = (n+1)\frac{(-1)^1}{2^{n+1}}\frac{(n+1)!}{n!1!}\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = -\frac{(n+1)}{2^{n+1}}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!},$$

celui de $(2n+1)XP_n(X)$ est donné par

$$(2n+1)a_{n-2\times 1}^{(n)} = -\frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}.$$

La différence est donc

$$-\frac{(n+1)}{2^{n+1}n!}\frac{(2n)!}{(n-1)!} + \frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}\frac{-n(n+1)(2n-1)+n(2n+1)(n-1)}{(n-1)}$$

$$= -\frac{(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}\frac{2n^2}{(n-1)} = -n\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!(n-1)!}.$$

11. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Bonnet défini par

$$B_{n+1}(X) := (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X).$$

Le calcul précédent fait apparaître l'opposé du coefficient dominant de nP_{n-1}. Donc B_{n+1} est au plus de degré $n-2$. Avec la parité des puissance de X, on peut améliorer cette estimation à $\leq n-3$. En fait, on peut même montrer que B_{n+1} est le polynôme identiquement nul. C'est la relation de Bonnet.

12. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme

$$\frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X).$$

Un calcul exactement identique à la question 10 montrer que le coefficient d'ordre n est nul. Le coefficient dominant est donc certainement celui d'ordre $n-1$, mais le polynôme dérivé de P_{n+1} ne possède que des puissances de X qui suivent la parité de n et idem pour P_n. Donc le coefficient d'ordre $n-1$ est aussi nul. Reste donc celui d'ordre $n-2$. Celui du polynôme dérivé de $P_{n+1}(X)$ est donné par

$$\frac{-1}{2^{n+1}n!}\frac{(2n)!}{(n-2)!},$$

celui de $(2n+1)P_n(X)$ est donné par

$$-\frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}.$$

La différence est donc

$$-\frac{1}{2^{n+1}n!}\frac{(2n)!}{(n-2)!} + \frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}(-n(2n-1)+n(2n+1))$$

$$= -\frac{2n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!} = (n-1)\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!(n-1)!}.$$

13. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Rodrigues

$$R_n(X) := \frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X) - \frac{d}{dX}(P_{n-1}(X)).$$

Le calcul précédent fait apparaître le coefficient dominant du polynôme dérivé de P_{n-1}. Donc R_n est au plus de degré $n-3$. Avec la parité des puissance de X, on peut améliorer cette estimation à $\leq n-4$. En fait, on peut même montrer que R_n est le polynôme identiquement nul. C'est la relation de Rodrigues.

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

On remarque que $(X^2-1) = (X-1)(X+1)$ et on utilise la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k. \end{aligned}$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.
Avec la forme précedente, c'est évident. Par parité/imparité, $P_n(-1) = (-1)^n$.

1.3 Orthogonalité

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

16. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
   Forme bilinéaire symétrique définie positive.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on dit que P est orthogonal à $\mathbb{R}_N[X]$ lorsque $\langle P, Q \rangle = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_N[X]$. On note $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle$ le carré de la norme de P_n qu'on supposera égal à $\dfrac{2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On supposera également que le polynôme de Bonnet B_{n+1} et le polynôme de Rodrigues R_n sont identiquement nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. Montrer l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:
$$\begin{cases} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \end{cases} \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
   Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors par la question 11 et $B_{n+2} = 0$ on a
$$\begin{aligned} \langle P_{n+2}, Q \rangle &= \left\langle \frac{2n+3}{n+2} X P_{n+1}(X) - \frac{n+1}{n+2} P_n(X), Q \right\rangle \\ &= \frac{2n+3}{n+2} \langle P_{n+1}(X), XQ \rangle - \frac{n+1}{n+2} \langle P_n(X), Q \rangle = 0. \end{aligned}$$
18. Montrer que $\langle P_{n+2}, P_{n+1} \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   $P_{n+2}P_{n+1}$ est un polynôme constitué uniquement de termes impaires. Son intégrale sur $[-1, 1]$ est donc nulle par imparité.
19. En déduire l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:
$$\begin{cases} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \\ \langle P_{n+2}, P_n \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n+1}[X].$$
   Avec 17 et 18 on obtient 19.
20. En déduire que P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Par récurrence. P_1 est bien orthogonal aux constantes. P_2 est orthogonal à P_1 car P_2P_1 n'a que des termes impaires, donc son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. Et l'intégrale de P_2 sur $[-1, 1]$ vaut $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}(1+1) = 0$. Supposons maintenant par hypothèse de récurrence que P_{m+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_m[X]$ pour tout $m \leq n$. Par la question 13 et la question 15
$$\begin{aligned} (2n+1)\langle P_{n+2}, P_n \rangle &= \langle P_{n+2}, P'_{n+1} - P'_{n-1} \rangle = \langle P_{n+2}, P'_{n+1} \rangle \\ &= [P_{n+2}P_{n+1}]_{-1}^{1} - \langle P'_{n+2}, P_{n+1} \rangle \\ &= 1 - (-1)^{2n+3} - \langle (2n+3)P_{n+1} - P'_n, P_{n+1} \rangle \\ &= 2 - (2n+3)\langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle = 0. \end{aligned}$$
   Par 19 on peut conclure. Les $N+1$ polynômes de $(P_n)_{n \leq N}$ forment donc une famille orthogonale, donc une base de $\mathbb{R}_N[X]$ espace de dimension finie $N+1$.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on étudie un endomorphisme u sur $\mathbb{R}[X]$ qui laisse stable les sous-espaces $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire un endormorphisme tel que

$$\text{Pour tout } Q \in \mathbb{R}_N[X],\ u(Q) \in \mathbb{R}_N[X].$$

Les compositions successives de u notées u^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ ont alors la même propriété (avec la convention $u^0 = Id$ où Id est l'endomorphisme identité). Pour tout $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on s'interroge sur le sens de la limite de $u^m(P)$ lorsque $m \to +\infty$. On note Ker et Im respectivement le noyaux et l'image d'un endomorphisme.

2.1 Sous-espaces stables

Soit $\gamma \in]0,1[$, on pose u_γ l'endomorphisme suivant

$$\begin{array}{rcl} u_\gamma : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \gamma P\left(\dfrac{(4\gamma-1)X}{2\gamma+1}\right) + (1-\gamma)P\left(\dfrac{(4\gamma-1)X+1}{2\gamma+1}\right). \end{array}$$

1. Vérifier que u_γ est un endomorphisme qui laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
   Le degré n'est pas augmenté par u_γ.

Puisque u_γ laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut définir $u_{\gamma,N}$ comme la restriction du morphisme u_γ au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ par la formule

$$\begin{array}{rcl} u_{\gamma,N} : \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \mapsto & u_\gamma(P). \end{array}$$

2. Montrer que $u_{\gamma,N}$ est bien un endomorphisme.
   $u_{\gamma,N}(\lambda P + Q) = \lambda u_\gamma(P) + u_\gamma(Q)$.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, Ker $u_{\gamma,N} \subset$ Ker $u_{\gamma,N}^{m+1} \subset$ Ker $u_{\gamma,N}^{m+2}$.
   Soit $x \in$ Ker $u_{\gamma,N}$ alors $u_{\gamma,N}^{m+1}(x) = u_{\gamma,N}^m(u_{\gamma,N}(x)) = u_{\gamma,N}^m(0) = 0$. D'où la première inclusion. Soit $x \in$ Ker $u_{\gamma,N}^{m+1}$ alors $u_{\gamma,N}^{m+2}(x) = u_{\gamma,N}(u_{\gamma,N}^{m+1}(x)) = u_{\gamma,N}(0) = 0$. D'où la deuxième inclusion.
4. Que dire de la suite réelle $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $d_m = \dim(\text{Ker } u_{\gamma,N}^m)$?
   La suite est évidemment croissante majorée par $N+1$ donc convergente.
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, Im $u_{\gamma,N}^{m+2} \subset$ Im $u_{\gamma,N}^{m+1} \subset$ Im $u_{\gamma,N}$.
   Soit $y \in$ Im $u_{\gamma,N}^{m+2}$ alors il existe $x \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $u_{\gamma,N}^{m+2}(x) = y = u_{\gamma,N}^{m+1}(u_{\gamma,N}(x))$. Donc $y \in$ Im $u_{\gamma,N}^{m+1}$. D'où la première inclusion. Soit $y \in$ Im $u_{\gamma,N}^{m+1}$ alors il existe $x \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $u_{\gamma,N}^{m+1}(x) = y = u_{\gamma,N}(u_{\gamma,N}^m(x))$. Donc $y \in$ Im $u_{\gamma,N}$. D'où la deuxième inclusion.
6. Que dire de la suite réelle $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $i_m = \dim(\text{Im } u_{\gamma,N}^m)$?
   La suite est évidemment décroissante minorée donc convergente.

2.2 Étude de $u_{\frac{1}{3},2}$

Dans cette sous-partie, on pose $N = 2$ et $\gamma = 1/3$. On va montrer que $u_{\frac{1}{3},2}^m(P)$ converge vers une constante lorsque $m \to +\infty$ et expliciter cette constante en fonction de P. Par souci d'allégement des notations, on notera v l'endomorphisme $u_{\frac{1}{3},2}$.

7. Donner la matrice de v dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On notera cette matrice M.
   $v(1) = \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1$, $v(X) = \frac{1}{3}\frac{4/3-1}{2/3+1}X + \frac{2}{3}\frac{(4/3-1)X+1}{2/3+1} = \frac{X+2}{5}$ et
$$v(X^2) = \frac{1}{3}\frac{X^2}{25} + \frac{2}{3}\frac{(X+3)^2}{25} = \frac{3X^2+12X+18}{75} = \frac{X^2+4X+6}{25}.$$
   D'où la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 6/25 \\ 0 & 1/5 & 4/25 \\ 0 & 0 & 1/25 \end{pmatrix}.$$
8. En déduire Ker v et Im v.
   On voit que la matrice est de rang 3 donc Im $v = \mathbb{R}_2[X]$ et Ker $v = \{0\}$.
9. Montrer que les suites $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
   M est triangulaire supérieure donc M^m aussi. Les coefficients diagonaux sont donnés explicitement par 1, 5^{-m} et 5^{-2m} donc noyaux et images sont inchangés. Les dimensions sont donc constantes.
10. Montrer que la famille $\mathcal{B}_2' = \{1, 1-2X, 1-6X+6X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   La famille est échelonnée en degrés et possède 3 éléments donc c'est bien une base.
11. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2'$ à $\mathcal{B}_2$.
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
12. Calculer l'inverse de la matrice Q.
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$
13. En déduire la matrice D de v dans la base $\mathcal{B}_2'$.
$$D = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/25 \end{pmatrix}.$$
14. Que représentent les vecteurs de $\mathcal{B}_2'$ vis-à-vis de l'endomorphisme v ?
   Ce sont des vecteurs propres.
15. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit a_P, b_P et c_P les coefficients réels tels que
$$P(X) = a_P X^2 + b_P X + c_P.$$
   Ce sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer les coordonnées a_P', b_P' et c_P' de P dans la base $\mathcal{B}_2'$.
   Le résultat est donné par la matrice Q^{-1} mais on peut aussi montrer que
$$a_P X^2 + b_P X + c_P = \frac{a_P}{6}(1-6X+6X^2) + \frac{b_P + a_P}{-2}(1-2X) + \frac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}.$$

16. Calculer M^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
M^m &= \begin{pmatrix} 1 & 1/5^m & 1/25^m \\ 0 & -2/5^m & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^m & 0 \\ 0 & 0 & 1/25^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= QD^mQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^m & 0 \\ 0 & 0 & 1/25^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1/5^m & 1/25^m \\ 0 & -2/5^m & -6/25^m \\ 0 & 0 & 6/25^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 5^{-m}/2 & -5^{-m}/2 + 25^{-m}/6 + 1/3 \\ 0 & 5^{-m} & 5^{-m} - 25^{-m} \\ 0 & 0 & 25^{-m} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On pose e_z la forme linéaire d'évaluation du polynôme. C'est une forme linéaire qui a un polynôme P fait correspondre la valeur de la fonction polynôme associée au point $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e_z : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(z). \end{aligned}$$

17. Montrer que e_z n'est pas injective et qu'elle est surjective.

Pas injective car $e_z(z) = e_z(X)$ et surjective car $e_z(z) = z$.

18. Expliciter la restriction de e_z sur $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de z, a_P, b_P et c_P.

$$e_z(P) = a_P z^2 + b_P z + c_P = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_P \\ b_P \\ a_P \end{pmatrix}.$$

19. Montrer que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$.

On écrit

$$e_z(v^m(P)) = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 \end{pmatrix} M^m \begin{pmatrix} c_P \\ b_P \\ a_P \end{pmatrix}$$

et on passe à la limite. Ou encore par linéarité avec $e_z(v^m(1)) = e_z(1) = 1$, $e_z(v^m(1-2X)) = 5^{-m}e_z(1-2X) = 5^{-m}(1-2z)$ et $e_z(v^m(1-6X+6X^2)) = 25^{-m}e_z(1-6X+6X^2) = 25^{-m}(1-6z+6z^2)$ d'où

$$e_z(v^m(P)) = 25^{-m}(1-6z+6z^2)a'_P + 5^{-m}(1-2z)b'_P + c'_P \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} c'_P = \frac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$$

20. En déduire que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout P, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \left[a_P\frac{X^3}{3} + b_P\frac{X^2}{2} + c_P X\right]_0^1 = \frac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. Calculer I_1, I_2 et I_3

On remarque que : $I_n = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = 1 - J_n$. Puis $J_1 = Ln\,2$ et $J_2 = \pi/4$, donc $I_1 = 1 - Ln\,2$, $I_2 = 1 - \pi/4$. Pour J_3, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples de la façon suivante : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{1+x}) + \frac{1}{3}(\frac{-x+2}{x^2-x+1})$

D'où $J_3 = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx$, puis on décompose la deuxième expression de la façon suivante : $\frac{-x+2}{x^2-x+1} = -\frac{1}{2}(\frac{2x-1}{x^2-x+1}) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{(x-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}\right)$ pour obtenir :

$$J_3 = \frac{1}{3}\left[Ln\,(1+x) - \frac{1}{2}Ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} Arctg\,\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\left[Ln\,2 + \sqrt{3}(Arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} - Arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}))\right] = \frac{1}{3}\left[Ln\,2 + 2\sqrt{3}(Arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}})\right]$$

Et $I_3 = 1 - J_3$

2. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx < 0$, donc la suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, alors :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^n}{1+x^n} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \le (1-\varepsilon) \times \frac{(1-\varepsilon)^n}{1+(1-\varepsilon)^n} + \varepsilon \le (1-\varepsilon)^{n+1} + \varepsilon$$

Pour $0 < \varepsilon^{'} < \varepsilon$, $(1-\varepsilon)^{n+1} + \varepsilon < \varepsilon^{'}$ pour $n > \frac{Ln(\varepsilon^{'} - \varepsilon)}{Ln(1-\varepsilon)}$ (cette convergence n'est pas uniforme).

3. Calculer $J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; On pose $t = \sqrt[6]{x}$, d'où $t^3 = \sqrt{x}, t^2 = \sqrt[3]{x}, 6t^5\, dt = dx$

Et $J = 6\int_0^1 \frac{t^8}{1+t^2} dt = 6\int_0^1 (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2)} dt = 6(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}) = -\frac{152}{35} + \frac{3\pi}{2}$

Exercice n° 2

1. Soit $K: R \to R$ définie par : $K(t) = \frac{3}{4\sqrt{5}}(1 - \frac{t^2}{5}) I_{[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]}(t)$ où I désigne la fonction indicatrice (ou caractéristique). Calculer $\int_R K(t)\, dt$ et $\int_R t^2 K(t)\, dt$

On vérifie facilement que $\int_R K(t)\, dt = 1$ et de même $\int_R t^2 K(t)\, dt = 1$

2. Soient λ un paramètre réel et *p*, f deux entiers naturels non nuls. On pose, pour $t \in [-p, f]$:

$\theta_t = \frac{K(t/\lambda)}{\sum_{t=-p}^{f} K(t/\lambda)}$. Pour $\lambda = p/\sqrt{5}$ et *f*=*p*, calculer θ_t en fonction de *t* et *p*.

On a : $K(t/\lambda)=\frac{3}{4\sqrt{5}}(1-\frac{t^2}{p^2})$, puis $\theta_t=\frac{K(t/\lambda)}{\sum_{t=-p}^{p}K(t/\lambda)}=\frac{3p}{4p^2-1}(1-\frac{t^2}{p^2})$ en utilisant le fait que

$\sum_{-p}^{p}t^2=2\sum_{1}^{p}t^2=\frac{1}{3}p(p+1)(2p+1)$

3. On suppose seulement que $\lambda=p/\sqrt{5}$, calculer θ_t en fonction de t , f et p.
Pour cette question la démarche est analogue à celle de la question précédente, pour obtenir :

$$\theta_t=\frac{K(t/\lambda)}{\sum_{t=-p}^{f}K(t/\lambda)}=\left(\frac{1-\frac{t^2}{p^2}}{p+f+1-\frac{S}{p^2}}\right),\text{ où } S=\frac{1}{6}\times\left[p(p+1)(2p+1)-f(f+1)(2f+1)\right]$$

4. Comment peut-on interpréter K ?
K est une fonction positive, paire et qui vérifie $\int_R K(t)\,dt=1$, elle peut donc être utilisée comme la densité d'une loi de probabilité.

Exercice n° 3

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$$f\circ f=\lambda f\text{, où } \lambda \text{ est un réel non nul.}$$

On note $L_\lambda=\{f\,|\,f\circ f=\lambda f\}$.

1. Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h, on a $p\circ p=p$ et $h=\lambda Id$. On obtient $f(x)=p\circ h(x)=\lambda p(x)$. On pose donc $p(x)=\frac{1}{\lambda}f(x)$ et $h(x)=\lambda x$ avec $\lambda\neq 0$. On vérifie que $f\circ f=\lambda f$. Donc pour toute $f\in L_\lambda$ on pose $f=p\circ h=h\circ p$

2. Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E. Soit $y\in \operatorname{Im} f\cap Ker\, f$. On obtient : $f(y)=0$ et $\exists x\in E\,/\,y=f(x)$, d'où $f(y)=f^2(x)=0=\lambda f(x)$ et $y=f(x)=0$

3. Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$
$(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f+g)\circ(f+g) = \lambda(f+g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f+g) \in L_\lambda$.
Réciproquement, on a $f \circ g + g \circ f = 0$ (1)
On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2).
La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

4. Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2. $(g\circ f)\circ(g\circ f) = g\circ(f\circ g)\circ f = g\circ(g\circ f)\circ f = (g\circ g)\circ(f\circ f) = \lambda_1\lambda_2(g\circ f)$, donc $\mu = \lambda_1\lambda_2$.

5. Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à une famille de L_λ et vérifiant $(u - a\times Id)\circ(u - b\times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.
Montrer que $v = u - a\times Id$ et $w = u - b\times Id$ appartiennent à des familles de L_λ.
Ecrire u sous la forme $\alpha v + \beta w$ et en déduire u^n.

$v\circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aI)\circ(u - aI) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 I = \lambda(u - aI)$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abI = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abI$. On trouve donc $\lambda = b - a$.
De même $w\circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aI) + \beta(u - bI)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v\circ w = w\circ v = 0$.
D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

6. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A-aI)(A-bI)=0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.

$\det(A-\lambda I)=(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$A^2-A-2I=(A+I)(A-2I)$$

On obtient, par exemple, $a=-1$ et $b=2$.

$$A^n=\frac{2^n}{3}(A+I)-\frac{(-1)^n}{3}(A-2I)=\frac{(2^n-(-1)^n)}{3}A+\frac{(2^n+2(-1)^n)}{3}I$$

Exercice n° 4

Soit $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A

On a : $Det(A-\lambda I)=(2-\lambda)^3$ et 2 est une valeur propre de multiplicité 3.

2. Calculer $(A-2I)^3$. En déduire l'inverse de A (si son inverse existe)
On peut calculer directement l'expression ou d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $(A-2I)^3=0$. Comme le déterminant de cette matrice est non nulle, la matrice est inversible puis en développant d'après la formule du binôme, on obtient, à partir de $(A-2I)^3=0$,

$$A^{-1}=\frac{1}{8}(A^2-6A+12I)\text{ et }A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&1&5\\2&-3&9\end{pmatrix}$$

3. Trouver une base dans laquelle la matrice A est semblable à la matrice $M=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Si (e_1, e_2, e_3) est un est une telle base, elle doit vérifier : $Ae_1 = 2e_1, Ae_2 = e_1 + 2e_2, Ae_3 = e_2 + 2e_3$.

Le premier vecteur est onc un vecteur propre associé à la valeur propre 2, il faut donc résoudre le système correspondant :

$\begin{cases} 3x + z = 2x \\ -x + 3y - 2z = 2y \\ -x + y = 2z \end{cases}$ et on obtient : x=-z, y=-x. On peut choisir $e_1 = (-1,1,1)$. On peut remarquer que le sous espace propre associé est de dimension 1 et que la matrice n'est pas diagonalisable.

On cherche ensuite les deux autres vecteurs en résolvant les systèmes associés pour obtenir :

$$e_2 = (0,-1,-1) \text{ et } e_3 = (0,-1,0)$$

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, à savoir $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme les deux matrices sont semblables, on a la relation : $A = P\,M\,P^{-1}$ et $A^n = P\,M^n\,P^{-1}$.

On calcule ensuite la matrice inverse de P, à savoir $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Il reste à calculer M^n .

On a : $M = 2I + J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

Donc $M^n = (2I + J)^n = 2^n\ I + n2^{n-1}\ J + n(n-1)\,2^{n-1}\ J^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Puis en effectuant les produits, on obtient :

$$A^n == 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2+n & n(n-1) & n(2-n) \\ -n & n^2-2n-2 & n(n-3) \\ -n & n(2-n) & (n-1)(n-2) \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x)$

   Pour $x \neq 0$, $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{Lim} \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-\frac{x^2}{2n^2})} = \underset{n\to+\infty}{Lim} \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2n^2} = 0$

   Et $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(0) = +\infty$

2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$, déterminer $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_R g(x)f_n(x)\,dx$

   L'intégrale $\int_R g(x)f_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)f_n(x)\,dx$ est bien définie. En posant $x = t/n$, on obtient

   $$\int_R g(x)f_n(x)\,dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\,dt = \int_R h_n(t)\,dt$$

   avec $h_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\, I_{[na,nb]}(t)$

   Pour n assez grand tel que $a/n, b/n \leq 1$ on a pour tout $t \in [na,nb]$, $\left|t^2/2n^4\right| \leq 1/2 < 1$,

   $|h_n(t)| = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-t^2/2n^4)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \varphi(t)$. Cette inégalité reste encore valable pour $t \notin [na,nb]$.

   La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur R, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et conclure $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_R g(x)f_n(x)\,dx = g(0)$, sachant que

   $\int_R e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$

Exercice n° 6

Soit la suite (u_n) de nombre réels, décroissante et positive.

1. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$
On remarque que : $v_n \geq u_{2^n} + u_{2^n+1} + ... + u_{2^{n+1}-1}$ (car la suite (u_n) est décroissante et dans le deuxième terme de cette inégalité, il y a 2^n termes), de sorte que : $\sum_0^n v_k \geq \sum_0^{2^{n+1}-1} u_k$

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

De même, $u_{2^n} + u_{2^n+1} + ... + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$, d'où $\sum_0^{2^{n+1}-1} u_k \geq \frac{1}{2} \sum_1^{n+1} v_k$, par conséquent si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge aussi.

Les deux séries sont donc de même nature.

2. On suppose de plus que la suite (u_n) converge vers zéro. On pose : $w_n = n^2 u_{n^2}$.

A-t-on un lien entre la convergence des deux séries de termes généraux (u_n) et (w_n) ?

Si la série de terme général w_n converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2$, $0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{u_n}{n^2}$. On obtient :

$\sum_{n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq w_n \frac{(n+1)^2}{n^2}$, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ est majorée donc elle converge.

La réciproque est fausse. Pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, cette série est convergente, donc $w_n = \frac{1}{n}$, et la série est divergente.

Exercice n° 7

Soit $f : U \to R$ de classe C^1, où U est une partie de R^n.
On dit qu'une direction $\delta \in R^n$ est admissible pour f en $x \in U$ s'il existe $\overline{\alpha} > 0$ tel que : $x + \alpha\,\delta \in U$ pour tout α vérifiant $0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$.

1. Si x^* réalise un minimum relatif pour f sur U et δ une direction admissible en x^*, que peut-on dire du produit scalaire $\left\langle df(x^*), \delta \right\rangle$, où $df(x^*)$ désigne la différentielle de f en x^* ?
Pour tout α vérifiant $0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$, $x^* + \alpha\,\delta \in U$.
Soit $g(\alpha) = f(x^* + \alpha\,\delta)$ la fonction définie sur $\left[0, \overline{\alpha}\right]$ et à valeurs réelles. Cette fonction admet un minimum relatif en $\alpha = 0$ (car x^* réalise un minimum relatif pour *f*). Comme *g* est aussi de classe C^1 : $g(\alpha) - g(0) = g'(0)\alpha + o(\alpha)$.
Si $g'(0) < 0$ alors $g(\alpha) - g(0) < 0$, ce qui est contraire au minimum relatif. Donc
$g'(0) = \left\langle df(x^*), \delta \right\rangle \geq 0$.

2. Si $U = R^n$, que peut-on dire de $df(x^*)$?
Dans ce cas, toutes les directions sont admissibles et x^* est un minimum absolu, donc $df(x^*) = 0$.

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à m. On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, on note $\mathcal{C}([a,b])$ l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a,b]$.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier des méthodes classiques d'intégration numérique afin de proposer des approximations de la valeur de certaines intégrales.

On définit I l'opérateur d'intégration sur $\mathcal{C}([a,b])$ de la manière suivante :

$$I : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

1.1 Préliminaires

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on a $I(f) \leq (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

   $I(f) \leq |I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|) = (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b])$ positive, on a $I(f) \geq (b-a) \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

   $I(f) = I(|f|) \geq I(\inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|) = (b-a) \inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

3. Monter que I est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a,b]), \qquad \lambda I(f) + I(g) = I(\lambda f + g).$$

   Par linéarité de l'intégrale on a bien $\lambda I(f) + I(g) = \lambda \displaystyle\int f + \int g = \int \lambda f + g = I(\lambda f + g)$.

4. Dans le cas où $0 < a < b < 1$, calculer $I(\sqrt{1-x^2})$.

Un changement de variable $x = \cos\theta$ donne $I(\sqrt{1-x^2}) = -\displaystyle\int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} |\sin(\theta)|\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$. Le sinus étant positif sur l'intervalle d'intégration, on a $I(\sqrt{1-x^2}) = \displaystyle\int_{\arccos(b)}^{\arccos(a)} \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\arccos(b)}^{\arccos(a)} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4}\right]_{\arccos(b)}^{\arccos(a)}$. Inutile de développer beaucoup plus. On peut aussi utiliser $\sin(2\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

5. En déduire la valeur de $4\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

On a $\arccos(a) = \pi/2$ et $\arccos(b) = 0$ d'où $4\left[\dfrac{2\theta - \sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi - \sin(\pi) - 0 + \sin(0) = \pi$.

1.2 Formules de quadrature

On se fixe un entier $n \geq 1$. Soit $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de n points de l'intervalle $[a,b]$ tels que $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Soit également $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille de n réels positifs. On note $Q(f)$ le réel tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

On parle alors d'une formule de quadrature "à n points".

6. Monter que Q est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a,b]), \qquad \lambda Q(f) + Q(g) = Q(\lambda f + g).$$

$$\lambda Q(f) + Q(g) = \lambda \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i(\lambda f(x_i) + g(x_i)) = Q(\lambda f + g).$$

7. Montrer que $|Q(f)| \leq \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) \sum\limits_{i=1}^n w_i$.

$|Q(f)| \leq \sum\limits_{i=1}^n |w_i f(x_i)| \leq \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) \sum\limits_{i=1}^n w_i$ car les w_i sont positifs.

8. Montrer que $|Q(f)| \leq n\left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)\left(\sup\limits_{i=1,\dots,n} w_i\right)$.

$|Q(f)| \leq \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) \sum\limits_{i=1}^n w_i \leq \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)\left(\sup\limits_{i=1,\dots,n} w_i\right) \sum\limits_{i=1}^n 1.$

9. Montrer que pour toute fonction positive croissante

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=1,\dots,n-1} \frac{w_i}{x_{i+1} - x_i}\right) I(f).$$

Tout est positif donc on se passe des valeurs absolues

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right)(x_{i+1}-x_i)f(x_i) \\
\text{on majore par le sup} &\leq \sup_{i=1,\ldots,n-1}\left(\frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i) \\
\text{on intègre une constante} &\leq \sup_{i=1,\ldots,n-1}\left(\frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\mathrm{d}x \\
f \text{ est croissante} &\leq \sup_{i=1,\ldots,n-1}\left(\frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \\
\text{on rassemble} &\leq \sup_{i=1,\ldots,n-1}\left(\frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\int_{x_1}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \\
f \text{ est positive} &\leq \sup_{i=1,\ldots,n-1}\left(\frac{w_i}{x_{i+1}-x_i}\right) I(f)
\end{aligned}
$$

10. Montrer que pour toute fonction positive décroissante

$$\sum_{i=2}^{n} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=2,\ldots,n} \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}}\right) I(f).$$

Tout est positif donc on se passe des valeurs absolues

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} w_i f(x_i) &\leq \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{w_i}{x_i-x_{i-1}}\right)(x_i-x_{i-1})f(x_i) \\
\text{on majore par le sup} &\leq \sup_{i=2,\ldots,n}\left(\frac{w_i}{x_i-x_{i-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i-1})f(x_i) \\
\text{on intègre une constante} &\leq \sup_{i=2,\ldots,n}\left(\frac{w_i}{x_i-x_{i-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x \\
f \text{ est décroissante} &\leq \sup_{i=2,\ldots,n}\left(\frac{w_i}{x_i-x_{i-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \\
\text{on rassemble} &\leq \sup_{i=2,\ldots,n}\left(\frac{w_i}{x_i-x_{i-1}}\right)\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x)\mathrm{d}x \\
f \text{ est positive} &\leq \sup_{i=2,\ldots,n}\left(\frac{w_i}{x_i-x_{i-1}}\right) I(f)
\end{aligned}
$$

1.3 Polynômes d'interpolation

Lorsque $Q(p) = I(p)$ pour tous les polynômes $p \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on dit que l'opérateur Q "intègre exactement les polynômes d'ordre m".

11. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_1) "à 1 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 (les constantes).
    $Q_1(f) = (b-a)f(a)$ par exemple, ou encore $Q_1(f) = (b-a)f(b)$.

On note $p_n[f]$ le polynôme d'interpolation de la fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$ tel que

$$p_n[f] : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x), \end{array}$$

où L_i est le i-ème polynôme de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{i=1,\dots,n}$, c'est-à-dire

$$L_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{j\neq i, j=1}^{n} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{j\neq i, j=1}^{n} (x_i - x_j)}$$

12. Montrer que $p_n[f](x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
    Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$ donc $p_n[f](x_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(x_j)L_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\delta_{i,j} = f(x_i)$.
13. Lorsque $w_i = I(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $I(p_n[f]) = Q(f)$.
    Par linéarité $I(p_n[f]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)I(L_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)w_i = Q(f)$.

On pose F la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t)(b-a) - \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

14. Montrer que F s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
    f est continue donc elle admet un minimum au point x_m et un maximum au point x_M d'où $F(x_m) = f(x_m)(b-a) - \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b (f(x_m) - f(x))\mathrm{d}x \leq 0$. De même $F(x_M) = f(x_M)(b-a) - \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b (f(x_M) - f(x))\mathrm{d}x \geq 0$. Donc F change de signe sur $[a, b]$ donc elle s'y annule.
15. En déduire que tout opérateur Q "à 1 point" qui intègre exactement les constantes vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq (b-a)^2 \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ dès que f est dérivable.
    On pose ξ_0 un point où F s'annule. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $|Q(f) - I(f)| = |(b-a)f(\xi) - I(f)| = |(b-a)f(\xi) - (b-a)f(\xi_0)| \leq (b-a)|\xi - \xi_0| \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq (b-a)^2 \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.
16. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_2) "à 2 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1 (les fonctions affines).

On pose $Q_2(f) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ alors $Q_2(1) = \frac{b-a}{2}(1+1) = I(1)$ et $Q_2(x) = \frac{b-a}{2}(a+b) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x\mathrm{d}x = I(x)$.

17. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_3) "à 3 points" avec $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ et $x_3 = b$ qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0, 1 et 2.
   On pose $Q_3(f) = \frac{b-a}{6}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)$ alors $Q_3(1) = \frac{b-a}{6}(1+4+1) = I(1)$, $Q_3(x) = \frac{b-a}{6}(a+2a+2b+b) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x\mathrm{d}x = I(x)$ et $Q_3(x^2) = \frac{b-a}{6}(a^2+(a+b)^2+b^2) = \frac{b-a}{3}(a^2+b^2+ab) = \frac{b^3-a^3}{3} = \int_a^b x^2\mathrm{d}x = I(x)$.

1.4 Estimation d'erreur

Dans cette partie on suppose que $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n$ et on définit :

Q_n^{gauche} l'opérateur "à n points à gauche" tel que $Q_n^{gauche}(f) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$, et

Q_n^{droite} l'opérateur "à n points à droite" tel que $Q_n^{droite}(f) = \sum_{i=2}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)$.

18. Donner les familles $(w_i^{gauche})_{i=1,\ldots,n}$ et $(w_i^{droite})_{i=1,\ldots,n}$ associées à ces deux opérateurs.
   $w_i^{gauche} = (x_{i+1} - x_i)$ pour $i < n$ et $w_n^{gauche} = 0$. $w_i^{droite} = (x_i - x_{i-1})$ pour $i > 1$ et $w_1^{droite} = 0$

19. Montrer que les deux opérateurs Q_n^{gauche} et Q_n^{droite} "à n points" vérifient

$$\max\left\{\left|Q_n^{gauche}(f) - I(f)\right|, \left|Q_n^{droite}(f) - I(f)\right|\right\} \leq \frac{(b-a)^2}{2}\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$

On ne le fait que pour un.

$$
\begin{aligned}
\left|Q_n^{gauche}(f) - I(f)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_i)-f(x))\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|(x-x_i)\mathrm{d}x \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)\mathrm{d}x \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) \leq \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\frac{(b-a)^2}{2}
\end{aligned}
$$

20. Trouver un entier $n \geq 2$ et un couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que l'opérateur $Q = \alpha Q_n^{gauche} + \beta Q_n^{droite}$
    a) soit un opérateur "à n points" (préciser les familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ associées),
    b) intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1
    c) vérifie $|Q(f)-I(f)| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2}\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

Il suffit de prendre $\alpha=\beta=1/2$. En effet Q reste un opérateur "à n points", tel que $|Q(f)-I(f)| = \frac{1}{2}\left|Q_n^{gauche}+Q_n^{droite}-2I(f)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|Q_n^{gauche}-I(f)\right| + \left|Q_n^{droite}-I(f)\right|\right)$ vérifie donc bien l'inégalité voulue. De plus $2Q(1) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}) = x_n - x_1 + x_n - x_1 = 2(b-a)$. Et $2Q(x) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)x_i + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1})x_i = \sum_{i=1}^{n-1}x_{i+1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2 + \sum_{i=2}^{n}x_i^2 - \sum_{i=2}^{n}x_ix_{i-1} = \sum_{i=2}^{n}x_ix_{i-1} - a^2 + b^2 - \sum_{i=2}^{n}x_ix_{i-1} = b^2-a^2$.

2 Problème d'algèbre

Le but du problème d'algèbre est d'étudier différentes méthodes d'approximation d'un nuage de point, il traite d'interpolation polynômiale, de moindres carrés et de régression linéaire.

Pour cela, on se fixe un entier $n \geq 1$ et deux familles $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ qui représentent les coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que les x_i sont tous différents, ce sont les abscisses des points du nuage. On ne suppose rien sur les y_i, ce sont les ordonnées des points du nuage.

2.1 Approximation polynômiale

On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{R}_m[X]$ approche k points du nuage lorsque $p(x_i) = y_i$ pour une famille d'au moins k indices i dans $\{1, \ldots, n\}$.

1. On cherche un polynôme qui approche 2 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui approche le nuage $(x_1, y_1; x_2, y_2)$.
   C'est la droite affine $x \mapsto \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(y_1 - y_2) + y_2$.
2. On cherche un polynôme qui approche 3 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui approche le nuage $(0, y_1; 1, y_2; 2, y_3)$.
   Il faut résoudre $c = y_1$, $a + b + c = y_2$ et $4a + 2b + c = y_3$. D'où $a = y_3/2 - y_2 + y_1/2$ et $b = 2y_2 - y_3/2 - 3y_1/2$ et $x \mapsto y_1 + (2y_2 - y_3/2 - 3y_1/2)x + (y_3/2 - y_2 + y_1/2)x^2$ est le polynôme recherché.
3. On cherche un polynôme qui approche n points du nuage sous la forme
   $$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}.$$
   Montrer que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire à n équations et n inconnues.
   Les équations s'écrivent $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_j^i - y_j = 0$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.
4. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \cdots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
   C'est simplement la réécriture sous forme matricielle.
5. Calculer le déterminant de cette matrice M.
   C'est un Vandermonde $\displaystyle\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$.
6. En déduire que le système admet une unique solution.
   Les x_i étant tous distincts, le déterminant est non nul donc la matrice est inversible, d'où l'unicité de la solution.

7. Soit un entier $j \in \{1, \ldots, n\}$. Donner la formule exacte du polynôme L_j qui approche un nuage de points d'abscisses $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et d'ordonnées $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ telles que $y_j = 1$ et $y_i = 0$ si $i \neq j$.
   C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange, il s'écrit $\prod_{i\neq j}(x - x_i)/\prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$.
8. En déduire une formule équivalente pour le polynôme P de la question 3. qui fait intervenir les L_j pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.
   Il est clair que $P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x)$.

2.2 Projection orthogonale

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([a, b])$ telle que

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \text{ pour toutes fonctions } f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

On pose f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que

$$\langle f - Q, f - Q\rangle = \inf_{P\in\mathbb{P}_{m-1}} \langle f - P, f - P\rangle$$

On parlera de la solution du problème de projection orthogonale.

9. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$.
   Linéaire, positivif et défini.
10. En déduire que $\sqrt{\langle f, f\rangle}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$ notée $\|f\|$.
    Cours.
11. Supposons que Q soit une solution du problème de projection orthogonale. On pose $\tilde{Q}$ un autre polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$. Montrer que
    $$\|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 \geq 0,$$
    pour tout $t \in \mathbb{R}$.
    $Q - t\tilde{Q}$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ donc $\|f - Q - t\tilde{Q}\|$ est plus grand que $\|f - Q\|$ qui réalise le minimum sur $\mathbb{R}_{m-1}[X]$.
12. En déduire que $\langle f - Q, \tilde{Q}\rangle = 0$.
    $0 \leq \|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 = -2t\langle f - Q, \tilde{Q}\rangle + t^2\|\tilde{Q}\|^2$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, cela impose que $\langle f - Q, \tilde{Q}\rangle = 0$.
13. Conclure sur l'unicité du polynôme solution du problème de projection orthogonale.
    Si $\hat{Q}$ est une autre solution alors en appliquant le résultat précédent à $\tilde{Q} = \hat{Q} - Q$, on a $\|f - \hat{Q}\|^2 = \|f - Q - (\hat{Q} - Q)\|^2 = \|f - Q\|^2 + \|\hat{Q} - Q\|^2 = \|f - Q\|^2$ car ils réalisent tous les deux le minimum. Donc $\|\hat{Q} - Q\| = 0$.
14. Montrer que $\langle f, X^j\rangle = \langle Q, X^j\rangle$ pour tous les monômes X^j pour $j \leq m - 1$.
    On a $\langle f - Q, X^j\rangle = 0$ en appliquant à $\tilde{Q} = X^j$.
15. Lorsque $n = m$, et en notant $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$, montrer que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.
    On a $\int_a^b f(x)x^j\mathrm{d}x = \langle f, X^j\rangle = \langle Q, X^j\rangle = \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} a_iX^iX^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i + j + 1}$.

16. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1/j & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/i & \dots & 1/(i+j-1) & \cdots & 1/(i+n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1/n & \cdots & 1/(n+j-1) & \cdots & 1/(n+n-1) \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $M_{i,j} = 1/(i+j-1)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
Il faut juste faire attention aux indices.

2.3 Moindres carrés

Lorsqu'on ne cherche plus à approcher ni exactement ni orthogonalement le nuage, on peut chercher à minimiser l'erreur quadratique entre le polynôme et les points. On parle d'approximation aux moindres carrés. Elle est définie ainsi : trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - y_i)^2 = \inf_{P \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2.$$

On note encore $R = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$, on pose M la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{j-1} & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{j-1} & \cdots & x_i^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{j-1} & \cdots & x_n^{m-1} \end{pmatrix},$$

ou simplement $M_{i,j} = x_i^{j-1}$. Enfin on pose A le vecteur colonne $(a_0, \dots, a_{m-1})$ et Y le vecteur colonne $(y_1, \dots, y_n)$.

17. Montrer que trouver le polynôme de minimisation du problème des moindres carrés est équivalent à résoudre le système

$$\|MA - Y\|_2 = \inf_{Z \in \mathbb{R}^n} \|MZ - Y\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

$$\|MA - Y\|_2 = \sum_{j=1}^{n} (MA - Y)_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{1}{i+j} - y_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} (R(x_j) - y_j)^2.$$

18. On note M^T la transposée de M. Montrer que la matrice $M^T M$ est diagonalisable.
Elle est carrée, symétrique réelle.

On note V la matrice de passage de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ telle que $V^T M^T M V = D$ où D est une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_m^2 \end{pmatrix}.$$

On note c_j le j-ème vecteur colonne de la matrice MV et v_j le j-ème vecteur colonne de la matrice V. Et J l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $d_j \neq 0$.

19. Montrer que $M = \sum_{j \in J} c_j v_j^T$.

    $M = MVV^T = \sum_{j=1}^{m} c_j v_j^T$ et pour les $j \notin J$ on a $c_j = 0$.

20. Montrer que les vecteurs $u_j = c_j/d_j$ pour les d_j non nuls forment une base orthonormée de l'image de M.

    Soit $y \in Im(M)$ alors il existe $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $y = Mx$ d'où $y = \sum_{j \in J} c_j v_j^T x = \sum_{j \in J} d_j \langle v_j, x\rangle c_j/d_j = \sum_{j \in J} d_j \langle v_j, x\rangle u_j$ d'où le caractère générateur. De plus $u_i^T u_j = \delta_{i,j} d_i^2/d_j d_i = \delta_{i,j}$ d'où l'ortho-normalisation et donc le caractère libre.

21. Expliquer pourquoi on peut compléter la famille des $(u_j)_{j \in J}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

    Gram-Schmidt.

On note U la matrice composée par l'ensemble de ces vecteurs.

22. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \in J$ forment une base de l'image de M^T.

    $M^T = \sum_{j \in J} v_j c_j^T$ d'où le caractère générateur. Le caractère libre vient du caractère orthogonal des colonnes de la matrice V.

23. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \notin J$ forment une base du noyau de M.

    Ils forment une base de $Im(M^T)^\perp = Ker(M)$.

On pose E la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/d_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/d_m & 0 & \dots & 0 \end{array}\right).$$

24. On suppose que le rang de M est m. Montrer que la solution des moindres carrés est donnée par $A = VEU^T Y$.

    $VEU^T = \sum_{j \in J} v_i \frac{1}{d_j} u_i^T$ d'où $MVEU^T = \sum_{k \in J} \sum_{j \in J} c_k v_k^T v_j \frac{1}{d_j} u_j^T = \sum_{j \in J} c_j/d_j u_j^T = \sum_{j \in J} u_j u_j^T$ est la matrice de projection orthogonale sur $Im(M) = \mathbb{R}^m$. Donc la solution consiste à projeter Y sur $\mathbb{R}^m$ puis résoudre, c'est-à-dire minimiser $MVEU^T Y = MA$. La solution évidente est $A = VEU^T Y$.

25. Quelle est la forme d'une solution lorsque le rang de M n'est plus supposé égal à m ?

    Toute solution s'écrit comme $VEU^T Y + (Id - VEU^T M)w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$. En effet, on projète Y sur $Im(M)$ ce qui donne à résoudre $MA = MVEU^T Y$ d'où $M(A - VEU^T Y) = 0$ donc trouver $A - VEU^T Y \in Ker(M)$. Par la question 23, la matrice de projection sur $Ker(M)$ est $(Id - VEU^T M)$, donc $A - VEU^T Y = (Id - VEU^T M)w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$.

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Pour n entier naturel, la fonction réelle f_n est définie par : $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de f_0 et donner l'allure de son graphe.

La fonction est définie pour $x \neq -1$ et sa dérivée est égale à : $f_0^{'}(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$.

Son numérateur admet deux racines : $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

On a : $\underset{x\to+\infty}{Lim} f_0(x) = +\infty$, $\underset{x\to+\infty}{Lim} \dfrac{f_0(x)}{x} = 1$, $\underset{x\to+\infty}{Lim} (f_0(x) - x) = -1$ donc la fonction admet une asymptote oblique d'équation : $y=x-1$ (de même pour moins l'infini).

La fonction est strictement croissante de $\left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right]$ sur $\left]-\infty, f_0(-1-\sqrt{2})\right]$,

La fonction est strictement décroissante de $\left[-1-\sqrt{2}, -1\right[$ sur $\left[f_0(-1-\sqrt{2}), -\infty\right[$,

La fonction est strictement décroissante de $\left]-1, -1+\sqrt{2}\right]$ sur $\left]+\infty, f_0(-1+\sqrt{2})\right]$,

La fonction est strictement croissante de $\left]-1+\sqrt{2}, +\infty\right]$ sur $\left]f_0(-1-\sqrt{2}), +\infty\right]$,

2. Le graphe de la fonction f_0 admet-il un centre de symétrie ? Si oui, préciser ce centre.

La fonction f_0 admet le point A (-1, -1) comme centre de symétrie. En effet, si on pose : $X = x + 1$ et $Y=y+1$, on obtient : $Y = X + \dfrac{2}{X}$ qui est impaire.

3. La fonction f_n admet-elle un point fixe ?, un centre de symétrie ?

Un point fixe vérifie l'équation : $f_n(x) = x$ ou encore : $x = \dfrac{1}{1-n}$, si n est différent de 1.

Par ailleurs, $f_n(x) = x + (n-1) + \dfrac{2-n}{x+1}$. Si on pose : $X = x + 1$ et $Y=y+(1-n)$, on obtient : $Y = X + \dfrac{2-n}{X}$ qui est impaire et le point B (-1, n-1) est un centre de symétrie.

4. Calculer $I_0 = \int_0^1 f_0(x)\, dx$

$$I_0 = \int_0^1 f_0(x)\, dx = \int_0^1 (x - 1 + \frac{2}{x+1})\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\,Ln(x+1) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2\,Ln2$$

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$ pour tout n et en déduire sa limite.

$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 (x + n - 1 + \frac{2-n}{x+1})\, dx = n - \frac{1}{2} + (2-n)\,Ln2 = -\frac{1}{2} + 2\,Ln2 + n\,(1 - Ln2)$ et sa limite est égale à $+\infty$, car $(1 - Ln2) > 0$.

Exercice n° 2

Soit $f :]0, +\infty] \to R$ définie par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

On a : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} Ln(1+\frac{1}{x})}$

Sa dérivée est égale à : $\frac{1}{x^3} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \left(-2\,Ln\,(x + \frac{1}{x}) + x - 1 \right)$.

Posons $z = \left(-2\,Ln\,(x + \frac{1}{x}) + x - 1 \right)$ alors $z' = \frac{2-x}{x}$, d'où z<0 pour tout x strictement positif.

La fonction est donc strictement décroissante de $]0, +\infty]$ sur $]+\infty, 1[$. La droite y=1 est une asymptote horizontale et l'axe Oy une asymptote verticale.

2. Etudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

En 0 : $Ln\,(x + \frac{1}{x}) \approx x^2 - Ln\,x$ et $f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \approx e.e^{-\frac{Ln\,x}{x^2}} \to +\infty$, ceci ne permet pas de conclure, mais $\underset{n\to\infty}{Lim}\, x^2 f(x) = +\infty$, donc $f(x) > \frac{1}{x^2}$ et l'intégrale est divergente en 0.

En $+\infty$: Si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et si $\underset{n\to\infty}{Lim}\, f(x)$ existe (infinie ou non), alors $\underset{n\to\infty}{Lim}\, f(x) = 0$. Mais ici, $\underset{n\to\infty}{Lim}\, f(x) = 1$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est aussi divergente.

3. Etudier la suite (u_n) de nombre réels définie par : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 > 0$

On vérifie facilement par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs et donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ et la suite est croissante. Si la suite (u_n) converge vers une limite l alors l est solution de l'équation : $l = f(l)$, d'où $\dfrac{1}{l} = 0$, ce qui est impossible et la suite est donc divergente.

4. Etudier la suite (w_n) de nombre réels définie par : $w_{n+1} = w_n \times f(w_n)$ et $w_0 > 0$

$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = f(w_n)$ et si la suite est convergente vers une limite l, alors l est solution de l'équation : $1 = f(l)$ qui n'a pas de solution réelle (d'après la question 1), donc la suite est divergente.

Exercice n° 3

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

$\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(p - q/2 - \lambda)^2$, d'où $\lambda = 1$ est une valeur simple et $\lambda = p - q/2 = \dfrac{3p-1}{2}$ est une valeur double.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice M.

Si $p - q/2 = 1$, ce qui est impossible car $p + q = 1$.

Si $p - q/2 \neq 1$, la matrice M est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = p - q/2$ est égale à deux.

On trouve deux vecteurs propres associés : $u_2(1,-1,0)$ et $u_3(0,-1,1)$. Et $u_1(1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

M est diagonalisable et semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p - q/2 & 0 \\ 0 & 0 & p - q/2 \end{pmatrix}$

3. Calculer M^n pour tout entier *n*.

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}, \text{ avec } \Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p-q/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p-q/2)^n \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On obtient $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(p-q/2)^n & 1-(p-q/2)^n & 1-(p-q/2)^n \\ 1-3(p-q/2)^n & 1 & 1+3(p-q/2)^n \\ 1+(p-q/2)^n & 1+(p-q/2)^n & 1-2(p-q/2)^n \end{pmatrix}$

4. Calculer $\underset{n\to\infty}{Lim} M^n$

On vérifie aisément que $\left|p-\frac{q}{2}\right| \le \frac{1}{2}$, donc $\underset{n\to\infty}{Lim} M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \sin(\frac{x}{y}) \text{ si } y \neq 0 \end{cases}$

Pour tout le problème les difficultés se situent sur la droite *y*=0, en dehors, la fonction est indéfiniment différentiable.

1. Etudier la continuité de f

Le problème de la continuité se situe sur la droite *y*=0. Donc $\underset{y\to 0}{Lim} f(x,y) = 0 = f(x,0)$ et *f* est continue.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.

Pour $y \neq 0$, $f_x^{'}(x,y) = y\cos(\frac{x}{y})$ et $f_y^{'}(x,y) = 2y\sin(\frac{x}{y}) - x\cos(\frac{x}{y})$

Pour *y*=0 :

$f_x^{'}(x_0,0) = \underset{x\to x_0}{Lim} \frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = 0$ et $f_y^{'}(x\ ,0) = \underset{y\to 0}{Lim} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \underset{y\to 0}{Lim}\, y\sin\frac{x}{y} = 0$.

Ces deux dérivées partielles existent et sont nulles.

3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f .

On a : $\underset{y\to 0}{Lim}\, f_x^{'}(x,y)=0=f_x^{'}(x,0)$ et cette dérivée partielle est continue.

Par contre, $\underset{y\to 0}{Lim}\, f_y^{'}(x,y)$ n'existe pas et nous n'avons pas la continuité.

4. Etudier la différentiabilité de f .

Si *f* est différentiable en un point $(x_0,0)$, alors sa différentielle est nulle.

Si $x_0=0$, *f* est différentiable en $(x_0,0)$ si et seulement si $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Ce qui est vérifié par passage en coordonnées polaires, puisque le numérateur est en r^2 et le dénominateur en *r*.

Si $x_0\neq 0$, *f* est différentiable en $(x_0,0)$ si et seulement si $\underset{(x,y)\to(x_0,0)}{Lim}\dfrac{f(x,y)}{\|(x-x_0,y)\|}=0$, ce qui est vérifié car le numérateur est en y^2.

Exercice n° 5

On considère *n* valeurs réelles x_i strictement positives et telles que : $x_i<x_{i+1}$ pour tout *i* compris entre 1 et *n*-1. Soit α un paramètre réel.

1. Résoudre le problème d'optimisation suivant : $\underset{\alpha}{Min}\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)^2$

La fonction *f* définie par : $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)^2$ est convexe strictement donc elle admet un minimum pour la valeur qui annule sa dérivée.

$f^{'}(\alpha)=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)=-2\left[(\sum_{i=1}^{n}x_i)-n\alpha\right]$ qui est nulle pour $\alpha=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ (moyenne).

2. On suppose que $\alpha\geq x_n$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\underset{\alpha}{Min}\ \sum_{i=1}^{n}|x_i-\alpha|$. On notera m_1 la valeur de ce minimum et α_1 son argument.

Soit $\varepsilon_i(\alpha)=\begin{cases}1 \text{ si } \alpha>x_i\\ -1 \text{ si } \alpha<x_i\end{cases}$ et posons $g(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\alpha)(\alpha-x_i)\geq 0$

Comme $\alpha\geq x_n$, $\alpha\geq x_i$ et $\varepsilon_i(\alpha)=1$, d'où $g(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha-x_i)=n\alpha-\sum_{1}^{n}x_i$ et cette valeur est minimale pour $\alpha_1=x_n$

3. On suppose que $\alpha \leq x_1$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\underset{\alpha}{Min} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha|$. On notera m_2 la valeur de ce minimum et α_2 son argument.

Par un raisonnement analogue à la question précédente, on obtient : $\alpha_2 = x_1$

4. Comparer m_1 et m_2.

De la question 2, on obtient $m_1 = n(x_n - \overline{X})$, où $\overline{X}$ désigne la moyenne des x_i

De la question 3, on obtient $m_2 = n(\overline{X} - x_1)$.

Par conséquent $m_1 > m_2$ si et seulement si $\frac{x_1 + x_n}{2} > \overline{X}$

Exercice n° 6

Soient q_1 et q_2 deux applications définies sur $M_n(R)$ respectivement par :

$q_1(A) = (Tr(A))^2$ et $q_2(A) = Tr({}^tAA)$, où

$M_n(R)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels,

$Tr(A)$ désigne la trace d'une matrice *A* de $M_n(R)$ et ${}^tA$ la transposées de *A*.

1. Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques.

Il suffit de trouver les formes bilinéaires symétriques associées.

On a : $\varphi_1(A,B) = \frac{1}{4}\left[(Tr(A+B))^2 - (Tr(A-B))^2\right] = Tr(A).Tr(B)$ et on vérifie que c'est une forme bilinéaire symétrique.

De même, $\varphi_2(A,B) = Tr({}^tBA)$.

2. q_1 et q_2 sont-elles positives ?, définies positives ?

φ_1 est positive mais non définie positive car pour *n*>1, la matrice *A* qui ne comporte que des zéros sauf un 1 pour le terme en haut à droite est non nulle et pourtant $\varphi_1(A) = 0$

Pour φ_2, si $A = (a_{ij})$ et si ${}^tAA = (b_{ij})$, on a : $b_{kk} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}^2$, d'où $\varphi_2(A) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}^2$, donc $\varphi_2(A) \geq 0$ et $\varphi_2(A) > 0$ dès que la matrice est non nulle.

Exercice n° 7

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x)=\begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x>0 \\ a.3^{x} & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

1. Déterminer le paramètre *a* pour que *f* soit la densité d'une loi de probabilité.

On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = a\int_{-\infty}^{0} 3^{x}\,dx + a\int_{0}^{+\infty} 3^{x}\,dx$

On a : $\int_{0}^{+\infty} 3^{-x}\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x\,Ln3}dx = \frac{1}{Ln3}$ et $\int_{-\infty}^{0} 3^{x}\,dx = \frac{1}{Ln3}$, donc *f* est une densité de probabilité si $a=\frac{Ln3}{2}$. Dans ce cas, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

2. Soit *X* la variable aléatoire dont *f* est la densité. Déterminer la fonction de répartition de *X*.

Si $x<0$, $F(x)=\frac{Ln3}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t\,Ln3}\,dt = \frac{3^{x}}{2}$ et si $x\ge 0$, $F(x)=F(0)+\int_{0}^{x} e^{-t\,Ln2}\,dt = 1-\frac{3^{-x}}{2}$

3. Calculer, si elle existe l'espérance de *X*.

Par définition, l'espérance est : $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$

La fonction $x\,f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^{2}}$ au voisinage de l'infini, donc intégrable. Et comme $x\,f(x)$ est impaire, $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 0$

4. Soit $Y=3^{X}$. Déterminer la fonction de répartition de *Y* et son espérance, si elle existe.

Y prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels positifs, on a :

$P(Y\le x)=P(3^{X}\le x)=P(X\le \frac{Ln\,x}{Ln3})$

Si $0\le x\le 1$, $F_{Y}(x)=\frac{1}{2}3^{Lnx/Ln3}=\frac{x}{2}$

Si $x>1$, $F_{Y}(x)=1-\frac{1}{2}3^{-Lnx/Ln3}=1-\frac{1}{2x}$

Pour $x>1$, la densité de *Y* est : $f_{Y}(x)=F_{Y}{}'(x)=\frac{1}{2x^{2}}$. Au voisinage de l'infini, $x\,f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable, donc l'espérance de *Y* n'existe pas.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

On fixe un réel $a > 0$.

Si f est un élément de E, on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0$$

L'objectif du problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) bornée sur I, puis d'étudier l'application $U : f \mapsto g$.

1. (a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$ et en déduire que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Posons $h(x) = e^{-ax}y(x)$. On a $h'(x) = -e^{-ax}f(x)$, donc il existe K tel que $h(x) = K - \displaystyle\int_1^x f(t)e^{-at}dt$. La réciproque est immédiate.

(b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) bornée sur I, celle-ci est unique.
Avec l'écriture précédente, en notant y_1 et y_2 deux solutions bornées, on a

$$y_i = e^{ax}\left(K_i - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right)$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Ainsi $y_1(x) - y_2(x) = e^{ax}(K_1 - K_2)$. Si $K_1 \neq K_2$, en faisant tendre $x \to +\infty$ on a une contradiction avec le caractère borné.

(c) Vérifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$.
$|f|$ étant bornée par un réel M, et $a > 0$, on a $0 \leq |f(t)|e^{-at} \leq Me^{-at}$. Le théorème usuel de comparaison permet de conclure.

(d) Montrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_f) bornée sur I.

Soit g l'unique solution bornée. Il existe K tel que $g(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt\right)$. En faisant tendre $x \to +\infty$, l'unique valeur de K ne conduisant pas à une limite infinie est $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$. Il reste à vérifier que cette quantité est effectivement bornée (en majorant $|f|$ par M dans l'intégrale par exemple).

Dans la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. (a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

Un calcul évident donne $U(1) = \frac{1}{a}$.

(b) Montrer que U est un endomorphisme de E.

U est clairement linéaire et à valeurs dans E, d'après l'expression intégrale en 1.d.

(c) U est-il injectif ?

Oui, en étudiant le noyau : si $g = U(f) = 0$, alors l'intégrale est nulle pour tout x. Donc f est nulle.

(d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.

On procède par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties, en écrivant

$$U^{n+1}(f)(x) = U^n(U(f))(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} U(f)(t)\mathrm{d}t.$$

La dérivée de $e^{-at}U(f)(t)$ est $-ae^{-at}U(f)(t) + e^{-at}(aU(f)(t) - f(t)) = -e^{-at}f(t)$ et on primitive $\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}$. Les termes intégraux de l'intégration par parties

$$\left[\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} f(t)\right]_x^{+\infty}$$

sont nuls en $t = x$ et en $t = +\infty$ par le caractère borné de f.

3. (a) Pour k un nombre réel positif, et $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

Un calcul évident donne $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$.

(b) En déduire que pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\ker(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.

$k \mapsto \frac{1}{a+k}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, \frac{1}{a}]$. Donc pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$ il existe un $k \geq 0$ tel que $\lambda = \frac{1}{a+k}$. On conclut avec la question précédente : $U(f_k) = \lambda f_k$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter $U^n(f_k)$. En déduire pour $x \in I$: $\lim_{n \to +\infty} [U^n(f_k)](x)$

Immédiatement par récurrence on obtient $U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k$. Pour $x \in I$ fixé, la limite est donc nulle quand $n \to +\infty$ car f_k est bornée.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction de E définie par : $\varphi_n : x \mapsto x^n e^{-x}$. On note $\psi_n = U(\varphi_n)$.

   (a) Pour $n \geq 1$, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.
   A l'aide d'une intégration par parties,

$$\psi_n(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} t^n e^{-t} \mathrm{d}t = e^{ax} \left[\frac{-1}{a+1} e^{-at} t^n e^{-t} \right]_x^{+\infty} + \frac{n}{a+1} e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

   Toutes les intégrales étant convergentes, il vient :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{a+1} (\varphi_n(x) + n\psi_{n-1}(x)).$$

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel F_p de E engendré par $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$.
   On montre la stabilité par récurrence sur p grâce à la question précédente : c'est immédiat pour $p = 0$. Et comme ψ_p est combinaison linéaire de φ_p et de ψ_{p-1}, il appartient à $Vect(\varphi_0, \ldots, \varphi_{p-1})$.
   De plus, la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ est libre : on utilise pour cela la liberté d'une famille de polynômes échelonnée en degrés.

   (c) On prend ici $p = 2$. Ecrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme U restreint à F_2.
   On a $\psi_0 = T_2(\varphi_0) = \dfrac{1}{1+a}\varphi_0$, $\psi_1 = T_2(\varphi_1) = \dfrac{1}{a+1}\varphi_1 + \dfrac{1}{(a+1)^2}\varphi_0$ et $\psi_2 = T_2(\varphi_2) = \dfrac{1}{a+1}\varphi_2 + \dfrac{2}{a+1}\psi_1 = \dfrac{1}{a+1}\varphi_2 + \dfrac{2}{a+1}\left(\dfrac{1}{a+1}\varphi_1 + \dfrac{1}{(a+1)^2}\varphi_0\right)$. Il vient :

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Pour $f \in E$, montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.
   Immédiat avec la question 1.d. par inégalité triangulaire (toutes les intégrales convergent).

   (b) On suppose que φ appartient à E et est à valeurs positives. Montrer que $\psi = U(\varphi)$ est à valeurs positives.
   Immédiat par positivité de l'intégrale.

   (c) Si de plus φ est décroissante, montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.
   Si φ décroit, alors $\psi(x) \leq \varphi(x)e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} dt$. D'où $a\psi(x) \leq \varphi(x)$. Ainsi, comme $\psi'(x) = a\psi(x) - \varphi(x)$, il vient $\psi'(x) \leq 0$, donc ψ décroît.

6. On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) : f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'application qui à $f \in E_1$ associe f' .

(a) Pour $f \in E_1$, montrer que $aU(f) = f + U(f')$.
Une intégration par parties donne le résultat (toutes les intégrales étant convergentes).

$$U(f') = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f'(t)\mathrm{d}t = e^{ax} \left[e^{-at} f(t)\right]_x^{+\infty} + ae^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que pour tout $f \in E_1$, $D(U(f)) = U(D(f))$.
On remarque que $U(f') = U(D(f))$ et $D(U(f))$ sont toutes deux égales à $aU(f) - f$ (d'après l'équation différentielle initiale).

7. Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives, tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $g = U(f)$ et $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t$.

(a) Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.
Avec $G'(x) = g(x)$ et à partir de l'équation différentielle initiale qui fournit l'égalité :

$$g'(t) - ag(t) + f(t) = 0$$

on a le résultat en l'intégrant entre 1 et x. Toutes les intégrales sont convergentes car f, g et g' sont bornées.

(b) Justifier que la fonction F est un élément de E, et montrer qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in I$,

$$G(x) = Ce^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$$

f étant à valeurs positives, on a pour tout $x \in I : 0 \leq F(x) \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Donc F est continue comme primitive de f et bornée.
En utilisant la première question, comme G est solution de

$$G' - aG + (F - g(1)) = 0$$

il existe deux réels K_F et K_G tels que :

$$\begin{aligned}
G(x) &= e^{ax}\left(K_G - \int_1^x e^{-at}(F(t) - g(1))\mathrm{d}t\right) \\
&= (K_G - K_F)e^{ax} + e^{ax}\left(K_F - \int_1^x e^{-at} F(t)\mathrm{d}t\right) + e^{ax} \int_1^x e^{-at} g(1)\mathrm{d}t \\
&= (K_G - K_F)e^{ax} + [U(F)](x) + g(1)e^{ax}\frac{e^{-ax} - e^{-a}}{-a} \\
&= \left(K_G - K_F + \frac{g(1)e^{-a}}{a}\right)e^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.
\end{aligned}$$

On a donc $C = K_G - K_F + \dfrac{g(1)e^{-a}}{a}$.

(c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

On a la relation $-aG(x) = -F(x) - g(x) + g(1)$. Comme F et g sont bornées, pour $x \geq 1$, $\dfrac{F(x) + g(x) - g(1)}{ax}$ est bornée.

(d) En déduire que $C = 0$ et que $G = U(F) - \dfrac{g(1)}{a}$.

La seule valeur possible de C ne conduisant pas à une limite infinie dans la décomposition de la question 7.b est $C = 0$.

(e) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

F étant bornée, $U(F)$ aussi. Par conséquent G est bornée, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t$ est donc bornée. Comme c'est l'intégrale d'une fonction positive, elle est croissante bornée donc convergente quand $x \to +\infty$.

2 Problème d'algèbre

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, n un entier naturel supérieur ou égal à 1, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On peut définir l'endomorphisme f_M canoniquement associé à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$f_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & Mx \end{array}$$

On note $\mathrm{Ker}(f_M)$ et $\mathrm{Im}(f_M)$ respectivement le noyau et l'image de f_M. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Le problème est constitué de deux parties qui pourront être traitées de manière indépendante.

2.1 Première partie

Si λ est une valeur propre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note E_λ le sous-espace propre de $\mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ, c'est-à-dire le noyau de l'endormorphisme associé à la matrice $M - \lambda I_n$ noté $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$ où I_n est la matrice identité d'ordre n. Ainsi

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n : Mx = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n).$$

On note alors $\sigma(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. Et $\rho(M)$ le rayon spectral de M, c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M.

1. Dans cette question, on pose $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

où
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
C'est une fonction polynomiale en les coordonnées.

(b) La fonction gradient de F est notée ∇F. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^2$, $\nabla F(y) = Ay - b$.
Comme A est symétrique, on a $\langle Ax, h\rangle = \langle Ah, x\rangle$, d'où
$$F(x+h) - F(x) - \langle \nabla F(x), h\rangle = \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$$
qui est bien une fonction $o(h)$.

(c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
Si F admet un point critique y alors $\nabla F(y) = 0$. Or A est inversible, donc l'unique solution est $y = A^{-1}b = (1,1)$.

(d) Écrire le développement limité de F en ce point critique.
Comme F est quadratique, le développement limité s'arrête à l'ordre 2. Avec HF la matrice Hessienne de F, on a donc
$$\begin{aligned}
F(x) &= F(y) + \langle \nabla F(y), x-y\rangle + \frac{1}{2}\langle x-y, HF(y)(x-y)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle b, y\rangle - \langle b, y\rangle + 0 + \frac{1}{2}\langle x-y, A(x-y)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle b, y\rangle + 0 + \frac{1}{2}\langle x-y, A(x-y)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}(b_1+b_2) + (x_1-1)^2 + \frac{5}{2}(x_2-1)^2 - (x_1-1)(x_2-1).
\end{aligned}$$

(e) En déduire que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.
$$\begin{aligned}
F(x) + \frac{1}{2}\langle b, y\rangle &= (x_1-y_1)^2 - (x_1-y_1)(x_2-y_2) + \frac{5}{2}(x_2-y_2)^2 \\
&= (x_1 - y_1 - \frac{1}{2}(x_2-y_2))^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right)(x_2-y_2)^2 \\
&= (x_1 - y_1 - \frac{1}{2}(x_2-y_2))^2 + \frac{9}{4}(x_2-y_2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$
Donc le minimum de F est atteint quand $x_2 = y_2 = 1$ et $x_1 = y_1 = 1$. et $F(1,1) = -5/2$

Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$. On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif, i.e. pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x\rangle > 0$.

2. (a) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
   Soit x un vecteur propre associé à $\lambda \in \sigma(M)$ alors $0 \leq \langle Mx, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ montre que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $]0, +\infty[$.
   Soit x un vecteur propre associé à $\lambda \in \sigma(M)$ alors $0 < \langle Mx, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ montre que $\lambda \in]0, +\infty[$.

3. On suppose dans cette question que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, que c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad G(x) = \frac{1}{2}\langle Mx, x\rangle - \langle c, x\rangle.$$

   (a) Prouver que, pour tout couple (x, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $\langle Mx, h\rangle = \langle Mh, x\rangle$.
   $\langle Mx, h\rangle = (Mx)^T h = x^T M^T h = x^T M h = \langle x, Mh\rangle = \langle Mh, x\rangle$.

   (b) On pose $\nabla G(y) = My - c$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Donner la forme de la fonction $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad G(x+h) = G(x) + \langle \nabla G(x), h\rangle + R(h).$$

   $R(h) = \dfrac{1}{2}\langle Mh, h\rangle$.

   (c) On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x) \geq G(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En observant que $G(x_0 + th) \geq G(x_0)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\nabla G(x_0) = 0$.
   $0 \leq \langle \nabla G(x_0), th\rangle + R(th) = t\langle \nabla G(x_0), h\rangle + t^2 R(h)$ est un polynôme de degré 2 en la variable t. Cela impose que le coefficient devant t est nul.

4. On suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive.

   (a) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x_0) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} G(x)$, et le déterminer en fonction de M et c.
   S'il existe un minimum x_0 alors il vérifie l'hypothèse de la question (c) d'où $\nabla G(x_0) = 0$. Puisque M est définie positive alors R est une fonction positive qui ne s'annule qu'en $h = 0$. Ainsi $G(x) = G(x_0) + R(x_0 - x) > G(x_0)$ pour tout $x \neq x_0$ d'où l'unicité. Pour l'existence, il suffit de voir que $x_0 = M^{-1}c$ vérifie l'yhpothèse $\nabla G(x_0) = 0$ et en utilisant encore $G(x) = G(x_0) + R(x_0 - x) > G(x_0)$, on a bien la relation $G(x) \geq G(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ avec d non nul. Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $G(v - rd) = \inf\limits_{s \in \mathbb{R}} G(v - sd)$.
   $G(v - sd) = G(v) - s\langle \nabla G(v), d\rangle + s^2 R(d)$. Donc c'est un polynôme de degré 2 en la variable s de coefficient dominant positif $R(d)$ non nul. Il admet donc un unique minimum.

   (c) Exprimer r en fonction de v, d, M et c.
   C'est évidemment $r = \dfrac{\langle \nabla G(v), d\rangle}{2R(d)} = \dfrac{\langle Mv - c, d\rangle}{\langle Md, d\rangle}$. Le dénominateur est non nul car M est définie positive de d est non nul.

2.2 Deuxième partie

On note $L(\mathbb{K}^n)$ l'ensembles des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$. On note P_f le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f \in Ł(\mathbb{K}^n)$. Un endomorphisme $f \in L(\mathbb{K}^n)$ est dit cyclique s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$C_a^p = \{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de $\mathbb{K}^n$ de cardinal p, stable par f , c'est à dire :
— C_a^p est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$,
— C_a^p possède p éléments deux à deux distincts,
— $f(C_a^p) \subset C_a^p$.
Une telle partie C_a^p est nommée cycle de f au point a et on dit que f est cyclique d'ordre p.

5. (a) Pour quel(s) entier(s) $n \in \mathbb{N}$ non nul, un projecteur h de $L(\mathbb{K}^n)$ peut-il être cyclique ?
Soit h un projecteur alors pour tout $a \in \mathbb{K}^n$, $h(h(a)) = h(a)$. Donc la famille C_a^p ne peut posséder p éléments distincts que si $p \leq 2$. Donc $\mathbb{K}^n$ doit être de dimension 1 ou 2. Le cas de la dimension 0 est exclu car n et p sont des entiers naturels non nuls. La dimension 1 est triviale, car tout élément a non nul forme un cycle car $h(a) = a$ lorsque h est un projecteur non nul. La dimension 2 est possible s'il existe $a \in \mathbb{K}^n$ non colinéaire à $h(a) \neq 0$ afin d'assurer le caractère générateur de la famille. On pose F le noyau de h et G son sous-espace stable, alors pour tout $(f, g) \in F \times G$ non nuls on a

$$G \ni g = h(g) + h(f) = h(g + f) \neq g + f \in G + F.$$

Donc $a := f + g$ et $h(a)$ ne sont pas colinéaires et $h(a) \neq 0$.

(b) Comment s'écrit alors un cycle de h ?
Un cycle de h s'écrit alors $\{a\}$ en dimension 1 ou $\{a, h(a)\}$ en dimension 2.

6. On considère $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

(a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f.
Prenons $a = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{n-1}}) = e_1 \in \mathbb{K}^n$ alors $f(a) = (0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{n-2}}) = e_2$ et par récurrence sur p on a $f^{p-1}(a) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{p-1}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{n-p}}) = e_p$. Donc les éléments d'un cycle de taille p sont distincts deux à deux dès que $p \leq n$. De plus il est clair que la famille C_a^p est génératrice quand $p = n$, car on a construit les n éléments de la base canonique. La stabilité $f(C_a^n) \subset C_a^n$ est assurée par $f(f^{n-1}(a)) = f(e_n) = e_n = f^{n-1}(a)$.

(b) Déterminer le rang de f.

L'image de f est au moins composée de $(e_2, \ldots, e_n)$ donc le rang de f est au moins $n-1$. On a une ligne nulle dans la matrice de f donc son rang est au plus $n-1$. D'où $\mathrm{rg\ f = n - 1}$.

(c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de f est calculable assez trivialement par récurrence, c'est $(-X)^{n-1}(1-X)$. Donc la valeur propre 0 est de multiplicité $n-1$. Mais un élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ du noyau de f est tel que

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i e_{i+1} + \lambda_{n-1} e_n + \lambda_n e_n$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$ et $\lambda_{n-1} = -\lambda_n$. Donc le noyau de f est de dimension 1, ce qui est une contradiction avec la diagonalisibilité dès que $n-1 \neq 1$ i.e. $n \neq 2$. Si $n = 2$ ($n = 1$ est exclu par l'énoncé), f vérifie $f(e_1 - e_2) = e_2 - e_2 = 0$ et $f(e_2) = e_2$ qui est donc diagonal dans la base $(e_1 - e_2, e_2)$ de valeurs propres 0 et 1.

7. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ cyclique d'ordre p.

(a) Justifier que $p \geq n$.

Pour qu'une famille de cardinal p soit génératrice de $\mathbb{K}^n$ il faut $p \geq n$.

(b) Montrer que f est au moins de rang $n-1$.

Soit p tel que C_a^p soit un cycle, alors $C_a^p \subset Vect(\mathrm{Im(f)}, \{\mathrm{a}\})$. Donc $\mathbb{K}^n = Vect(C_a^p) \subset Vect(\mathrm{Im(f)}) + \mathrm{Vect}(\{\mathrm{a}\})$. Ceci impose que la dimension de Im(f) est au moins $n-1$ d'où l'inégalité sur le rang.

8. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f. Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), ..., f^{m-1}(a))$ soit libre.

(a) Prouver que $\forall k \geq m,\ f^k(a) \in Vect(\mathcal{F})$.

La famille $(a, f(a), ..., f^m(a))$ n'est pas libre donc il existe une combinaison linéaire non triviale telle que $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f^i(a) = 0$. Clairement λ_m ne peut pas être nul sinon, cela contredit le caractère libre de $\mathcal{F}$. Donc $f^m(a) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(a) \in Vect(\mathcal{F})$. Par récurrence, supposons la propriété vraie jusqu'au rang k. Alors $f^{k+1}(a) = f(f^k(a))$ donc il existe une combinaison linéaire telle que

$$\begin{aligned} f^{k+1}(a) &= f\left(\sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(a)\right) = \sum_{i=0}^{m-2} \mu_i f^{i+1}(a) + \mu_{m-1} f^m(a) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_{i-1} f^i(a) - \mu_{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(a) \\ &= -\mu_{m-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_m} a + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\mu_{i-1} - \mu_{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right) f^i(a) \in Vect(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

(b) En déduire que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Si $p \leq m$ alors $\mathcal{F}$ est libre et génératrice car elle contient C_a^p. Donc c'est une base. Si $m \leq p$, par la question (a), on a montré que $Vect(\mathcal{F})$ est stable par f, alors $Vect(\mathcal{F}) = Vect(C_a^p) = \mathbb{K}^n$. La famille C_a^m est libre et génératrice, donc c'est bien une base. A fortiori on a bien $m = n$.

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f. Déterminer les valeurs (si elles existent) de x et y pour que f soit cyclique d'ordre 2.

On cherche $a = (a_1, a_2)$ tel que $\{(a_1, a_2), b := (xa_2, a_1 + ya_2)\}$ soit un cycle. Déjà la stabilité $f(b) = (xa_1 + xya_2, xa_2 + ya_1 + y^2a_2)$. Mais 1 n'est pas valeur propre donc $f(b) \neq b$. Ceci impose $f(b) = a$ d'où $xa_1 + xya_2 = a_1$ et $xa_2 + ya_1 + y^2a_2 = a_2$. On obtient un système linéaire en $(x - 1, y)$ et en (a_1, a_2).

$$\begin{pmatrix} x-1 & xy \\ y & x-1+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & xa_2 \\ a_2 & a_1 + ya_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Si $y = 0$ alors le système donne trivialement $x = 1$ car $a \neq 0$. Or $x = 1$ est exclu car alors 1 serait valeur propre. Comme la famille doit être génératrice et libre, alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & xa_2 \\ a_2 & a_1 + ya_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

La matrice est donc inversible et les seules solutions du système sont $x = 1$ et $y = 0$. Il n'y a donc aucun endomorphisme cyclique de cette forme. Ceci impose en particulier que tout endomorphisme cyclique de cette forme admet 1 comme valeur propre. D'où une équation pour x qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-y \\ 1 & y \end{pmatrix}.$$

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver un polynôme *P* de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes tel que *P(A)=0.*

   On vérifie que $P(A) = A^2 + A - 2I = 0$ (Cayley-Hamilton), en calculant $Det(A - \lambda I)$

2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 2.

   Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est un polynôme de degré 1.

   $X^n = (X^2 + X - 2I)Q(X) + aX + b$

   Pour *X*=1, on obtient *a*+*b*=1

   Pour *X*=-2, on obtient $(-2)^n = -2a + b$

   En conclusion : $a = \dfrac{1-(-2)^n}{3}; b = \dfrac{2+(-2)^n}{3}$

3. Pour *n* entier strictement positif, calculer A^n et résoudre le système : $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   On a : $A^n = (A^2 + A - 2I)Q(A) + aA + bI$ et $A^2 + A - 2I = 0$, donc

$$A^n = aA + bI = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}$$

La résolution du système donne $U_n = A^n U_0$ et plus précisément

$$\begin{cases} x_n = b - a = \frac{1}{3}(1 + (-1)^n 2^{n+1}) \\ y_n = 3a - b = \frac{1}{3}(1 - (-1)^n 2^{n+2}) \\ z_n = b - a = \frac{1}{3}(1 + (-1)^n 2^{n+1}) \end{cases}$$

Exercice n° 2

Soit $f :]0, +\infty[\to R$ définie par : $f(x) = x^{-5}\left(e^{1/x} - 1\right)^{-1}$

1. Calculer la limite de *f* en zéro et en plus l'infini. Montrer que *f* admet un maximum.

   $\underset{x \to 0^+}{Lim} f(t) = \underset{x \to +\infty}{Lim} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$, et $\underset{t \to +\infty}{Lim} f(t) = \underset{x \to 0^+}{Lim} \frac{x^5}{e^x - 1} = \underset{x \to 0^+}{Lim} \frac{5x^4}{e^x} = 0$, d'après la règle de l'Hôpital. Du fait des limites précédentes, de la continuité et de la positivité de *f*, elle admet un maximum.

2. Soit $x_0 = Arg\max(f)$, montrer que $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

   f est dérivable, donc si x_0 réalise un maximum pour f, on doit avoir :

   $$f'(x_0) = -5x_0^{-6}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-1} + x_0^{-5}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-2} e^{\frac{1}{x_0}} x_0^{-2} = -x_0^{-7}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-2}\left(5x_0\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right) - e^{\frac{1}{x_0}}\right)$$

   Donc $f'(x_0) = 0$ si et seulement si $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

3. Soit $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$. Montrer que l'équation $5x\,(e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$, $x>0$ est équivalente à $g(t) = t$, où *t* est strictement positif.

   On pose $x = \frac{1}{t}$ et l'équation $5x\,(e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$ est équivalente à $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right) = t$

4. Montrer qu'il existe une unique solution α de l'équation $g(t) = t$ dans l'intervalle $[4, 5]$

On a $g^{'}(t) = 5\left(e^{-t}\right) > 0$, donc g est strictement croissante. Puis $g(4) \cong 4{,}90 > 4$; $g(5) \cong 4{,}96 < 5$. Ainsi $g([4,5]) \subset [4,5]$ et $\underset{[4,5]}{Sup}\, g^{'}(t) = 5e^{-4} < 1$, on a donc une contraction et d'après le théorème du point fixe , il existe une unique solution à l'équation $g(t) = t$ dans l'intervalle $[4,5]$.

Pour $t < \ln 5$, $g^{'}(t) < 1$, alors la fonction $g(t) - t$ est strictement croissante pour $t < \ln 5$
Comme $g(0) = 0$, on a : $g(t) > t$ pour $t < \ln 5$
Pour $t > \ln 5$, la fonction $g(t) - t$ est strictement décroissante, donc elle admet au plus une racine qui doit être celle trouvée à la question précédente dans l'intervalle $[4,5]$.
On peut aussi étudier directement $h(t) = g(t) - t$

5. Déduire que f possède un unique maximum.

On sait que f possède un maximum et qu'il est unique d'après la question précédente : $x_0 = \dfrac{1}{\alpha}$

Exercice n° 3

On considère A et B deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre n (entier strictement positif)

1. Montrer que la matrice *AB-BA* n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

On vérifie que *AB-BA* est une matrice antisymétrique. Posons *C=AB-BA*. Cette matrice est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Si λ est une valeur propre complexe et u un vecteur propre associé, on a : $Cu = \lambda u$.

D'où $\overline{u}^{'} Cu = \lambda \overline{u}^{'} u = \lambda \|u\|^2$ et $\overline{u}^{'} C^{'} u = -\lambda \|u\|^2$ (i).

Par ailleurs, $(Cu)^{'} = (\lambda u)^{'} = u^{'} C^{'} = \lambda u^{'}$ et $\overline{u}^{'} C^{'} = \overline{\lambda}\, \overline{u}^{'}$, puis en multipliant par u à droite, on obtient : $\overline{u}^{'} Cu = \lambda \overline{u}^{'} u = \overline{\lambda} \|u\|^2$ (ii)

En comparant (i) et (ii), on trouve $\overline{\lambda} = -\lambda$ et les valeurs propres sont des imaginaires purs.

2. On suppose de plus que A et B sont définies positives, étudier le signe de *Tr(AB)*, où *Tr* désigne la trace de la matrice.

Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à A et orthogonale pour la forme hermitienne associée à B. Soit P la matrice de passage associée à cette base, alors $A = \overline{P}^{'} P$ et $B = \overline{P}^{'} D P$, où D est la matrice diagonale à coefficients strictement positifs (d_{ij}). Notons $d = Inf\,(d_{ij})$, on a :

$$Tr(AB) = Tr(\overline{P}^{'} P \overline{P}^{'} D P) = Tr(\overline{P}^{'} P \overline{P}^{'} P D) \geq d\, Tr(A^2)$$

Si $A=(a_{ij})$, comme elle est symétrique, on obtient : $Tr(A^2)=\sum(a_{ij})^2>0$, car sinon on aurait A=0, donc $Tr(AB)>0$

3. Soit M une matrice carrée antisymétrique réelle. Montrer que I+M est inversible et déterminer la nature de la matrice $(I-M)(I+M)^{-1}$

   Supposons que I+M ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur u non nul tel que $(I+M)u=0$, d'où $Mu=-u$. Par transposition, $u'M'=-u'$ et $u'M'u=-\|u\|^2$

   D'autre part, la matrice étant antisymétrique, $M'u=u$ et $u'M'u=\|u\|^2$, on obtient alors $\|u\|^2=-\|u\|^2$ et u =0, ce qui conduit à une contradiction.

   La matrice $D=(I-M)(I+M)^{-1}$ existe d'après ce qui précède.

   D est orthogonale si et seulement si $D'=D^{-1}$. On obtient :

   $D'=(I-M)^{-1}(I+M)$ et $D^{-1}=(I+M)(I-M)^{-1}$.

   On a l'égalité si $(I-M)^{-1}M=M(I-M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de l'égalité $(I-M)M=M(I-M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I-M)^{-1}$. On montre de même que I-M est inversible. La matrice D est donc orthogonale.

Exercice n° 4

On considère les suites (u_n) et (λ_n) définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}};\ \lambda_{n+1}=\frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1=0$ et $\lambda_1=2$, il existe deux autres suites (θ_n) et (α_n) telles que pour tout entier n strictement positif, on a :

   $u_n=\cos(\theta_n);\ \lambda_n=\alpha_n\sin(\theta_n);\ 0\le\theta_n\le\pi/2$. Montrer que la suite (λ_n) est convergente, on précisera sa limite.

   Montrons par récurrence sur n, la propriété :

   $P(n): u_n$ et λ_n existent et valent $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right);\ \lambda_n=2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

   La propriété est vraie pour n=1.

Comme u_n est positif, u_{n+1}existe et vaut $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Et $\lambda_{n+1} = \dfrac{\lambda_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)} = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

On pose alors $\theta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$; $\alpha_n = 2^n$.

$\underset{n}{Lim}\,\lambda_n = \underset{n}{Lim}\,2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \underset{n}{Lim}\,2^n\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \pi$

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité :

$\left|\pi - \lambda_n\right| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}$. En déduire un entier *N* tel que : $\left|\pi - \lambda_N\right| \leq 10^{-6}$

Rappelons que : $\left|\sin^{(2p+1)}(x)\right| \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2*p*+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et *x* donne :

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

En particulier pour *p*=0 et $x = \dfrac{\pi}{2^n}$, on en déduit :

$\left|\pi - \lambda_n\right| = 2^n\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) - \dfrac{\pi}{2^n}\right| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 8^n}$ et on peut prendre *N*=8 (en passant au logarithme), car $\dfrac{\pi^3}{6\times 8^N} \leq 10^{-6}$

Exercice n° 5

On considère l'espace vectoriel R^4 rapporté à une base orthonormée *B*. On désigne par (x, y, z, t) les composantes d'un vecteur dans cette base. Soit f l'endomorphisme de R^4, associé, dans la base *B*, à la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image de f.

Soit $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. On constate que $f(e_2)=f(e_4); f(e_3)=2f(e_1)+f(e_2)$, donc l'image de f est engendrée par les deux vecteurs $f(e_2), f(e_1)$ qui forment une base.

2. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale semblable.

$\det(M-\lambda I)=\lambda^2(\lambda^2-4\lambda-11)=0 \Leftrightarrow \lambda = 0(\text{double}); 2+\sqrt{15}; 2-\sqrt{15}$.

La matrice M est diagonalisable si et seulement si le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2.

Résolvons $Mu=0.$ On obtient que ce sous espace est engendré par les deux vecteurs indépendants : (-2,0,1,0) et (0,1,0,-1), donc M est diagonalisable

On peut aussi remarquer que la matrice est symétrique donc diagonalisable.

La matrice diagonale semblable s'écrit : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\sqrt{15} \end{pmatrix}$

3. Déterminer le rang de la forme quadratique définie sur R^4 par :

$q(x,y,z,t)=4z^2+2xy+2xz+2xt+4yz+4zt$

Cette forme quadratique est associée à la matrice M, donc son rang est égal à 2.

4. On considère le système d'équations :

$y+z+t=1; x+2z=m^2+1; x+2y+4z+2t=p+2; x+(m-1)y+2z=2$, où m et p sont des paramètres réels.

- Résoudre le système homogène associé

Soit A la matrice su système.

Si m=1, alors A=M et les solutions du système homogène correspondent au noyau de f ou encore au sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 0 : (-2,0,1,0) et (0,1,0,-1), Si $m \neq 1$,*f* est bijective et l'ensemble des solutions se réduit au vecteur nul.

- Discuter l'existence de solutions de ce système en fonction de *m* et *p*.

Si $m \neq 1$,*f* est bijective et il existe une solution unique.

Si *m*=1, il existe un sous espace affine de solutions si et seulement si $(1, 2, p+2; 2) \in \mathrm{Im}\, f$. Comme $\mathrm{Im}\, f$ est caractérisée par : T=Y et Z=2X+Y, ceci donne : *p*+2=2+2, soit *p*=2.

Exercice n° 6

Soient f et g deux applications numériques définies sur $]0, +\infty[$, où *f* est convexe et *g* affine. On suppose que :

(1) $\forall x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ et
(2) $f(1) = g(1)$
Comparer *f* et *g*.

On suppose que $f \neq g$. Alors $\exists\, y > 0, y \neq 1, f(y) \neq g(y)$ et même $f(y) < g(y)$.
Comme *g* est une fonction affine, $g(y) = ay + b$ et comme *f* est convexe :
$f(\alpha y + (1-\alpha)1) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)\, f(1) < \alpha\, g(y) + (1-\alpha)(a+b), \alpha \in [0,1[$
Et pour $\alpha = 1$, $f(1) = g(1) = a + b < a + b$, d'où la contradiction et les deux fonctions sont égales.

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans tout le problème, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note F la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad F(x, z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right)$$

et f la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Rappel : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries de nombres complexes absolument convergentes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \in \mathbb{N})$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell\right)$$

Partie 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé.
   (a) Ecrire les développements en série entière de la variable réelle x des fonctions $x \mapsto \exp(-zx)$ et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

   D'après les résultats sur la série entière exponentielle,

$$\exp(-zx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$$

   avec dans les deux cas un rayon de convergence infini.

(b) En effectuant un produit, à l'aide de la question précédente, montrer que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z)x^n$$

où A_n est une fonction polynomiale de degré n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale H_n par $H_n = (-1)^n n! A_n$.
Donner les expressions de $H_0(z)$ et de $H_1(z)$ en fonction de z.

On note $\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$ avec $b_{2p+1} = 0$. Par produit de Cauchy

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^k}{k!} b_{n-k} \right) x^n$$

D'où $H_0(z) = A_0(z) = b_0 = 1$ et $H_1(z) = -A_1(z) = -(b_1 - b_0 z) = z$.

(c) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x,z)$ à l'aide de F.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.
Donner les expressions de $H_2(z), H_3(z)$ et $H_4(z)$ en fonction de z.

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,z) = -(z+x)F(x,z)$$

Or une série entière est dérivable à l'intérieur de son disque de convergence, d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}(z)x^n = -(z+x)F(x)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}(z)x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} zA_n(z)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z)x^{n+1}$$

soit

$$A_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}(z)x^n = -zA_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} zA_n(z)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(z)x^n.$$

Finalement

$$(n+1)A_{n+1} = -zA_n - A_{n-1} \quad \text{et} \quad (-1)^{n+1}\frac{H_{n+1}}{n!} = -z(-1)^n\frac{H_n}{n!} - (-1)^{n-1} n \frac{H_{n-1}}{n!}.$$

d'où en changeant n en $n+1$ et en simplifiant les signes

$$H_{n+2} = zH_{n+1} - (n+1)H_n.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} H_2(z) &= zH_1(z) + H_0(z) = z^2 + 1, \\ H_3(z) &= zH_2(z) + 2H_1(z) = z^3 + 3z, \\ H_4(z) &= zH_3(z) + 3H_2(z) = z^4 + 6z^2 + 3. \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0.$$

On a $f'(x) = -x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et $f''(x) = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Sans faire appel au raisonnement par récurrence, on peut dériver la relation n fois et on obtient l'équation à tout ordre n. Sinon la récurrence est immédiate en dérivant l'hypothèse de récurrence.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \frac{(-1)^n}{f}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.
Exprimer $K_0(x)$ et $K_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $H_n = K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque f ne s'annule pas, on peut diviser par f. Puis on a une relation de récurrence immédiate avec la question précédente. De plus

$$K_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad K_1(x) = -\frac{-xf(x)}{f(x)} = x.$$

On a une récurrence linéaire, donc K_n est un polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré n qui suit la même relation de récurrence que H_n sur $\mathbb{C}$. On conclut avec le fait que deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui coincident sur $\mathbb{R}$ sont égaux.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.
On utilise $f'(x) = -xf(x)$. Alors en dérivant $K_{n+1} = H_{n+1}$:

$$K'_{n+1}(x) = -K_{n+2}(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}K_{n+1}(x) = -K_{n+2}(x) + xK_{n+1}(x) = (n+1)K_n(x).$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$.
Pour $n \geq 2$, on a $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$ et $H''_n(x) = n(n-1)H_{n-2}(x)$. Donc

$$H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = n((n-1)H_{n-2}(x) - xH_{n-1}(x) + H_n(x)) = 0.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction φ_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x)$, où λ_n est un nombre réel que l'on déterminera.

On dérive un produit deux fois d'où

$$\begin{aligned}
\varphi_n''(x) &= (-1)^n\left(H_n''(x)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)-2H_n'(x)\frac{x}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)+H_n(x)\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)\\
&= (-1)^n\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\left(H_n''(x)-xH_n'(x)-\frac{1}{2}H_n(x)\right)+\frac{x^2}{4}\varphi_n(x)\\
&= (-1)^n\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)H_n(x)\left(-n-\frac{1}{2}\right)+\frac{x^2}{4}\varphi_n(x).
\end{aligned}$$

D'où $\varphi_n''(x)-\dfrac{x^2}{4}\varphi_n(x)=-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varphi_n(x)$ et $\lambda_n=-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$.

5. Pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ on pose :

$$I_{p,q}=I_{q,p}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_p(x)\varphi_q(x)\mathrm{d}x=(-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty}H_p(x)H_q(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien définie pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. On admettra désormais que $I_{0,0}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$.

La définition est cohérente par symétrie. H_p et H_q sont des polynômes donc il y a bien intégrabilité de la fonction $\varphi_p\varphi_q$ sur $\mathbb{R}$ grâce à la gaussienne $f(x)=\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

(b) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_{p+1,q+1}=(p+1)I_{p,q}=(q+1)I_{p,q}.$$

En déduire la valeur de $I_{p,q}$ pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. On distinguera les cas $q\neq p$ et $q=p$.

Avec des limites nulles à l'infini, on peut faire les intégrations par parties suivantes :

$$\begin{aligned}
(p+1)(q+1)I_{p,q} &= (p+1)(q+1)(-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty}H_p(x)H_q(x)f(x)\mathrm{d}x\\
&= (-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{p+1}'(x)H_{q+1}'(x)f(x)\mathrm{d}x\\
&= (-1)^{p+q+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{p+1}(x)(H_{q+1}'(x)f(x))'\mathrm{d}x\\
&= (-1)^{p+q+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{p+1}(x)(H_{q+1}''(x)f(x)+H_{q+1}'(x)f'(x))\mathrm{d}x\\
&= (-1)^{p+q+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{p+1}(x)f(x)(H_{q+1}''(x)-xH_{q+1}'(x))\mathrm{d}x\\
&= (-1)^{p+q+2}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{p+1}(x)f(x)(q+1)H_{q+1}(x)\mathrm{d}x\\
&= (q+1)I_{p+1,q+1}
\end{aligned}$$

ainsi $(p+1)I_{p,q} = I_{p+1,q+1} = I_{q+1,p+1} = (q+1)I_{q,p} = (q+1)I_{p,q}$.
Si $p = q$, on trouve $I_{p+1,p+1} = (p+1)I_{p,p} = (p+1)!\, I_{0,0}$ par récurrence immédiate.
Si $p \neq q$, alors $(p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$ donc $I_{p,q}(p-q) = 0$ ce qui impose $I_{p,q} = 0$.

Partie 2 Soit $\hat{f}$ la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Ici la domination est assurée par la convergence de $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.
2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La domination est encore une fois assurée par la convergence de $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.
   (a) Montrer que $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
   A l'aide du résultat sur la dérivation des intégrales à paramètres, on a :
   $$\hat{f}'(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t\; F(t, 2i\pi\nu)\; \mathrm{d}t = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (2i\pi\nu + (-2i\pi\nu - t))F(t, 2i\pi\nu)\; \mathrm{d}t$$
   Et $\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)e^{u(t)}dt = [e^{u(t)}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ avec $u(t) = -2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}$. Donc $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$.
   (b) Calculer $\hat{f}(0)$ et en déduire l'expression de $\hat{f}(\nu)$ en fonction de ν.
   On a $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, 0)\; \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\; \mathrm{d}x = I_{0,0} = \sqrt{2\pi}$. Et par résolution de l'équation différentielle,
   $$\frac{\hat{f}'(\nu)}{\hat{f}(\nu)} = -4\pi^2\nu \quad \text{donc} \quad \log(\hat{f}(\nu)) = -2\pi^2\nu^2 + C = -2\pi^2\nu^2 + \log(\sqrt{2\pi}).$$
   Il vient
   $$\hat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\nu^2}.$$

2 Problème 2

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens chacun de dimension au moins égale à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x|y)$ et $\|x\|$.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^{\mathbf{t}}A$.

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution*.

Partie I

I.1 Soient x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que $(x|y) = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX$.

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on sait par le cours que $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, où $n = \dim E$ et où les x_i et les y_i sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Sous forme matricielle, cela s'écrit $(x|y) = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, ..., e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

D'après le cours, $p(z) = \sum_{i=1}^{k} (e_i \mid z)\, e_i$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i Z$.

Sous forme matricielle, l'égalité du a) devient $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} {}^{\mathbf{t}}E_i Z E_i$, mais ${}^{\mathbf{t}}E_i Z$ peut-être vu aussi bien comme un scalaire que comme une matrice de taille (1,1), ce qui permet d'écrire ${}^{\mathbf{t}}E_i Z E_i = E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i Z$, d'où le résultat.

ii) En déduire $M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.

La relation précédente étant valable pour tout Z, cela signifie précisément que $M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $\|p(z)\| \leqslant \|z\|$.

Par définition de p, les vecteurs $p(z)$ et $z - p(z)$ sont orthogonaux, donc $\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2 \geq \|p(z)\|^2$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

Posons $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$. Soient E_1 et E_2 les matrices de e_1 et e_2 dans la base canonique.

Les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et orthogonaux et on vérifie immédiatement que $M = E_1\,{}^{\mathbf{t}}E_1 + E_2\,{}^{\mathbf{t}}E_2$. On en déduit d'après I.2., que M est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

On sait déjà que (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$. Posons $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$ et $e_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$. Il est immédiat que (e_3, e_4) est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}(p))^\perp$, c'est-à-dire de $\mathrm{Ker}(p)$.

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^\perp$.

$u = \dfrac{1}{\lambda} p(r(u)) \in \mathrm{Im}(p) = H$, d'où $p(r(u) - \lambda u) = (p \circ r)(u) - \lambda p(u) = \lambda u - \lambda u = 0$, donc $r(u) - \lambda u \in H^\perp$.

b) Établir l'égalité : $\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.

Selon I.4.a), $0 = (u \mid r(u) - \lambda u) = (u \mid r(u)) - \lambda \|u\|^2$. Mais $r(u) \in K$ et $u - r(u) \in K^\perp$ donc $(u \mid r(u)) = (r(u) \mid r(u)) = \|r(u)\|^2$, donc $\|r(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

Compte tenu du I.2.c), I.4.b) montre que les valeurs propres non nulles de $p \circ r$ sont dans $]0, 1]$, d'où le résultat en incluant la possible valeur propre 0.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

D'une part, $(p \circ r)^2 = p \circ r \circ p \circ r = p \circ p \circ r \circ r = p \circ r$; d'autre part, p et r étant symétriques, pour $(x, y) \in F^2$:

$$((p \circ r)(x)|y) = (r(x)|p(y)) = (x|(r \circ p)(y)) = (x|(p \circ r)(y))$$

Ainsi, $p \circ r$ est un projecteur symétrique, c'est-à-dire un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

Par orthogonalité $\mathrm{Sp}(p \circ r) \subset \{0, 1\}$. Et puisque $p \circ r$ est un projecteur non nul distinct de Id_F ($\mathrm{Im}(p \circ r) \subset \mathrm{Im}\, p = H \subsetneq F$), on a $\mathrm{Sp}(p \circ r) = \{0, 1\}$.

c) Montrer que : $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.

$\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(r \circ p)$ contient $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(r)$, donc contient aussi $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$.

Si $v \in \mathrm{Ker}(p \circ r)$, alors $r(v) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v - r(v) \in \mathrm{Ker}(r)$, donc $v \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$.

$\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(r \circ p)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p)$ et dans $\mathrm{Im}(r)$ donc aussi dans $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.

Si $v \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$, alors il existe w tel que $v = p(w)$ et $p(v) = p(p(w)) = p(w) = v$.

Ainsi $v = p(v)$ et symétriquement $v = r(v)$ d'où $p(r(v)) = v$, donc $v \in \mathrm{Im}(p \circ r)$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m-k$.

a) Montrer que les matrices vérifient les relations :
$A^2 + BC = A, \quad AB + BD = B, \quad CB + D^2 = D, \quad {}^{\mathsf{t}}A = A, \quad {}^{\mathsf{t}}B = C \quad \text{et} \quad {}^{\mathsf{t}}D = D.$

Un calcul par blocs donne $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$ et ${}^{\mathsf{t}}R = \begin{pmatrix} {}^{\mathsf{t}}A & {}^{\mathsf{t}}C \\ {}^{\mathsf{t}}B & {}^{\mathsf{t}}D \end{pmatrix}$.

Mais $R^2 = R$ car r est un projecteur et ${}^{\mathsf{t}}R = R$ car r est autoadjoint et la base considérée est orthonormale. L'identification des blocs donne alors les six égalités demandées.

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.
(ii) ${}^{\mathsf{t}}CC = 0$.
(iii) $C = 0$.
(iv) p et r commutent.

Deux multiplications par blocs donnent $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

i)$\Rightarrow$ ii) : A est symétrique d'après a), donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$; de plus l'expression de PR montre que le spectre de A est inclus dans le spectre réel de PR, qui est le spectre de $p \circ r$, et est donc inclus dans $\{0, 1\}$.

Il en résulte que $A^2 = A$ puis, d'après les égalités du I.6.a), que $BC = {}^{\mathsf{t}}CC = 0$.

ii)$\Rightarrow$ iii) : la somme des carrés des coefficients de C est la trace de ${}^{\mathsf{t}}CC$ qui est nulle, donc $C = 0$.

iii)$\Rightarrow$ iv) : D'après I.6.a), $B = {}^{\mathsf{t}}C = 0$. L'écriture de PR et RP montre que p et r commutent.

iv)$\Rightarrow$ i) : a été vu au I.5.b).

Partie II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$$

Dans la suite x_0 sera appelée une pseudo-solution de l'équation :

$$f(x) = v \tag{1}$$

$f(x)$ décrit $\mathrm{Im}(f)$ quand x décrit E et on sait que le vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ le plus proche de v est le projeté orthogonal v' de v sur $\mathrm{Im}(f)$; les vecteurs x_0 satisfaisant à l'égalité demandée sont donc exactement les antécédents de v' par f.

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation (1) admet une pseudo-solution unique.

Avec la notation du II.1., lorsque f est injective, v' n'a qu'un antécédent, d'où le résultat.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, pour tout x appartenant à E : $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

x_0 est pseudo-solution de (1) si et seulement si $f(x_0) = v'$, ce qui équivaut à $v - f(x_0) \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ ou encore à : $\forall x \in E,\ (f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$.

Écrire sous forme matricielle l'équation $(f(x)|f(x_0)-v)=0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, :

$$^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}AV$$

$(f(x)|f(x_0)-v)=0$ s'écrit $^{\mathsf{t}}(AX)(AX_0-V)=0$, ou encore $^{\mathsf{t}}X\,{}^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}X\,{}^{\mathsf{t}}AV$. Cette égalité est vérifiée pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (où $n=\dim E$) si et seulement si $^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}AV$.

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E=F=\mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x)=v$.

On calcule $^{\mathsf{t}}AA=\begin{pmatrix}3&0&-3\\0&6&0\\-3&0&3\end{pmatrix}$ et $^{\mathsf{t}}AV=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. La résolution du système $^{\mathsf{t}}AAX={}^{\mathsf{t}}AV$ donne les pseudo-solutions cherchées : $x=(a,1/2,a)$, pour a réel quelconque.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ et $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k-c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x)=v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^n)$ et $v\in\mathbb{R}^n$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k-c_k)^2=\|\lambda a+\mu b-c\|^2=\|f(\lambda,\mu)-c\|^2$, où $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^n)$ est définie par $f(\lambda,\mu)=\lambda a+\mu b$.

Le problème posé équivaut donc à la recherche des pseudo-solutions de l'équation $(*)$: $f(x)=c$.

La matrice A de f dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\\vdots&\vdots\\a_n&b_n\end{pmatrix}$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si (a,b) est une famille libre.

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

On calcule $^{\mathsf{t}}AA=\begin{pmatrix}\|a\|^2&(a\mid b)\\(a\mid b)&\|b\|^2\end{pmatrix}$ et $^{\mathsf{t}}AV=\begin{pmatrix}(a\mid c)\\(b\mid c)\end{pmatrix}$.

La résolution du système de Cramer $\begin{pmatrix}\|a\|^2&(a\mid b)\\(a\mid b)&\|b\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a\mid c)\\(b\mid c)\end{pmatrix}$ conduit à la solution :

$$\lambda=\frac{\|b\|^2\,(a\mid c)-(a\mid b)(b\mid c)}{\|a\|^2\|b\|^2-(a\mid b)^2}\quad\text{et}\quad\mu=\frac{\|a\|^2\,(b\mid c)-(a\mid b)(a\mid c)}{\|a\|^2\|b\|^2-(a\mid b)^2}.$$

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie par : $f(x)=\dfrac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$

1. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^e \dfrac{1}{(1+t)^2}\,dt=\left[-\dfrac{1}{t+1}\right]_1^e=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e}$ (en posant $t=e^x$)

2. Étudier la convergence de l'intégrale $J=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

En $+\infty$: $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\approx\dfrac{1}{e^x}$ qui est convergente car, par exemple, $\underset{+\infty}{Lim}\,(x^2.\dfrac{1}{e^x})=0$. On peut aussi calculer directement J = ½.

3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction *f*.
La fonction est paire (graphe symétrique par rapport à l'axe verticale) et sa dérivée est égale à :
$f'(x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{(1+e^x)^2(1+e^{-x})^2}$ qui s'annule pour x=0 et est négative. La fonction est décroissante de $[0,+\infty[$ sur $[1/4,0[$.

Exercice n° 2

On note $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.

1. L'ensemble des matrices carrées orthogonales d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$?

$I_n,-I_n\in M_n(R)$ mais $\dfrac{1}{2}I_n+\dfrac{1}{2}(-I_n)=0\notin M_n(R)$. L'ensemble n'est donc pas convexe.

2. L'ensemble des matrices carrées diagonalisables d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$?

Soient $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ deux matrices diagonalisables (deux valeurs propres réelles distinctes). Par contre, $M=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

3. Soit $E=\left\{A=(a_{i\,j})\in M_n(R)\,/\ \forall i,j\ a_{i\,j}\ \geq 0;\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}=1\right\}$. Cet ensemble est-il convexe ?

Montrons que E est convexe.

Soient $A=(a_{i\,j}),\ B=(b_{i\,j})$ et $\lambda\in[0,1]$. On a : $\lambda A+(1-\lambda)B=(\lambda\,a_{i\,j}+(1-\lambda)b_{i\,j})=(c_{i\,j})$

Comme $a_{i\,j}\geq 0,\ b_{i\,j}\geq 0$, alors $c_{i\,j}\geq 0$,

$\forall i,\ \sum_j c_{i\,j}=\lambda\sum_j a_{i\,j}+(1-\lambda)\sum_j b_{i\,j}=\lambda+(1-\lambda)=1$

Exercice n° 3

Pour n entier naturel non nul, on dit que la suite de matrices $A_n=\begin{pmatrix}u_n & v_n\\ w_n & t_n\end{pmatrix}$ converge vers la matrice $A=\begin{pmatrix}u & v\\ w & t\end{pmatrix}$ si et seulement si $u_n\to u, v_n\to v, w_n\to w, t_n\to t$

Soit $A_n=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a}{n}\\ \dfrac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n$, où a un nombre réel donné strictement positif.

Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}A_n$ (on pourra mettre en évidence l'expression : $\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}$)

$$B_n=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a}{n}\\ \dfrac{a}{n} & 1\end{pmatrix}=\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \dfrac{-a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\\ \dfrac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\end{pmatrix}$$

On peut remarquer que : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2+\left(\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2=1$, puis poser

$\cos\theta_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$; $\sin\theta_n=\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ avec $-\pi<\theta_n<\pi$, soit $\theta_n=Arctg\,(\frac{a}{n})$.

D'où $A_n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}$

puis $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2}Ln\,(1+a^2/n^2)} \approx e^{a^2/2n} \approx 1$.

Par ailleurs $n\,\theta_n = n\,Arctg\,\frac{a}{n} \approx n\frac{a}{n} = a$.

En conclusion $\underset{n\to\infty}{Lim}\,A_n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt$

On a : $1+t^3 = (1+t)(t^2-t+1)$ et $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{1+t} + \frac{-t+2}{t^2-t+1})$.

Par conséquent : $I = \frac{1}{3}Ln(2) + \frac{1}{3}J$, où $J = \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt$.

Cette dernière intégrale peut s'écrire :

$$J = \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{-2t+1}{t^2-t+1}dt + \int_0^1 \frac{3}{t^2-t+1}dt\right) = \frac{1}{2}\left[-Ln(t^2-t+1)\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

$J = 0 + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctg\left((t-\frac{1}{2})\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \sqrt{3}\times\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. En conclusion $I = \frac{1}{3}Ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. On considère la fonction *f* définie sur *R* par : $f\,(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x^2}}{1+t^3}\,dt$

Étudier l'existence de *f* et calculer $f\,(0)$

En $+\infty$, $\underset{n\to\infty}{Lim}\; t^2\,\frac{e^{-tx^2}}{(1+t^3)} = 0$, donc l'intégrale est convergente.

On effectue le changement de variable $t = 1/u$ pour obtenir :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+u^3} du = \int_0^{+\infty} \frac{u+1}{1+u^3} du - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^3} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1} du - f(0)$$, d'où

$$2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[Arctg\,(t - \frac{1}{2}) \frac{2}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Soit $f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Étudier les variations de *f* et déterminer sa limite en $+\infty$.

La fonction est paire. Pour $0 \le x \le x'$, on a : $e^{-tx^2} \ge e^{-tx'^2}$ pour toutes valeurs de *t* positives. Par conséquent la fonction *f* est décroissante sur R^+. Comme l'intégrale est convergente, on a : $\lim_{+\infty} f(x) = 0$

Exercice n° 5

1. Soient A une matrice carrée d'ordre *n* à coefficients réels et P un polynôme d'une variable réelle. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

On a : $Ax = \lambda x$, puis $A^k x = \lambda^k x$. Posons $P(X) = \sum_{j=0}^{q} a_j X^j$, on obtient :

$P(A) = \sum_{j=0}^{q} a_j A^j$ et $P(A)(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j A^j x = \sum_{j=0}^{q} a_j \lambda^j x = (\sum_{j=0}^{q} a_j \lambda^j) x = P(\lambda) x$

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de *M*.

On a $\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ et

0, 1, 2 sont les valeurs propres.

3. Trouver un polynôme *P* du second degré tel que la matrice $P(M)$ admette (-1) pour valeur propre double et 3 pour valeur simple. On explicitera $P(M)$.

Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$. On peut choisir $P(0) = P(1) = -1$ et $P(2) = 3$.

On obtient : $c = -1; a + b = 0; 4a + 2b = 4.$ On obtient : $P(X) = 2X^2 - 2X - 1$ et

$$P(M) = 2M^2 - 2M - I = \begin{pmatrix} 11 & -16 & 48 \\ 6 & -9 & 24 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer la matrice M_1 de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 de la matrice *M*.

Cherchons d'abord ce sous-espace vectoriel qui doit vérifier : $Mu = u$, à savoir : $y = 0;\ x + 4z = 0$. Le vecteur $u = (4,0,-1)$ engendre la droite vectorielle.

La matrice M_1 de la projection orthogonale s'écrit $M_1 = B(B'B)^{-1}B'$ où $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On obtient : $M_1 = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 16 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Déterminer la matrice M_2 de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le plan vectoriel propre associé aux valeurs propres 0 et 2 de la matrice *M*.

La matrice M_2 de la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres 0 et 2 vérifie la propriété demandée.
Le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 0 est engendré par : (-4, 3, 2)
Le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 2 est engendré par : (2, 1, 0)

La matrice M_2 de la projection orthogonale s'écrit $M_2 = C(C'C)^{-1}C'$ où $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient : $M_2 = \dfrac{1}{120}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{60}\begin{pmatrix} 58 & 24 & -10 \\ 4 & 37 & 20 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

6. Donner un exemple de matrice *M* telle que $M_1M_2 = M_2M_1 = 0$?
Pour toute matrice *M* symétrique ayant 3 valeurs propres réelles distinctes, les droites vectorielles propres associées aux valeurs propres sont orthogonales et la relation est vérifiée.

Par exemple, on pourrait prendre $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice n° 6

On considère dans l'espace vectoriel R^3 les deux sous-ensembles

$$E_1 = \{(n, n^2, n^3) \ / \ n = 0,1,2.....\} \text{ et } E_2 = \{(n+1, 2n \ +1, 3n+1) \ / \ n = 0,1,2.....\}$$

Soit V_1 (respectivement V_2) le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par E_1 (respectivement E_2)

1. Déterminer la dimension de V_1, puis de V_2.

Les vecteurs (1, 1, 1) ; (2, 4, 8) et (3, 9, 27) sont dans E_1, donc dans V_1. Ces trois vecteurs sont indépendants car $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$. Et comme la dimension de V_1 est bornée par celle de R^3, on a : $\dim V_1 = 3$.

On remarque que : $3n+1 = 2(2n+1)-(n+1)$ et

comme $(n+1, 2n+1, 3n+1) = n(1,2,3)+(1,1,1)$, $\dim V_2 = 2$

2. Déterminer le sous-espace vectoriel V_3 orthogonal à V_2 pour la base canonique.

V_3 est une droite vectoriel engendrée par un vecteur $u=(x,y,z)$ orthogonal aux vecteurs $(1,2,3)$ et $(1,1,1)$. Plus précisément : $x+y+z=0;\ x+2y+3z=0$, ce qui implique : $x=z;\ y=2z$ et $u=(1,-2,1)$ est un vecteur directeur.

3. La matrice suivante est-elle diagonalisable $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

Il est inutile de calculer les valeurs propres, car cette matrice correspond aux sous-espaces V_2 et V_3. Par conséquent la matrice admet trois valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable.

Exercice n° 7

1. Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et n entier naturel, on pose : $I_n(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 x^n \, Ln\, x \, dx$, où Ln désigne le logarithme népérien. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_n(\varepsilon)$

Par intégration par parties :

$$I_n(\varepsilon) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} Ln\, x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{n+1} dx = -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} Ln\,\varepsilon - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}$$ et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_n(\varepsilon) = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

2. Soit f une fonction numérique définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{Ln\, x}{x-1}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$.

La fonction f est continue et positive sur $]0,1[$. On a : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{Ln(1+t)}{t} = 1$, on peut donc prolonger la fonction par continuité en 1, en posant $f(1)=1$.

Au voisinage de zéro, la fonction est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (car $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\, f(x) = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0), par conséquent l'intégrale est convergente.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

On a : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$, donc

$\frac{Ln\, x}{x-1} = -\frac{Ln\, x}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n} x^k Ln\, x - \frac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x}$ et $\int_0^1 \frac{Ln\, x}{x-1} dx = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k Ln\, x\, dx - \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x} dx$

On a : $\left| \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x} dx \right| \le \int_0^1 x^n . \left| \frac{x\, Ln\, x}{1-x} \right| dx \le M \int_0^1 x^n\, dx = \frac{M}{n+1}$, car l'application $x \to \frac{x\, Ln\, x}{1-x}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et 1, donc bornée par M.

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x} dx = 0$, et la série de terme général $-\int_0^1 x^k Ln\, x\, dx$ converge.

D'où $\int_0^1 \frac{Ln\, x}{x-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 - x^k Ln\, x\, dx$ et d'après la première question

$$\int_0^1 \frac{Ln\, x}{x-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 - x^k Ln\, x\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq K_\varphi |x-y|$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \qquad (\star)$$

où $f \in \mathcal{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ F(x) &= \lambda^{-n} F(x-na) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) \end{aligned}$$

Le résultat est immédiat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
La fonction nulle appartient à $\mathcal{L}$. De plus, si f et g sont lipschitziennes de constantes K_f et K_g, la combinaison linéaire $\alpha f+\beta g$ est lipschitzienne de constante $|\alpha|K_f+|\beta|K_g$ car, par inégalité triangulaire,
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |\alpha f(x)+\beta g(x)-\alpha f(y)-\beta g(y)|\leq |\alpha|K_f|x-y|+|\beta|K_g|x-y|$$

3. Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f\in\mathcal{L}$ si et seulement si sa dérivée f' est bornée.
Supposons $f\in\mathcal{L}$. Alors pour tout $x\neq y$
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leq K_f$$
En faisant tendre $x\to y$, on obtient pour tout $x\in R$: $|f'(x)|\leq K_f$.
Réciproquement, si $|f'|$ est bornée par K, on a d'après l'inégalité des accroissements finis
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$$

4. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$. Montrer que le produit $f.g$ appartient à $\mathcal{L}$. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.
Soient f et g deux fonctions lipschitziennes bornées. Alors pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\\ &\leq ||\|f\|_\infty|g(x)-g(y)|+\|g\|_\infty|f(x)-f(y)|\\ &\leq (\|f\|_\infty K_g+\|g\|_\infty K_f)|x-y|\end{aligned}$$
Considérons $f:x\mapsto x$ et $g:x\mapsto\sin(x)$. Comme ces fonctions sont dérivables et lipschitziennes, il suffit d'étudier le caractère borné de $(fg)'$ pour conclure. Or $(fg)'(x)=(x+1)\sin(x)$ n'est pas bornée, ce qui fournit un contre exemple.

5. Soit $f\in\mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |f(x)|\leq A|x|+B$$
Soit $x_0\in\mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(x_0)|\leq K_f|x-x_0|$. Et
$$|f(x)|-|f(x_0)|\leq K_f|x|+K_f|x_0|$$
ce qui donne le résultat avec $A=K_f$ et $B=K_f|x_0|+|f(x_0)|$.

6. Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $0\leq x-y\leq 1$, on a
$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$
Démontrer que $f\in\mathcal{L}$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Quitte à permuter le rôle de x et y dans le calcul de $|f(x)-f(y)|$, on peut supposer $x-y\geq 0$. En notant $n=\lfloor x-y\rfloor$, la partie entière de$x-y$, il vient : $x=y+n+t$ avec $t\in[0,1[$. Et
$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(y+n)+f(y+n)-f(y+n-1)+\cdots+f(y+1)-f(y)|\leq M(t+1+\cdots+1)$$
c'est à dire $|f(x)-f(y)|\leq M(x-y)$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente.

   En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et que F est donnée par

   $$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$$

   Pour $x \in R$, on a $|f(x)| \leq A|x| + B$ d'après la partie précédente. D'où

   $$|\lambda|^n |f(x+na)| \leq |\lambda|^n (A|x+na| + B)$$

   qui est le terme général d'une série convergence (par comparaison avec la série géométrique de paramètre $|\lambda| < 1$ et sa série dérivée.
   Il suffit alors de constater que F est bien définie par ce qui précède, et qu'elle vérifie $(\star)$.
   L'unicité est acquise par la condition nécessaire de la question 1 (partie 1) et un calcul immédiat montre que F est lipschitzienne.

   (b) Déterminer F dans les cas suivants :

   $$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

   Pour f_1 on applique le calcul de la série géométrique pour obtenir $F_1(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$. Pour f_2, on utilise la même technique

   $$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (\exp(ix+ina) + \exp(-ix-ina)) \\ &= \frac{\exp(ix)}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \exp(ia))^n + \frac{\exp(-ix)}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \exp(-ia))^n \\ &= \frac{\exp(ix)}{2} \frac{1}{1-\lambda \exp(ia)} + \frac{\exp(-ix)}{2} \frac{1}{1-\lambda \exp(-ia)} \\ &= \frac{\exp(ix)(1-\lambda\exp(-ia)) + \exp(-ix)(1-\lambda\exp(ia))}{2(1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2)} \end{aligned}$$

   d'où $F_2(x) = \dfrac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2}$. Finalement on applique la même méthode pour la fonction f_3 pour obtenir $F_3(x) = \dfrac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2}$

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et que F est donnée par

   $$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$$

L'argument est identique aux questions précédentes, puisque $|\lambda|^{-1} < 1$.

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.

   (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$, il faut que f soit bornée.

   Soit F lipschitzienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x+a) = f(x)$. Alors

   $$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leq K_F|a|$$

   et il est donc nécessaire que f soit bornée.

   (b) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0$$

   Cette fonction est-elle unique ?

   Toute fonction $x \mapsto A\sin(\dfrac{2\pi x}{a})$ avec $A \in \mathbb{R}$ convient, une telle fonction n'est donc pas unique.

2. On suppose que $\lambda = -1$.

   (a) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0$$

   Cette fonction est-elle unique ?

   Comme précédemment, toute fonction $x \mapsto A\sin(\dfrac{\pi x}{a})$ convient.

   (b) On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.

   i. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$ converge.

   A x fixé, la suite $(f(x+n))$ est positive et décroissante vers 0. La série est donc convergente d'après le critère des séries alternées. On peut aussi simplement montrer que les suites des sommes partielles $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   ii. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et de limite nulle en $+\infty$.

   On pose comme à la question précédente $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$. Alors

   $$F(x+1) + F(x) = f(x)$$

   et par le théorème des séries alternées, $0 \leq F(x) \leq f(x)$ donc F est aussi de limite nulle en $+\infty$.

   Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x - y \leq 1$. Et $F(x) - F(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(f(x+n) - f(y+n))$.

L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de f et la croissance de f' donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x+n)-f(y+n) \leq (x-y)f'(x+n) \leq (x-y)f'(y+n+1) \leq f(x+n+1)-f(y+n+1) \leq 0.$$

$F(x) - F(y)$ apparait donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que $|F(x) - F(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq K_f(x - y)$. D'après la partie précédente, on peut en déduire que F appartient à $\mathcal{L}$. Soit enfin G une fonction de $\mathcal{L}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifiant $(\star)$. La fonction $G - F$ est 1-antipériodique et tend vers 0 en $+\infty$, donc est nulle. F est bien la seule solution dans $\mathcal{L}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

2 Problème 2

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc }.$$

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f.
   Soit $x \in \ker(P(f))$. Comme $P(f)$ et f commutent, on a $P(f)(f(x)) = f(P(f)(x)) = f(0) = 0$. Donc $f(x) \in \ker(f)$.

2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

Soit D une droite stable par f, c'est à dire $D = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. Comme D est stable, $f(u) \in D$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$, et u est un vecteur propre de f.

Réciproquement, si $D = \text{Vect}(u)$ avec u un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, alors $f(\mu u) = \mu\lambda u \in D$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Donc D est stable par f.

(b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

Les droites stables sont engendrées par des vecteurs propres de g. Le spectre de g est $\{1, 2\}$. On résout $g(x) = x$ ce qui donne $\text{Vect}(e_1)$ et $g(x) = 2x$ ce qui donne $\text{Vect}(e_3)$.

(c) Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.

i. Si $F_1, \ldots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$. On a, par linéarité de f :

$$f(x_1 + \cdots + x_p) = f(x_1) + \cdots + f(x_p) \in F_1 + \cdots + F_p$$

car les F_i sont stables par f.

ii. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \ldots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k \mathbf{id}_E)^{n_k}$$

est stable par f.

Comme $\ker(P(f))$ est stable par f, les $\ker(f - \lambda_k \mathbf{id}_E)^{n_k}$ sont stables par f. Et d'après la question précédente, leur somme est stable par f.

3. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \mathbf{id}_E$.

Soit F un sous-espace stable par f. Pour $x \in F$, $f(x) \in F$ et $\lambda x \in F$, donc $(f - \lambda\mathbf{id})(x) \in F$.

Réciproquement, si F est stable par $f - \lambda\mathbf{id}$, on a $f(x) - \lambda x \in F$ et $\lambda x \in F$ donc $f(x) \in F$.

(b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

Soit F stable par f. Alors $f(F) \subset F$, $f^2(F) \subset F$. F est donc stable par f^2. La réciproque est fausse (prendre une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une droite dans $\mathbb{R}^2$, stable par f^2 mais pas par f.

(c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

Soit F stable par f^{-1}. On a $f^{-1}(F) \subset F$ et $\dim(f^{-1}(F)) = \dim(F)$, car f^{-1} est un automorphisme. Donc $f^{-1}(F) = F$. Soit $x \in F$, il existe $y \in F$ tel que $x = f^{-1}(y)$. Et $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \in F$. Donc F est stable par f. Un raisonnement analogue montre que les sous espaces stables par f^{-1} sont exactement ceux qui sont stables par f.

(d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

Un tel endomorphisme f est une homothétie : en effet, f laisse stable toutes les droites. D'après la première question, elles sont donc dirigées par des vecteurs propres. De plus, si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (formant une famille libre),

$$f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda_u u + \lambda_v v$$

Et $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$ donc f admet une unique valeur propre, dont tout vecteur non nul est vecteur propre. C'est une homothétie.

(e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

Une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ convient.

4. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E.

Soit φ une forme linéaire non nulle. Son image est $\mathbb{R}$, de dimension 1. Donc d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$, c'est donc un hyperplan. Réciproquement, si H est un hyperplan, il existe un supplémentaire D de H dans E, et $H \oplus D = E$. Donc D est de dimension 1, c'est une droite vectorielle, de vecteur directeur $u \neq 0$. Dans ce cas, on définit une forme linéaire φ par $\varphi(u) = 1$ et $\varphi(h) = 0$ pour $h \in H$. Et $\ker(\varphi) = H$.

(b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \ker \varphi$.

i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

Supposons que H est stable par f. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ une droite supplémentaire de H dans E.

Soit $x \in \mathbb{E}$, $x = h + \alpha u$. Alors $f(x) = f(h) + \alpha f(u)$. En écrivant λu la projection de $f(u)$ sur D, il vient

$$\varphi(f(x)) = 0 + \alpha\lambda\varphi(u) = \lambda\varphi(x)$$

Réciproquement, si $\varphi \circ f = \lambda\varphi$, alors $\varphi(f(h)) = 0$ pour $h \in H$, c'est à dire $f(h) \in H$. D'où l'équivalence.

ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.

Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$${}^tA{}^tL = \lambda {}^tL.$$

C'est la formulation matricielle de la question précédente.

iii. Déterminer (en en donnant une base) les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Soit H un plan stable de $\mathbb{R}^3$: c'est un hyperplan, donc le noyau d'une forme linéaire φ. Avec les notations de la question précédente, il existe un réel λ vérifiant ${}^tB{}^tL = \lambda{}^tL$. Donc ${}^tL$ est un vecteur propre associé à ${}^tB$.
— Si $\lambda = 1$, on trouve $H = \text{Vect}(e_1, e_3)$.
— Si $\lambda = 2$, on trouve $H = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
et on vérifie que les deux plans trouvés conviennent.

Partie II

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, \dots, E_p$ les sous- espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?

   Comme f est diagonalisable et possède une unique valeur propre, c'est une homothétie. Donc tous les sous espaces de E sont stables par f.

2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.

   (a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité :
   $$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$
   Comme les E_i sont des sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, ils sont en somme directe et $\oplus_{i=1}^{p} E_i = E$ car f est diagonalisable.
   Pour un $x \in F$, en particulier $x \in E$, l'existence et l'unicité des x_i provient de la décomposition en somme directe de E.

   (b) Montrer que le vecteur $\displaystyle\sum_{k_2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k$ appartient à F.

   Comme $f(x) \in F$, on a
   $$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in F$$
   d'où $f(x) - \lambda_1 x = \displaystyle\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F$.

   (c) Montrer que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont tous dans F.

   Avec le résultat de la question précédente, on note $y = \displaystyle\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F$.

   Donc $f(y) = \displaystyle\sum_{k=2}^{p} \lambda_k(\lambda_k - \lambda_1)x_k$ et $f(y) - \lambda_2 y = \displaystyle\sum_{k=3}^{p} (\lambda_k - \lambda_3)(\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F$. Par une récurrence immédiate, on obtient $(\lambda_p - \lambda_{p-1}) \dots (\lambda_p - \lambda_1)x_p \in F$. Les valeurs propres étant distinctes, on a $x_p \in F$.

De même, par une récurrence descendante, on en déduit que les x_k appartiennent à F.

3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.

   Les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ sont stables par f. Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel stable par f, pour $x \in F$, x s'écrit de façon unique $\sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $x_k \in E_k$ pour tout k. On pose $F_k = F \cap E_k$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Alors, F_k est bien un sous-espace vectoriel de E_k, et par double inclusion, $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F.

   On note $\tilde{f} : x \mapsto f(x)$ l'endomorphisme de F induit par f. Alors, avec les notations de la questions précédente, les F_k sont les sous-espaces propres de $\tilde{f}$, et leur somme directe vaut F d'après ce qui précède. Donc $\tilde{f}$ est diagonalisable.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre ?

   Une CNS pour que E possède un nombre fini de sous espaces stables est $p = n$ (c'est à dire f possède n valeurs propres distinctes, associées à des espaces propres de dimension 1).

   En effet : si f possède n valeurs propres distinctes, comme les sous espaces stables sont formés de sommes de sous espaces des espaces propres, elle possède donc 2^n sous-espaces stables. (Les seuls sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension 1 sont l'espace lui-même et $\{0\}$.) Et, par contraposée, si $p < n$, comme f est diagonalisable, elle admet au moins un sous-espace propre de dimension ≥ 2, qui admet une infinité de sous-espaces vectoriels. Donc f admet une infinité de sous-espaces stables.

Partie III

1. On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n, c'est à dire vérifiant les conditions :

$$f^n = \mathbf{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$

   (a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) vaut 1 si $j = i+1$ et 0 sinon.

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe un $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On considère la famille $(f^{n-1}(x), \ldots, f(x), x)$.

C'est une famille libre (car si $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x) = 0$, en composant par f^{n-1} , f^{n-2} ..., on trouve que les α_i sont tous nuls) qui possède n vecteurs, c'est donc une base. L'écriture de la matrice de f dans cette base s'en suit.

(b) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Soit F un sous-espace de E stable par f non réduit à $\{0_E\}$. Avec les notations des questions précédentes, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Donc les F_k sont stables par f. Montrons que F est l'un des F_k. On note i l'indice minimal tel que $F \subset F_i$. Cet indice existe car $F \subset F_n$.

— Si $i = 1$, alors $F = F_1$ et c'est terminé.

— Sinon $i > 1$ et il existe $u \in F \setminus F_{i-1}$, d'où l'écriture $u = \sum_{k=1}^{i} u_k e_k$ avec $u_i \neq 0$. Alors $G := \text{Vect}\{f^k(u) : k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace stable qui contient $e_1 = \dfrac{f^{i-1}(u)}{u_i}$, donc également $e_2 = \dfrac{f^{i-2}(u) - u_{i-1}e_1}{u_i}$ et ainsi de suite jusqu'à $e_{i-1} = \dfrac{f(u) - \sum_{j=1}^{i-2} u_{j+1}e_j}{u_i}$. Donc F_{i-1} est un sous-espace vectoriel strict de G (car $u \in G \setminus F_{i-1}$ donc $\dim G > i-1$), lui-même étant un sous-espace vectoriel de F donc $\dim F \geq i = \dim F_i$ ce qui prouve que $F = F_i$.

2. Dans cette question on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.

(a) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$. Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \ker f$.

Soit $y \in f(F_2)$. Il existe $x \in F_2$ tel que $f(x) = y$ et $f(f(x)) = f(y) = 0$. Donc $y \in \ker f$.

(b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

On a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc la somme est directe. Et si $x = x_1 + x_2 \in F_1 + F_2$, alors

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) \in f(F_2) \subset F_1$$

Donc $F_1 + F_2$ est stable par f.

(c) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, montrer l'inclusion suivante :

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

A-t-on nécessairement l'égalité ?

L'inclusion est banale. On n'a pas nécessairement égalité : prendre dans $\mathbb{R}^2$ $A = \text{Vect}(e_1)$, $B = \text{Vect}(e_2)$ et $C = \text{Vect}(e_2 + e_2)$.

(d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \ker f$.

$(F_1 + F_2) \cap \ker f = F_1$

(e) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F. Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \ker f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \ker f$ est réduite au vecteur nul.

$f(F) \subset f(E) \subset \ker(f)$. Et $F_2 \subset F$ donc $F_2 \cap \ker f \subset F \cap \ker f = F_1$. Ainsi $F_2 \cap \ker f \subset F_2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe selon les valeurs de n.

La fonction f_n est définie sur R.

Si n est pair, la fonction f_n est paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Si n est impair, la fonction f_n est impaire et son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Il suffit d'étudier la fonction sur l'ensemble des nombres réels positifs.

La dérivée est : $f_n'(x) = \dfrac{n\,x^{n-1}(n+(n+1)x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, la fonction est donc strictement croissante de R^+ sur R^+. Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy et une tangente horizontale à l'origine (pour n>1). Si n = 1, la pente à l'origine est 1.

2. On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ (avec $n \geq 0$)

- Calculer J_1 et J_2

On a : $J_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

On a : $J_2 = \int_0^1 x.x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\,dx$ (intégration par parties). D'où $J_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3}(J_0 + J_2)$, soit $J_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{4}J_0$.

Il reste à calculer J_0.

$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$, on pose $x = sh\, t$.

On rappelle que $ch^2 t - sh^2 t = 1$, $(sh\, t)' = ch\, t$ et $Argsh\, t = Ln\,(x + \sqrt{1+x^2})$.

On obtient $J_0 = \int_0^{Argsh\, 1} ch^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{Ln\,(1+\sqrt{2})} (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t\right]_0^{Ln\,(1+\sqrt{2})}$ et

$$J_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2} + 2\, Ln\,(1+\sqrt{2})\right)$$

3. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$

On a : $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^n (x-1)\sqrt{1+x^2}\, dx < 0$. La suite est donc décroissante et minorée par zéro, donc elle est convergente.

- Déterminer la limite de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ si elle est convergente.

Soit $0 < \varepsilon < 1$ quelconque fixé, on a : $J_n = \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\, dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x)\, dx$ et

$0 < \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\, dx \leq \sqrt{2}\,(1-\varepsilon)^{n+1}$ qui tend vers zéro quand *n* tend vers l'infini.

$0 < \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x)\, dx \leq \sqrt{2}\,\varepsilon$. Par conséquent la suite tend vers zéro.

Exercice n° 2

On considère dans R^3 , le plan P_a d'équation : $z = x + ay$, où a est un nombre réel quelconque.

1. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice M_a de la projection orthogonale sur P_a.

La matrice M_a est diagonalisable et semblable à la matrice $\Delta_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base formée d'une base de P_a, à savoir $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,a)$, et de son orthogonal, à savoir $e_3 = (1,a,-1)$. La matrice de passage s'écrit $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ et son inverse

$$Q_a^{-1} = \frac{-1}{2+a^2}\begin{pmatrix} -1-a^2 & a & -1 \\ a & -2 & -a \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient : $M_a = Q_a \Delta_a Q_a^{-1} = \dfrac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} 1+a^2 & -a & 1 \\ -a & 2 & a \\ 1 & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$

2. Calculer M_a^n pour tout entier n strictement positif.

Comme toute matrice de projection : $M_a^n = M_a$

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice S_a de la symétrie orthogonale par rapport à P_a.

On procède comme pour la première question. La matrice semblable à S_a est $\Delta_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (dans la même base) et $S_a = Q_a \Delta_S Q_a^{-1} = \dfrac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} a^2 & -2a & 2 \\ -2a & 2-a^2 & 2a \\ 2 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$

4. Calculer le produit $M_a S_a$.

Il est évident géométriquement que $M_a S_a = M_a$

Exercice n° 3

Soient A et B deux matrices carrées de même ordre à coefficients réels.

1. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}

a) Si A et B sont inversibles, on a : $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ et $B^{-1}B = BB^{-1} = I$. Puis $A\,B\,B^{-1}A^{-1} = A(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$, donc le produit est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

b) Réciproquement, si AB est inversible, alors il existe $\det(AB) = \det A \times \det B \neq 0$ et les deux déterminants sont non nuls, ce qui implique l'inversibilité de ces deux matrices.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si $A^p\,(p \in N^*)$ est inversible et dans ce cas, exprimer $(A^p)^{-1}$ en fonction de A^{-1}.

a) Supposons que A soit inversible, alors $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

On a : $A^p\,(A^{-1})^p = A^{p-1}(A\,A^{-1})(A^{p-1})^{-1} = A^{p-1}\,I\,(A^{p-1})^{-1}$ et de proche en proche $AA^{-1} = I$, donc $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ (l'inverse d'une matrice étant unique).

b) Réciproquement, si A^p est inversible, alors $\det(A^p) = p\det A \neq 0$ et la matrice est inversible.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in R$

- Calculer A^n pour tout entier naturel n.

En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient : $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par récurrence on obtient : $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha & 0 \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculer (si elle existe) l'inverse de *A*.

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on peut vérifier que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

- Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.

Si $(A^n)^{-1}$ existe, alors $(A^n)(A^n)^{-1} = I$ et on montre par récurrence que : $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha & 0 \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 4

On définit une suite d'entiers naturels $q_k\ (k \in N)$ par $q_{k+1} = 2q_k + 1$ et $q_0 = 0$

1. Exprimer q_k en fonction de *k*.

On a $q_1 = 1; q_2 = 3; q_3 = 7$ et on vérifie par récurrence que $q_k = 2^k - 1$

2. On note $Q = \{q_k \,/\, k \in N\}$ et on définit la suite (a_n) par :

$a_0 = 1; a_{q_k} = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} q_i}; a_n = 0$ si $n \notin Q$ .Quelle est la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$?

On a $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}-1} = 0$ et d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum a_{q_k}$ converge et donc $\sum a_n$ converge. Pour $k \geq 1$, $q_{k+1}\, a_{k+1} = a_k$ et donc la série $\sum n a_n$ converge.

3. Pour *x*>1, calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{q_k} x^{q_k}$

On a $\dfrac{a_{q_{k+1}} x^{q_{k+1}}}{a_{q_k} x^{q_k}} = \dfrac{1}{2^{k+1}-1} x^{2^{k+1}-2^k} \approx \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^{2^k}}{2^k} \to \infty$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{q_k} x^{q_k} = +\infty$

4. On considère la suite (p_n) définie par : $p_0 = p \in]0,1[; p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Etudier la convergence de la suite (p_n).

La suite est positive et majorée par 1 et on a : $p_{n+1} - p_n = \sqrt{p_n}(\sqrt{p_n} - 1) > 0$, elle est donc croissante et par conséquent convergente vers une limite l solution de l'équation : $l = \sqrt{l}$, d'où l=1

5. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + p_{k+1} - p_k)$

On a $(1 + p_{k+1} - p_k) \geq 1$, donc $Ln(1 + p_{k+1} - p_k) \geq 0$. La suite $(Ln\, v_n)$ est croissante.

Par ailleurs, $Ln(1 + p_{k+1} - p_k) \leq p_{k+1} - p_k$ et

$Ln\prod_{0}^{n}(1 + p_{k+1} - p_k) = \sum_{0}^{n} Ln(1 + p_{k+1} - p_k) \leq \sum_{0}^{n}(p_{k+1} - p_k) = p_{n+1} - p_0 \leq 1$. La suite $(Ln\, v_n)$ étant croissante et majorée, elle converge et il en est de même pour la suite (v_n).

Exercice n° 5

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On considère Q l'application numérique définie sur E_n par :

$$Q(p) = \int_{-1}^{1} p^2(x)(1 + x^2)\,dx$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, dont la forme bilinéaire associée définit sur E_n un produit scalaire.

$\forall\, p, p_1 \in E_n, B(p, p_1) = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, p_1^2(x)(1 + x^2)\,dx$ et B est bilinéaire symétrique car l'intégrale est linéaire. De plus :

$\forall\, p \in E_n, B(p, p) = \int_{-1}^{1} p^4(x)\;(1 + x^2)\,dx \geq 0$ et $B(p, p) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \;\; \forall\, x \in [-1,1]$

On a donc un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une base orthogonale p_i $(i = 0,1,...n)$ de E_n telle que le terme de plus haut degré de p_i soit X^i.

On a $\dim E_n = n + 1$.

(p_i) est une base orthogonale si et seulement si $\forall\, i \neq j, B(p_i, p_j) = 0$.

On pose $p_0(x)=1, p_1(x)=x$ (on vérifie aisément qu'ils sont orthogonaux pour ce produit scalaire, en effet : $B(p_0,p_1)=\int_{-1}^{1} x\,(1+x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=0$

On cherche p_2 de la forme $p_2(x)=x^2+\alpha x+\beta$ avec

$B(p_0,p_2)=0\ (\Rightarrow \beta=-2/5)$ et $B(p_1,p_2)=0\ (\Rightarrow \alpha=0)$, on obtient $p_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$.

On suppose $p_0,...,p_{i-1}$ déterminés et on cherche p_i de la forme $p_i(x)=x^i+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k\ p_k$ et vérifiant : $B(p_i,p_k)=\int_{-1}^{1}(x^i\ p_k(x)+\alpha_k\ p_k^2(x))(1+x^2)\,dx=0,\ \forall k=0,...,i-1$

Ceci donne une équation affine qui permet de déterminer les α_k de façon unique et donc p_i

3. Pour $i\in\{0,1,...n-2\}$, on note F_i le sous espace de E_n engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à *i*. Déterminer une base du sous espace $F_i^{\perp}$ orthogonal à F_i

F_i admet comme base les polynômes $\{p_0,...,p_{i-1}\}$ et d'après la question précédente $\{p_i,...,p_n\}$ constituent une base de $F_i^{\perp}$

4. Montrer que $p_{i+2}-X\ p_{i+1}$ appartient à $F_i^{\perp}$. En déduire une relation entre $p_{i+2},\ p_{i+1},p_i$

$p_{i+2}-X\ p_{i+1}\in F_i^{\perp}\Leftrightarrow p_{i+2}-X\ p_{i+1}\perp p_k\ \forall k=0,...,i-1$. Il suffit de vérifier que $X\ p_{i+1}\perp p_k$, car $p_{i+2}\in F_i^{\perp}$. On a : $B(X\ p_{i+1},X^k)=\int_{-1}^{1}x^{k+1}\ p_{i+1}(x)(1+x^2)\,dx\ \ \forall k=0,...,i-1$ ou encore $B(X\ p_{i+1},X^k)=\int_{-1}^{1}x^{k'}\ p_{i+1}(x)(1+x^2)\,dx=0,\ \forall k'=1,...,i$, ce qui implique

$p_{i+2}-X\ p_{i+1}=\lambda_0\ p_i+...+\lambda_{n-i}\ p_n$. Comme $p_{i+3},...,p_n$ sont orthogonaux à p_{i+2} et $X\ p_i$, il s'ensuit que : $\lambda_3=\lambda_4=...=\lambda_{n-i}=0$, donc $p_{i+2}-X\ p_{i+1}=\lambda_0\ p_i+\lambda_1\ p_{i+1}+\lambda_2\ p_{i+2}$ et par identification, on obtient $\lambda_2=0$ et avec la parité $\lambda_1=0$;

En conclusion $p_{i+2}=X\ p_{i+1}+\lambda_0\ p_i$

5. On suppose *n*=2.

- Ecrire la matrice *M* de la forme bilinéaire symétrique associée à *Q* dans E_2

On a :

$$B(1,1)=\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx=8/3$$

$$B(x,x)=B(1,x^2)=\int_{-1}^{1}(x^4+x^2)\,dx=16/15$$

$B(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1}(x^4+x^6)\,dx=24/35$, par conséquent $M=\frac{8}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/5\\ 0 & 2/5 & 0\\ 2/5 & 0 & 9/35\end{pmatrix}$

- La matrice *M* est-elle inversible ?

M étant une matrice symétrique définie positive, donc son déterminant est non nul et elle est inversible

- La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de ses éventuelles valeurs propres ?

Comme elle est symétrique, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives (matrice définie positive).

6. Répondre à la question précédente dans le cas où n=3.

Il suffit simplement de compléter les calculs :

$B(1,x^3) = B(x^2,x^3 = 0;\ B(x,x^3) = B(x^2,x^2) = 24/35;\ B(x^3,x^3) = 32/63$, on en déduit la matrice N associée qui est inversible et diagonalisable :

$$N = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 16/15 & 0 \\ 0 & 16/15 & 0 & 24/35 \\ 16/15 & 0 & 24/35 & 0 \\ 0 & 24/35 & 0 & 32/63 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$. Etudier les variations de g et tracer son graphe (on précisera ses extrema, ainsi que sa convexité). La fonction étant paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble des réels positifs et son graphe sera symétrique par rapport à l'axe Oy. On a :

$$g'(x) = (-x^3 + 3x)e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ et } g''(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)e^{-x^2/2}$$

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+		-	
$g(x)$	-1	↗	$2e^{-3/2}$	↘	0

La fonction admet donc 3 extrema en $x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 3 = 0$ (équation bicarrée). On a 4 points d'inflexion dont les abscisses sont $x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$. On cherchera des solutions de la forme $y(x) = u(x)e^{-x^2/2}$

On a $y' = e^{-x^2/2}(u' - xu);\ y'' = e^{-x^2/2}(u'' - 2xu' + (x^2 - 1)u)$ et en remplaçant dans l'équation différentielle proposée, on obtient : $u''e^{-x^2/2} = 0$, soit $u'' = 0$ et $u(x) = ax + b$. Par conséquent $y(x) = (ax + b)e^{-x^2/2}$

3. On considère les fonctions numériques $f_{a,b}$ définies par $f_{a,b}(x)=(ax+b)e^{-x^2/2}$, où a et b sont deux nombres réels. On note $C_{a,b}$ leurs courbes représentatives. Montrer que pour a fixé non nul, les fonctions $f_{a,b}$ admettent des extrema et que les points correspondants à ces extrema sur $C_{a,b}$ appartiennent à un ensemble M_a. Représenter M_1. Comment M_a se déduit de M_1 ?

On a $f'_{a,b}(x)=(-ax^2-bx+a)e^{-x^2/2}$ et cette dérivée est nulle pour $ax^2+bx-a=0$ et comme $\Delta=b^2+4a^2>0$, on a deux racines réelles distinctes de signe contraire qui donnent des extrema à la fonction $f_{a,b}$ puisque $\underset{x\to\pm\infty}{Lim} f_{a,b}(x)=0$ (le résultat est le même pour a>0 ou a<0). Les points correspondants à ces extrema vérifient : $\begin{cases} y=(ax+b)e^{-x^2/2} \\ (-ax^2-bx+a)e^{-x^2/2}=0 \end{cases}$

En multipliant la première équation par x et en additionnant, on obtient : $y=a\dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$

Pour M_1, on a : $y=\dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$ et $y'=-\dfrac{(x^2+1)e^{-x^2/2}}{x^2}<0$. La fonction est impaire, donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine, la fonction est strictement décroissante de R^+ sur R^+ et les axes sont des asymptotes à la courbe. M_a se déduit de M_1 par homothétie.

4. Montrer que pour a fixé non nul, les courbes $C_{a,b}$ admettent trois points d'inflexion dont l'un est d'abscisse comprise entre -1 et 1.

La dérivée seconde de $f_{a,b}$ est $f''_{a,b}(x)=(ax^3+bx^2-3ax-b)e^{-x^2/2}$. Etudions le signe du polynôme $P(x)=ax^3+bx^2-3ax-b$. On a : $P(-1)=2a;P(1)=-2a$. Ces deux valeurs sont de signe opposé. Le résultat sera le même pour a>0 ou a<0. Pour a>0, le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P(x)$			+				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-	↗	

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a bien 3 points d'inflexion.

5. Ces points d'inflexion appartiennent pour a fixé et b variable à un ensemble noté I_a Représenter I_1. Comment I_a se déduit de I_1 ?

Ces points d'inflexion vérifient : $\begin{cases} y=(ax+b)e^{-x^2/2} \\ (ax^3+bx^2-3ax-b)e^{-x^2/2}=0 \end{cases}$

On multiplie la première équation par (x^2-1) et on soustrait les deux lignes pour obtenir : $(x^2-1)\,y = 2a\,x\,e^{-x^2/2}$, à savoir $y = \dfrac{2a\,x\,e^{-x^2/2}}{(x^2-1)}$ $(x \neq \pm 1)$.

Pour a=1, $y = \dfrac{2\,x\,e^{-x^2/2}}{(x^2-1)}$ $(x \neq \pm 1)$ et $y' = \dfrac{-2\,(x^4+1)\,e^{-x^2/2}}{(x^2-1)^2} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante de $]-\infty,-1[$ sur R^-, de $]-1,1[$ sur R et de $]1,+\infty[$ sur R^+. Les axes x=-1 et x=1 sont des asymptotes verticales et l'axe Ox une asymptote horizontale.

I_a se déduit de I_1 par homothétie.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit d un entier égal à 1 ou 2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

Le but du problème est de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) = f(x + z, y + z), \qquad (T)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) + f(y, z) = f(x, z), \qquad (A)$$

c'est-à-dire les fonctions continues invariantes par translation diagonale et additives au sens de (A).

Partie I - Étude de l'invariance par translation

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (T), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f, g \in \mathcal{T}_2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

   $$(\lambda f + g)(x, y) = \lambda f(x, y) + g(x, y) = \lambda f(x + z, y + z) + g(x + z, y + z) = (\lambda f + g)(x + z, y + z).$$

   De plus cet ensemble est non vide, car il contient la fonction identiquement nulle.

2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, x) = f(y, y).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors en posant $z = y - x$ on obtient

$$f(x, x) = f(x + (y - x), x + (y - x)) = f(y, y).$$

3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_2$, la fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} |f(x, y)| & si \quad x < y, \\ |f(y, x)| & si \quad x \geq y. \end{cases} \end{array}$$

est encore invariante par translation diagonale, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $z \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ alors on a

$$g(x, y) = |f(x, y)| = |f(x + z, y + z)| = g(x + z, y + z)$$

car $x + z < y + z$. Si $x \geq y$, on applique le même calcul. On remarque que les valeurs absolues ne perturbent aucunement le calcul.

4. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(0, z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f et $g \in \mathcal{T}_2$, soit $z \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\Phi(\lambda f + g)(z) = (\lambda f + g)(0, z) = \lambda f(0, z) + g(0, z) = \lambda \Phi(f)(z) + \Phi(g)(z).$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a bien $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$.

5. Calculer le noyau $\mathcal{K}$ et l'image $\mathcal{I}$ du morphisme Φ.
Le noyau $\mathcal{K}$ est l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{T}_2$ telles que $f(0, z) = 0$ quelque soit le réel z. Or $f(0, z) = f(x, z + x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction f vérifie qu'elle est identiquement nulle sur toutes les droites $D_z : y = z + x$. Or ces droites recouvrent tout le plan $\mathbb{R}^2$, donc f est identiquement nulle. Le noyau est réduit à l'élément nul.
Soit maintenant h une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & h(y - x) \end{array}$$

alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $f(x + z, y + z) = h(y + z - (x + z)) = h(y - x) = f(x, y)$ donc $f \in \mathcal{T}_2$. Donc $\Phi(f) = h$, et Φ est surjectif. L'image de Φ est $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. Montrer que le morphisme Φ induit un isomorphisme linéaire du quotient $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{I}$. Calculer l'inverse Ψ de cet isomorphisme. Dans la définition de Ψ, on pourra identifier la fonction f à son représentant dans $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sans perte de généralité.

   La construction est naturelle. Comme Φ était déjà un isomorphisme, sa réciproque est évidemment

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \to & \mathcal{T}_2/\mathcal{K} \\ h & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(y-x). \end{array} \end{array}$$

   La question reste toutefois indépendante de la question précédente, car on peut trouver la réciproque sans avoir exhibé le noyau ou l'image. En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\Psi(h)(x,y) = \Psi(h)(0,y-x)$ par (T) et $\Psi(h)(0,y-x) = \Phi(\Psi(h))(y-x) = h(y-x)$.

7. Soit a un nombre réel. Montrer que l'application

$$\Phi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z,a\ z) \end{array} \end{array}$$

   définit un morphisme d'espace vectoriel quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

   La démonstration est semblable à la question 4.

8. Lorsque $a \neq 1$, précisez si ce morphisme est injectif ou surjectif. Si $a = 0$ alors à symétrie près, c'est l'isomorphisme précédent. Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors soit f dans le noyau, on a $f(z,az) = f(0,(a-1)z)$ quelque soit le réel z, donc f est nulle sur l'axe des ordonnées et invariante par translation, donc elle est nulle partout et c'est encore un morphisme injectif. Il est également surjectif car sa réciproque est donnée par

$$\Psi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{T}_2 \\ h & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h\left(\dfrac{y-x}{a-1}\right). \end{array} \end{array}$$

   En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\Psi_a(h)(x+z,y+z) = h\left(\frac{y+z-(x-z)}{a-1}\right) = h\left(\frac{y-x}{a-1}\right) = \Psi_a(h)(x,y),$$

   donc $\Psi_a(h) \in \mathcal{T}_2$. Et on a bien pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Psi_a(\Phi_a(f))(x,y) &= \Phi_a(f)\left(\frac{y-x}{a-1}\right) = f\left(\frac{y-x}{a-1}, a\frac{y-x}{a-1}\right) \\ &= f\left(\frac{y-x}{a-1} - \frac{y-x}{a-1} + x, a\frac{y-x}{a-1} - \frac{y-x}{a-1} + x\right) \\ &= f\left(x, \frac{ay-ax-y+x+x(a-1)}{a-1}\right) \\ &= f\left(x, \frac{ay-ax-y+x+x(a-1)}{a-1}\right) = f(x,y). \end{aligned}$$

9. Montrer qu'il existe un réel a^* tel que $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathrm{a}^*})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
   Si $a = 1$, on voit que $f(z,z) = f(0,0)$ par (T) donc $\Phi_1(f)(z) = f(z,z) = f(0,0)$ est une constante pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc l'image du morphisme est l'ensemble des fonctions constantes. Le a^* recherché est $a^* = 1$.
10. Quel est le noyau de Φ_{a^*} ?
    Le noyau est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0,0) = 0$. Par invariance par translation, ce sont donc les fonctions qui valent 0 sur la diagonale principale de $\mathbb{R}^2$.

Partie II - Étude de l'additivité.

11. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (A), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
    Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f, g \in \mathcal{A}_2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a
    $$(\lambda f+g)(x,y)+(\lambda f+g)(y,z) = \lambda f(x,y)+\lambda f(y,z)+g(x,y)+g(y,z) = \lambda f(x,z)+g(x,z) = (\lambda f+g)(x,z).$$
    De plus cet ensemble est non vide, car il contient la fonction identiquement nulle.
12. Soit $f \in \mathcal{A}_2$. Montrer que la fonction f vérifie
    $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,x) = 0.$$
    Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,x)+f(x,y) = f(x,y)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,x) = 0$.
13. On suppose que $f \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}_2$. Montrer que la suite
    $$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$
    converge quand $N \to +\infty$. Calculer sa limite.
    C'est une somme télescopique, donc $S_N(f) = f\left(\frac{1}{N+1}, 1\right)$ qui converge vers $f(0,1)$ car f est continue.
14. On suppose que f est positive, montrer que la fonction f est croissante par rapport à chacune de ces variables.
    Soient $(x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < x$ et $b < y$ alors
    $$f(x,y) = f(a,y) + f(x,a) \geq f(a,y) \quad \text{ et } \quad f(x,y) = f(x,b) + f(b,y) \geq f(x,b)$$
    donc f est bien croissante par rapport à sa première et sa deuxième variable.

Partie III - Étude des fonctions continues vérifiant (T) et (A).

Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0,1).$$

Par additivité et translation

$$f(0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right) = nf\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

16. Montrer pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

Par additivité et translation

$$f\left(x, x+\frac{m}{n}\right) = f\left(0, \frac{m}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right) = mf\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0,x) = xf(0,1)$.
Par continuité et densité de $\mathbb{Q}$, la question précédente montre que $f(0,x) = xf(0,1)$ pour les $x \geq 0$. Pour les $x < 0$, il faut utiliser $f(0,-y) = -f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

18. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x)f(0,1)$.
C'est évident par invariance par translation.

19. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$, la suite suivante est convergente

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) f\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

Avec le résultat précédent c'est

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N} f(0,1)$$

puisque g est continue, elle est bornée sur $[0,1]$, d'où $|S_N(g,f)| \leq \|g\|_\infty |f(0,1)|$ et la série est même absolument convergente.

20. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$, on a $S_N(g,f) \to f(0,1)\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ quand $N \to +\infty$.
C'est une somme de Riemann. Précisément c'est la méthode des rectangles à gauche.

21. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ on définit la quantité suivante pour tout $x \in [0,1]$

$$D_N(g)(x) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N \mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x).$$

Montrer que la fonction $D_N(g)$ est bornée sur $[0,1]$ uniformément par rapport à $N \in \mathbb{N}^*$.
Au point $x \in [0,1]$, quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$ la série n'est en fait constituée que d'un seul terme. L'unique terme de la série est l'accroissement de la fonction g autour du point x. Par le théorème des accroissements finis,

$$\left|\left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N\right| \leq \sup_{x\in\left[\frac{k}{2^N},\frac{k+1}{2^N}\right]} |g'(x)| \leq \|g'\|_{\infty,[0,1]}.$$

22. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $D_N(g)(x) \to g'(x)$.
Quel que soit x, et quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $K_{x,N}$ tel que $x \in [K_{x,N}2^{-N}, (K_{x,N}+1)2^{-N}[$. Donc $D_N(g)(x) = \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N$. Avec

$$\begin{aligned}
& \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N - g'(x) \\
= & \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)\right) 2^N + \left(g(x) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N \\
= & \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)\right) 2^N + \left(g(x) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N \\
- & g'(x)((K_{x,N}+1)2^{-N} - x + x - K_{x,N}2^{-N})2^N \\
= & \left[g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x) - g'(x)((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)\right] 2^N \\
- & \left[g(K_{x,N}2^{-N}) - g(x) - g'(x)(K_{x,N}2^{-N} - x)\right] 2^N \\
= & \left[\frac{g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)}{((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)} - g'(x)\right] ((K_{x,N}+1) - x2^N) \\
- & \left[\frac{g(K_{x,N}2^{-N}) - g(x)}{(K_{x,N}2^{-N} - x)} - g'(x)\right] (K_{x,N} - x2^N)
\end{aligned}$$

Comme $|K_{x,N}2^{-N} - x| \leq 2^{-N}$ et $|(K_{x,N}+1)2^{-N} - x| \leq 2^{-N}$, on peut conclure en remarquant que chaque terme est similaire à un reste d'ordre 2 d'un développement de Taylor. Mais comme la fonction n'est pas deux fois dérivable, il faut préciser que $\left[\frac{g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)}{((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)} - g'(x)\right]$ converge vers 0 et que $((K_{x,N}+1) - x2^N)$ est bornée par 1. Donc le produit tend vers 0. Le deuxième terme se traite de la même manière.

23. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$ non-nulle, calculer la limite de

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right) f\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) / f(0,1)$$

en fonction de f et g.

Avec le résultat précédent c'est

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right)\frac{1}{2^N}$$

qui converge vers $\int_0^1 g'(x)dx = (g(1)-g(0))$.

24. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la quantité

$$R_N(g,f) = \int_0^1 D_N(g)(x)dx - I_N(g,f).$$

converge vers 0 quand $N \to +\infty$.

En calculant l'intégrale de $D_N(g)$ on trouve une somme télescopique qui vaut $g(1)-g(0)$. Puisque $I_N(g,f)$ converge vers $g(1)-g(0)$, c'est évident.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des commutateurs de deux éléments dans les espaces vectoriels. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E.

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec la notation $\circ$ pour définir la composition, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f\circ f, \quad f^3 = f\circ f\circ f, \text{ etc .}$$

et on définit $[f,g]$ le commutateur de f et g par la quantité

$$[f,g] = f\circ g - g\circ f.$$

Pour $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un élément de E noté en ligne, on note x^T sa transposée qui forme donc un vecteur colonne. Cette notation s'applique également à tout autre élément de E apparaissant dans la suite de l'énoncé. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

1. Soit une suite de réels $a_{2k} = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k+1} = 0$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

La série décrit $\dfrac{1}{1-(\sqrt{2}x)^2}$. On peut appliquer la règle de Cauchy. Le rayon vaut $1/\sqrt{2}$.

2. Soit une suite de complexes $a_k = \dfrac{(-i)^k(k+i)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

C'est un résultat classique. Par le critère de d'Alembert, le rayon est infini.

3. Montrer que $[f, g]$ est un endomorphisme de E.
Soient x et $y \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned}[f,g](x+\lambda y) &= f(g(x+\lambda y)) - g(f(x+\lambda y)) \\ &= f(g(x)) + \lambda f(g(y)) - g(f(x)) - \lambda g(f(y)) = [f,g](x) + \lambda[f,g](y).\end{aligned}$$

4. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série entière donnée sans coefficient nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ par

$$P_k(X) = a_k X^k.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si $[f, g] = \mathbf{0}_E$, il existe une suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$$

$P_N(f+g) = a_N \displaystyle\sum_{k=0}^{N} C_N^k f^k \circ g^{N-k}$ donc $P_N(f+g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_N C_N^k \frac{1}{a_k}\frac{1}{a_{N-k}} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$.

5. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f, g] = \mathbf{0}_E$. Montrer que $b_{k,N} = 1$ pour tout k et pour tout $N \in \mathbb{N}$.
Avec le calcul précédent

$$b_{k,N} = \frac{1}{N!}\frac{N!}{k!(N-k)!}k!(N-k)! = 1.$$

6. Dans le cas $a_k = \frac{1}{k!}$ et $[f,g] \neq \mathbf{0}_E$. Montrer que $P_2(f+g) - \sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}[g,f]$.

   On a

   $P_2(f+g) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f \circ g + \frac{1}{2}g \circ f + \frac{1}{2}g^2 = P_2(f) + \frac{1}{2}P_1(f) \circ P_1(g) + \frac{1}{2}P_1(g) \circ P_1(f) + P_2(g)$

   donc

   $$P_2(f+g) - \sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}P_1(g) \circ P_1(f) - \frac{1}{2}P_1(f) \circ P_1(g) = \frac{1}{2}[g,f].$$

7. Montrer que $F_N = \sum_{k=0}^{N} P_k(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers un endomorphisme.

   La suite est de Cauchy. On choisit une norme sur $\mathcal{L}(E,E)$ qui soit multiplicative et on a

   $$\|F_N(f) - F_{N+p}(f)\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \|f^k\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \|f\|^k$$

   qui est majoré par le reste d'une série absolument convergente (la fonction exponentielle).

Partie II

8. Soit x un élément non nul de E et y un élément de E. Montrer qu'il existe au moins une matrice réelle M_0 de taille $n \times n$ tels que

   $$M_0 \; x^T = y^T$$

   Soit i un indice tel que $x_i \neq 0$ alors une matrice en colonne i avec des coefficients y_j/x_i convient.

9. Montrer que le choix de la matrice n'est pas unique si $n \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, et deux matrices réelles distinctes M et N de tailles $n \times n$ telles que

   $$Mz^T = Nz^T.$$

   Prendre deux matrices M et N telles que $Ker(M-N)$ n'est pas réduit à l'élément nul. Par exemple pour tout $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, les matrices $M = ||z||^2 \mathbf{id}_E$ et $N = z^T z$ conviennent.

10. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une matrice M de taille $n \times n$ telle que pour tout $y \in E$,

    $$My^T = f(y)^T.$$

    C'est la matrice canonique de l'endomorphisme. Les questions précédentes tentent de tester le candidat sur l'ordre des quantificateurs.

11. Montrer que la matrice construite à la question précédente est unique. Pour chaque endomorphisme f de E, on notera alors M_f la matrice associée par la construction précédente.
    Soit M et N deux matrices qui conviennent alors pour tout $x \in \mathbb{E}$ $(M-N)x^T = 0$, donc $Ker(M-N) = E$. Par le théorème du rang, la matrice $M-N$ a donc pour image $\{0\}$, c'est donc bien la matrice nulle.

12. Montrer que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} (\text{Endomorphismes}(E), +, \circ) & \longrightarrow & (\text{Matrices réelles de taille } n \times n, +, \times) \\ f & \mapsto & \Phi(f) = M_f \end{array} \right.$$

est un morphisme d'anneau.

$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$ et la question précédente.

13. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$\Phi([f,g]) := M_{[f,g]} = M_f \times M_g - M_g \times M_f.$$

On utilise la question précédente sur le morphisme d'anneau.

Partie III

Pour f un endomorphisme de E, on note C_f l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $M_{[f,g]}$ est la matrice identiquement nulle, c'est-à-dire

$$C_f := \{g : E \to E \text{ endomorphisme } : M_f \times M_g = M_g \times M_f\}.$$

14. Pour $f = \mathbf{id}_E$, montrer que $C_{\mathbf{id}_E}$ est constitué de l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$.

Toute matrice commute avec l'identité.

15. Montrer que C_f est un sous-groupe additif des matrices réelles de taille $n \times n$.

Soient M et $N \in C_f$ alors $(M+N)M_f = MM_f + NM_f = M_fM + M_fN = M_f(M+N)$.

16. Montrer que C_f est un sous-anneau des matrices réelles de taille $n \times n$.

Soient M et $N \in C_f$ alors $(MN)M_f = MNM_f = MM_fN = M_fMN = M_f(MN)$.

17. Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M, N \in C_f$ alors on a

$$(\lambda M + N)M_f = \lambda MM_f + NM_f = M_f(\lambda M + N)$$

18. Soit D une matrice diagonale de taille 2×2 et d l'endomorphisme associé par la base canonique. Montrer que

$$d \in \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \mathcal{M}_{2,2},$$

et

$$d \notin \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}, b = c = 0 \right\}.$$

La première étape est la question 14 étendue à toutes les homothéties. La deuxième est un simple calcul.

19. Soit f un endomorphisme dont la matrice M_f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage R et une matrice diagonale D telles que

$$M_f = R^{-1}DR$$

Montrer que si $g \in C_f$ et M_g est diagonalisable, alors il existe une matrice de passage Q, une matrice diagonale Δ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ telle que

$$M_g = Q^{-1}\Delta Q \quad \text{et} \quad M_f = Q^{-1}\widetilde{D}Q.$$

C'est la codiagonalisabilité.

20. Montrer qu'il existe une matrice S telle que $\widetilde{D} = S^{-1}DS$.

Les deux matrices diagonales possèdent les mêmes valeurs propres. Donc il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui passe de l'ensemble $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ vers l'ensemble $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \cdots, \tilde{d}_n)$ avec $\tilde{d}_i = d_{\sigma(i)}$. On note S la matrice associée à cette permutation alors $Se_i = e_{\sigma(i)}$. On a donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$S\widetilde{D}e_i = S\tilde{d}_i e_i = \tilde{d}_i e_{\sigma(i)} = d_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)} = De_{\sigma(i)} = DSe_i.$$

Donc les matrices $S\widetilde{D}$ et DS sont égales sur la base $(e_1, e_2, \cdots e_n)$ donc elles sont égales.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. Etudier la convexité de f.

Comme la fonction est deux fois dérivables, la convexité est liée au signe de sa dérivée seconde.

On obtient $f''(x) = \dfrac{e^x(1-x)(-x^3+3x^2-5x-1)}{(1+x^2)^3}$. Soit $z = -x^3+3x^2-5x-1$, on a : $z' = -3x^2+6x-5 < 0$. La fonction z est donc strictement décroissante de R dans R, avec $z(-1) > 0$ et $z(0) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists! \alpha \in \left]-1,0\right[\;/\; z(\alpha) = 0$.

La dérivée seconde de f s'annule donc pour α et 1.

En conclusion, f est convexe pour $x > 1$ et $x < \alpha$, concave entre ces deux valeurs.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2 e^x}{(1+x^2)^2} > 0$. On a toujours $f' > 0$ et $f'(1) = 0$. La fonction est donc strictement croissante de R sur R^{+*}, avec une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$ et avec l'axe horizontal comme asymptote à $-\infty$. Son graphe admet une tangente horizontale en 1.

3. Soit la fonction h définie sur R par : $h(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx$

On a : $I=\int_0^1 h(x)h(-x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ et $J=\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx=[Arctg\ x]_0^1=\frac{\pi}{4}$

D'où $I=\int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx=J-\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}.x\,dx$. Puis on intègre par parties cette dernière intégrale pour obtenir : $I=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{-x/2}{1+x^2}\right]_0^1-\frac{1}{2}J=\frac{\pi+2}{8}$

Exercice n° 2

Soit la fonction numérique f_α définie par $f_\alpha(x)=x^\alpha+Ln(1+x^2)$, où α est un nombre réel quelconque et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de f_α selon les valeurs de α .
Si $\alpha\in N, Df_\alpha=R$,
Si $\alpha\in Z^-, Df_\alpha=R^*$,
Si $\alpha\notin Z, Df_\alpha=R^{+*}$, (on rappelle que $x^\alpha=e^{\alpha Ln\,x}$)

2. Etudier les variations et tracer les graphes de f_1 et f_2. Comparer ces deux graphes sur R^+.
La fonction f_1 est strictement croissante de R sur R avec $f_1(0)=0$ et une branche parabolique dans la direction verticale. On a : $f_1{}'(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$
La fonction f_2 est paire et strictement croissante de R^+ sur R^+ avec $f_2(0)=0$ et une branche parabolique dans la direction verticale. On a : $f_2{}'(x)=\frac{2x(2+x^2)}{1+x^2}$
Sur R^+, $f_2(x)\ge f_1(x)\Leftrightarrow x(x-1)\Leftrightarrow x\ge 1$. Entre 0 et 1, c'est l'inverse.

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=f_1(u_n)$ et $u_0>0$
Si la suite (u_n) converge vers une limite finie *l*, alors cette limite doit vérifier $l=l+Ln(1+l^2)$ d'où *l*=0. Mais on a : $u_{n+1}=f_1(u_n)>u_n>0$ ($f_1(x)\ge x$). La suite ne peut donc converger vers 0 et elle tend vers $+\infty$.

4. Etudier la suite (v_n) définie par : $v_{n+1}=f_2(v_n)$ et $v_0>0$
La suite (v_n) vérifie $v_{n+1}=v_n^2+Ln(1+v_n^2)$ et cette suite est toujours strictement positive.
Si $(v_n)\to l$, alors $l=l^2+Ln(1+l^2)$. Zéro est une racine évidente de cette équation.
Soit $u=x^2-x+Ln(1+x^2)$, sa dérivée est égale à $u'=2x-1+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2x^3-x^2+4x-1}{1+x^2}$ et elle est du signe du numérateur, noté *nu*, dont la dérivée est strictement positive. Et *nu* est négatif en zéro et positif en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $l_1\in\,]0,1[$ qui annule *nu*. Donc il existe $l_2\in\,]l_1,1[$ tel que $f_2(l_2)=l_2$.
Comme f_2 est convexe, son graphe est en dessous de la bissectrice entre 0 et l_2, et au-dessus pour $x>l_2$. Par conséquent, si $v_0<l_2$, la suite (v_n) est décroissante, car $v_{n+1}=f_2(v_n)<v_n$ et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0.

Si $v_0 > l_2$, la suite (v_n) est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.
Si $v_0 = l_2$, la suite (v_n) est stationnaire.

5. Pour $n \in N$, on pose : $I_n = \int_1^n f_n(x)\,dx$

- Calculer I_2
- Etudier la suite (I_n)

Calculons directement I_n.

$$I_n = \int_1^n x^n + Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^n + \left[x\,Ln(1+x^2)\right]_1^n - \int_1^n \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$I_n = \frac{n^{n+1}-1}{n+1} + n\,Ln(1+n^2) - Ln\,2 - 2(n-1) + 2\,(Arctg\,n - \frac{\pi}{4})$$

D'où $I_2 = \frac{1}{3} + Ln(\frac{25}{2}) + 2\,(Artg\,2 - \frac{\pi}{4})$ et

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, I_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\,(n^n + 2n\,Ln\,n) = +\infty$$

Exercice n° 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des paramètres réels.

1. Etudier la diagonalisation de M selon les valeurs de α et β.

On a : $\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(\alpha - \lambda - \beta)(\alpha - \lambda + \beta)$, la matrice admet donc trois valeurs propres réelles : 1, $(\alpha - \beta), (\alpha + \beta)$. Cette matrice est trigonalisable dans tous les cas et la diagonalisation va dépendre de l'ordre de multiplicité des valeurs propres et de la dimension des sous espaces propres associés.

- Cas 1 : 3 valeurs propres confondues

Dans ce cas : $1 = (\alpha - \beta) = (\alpha + \beta)$, d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. La dimension du sous espace propre étant égale à deux, la matrice n'est pas diagonalisable.

- Cas 2 : 3 valeurs propres distinctes

Dans ce cas la matrice est diagonalisable avec $1 \neq (\alpha - \beta); 1 \neq (\alpha + \beta); (\alpha - \beta) \neq (\alpha + \beta)$, c'est à dire $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$.

- Cas 3 : Seulement deux valeurs propres identiques

a) $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta \neq 1$ (1 valeur propre double) et le sous espace propre associé à 1 est engendré par le vecteur $(x, x, 0)$ de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

b) $\alpha - \beta = 1$ et $\alpha + \beta \neq 1$, cas similaire au précédent et la matrice n'est pas diagonalisable.

c) $\alpha + \beta = \alpha - \beta \neq 1$, ce qui implique $\beta = 0$ et $\alpha \neq 1$, la dimension du sous espace propre associé à α est de dimension deux et la matrice est diagonalisable.

En conclusion M est diagonalisable si et seulement si les trois valeurs propres sont distinctes ou si ($\alpha \neq 1, \beta = 0$).

2. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Calculer, pour tout $n \in N$, M^n et $(M+I)^n$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

On vérifie par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comme $M\,I = I\,M$, on a : $(M+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k M^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} C_n^k & 0 & \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} C_n^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} C_n^k \end{pmatrix}$

Par ailleurs, $(1+x)^n = \sum_k C_n^k x^k$ et pour x=1, $2^n = \sum_k C_n^k$

Soit $y = (1+x)^n = \sum_k C_n^k x^k$, alors $y' = n(1+x)^{n-1} = \sum_k k\,C_n^k x^{k-1}$ et pour x=1, $n\,2^{n-1} = \sum_k k\,C_n^k$

En conclusion : $(M+I)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

3. On suppose $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta \neq 1$

Calculer M^n, pour tout $n \in N$.

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable.

$\lambda = 1$ est une valeur propre double et le sous espace propre associé est engendré par $u_1 = (1,1,0)$

On cherche alors un vecteur u_2 tel que : $M\,u_2 = u_1 + u_2$ et la résolution du système suivant : $\begin{cases} \alpha\,x + \beta\,y + \alpha\,z = 1 + x \\ \beta\,x + \alpha\,y + \beta\,z = 1 + y \\ \qquad\qquad z = z \end{cases}$ donne z=2 et $\beta\,x - \beta\,y = 1 - 2\beta$. On peut choisir $u_2 = ((1-2\beta)/\beta, 0, 2)$

Pour $\lambda = \alpha - \beta$, le sous espace propre associé est engendré par $u_3 = (1,-1,0)$, qui est bien orthogonal à u_1.

La matrice M est donc semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\beta \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

On vérifie par récurrence que $J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\beta)^n \end{pmatrix}$. Par conséquent $M^n = P\,J^n\,P^{-1}$, où P est la matrice de passage, à savoir $P = \begin{pmatrix} 1 & (1-2\beta)/\beta & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et sa matrice inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -(1-2\beta)/\beta \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -(1-2\beta)/\beta \end{pmatrix}$$

On obtient $M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(1-2\beta)^n & 2-2(1-2\beta)^n & 2n+\frac{1-2\beta}{\beta}-\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\beta} \\ 2-2(1-2\beta)^n & 2+2(1-2\beta)^n & 2n-\frac{1-2\beta}{\beta}+\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\beta} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice n° 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $V={}^tM\,M$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice *M*.

On obtient pour matrice de variance-covariance $V = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice *V*.

La matrice étant symétrique, elle est diagonalisable et $\det(V-\lambda I)=(2-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+2)$. Les trois valeurs propres sont : $2, 4\pm\sqrt{14}$

3. Trouver un vecteur unitaire *u* de R^3 tel que $V\,u = 2\,u$

Le vecteur *u* sera donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2, à savoir $u=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,1,3)$

4. Déterminer la matrice de la projection orthogonale, dans R^3, sur la droite vectorielle *D* engendrée par *u*.

La matrice de la projection orthogonale *P* est égale à : $P = u\ ({}^tu\,u)^{-1}\ {}^tu = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

5. Si chaque ligne de la matrice *M* correspond à une observation, quelle est l'observation dont la projection orthogonale sur *D* a la plus grande longueur ?

Notons *a*, *b,* *c* et *d* les 4 observations (lignes de la matrice *M*), on a $Pa = \frac{1}{10}(0,3,9)$; $Pb = \frac{1}{10}(0,-1,-3)$; $Pc = \frac{1}{10}(0,-3,-9)$; $Pd = \frac{1}{10}(0,1,3)$. Les projections de *a* et *c* sont opposées et ont la plus grande longueur.

6. Déterminer les vecteurs propres de la matrice *V.*

On sait déjà que *u* est un vecteur propre pour la valeur propre 2.

Pour $\lambda = 4+\sqrt{14}$, on doit résoudre le système suivant :

$\begin{cases} (2-\sqrt{14})\,x - 3\,y + z = 0 \\ -3\,x + (-2-\sqrt{14})\,y = 0 \\ x + (-2-\sqrt{14})\,z = 0 \end{cases}$ pour obtenir $y = \frac{-3\,x}{2+\sqrt{14}}$; $z = \frac{x}{2+\sqrt{14}}$. On peut choisir comme vecteur propre $u_2 = (2+\sqrt{14}, -3, 1)$.

De façon analogue pour $\lambda = 4-\sqrt{14}$, on peut choisir $u_3 = (-2+\sqrt{14}, 3, -1)$. On peut remarquer que ces vecteurs sont bien orthogonaux.

7. Résoudre $Max\ \left\{ {}^t vV\,v\ /\ v \in R^3, \|v\| = 1 \right\}$

En « normant » les vecteurs propres précédents, la matrice *V* est semblable à la matrice diagonale Δ dans le groupe orthogonal, où $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & 4-\sqrt{14} \end{pmatrix}$.

Par conséquent

$$Max\ \left\{ {}^t vV\,v\ /\ v \in R^3, \|v\| = 1 \right\} = Max\ \left\{ {}^t w\Delta\,w\ /\ w \in R^3, \|w\| = 1 \right\} = Max\ \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, w_i\ /\ \sum_{i=1}^{3} w_i^{\,2} = 1 \right\}$$

Ce maximum est majoré par la plus grande valeur propre et ce maximum est atteint pour le vecteur propre associé à celle valeur, en conclusion : $Max\ \left\{ {}^t vV\,v\ /\ v \in R^3, \|v\| = 1 \right\} = 4+\sqrt{14}$

Exercice n° 5

Pour $x \in R$, on considère l'intégrale généralisée : $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2} dt$

1. Montrer que $K : x \mapsto K(x)$ définit une application de R dans R et étudier sa parité.

Pour $t \geq a > 0$, on a : $0 \leq \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc l'intégrale proposée converge en $+\infty$

Au voisinage de zéro, $0 \leq \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2} \leq \frac{t^2\,x^2}{t^2} = x^2$ et $\int_0^a x^2\,dt$ converge.

En conclusion, K est bien définie.
De plus, $K(-x) = K(x)$ et la fonction est paire.

2. Pour x>0, calculer $K(x)$ en fonction de $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à calculer et en déduire l'expression de $K(x)$ pour tout $x \in R$.

On pose $u = tx$, d'où $K(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du = x\,K(1)$

Et avec la parité, pour $x \in R$, $K(x) = |x|\,K(1)$

3. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2\,(1+t^2)} dt$.

- Montrer que F est bien définie sur R.
- Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (on pourra comparer F et K).

Pour $t \geq a > 0$, on a : $0 \leq \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2\,(1+t^2)} \leq \frac{1}{t^4}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge, donc l'intégrale proposée converge en $+\infty$.

Au voisinage de zéro, $0 \leq \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2\,(1+t^2)} \leq \frac{t^2\,x^2}{t^2} = x^2$ et $\int_0^a x^2\,dt$ converge.

En conclusion, F est bien définie.

$F(x) - K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-\sin^2(t\,x)}{1+t^2}\,dt$ et $0 \leq \frac{\sin^2(t\,x)}{(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$, l'intégrale de cette majoration est égale à $\frac{\pi}{2}$, d'où $|F(x) - K(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

Pour $x \neq 0$, $K(x) = |x|\,K(1) \neq 0$, d'où $\left| \frac{F(x)}{K(x)} - 1 \right| \leq = \frac{|F(x) - K(x)|}{|x|\,K(1)} \leq \frac{\pi}{2\,K(1)} \cdot \frac{1}{|x|}$

En conclusion, au voisinage de $+\infty$, on a : $F(x) \approx x\,K(1)$ et au voisinage de $-\infty$, on a : $F(x) \approx -x\,K(1)$

4. Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t\,x)}{t\,(1+t^2)} dt$

- Montrer que G est convergente.

On procède exactement de la même façon que pour les fonctions *K* et *F*.

- Pour $x,h\in R$, monter l'inégalité suivante : $\left|\sin^2(t(x+h))-\sin^2(tx)-th\sin(2tx)\right|\le h^2\,t^2$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour une fonction deux fois continument dérivables :

$f(a+b)-f(a)-b\,f'(a)=\int_a^{a+b}(a+b-t)\,f''(t)\,dt$ que l'on applique à $f(x)=\sin^2(x)$ pour obtenir : $\sin^2(a+b)-\sin^2(a)-b\sin(2a)=2\int_a^{a+b}(a+b-t)\cos(2t)\,dt$, d'où

$$\left|\sin^2(a+b)-\sin^2(a)-b\sin(2a)\right|\le 2\left|\int_a^{a+b}(a+b-t)\cos(2t)\,dt\right|$$

Pour $b\ge 0$, $\left|\int_a^{a+b}(a+b-t)\cos(2t)\,dt\right|\le\int_a^{a+b}(a+b-t)\;dt=\frac{b^2}{2}$

Pour $b<0$, $\left|\int_a^{a+b}(a+b-t)\cos(2t)\,dt\right|\le\int_{a+b}^{a}(t-a-b)\;dt=\frac{b^2}{2}$

Puis en posant Pour $a=tx$ et $b=th$, on obtient la relation demandée.

- Montrer que *F* est dérivable et que sa dérivée est égale à *G*.

On a :

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right|\le\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin^2(t(x+h))-\sin^2(tx)-th\sin(2tx)}{ht^2(1+t^2)}\right|dt\le|h|\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{|h|\pi}{2}$$

Et cette dernière expression tend vers zéro quand *h* tend vers zéro, la fonction *F* admet donc *G* comme dérivée.

- Montrer que *G* est continue.

On a : $G(x+h)-G(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2t(x+h))-\sin(2tx)}{t\,(1+t^2)}\,dt$ et

$\sin(2t(x+h))-\sin(2tx)=2\sin(th)\cos(t(2x+h))$, d'où

$\left|G(x+h)-G(x)\right|\le 2h\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)}\,dt\to 0$ quand $h\to 0$ et la fonction est continue.

Exercice n° 6

1. Soit $M:(a,b,c)\in C^3\mapsto M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a & 3c & 3b\\ b & a & 3c\\ c & b & a\end{pmatrix}$, où *C* désigne l'ensemble des nombres complexes. Montrer que *M* est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre C^3 et $E=\left\{M(a,b,c)\;/\;(a,b,c)\in C^3\right\}$ et déterminer une base de *E*.

On vérifie aisément que l'application *M* est linéaire et bijective.

On a : $M(a,b,c) = aI + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + bU + cV$ et ces trois matrices sont indépendantes, donc elles forment une base de *E*.

2. Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer U^n pour tout $n \in N$

On calcule $U^2 = V; U^3 = VU = UV = 3I; U^4 = 3U$ et on vérifie par récurrence les résultats suivants : $U^{3n} = 3^n I; U^{3n+1} = 3^n U; U^{3n+2} = 3^n V$

3. Calculer $M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc)$, où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

On a : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 + j + j^2 = 0;\ j^3 = 1$. En utilisant ces résultats, on obtient :

$$M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc) = M(a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc, 0, 0) \in E$$

4. Déterminer, quand il existe, l'inverse de $M(a,b,c)$

On a : $\det M(a,b,c) = a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc$ (en développant, par exemple, par rapport à la troisième colonne ou par la règle de Sarrus). Si ce déterminant est non nul, on a (d'après la question précédente) : $M^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{\det M(a,b,c)} M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc)$

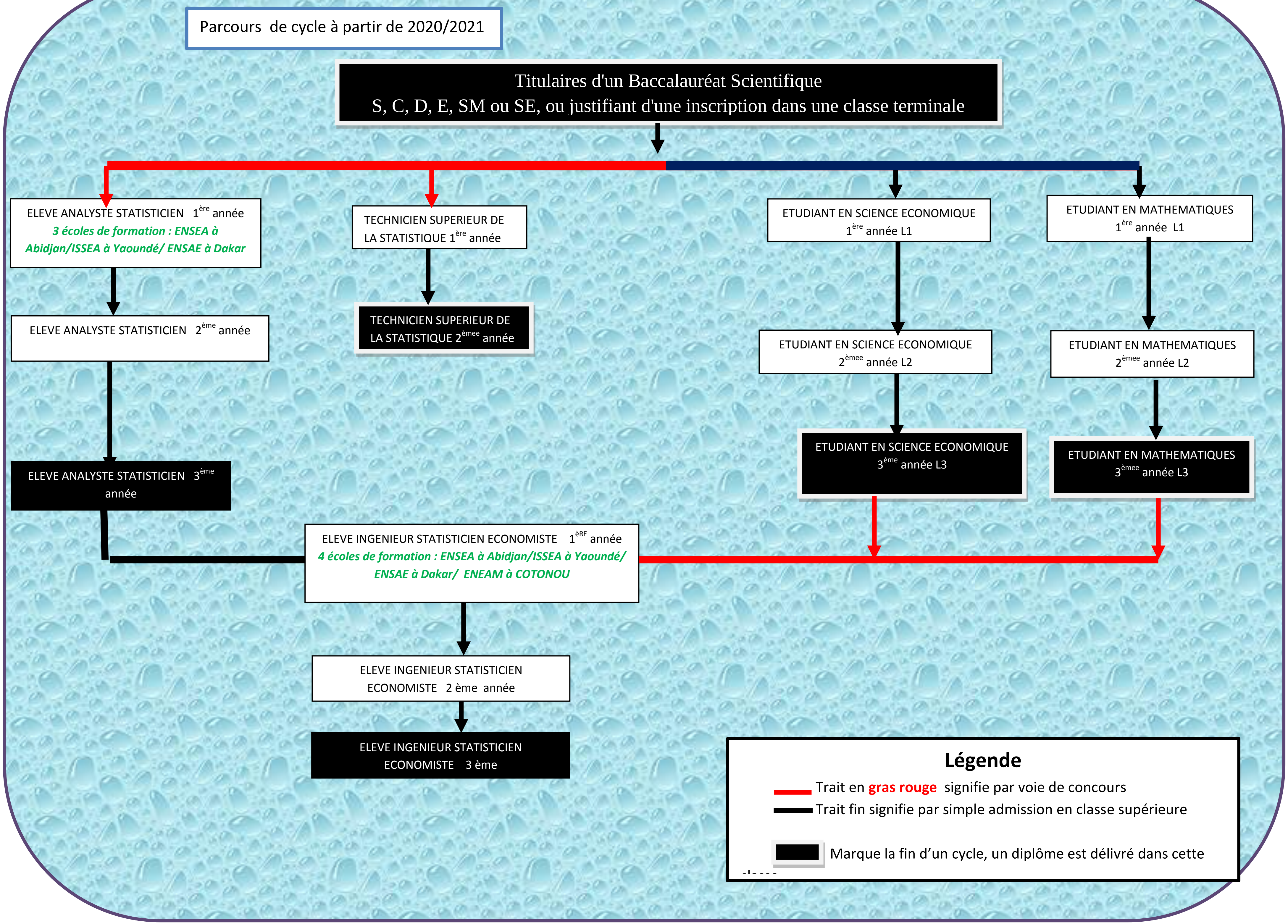
5. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$. A quelle condition ces valeurs propres sont-elles distinctes ?

On a : $\det\left(M(a,b,c) - \lambda I\right) = \det\left(M(a-\lambda,b,c)\right)$ et

$\det\left(M(a-\lambda,b,c)\right) = (a - \lambda + b\theta + c\theta^2)(a - \lambda + b\,j\theta + c\,j^2\theta^2)(a - \lambda + b\,j^2\theta + c\,j\theta^2)$, où $\theta = \sqrt[3]{3}$. Les trois valeurs propres sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + b\theta + c\theta^2 \\ \lambda_2 = a + b\,j\,\theta + c\,j^2\,\theta^2 \\ \lambda_3 = a + b\,j^2\theta + c\,j\theta^2 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow b = c\, j^2\, \theta \\ \lambda_1 = \lambda_3 \Leftrightarrow b = c\, j\ \ \theta \\ \lambda_3 = \lambda_2 \Leftrightarrow b = c\ \theta \end{cases}$ et ces trois expressions donnent la même relation, à savoir : $b^3 = 3c^3$. En conclusion, ces valeurs propres sont distinctes si et seulement si : $b^3 \neq 3c^3$


Parcours de cycle à partir de 2020/2021
Titulaires d'un Baccalauréat Scientifique
S, C, D, E, SM ou SE, ou justifiant d'une inscription dans une classe terminale
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 1ère année
3 écoles de formation : ENSEA à Abidjan/ISSEA à Yaoundé/ ENSAE à Dakar
TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 1ère année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 1ère année L1
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 1ère année L1
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 2ème année
TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 2èmee année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 2èmee année L2
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 2èmee année L2
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 3ème année L3
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 3èmee année L3
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 3ème année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 1èRE année
4 écoles de formation : ENSEA à Abidjan/ISSEA à Yaoundé/ ENSAE à Dakar/ ENEAM à COTONOU
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 2 ème année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 3 ème
Légende
Trait en gras rouge signifie par voie de concours
Trait fin signifie par simple admission en classe supérieure
Marque la fin d'un cycle, un diplôme est délivré dans cette