ECOLES DE STATISTIQUES AFRICAINES

Anciens sujets du concours de recrutement des élèves Ingénieurs Statisticiens Economistes (ISE) et leurs corriges

Option économie

- **MÉTIERS DE LA DE LA**
  - **UN SECTEUR À DÉCOUVRIR**
- **LES STRATÉGIES DE FORMATION**
- **DES CONSEILS D'EXPERT**

Hugues SILA, Ingénieur Statisticien Economiste

Lumbrozo Publishing

3ème édition
décembre 2019

PREFACE

Ce recueil de sujets corrigés est pratiquement destiné aux étudiants titulaires d'une licence en économie et des Ingénieurs de Travaux Statistiques désirant présenter le concours de recrutement des élèves ***Ingénieurs statisticiens économistes****, concours CAPESA.* ***Il est mis gratuitement à la disposition de ceux-ci.***

Après avoir présenté les écoles de statistiques africaines, les débouchés des statistiques, une brève présentation du métier de l'Ingénieur statisticien/Economiste est faite dans le document.

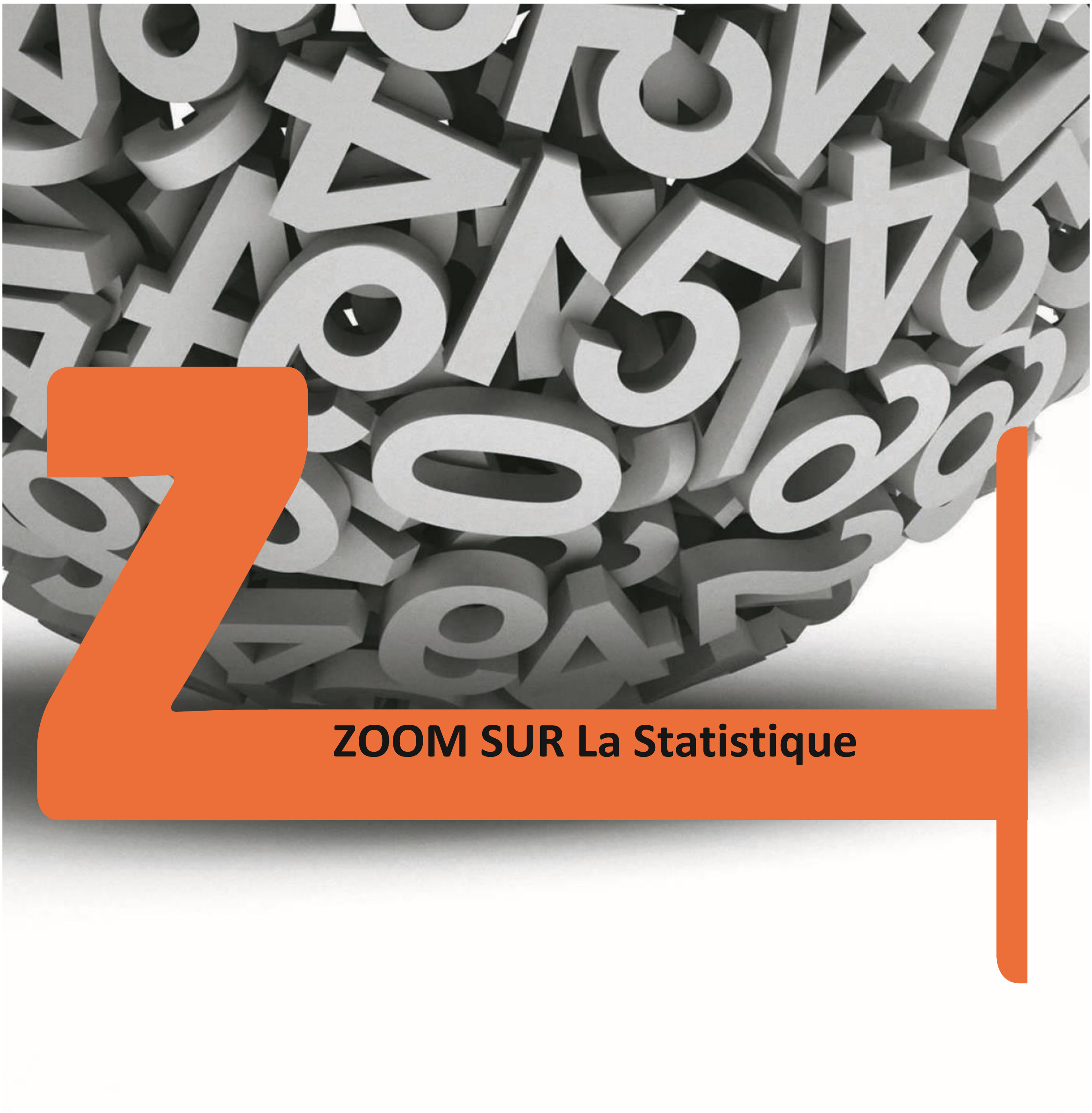
Des énoncés ainsi que les corrigés de tous les sujets proposés de 19980 à 2019 permettront aux étudiants de bien maitriser le type de sujets proposés à ce concours.

Je n'insisterai jamais sur le bon mode d'emploi de ce livre de sujets corrigés. Il serait parfaitement vain de se contenter de lire, même très attentivement, la solution à la suite de l'énoncé. On n'apprend pas à faire du vélo dans un manuel ! Ce n'est qu'après avoir cherché longuement chaque question avec ou sans succès, mais du moins avec persévérance que la lecture du corrigé pourra devenir fructueux et profitable.

Avec ce livre, j'espère mettre à la disposition des étudiants un ensemble d'exercices et de problèmes leur permettant d'acquérir des méthodes et des pratiques qu'ils pourront réinvestir en d'autres circonstances. Je leur souhaite de réussir les concours et examens qu'ils préparent avec courage.

Hugues SILA. Ingénieur Statisticien Economiste d'Etat, décembre 2019

Pour toute information supplémentaire, bien vouloir m'écrire à silhu06@yahoo.fr



ZOOM SUR La Statistique

L'origine, la statistique permettait à l'État de disposer d'outils pour mener à bien ses politiques publiques. Ainsi, l'étymologie reflète bien cette mission : le "stat" de statistique a la même racine que "état". Dans le monde d'aujourd'hui, l'apparition croissante de nouvelles sources d'informations (recensement, réseaux sociaux, sondages, etc.) produit des masses de données importantes. La place de la statistique en entreprise ne cesse de se développer tout autant dans les domaines où elle était déjà présente que dans des champs nouveaux d'application. Ainsi, des questions inédites apparaissent et la place de cette discipline pour la recherche académique ou industrielle est en forte croissance (recherche médicale, imagerie, prévision, etc.). Les débouchés en statistique sont donc à la fois nombreux et variés. Nous espérons que ce document permettra à chacun(e), à travers quelques exemples, de s'identifier à une ou plusieurs trajectoires et donc viser un travail épanouissant qui lui corresponde.

La statistique, pour quoi faire ?

Quel est le risque qu'un emprunteur soit un jour défaillant ?
Comment prévoir la demande et ainsi d'évaluer la production nécessaire d'électricité au cours du mois ?
Quel est l'impact de la consommation quotidienne de tabac sur la santé ?
Quelle tranche d'âge sera intéressée par un tel produit ?
y'aurait-il dans le futur plus ou moins d'avalanches dans les alpes françaises ?
Quel est le canal le plus approprié pour susciter un acte d'achat chez un client ?

La statistique répond à de nombreuses questions. C'est pourquoi les entreprises et les administrations ne peuvent pas se passer d'elle. En analysant des données chiffrées, elles obtiennent des informations stratégiques.

Le métier d'ingénieur statisticien varie énormément suivant le secteur dans lequel il évolue et son niveau au sein de la hiérarchie d'une organisation. Dans tous les cas, son métier nécessite une très bonne maitrise de l'informatique et des mathématiques.

L'Ingénieur Statisticien Economiste est un spécialiste des chiffres. Il fournit une vision globale de l'évolution économique et apporte une aide à la décision. Il doit avoir une double compétence en statistiques et en économie.

Son travail consiste à collectionner des données qualitatives et quantitatives pertinentes et cohérentes dans le contexte économique dans lequel il se situe. Toutes ces données seront traitées avec des outils informatiques avant que le statisticien-économiste n'effectue un travail d'analyse et de synthèse des résultats. Ces résultats, représentés sous forme de courbes ou de graphiques, retracent l'évolution économique et permettent d'établir des prévisions économiques. Ainsi, son travail peut servir de **support pour justifier une décision, de conseil pour pouvoir anticiper la future évolution, ou tout simplement de veille.** Dans certains cas, ses analyses et projections dans le futur peuvent favoriser une certaine décision ou influencer l'orientation des priorités définies par son employeur. Le statisticien économiste peut donc avoir une grande responsabilité pour garantir la pertinence et l'exactitude de ses statistiques.

Dans la finance, le rôle du statisticien est prépondérant. Il fait parler les chiffres et l'historique d'une entreprise ou d'un produit afin d'en faire ressortir une évolution, positive ou négative, et ainsi préjuger de ce que réserve l'avenir. Cela concerne aussi bien des chiffres de ventes ou des coûts de production, que des éléments de satisfaction clients.

Les compétences pour devenir statisticien/ statisticiens Economiste

Le statisticien ne croit qu'en des informations vérifiées :

- être mathématicien dans l'âme
- posséder l'esprit d'analyse et de synthèse
- savoir communiquer avec des interlocuteurs variés
- maîtriser la gestion de données sur poste informatique
- parler anglais est un atout

Débouchés

Tous les statisticiens camerounais formés dans l'une des quatre écoles à vocation sous régionales (ISSEA, ENSEA, ENEAM et ENSAE) sont automatiquement recrutés à la fonction publique.

Par ailleurs beaucoup décident de travailler dans les multinationales (MTN, ORANGE), les banques, les organisations internationales (PNUD, BAD, CEA, FMI, BANQUE MONDIALE, BEAC. Etc.)

Déroulement de la Formation

L'accès aux écoles de statistiques à vocation régionale se fait par concours. Le concours commun pour les quatre écoles se déroule dans les différents pays au mois d'avril et les copies sont acheminées en France (Malakoff) pour Correction et publication des résultats par le CAPESA. Les étudiants reçoivent une bourse au cours de leurs formations.

Comment devenir Statisticien Economiste au Cameroun ?

1. Cycles de formation

La formation des statisticiens au Cameroun et en Afrique subsaharienne comprend trois cycles (correspondant à trois diplômes).

- Le cycle de Technicien Supérieur de la Statistique sanctionné par l'obtention du diplôme de **Techniciens Supérieur de la Statistique** (TSS) ; (BAC+2)
- Le cycle **d'Ingénieur Statisticien Economiste cycle long** (ISE) **/Analyste Statisticien (AS)** (sanctionné par l'obtention du diplôme d'**Analyste Statisticien (AS)** en troisième année et du diplôme **d'Ingénieur Statisticien Economiste** (ISE) pour une formation de 5 ans ; (BAC+5)
- Le cycle d'Ingénieur Statisticien Economiste sanctionné par l'obtention du diplôme **d'Ingénieur Statisticien Economiste** (ISE) ; (LICENCE+3).

2. Ecoles de formation des statisticiens

En Afrique subsaharienne, quatre écoles à vocation sous régionale forment les Statisticiens. Il s'agit de :

- Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA), Abidjan ;
- Institut Sous-régional de Statistique et d'Economie Appliquée (ISSEA), Yaoundé ;
- Ecole Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA), Abidjan
- Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE) , Dakar
- Ecole Nationale D'Economie Appliquée et de Management (ENEAM) à Cotonou classée école du CAPESA depuis 2019.

Héritières d'une tradition française de formation d'ingénieurs polyvalents, ces écoles offrent des enseignements combinant un socle théorique consistant, statistique, économie, démographie, informatique et des spécialisations (en particulier, des cours pratiques) conduisant à des applications professionnelles dans le champ des statistiques officielles pour l'essentiel.

Elles facilitent une bonne osmose entre le monde de la production statistique et celui de l'enseignement, une proportion élevée des professeurs exerçant le métier de statisticien ou d'économiste dans le privé ou dans le secteur public.

Ces quatre écoles organisent un **concours commun** d'admission de leurs élèves.

Les écoles et les critères de recrutement au concours 2019 sont les suivants :

Concours ISE cycle long / Analyste Statisticien (AS)

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique de Dakar

Pour se présenter, les candidats doivent être nés **après le 31 décembre 1997**[1] et être :

- titulaires d'un baccalauréat scientifique (C, D, E ou S)
- ou inscrits en terminale scientifique (sous réserve de l'obtention du baccalauréat)
- Les fonctionnaires doivent être nés après le 31 décembre 1979, et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national

Grâce à un cycle préparatoire intégré très sélectif, la filière ISE cycle long /AS permettra de recruter les meilleurs bacheliers scientifiques pour les amener à un diplôme d'ingénieur ou d'analyste statisticien, en garantissant ce niveau d'excellence propre au parcours ISE.

Attention : Il faudra impérativement indiquer sur le dossier d'inscription la formation souhaitée.

Préparation au diplôme ITS par la voie B (dernière année où ce concours sera lancé)

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique de Dakar

[1] Pour les Camerounais, la fonction publique leur accorde regulierement jusqu'à 23 ans, c'est-à-dire être né après le 31 décembre 1996

Les candidats doivent être nés après le 31 décembre 1995[2] et :

- pour l'option Mathématiques, être inscrits en 2ème année de Licence de Mathématiques ou en classe de Mathématiques Spéciales
- pour l'option Economie, être inscrits en 2ème année de Licence de Sciences Economiques ou dans une classe préparatoire aux écoles de commerce

Les fonctionnaires doivent être être nés après le 31 décembre 1979, et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national

Préparation au diplôme ISE

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique de Dakar
- ENEAM, École Nationale d'Économie Appliquée et de Management de Cotonou

Un candidat ne peut pas se présenter plus de trois fois au concours.

Les candidats doivent avoir être nés après le 31 décembre 1993 et :

- pour l'option Mathématiques, être inscrits en 3ème année de Licence de Mathématiques ou en classe de Mathématiques Spéciales (les titulaires d'un diplôme ITS, ou en dernière année d'études ITS, sont admis à concourir)
- pour l'option Economie, être inscrits en 3ème année de Licence de Sciences Economiques (les titulaires d'un diplôme ITS, ou en dernière année d'études ITS, sont admis à concourir)

Les fonctionnaires doivent être nés après le 31 décembre 1979 et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national.

[2] 2 Pour les Camerounais, la fonction publique leur accorde regulierement jusqu'à 23 ans, c'est-à-dire être né après le 31 décembre 1994

Cette formation, de haut niveau théorique, dure 3 ans ou 5ans, que ce soit à l'ENSEA, à l'ISSEA ou à l'ENSAE. Elle est sanctionnée par le diplôme d'Ingénieur Statisticien Économiste. Depuis l'année universitaire 2018/2019 le CAPESA permet aux étudiants admis en troisième année ISE de terminer la troisième année soit dans son école de départ, soit dans une des deux autres écoles du CAPESA, soit à l'ENSAE de Paris (l'ENSAE *Paris est la grande école de la Data science, de l'Économie, de la Finance et de l'Actuariat*), soit à l'ENSAI de Paris. Ainsi un étudiant camerounais admis à l'ISSEA au cycle ISE peut étudier les deux premières années à Yaoundé et la suite de sa formation à l'ENSAE de Paris. Il sera ainsi diplômé des deux écoles.

Modalités pratiques

Des dossiers d'inscription pour les concours ISE cycle long / AS, ITS voie B et ISE sont disponibles auprès :

- des Directions de la Statistique de la plupart des pays africains francophones
- des Ecoles et Instituts de Formation Statistique
- du CAPESA
- Au ministère de la Fonction publique et de la réforme administrative pour le Cameroun

Les dates des concours figurent dans les Avis de concours :

- les 2 et 3 avril 2020 pour le concours ISE

- les 8 et 9 avril 2020 pour le concours ITS voie B et ISE cycle long/AS

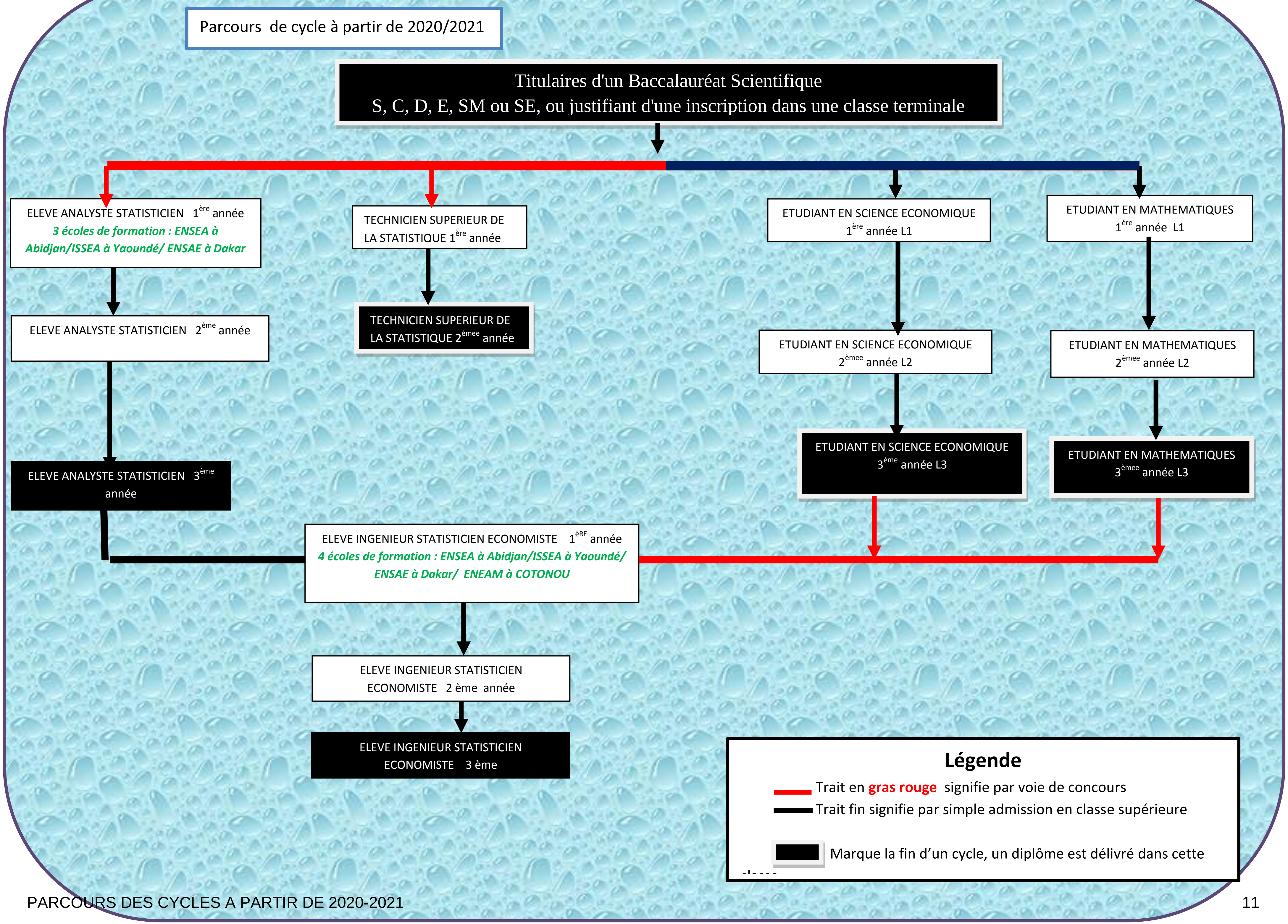
Des brochures d'information décrivent les modalités de recrutement et détaillent les programmes des connaissances requises dans les principales matières pour se préparer aux épreuves. Il existe cinq brochures, correspondant chacune à un concours, une voie ou une option.

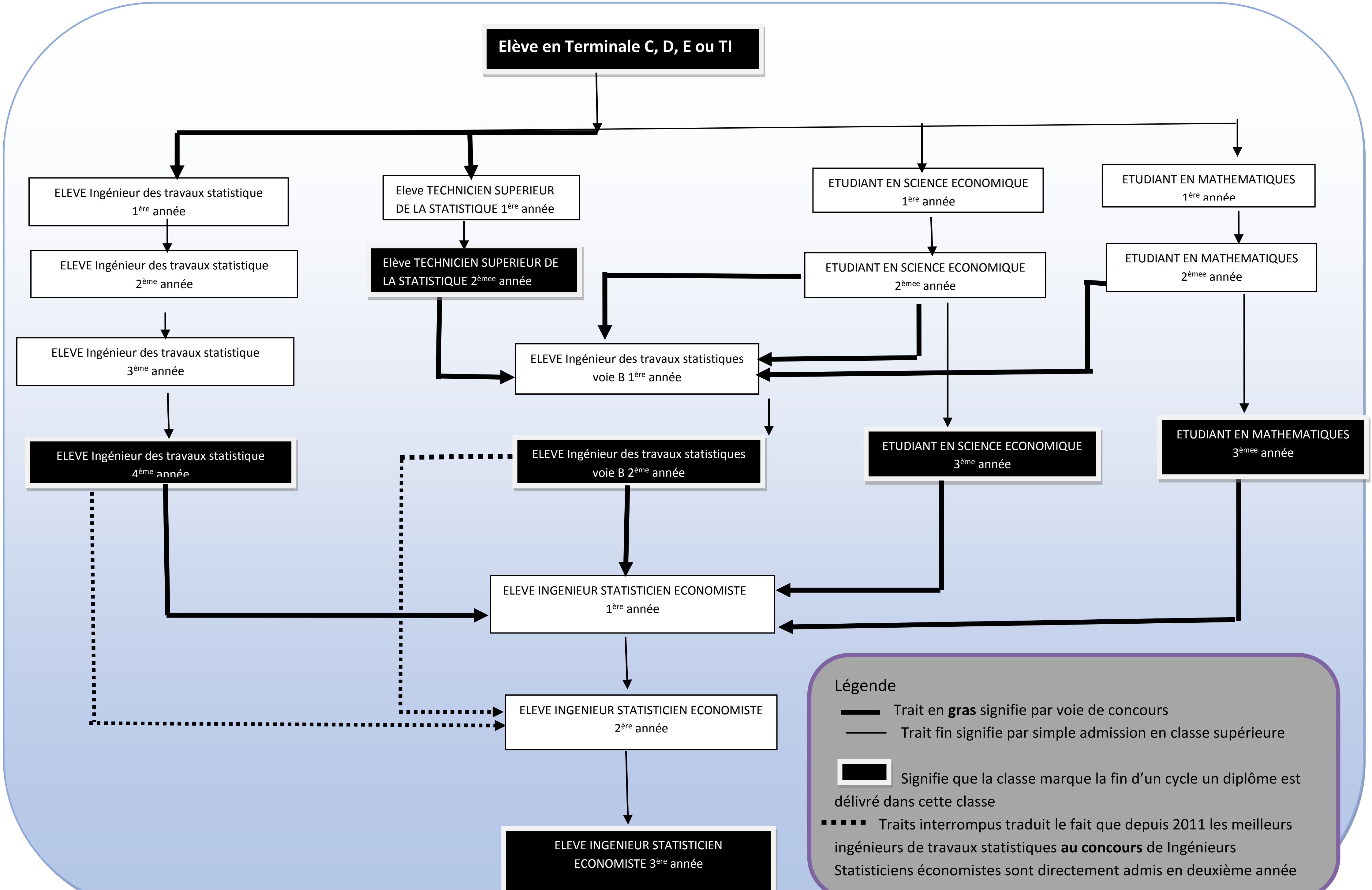
ORGANISATION DES CONCOURS

Les concours d'entrée dans les écoles de formation d'Ingénieurs Statisticiens Économistes (ISE) et d'Analystes Statisticiens (AS) accueillent chaque année environ 200 candidats répartis dans une vingtaine de pays. Ils sont communs à tous les pays participants – pour la plupart, d'Afrique subsaharienne – et permettent l'accès aux écoles de Dakar, Abidjan et Yaoundé. Chaque année, environ 150 lauréats rejoignent ces quatre établissements. Des centres d'examen sont ouverts dans presque tous les pays d'Afrique francophone et, certaines années, en Guinée Équatoriale.

L'organisation des concours communs par l'intermédiaire du CAPESA, structure interne rattachée au GENES.

Le CAPESA a la responsabilité de l'organisation d'ensemble des concours et s'en acquitte en collaboration étroite avec les quatre écoles, AFRISTAT, les responsables des centres d'examen des pays – généralement, les directeurs des Instituts Nationaux de Statistique (INS) – et avec les professeurs qui conçoivent les sujets puis corrigent les copies.
Les jurys d'admission se tiennent à la fin du mois de juin à Malakoff en France.
Le schéma de la page suivante décrit le parcours de l'élève Ingénieur statisticien Economiste


Parcours de cycle à partir de 2020/2021
Titulaires d'un Baccalauréat Scientifique
S, C, D, E, SM ou SE, ou justifiant d'une inscription dans une classe terminale
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 1ère année
3 écoles de formation : ENSEA à Abidjan/ISSEA à Yaoundé/ ENSAE à Dakar
TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 1ère année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 1ère année L1
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 1ère année L1
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 2ème année
TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 2èmee année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 2èmee année L2
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 2èmee année L2
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 3ème année L3
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 3èmee année L3
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 3ème année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 1èRE année
4 écoles de formation : ENSEA à Abidjan/ISSEA à Yaoundé/ ENSAE à Dakar/ ENEAM à COTONOU
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 2 ème année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 3 ème
Légende
Trait en gras rouge signifie par voie de concours
Trait fin signifie par simple admission en classe supérieure
Marque la fin d'un cycle, un diplôme est délivré dans cette



PARCOURS DES CYCLES DE FORMATION AVANT 2019

SUJETS ISE OTION ECONOMIE 1998-2019

NIVEAU LICENCE EN EN ECONOMIE/

INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

ENSEA **–** **ABIDJAN**	**ENSAE** **–** **DAKAR**	**ISSEA** **–** **YAOUNDÉ**	**ENEAM** **-** **COTONOU**

BROCHURE D'INFORMATION

SUR LE CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES

INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

(I S E)

Option Économie

CAPESA

CENTRE D'APPUI AUX ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINES
ENSAI – Campus de Ker Lann
51 Rue Blaise Pascal - BP 37203
35172 Bruz Cedex - France
☎ 33 (0)2 99 05 32 17
e-mail : **capesa@ensai.fr**
site web : **capesa.ensai.fr**

Version mise à jour en octobre 2019 (concours 2020)

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES
INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES (ISE)
OPTION ÉCONOMIE

I - ÉCOLES CONCERNÉES PAR CE CONCOURS

Le concours de recrutement d'élèves Ingénieurs Statisticiens Économistes Option Économie est organisé pour les quatre écoles suivantes :

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ENSEA)
08 BP 03 - ABIDJAN 08 (CÔTE-D'IVOIRE)
☎ : (225) 22 48 32 00 ou (225) 22 44 08 42 – Fax : (225) 22 44 39 88
e-mail : ensea@ensea.ed.ci – Site : www.ensea.ed.ci

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ISSEA)
Rue Pasteur
BP 294 YAOUNDÉ (CAMEROUN)
☎ : (237) 22 22 01 34 – Fax : (237) 22 22 95 21
e-mail : isseacemac@yahoo.fr – Site : www.issea-cemac.org

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE (ENSAE)
Immeuble ANSD
Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant
BP 116
DAKAR RP (SÉNÉGAL)
☎ : (221) 33 859 43 30 – Fax : (221) 33 867 91 65
e-mail : secretariat.ensae@orange.sn – Site : www.ensae.sn

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ET DE MANAGEMENT (ENEAM)
03 BP 1079
COTONOU (BÉNIN)
☎ : (229) 21 30 41 68 – Fax : (229) 21 30 41 69
e-mail : eneam.uac@eneam.uac.bj – Site : www.eneam.uac.bj

II - OBJET DE LA FORMATION ISE

L'ENSEA d'Abidjan, l'ISSEA de Yaoundé, l'ENSAE de Dakar et l'ENEAM de Cotonou forment en trois ans des Ingénieurs statisticiens économistes dont le rôle consiste à créer, gérer et utiliser l'information statistique pour la préparation des décisions de nature économique ou sociale concernant la nation, la région ou l'entreprise.

L'Ingénieur statisticien économiste est appelé à organiser et réaliser des enquêtes, à dépouiller et analyser les résultats de ces enquêtes, plus généralement à rassembler les matériaux nécessaires à l'élaboration des comptes nationaux et des programmes de développement, et enfin à organiser, administrer et diriger un service à compétence statistique et économique.

Le diplôme d'Ingénieur Statisticien Économiste sanctionne un cycle d'enseignement d'un haut niveau théorique, qui comporte une double formation, statistique et économique.

III - MODE DE RECRUTEMENT

Le recrutement se fait par voie de concours.

Aucun candidat ne peut se présenter plus de trois fois au concours.

Le concours Option Économie est ouvert aux candidats justifiant d'une inscription en 3ème année de Licence dans une faculté de Sciences Économiques.

Les titulaires d'un diplôme d'Ingénieur des Travaux Statistiques (ou en dernière année de leurs études ITS) peuvent se présenter au concours Option Économie.

L'admission d'un lauréat est soumise à l'obtention, selon le cas, de la Licence ou du diplôme ITS.

IV - CONDITIONS D'ÂGE

Les candidats doivent être nés après le 31 décembre 1993 et les candidats fonctionnaires ou assimilés être nés après le 31 décembre 1979 et appartenir aux administrations ou organismes du système statistique national.

V - ORGANISATION DU CONCOURS

Des centres d'examen sont ouverts dans la plupart des pays d'Afrique subsaharienne. Les principales informations relatives au concours figurent dans l'Avis de concours diffusé au quatrième trimestre de l'année précédant le concours.

VI - DATES DU CONCOURS

Le concours ISE Option Économie ne comporte que des épreuves écrites qui auront lieu les 2 et 3 avril 2020. En voici les durées et coefficients :

ÉPREUVE	COEFFICIENT
ORDRE GÉNÉRAL Durée : 4 Heures	15
1ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES Durée : 4 Heures	30
ÉCONOMIE Durée : 4 Heures	35
2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES Durée : 3 Heures	20

Remarque importante : la première épreuve de mathématiques du concours ISE option économie sera désormais filtrante, et seuls les candidats ayant une note supérieure ou égale à 5 à cette épreuve verront leurs autres épreuves corrigées.

Les convocations sont adressées par le responsable du centre d’examen aux candidats relevant de son centre.

VII - DOSSIER D'INSCRIPTION

Les candidats au concours doivent constituer un dossier d'inscription.

Ce dossier est disponible dans les Directions de la Statistique de la plupart des pays d’Afrique subsaharienne, dans les Écoles ou Instituts de formation statistique et au CAPESA. Il devra être déposé au plus tard le 31 janvier, complet et parfaitement renseigné, au centre d’examen où le candidat passera les épreuves.

VIII - PROCLAMATION DES RÉSULTATS

Les copies d'examen sont envoyées dès la fin du concours au CAPESA qui en assure la correction.

Le jury du concours se réunit au plus tard le 30 juin. Les candidats reçus sont informés de leur succès par courriel au cours de la première quinzaine de juillet. Les résultats sont affichés dans les écoles et présentés sur le site web du CAPESA au plus tard une semaine après les délibérations du jury ou le premier jour ouvrable suivant cette réunion. Aucune note n'est communiquée aux candidats.

IX - BOURSES D'ÉTUDES

Les lauréats pourront adresser des demandes de bourse à leurs gouvernements en sollicitant l'appui des Directions nationales de la Statistique ou, par leur intermédiaire, à l'organisation des Nations Unies, à ses agences spécialisées ou à d'autres organismes de coopération multilatéraux ou bilatéraux.

X - PROGRAMME DE MATHÉMATIOUES POUR LE CONCOURS ISE OPTION ÉCONOMIE

A. Nombres et structures algébriques usuelles

1. Vocabulaire relatif aux ensembles et aux applications

Ensembles : inclusion, appartenance, opérations sur les parties d’un ensemble (intersection, réunion, complémentaire, ensemble produit, partition d'un ensemble).

Relations binaires : définition, propriétés possibles d'une relation binaire, relations d'ordre et relations d’équivalence, ensemble ordonné.

Applications : définition, applications injectives, surjectives, bijectives.

2. Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

Nombres entiers naturels : propriétés fondamentales.

Ensembles finis : cardinalité.

Dénombrement : opérations sur les ensembles finis, combinaisons, arrangements, permutations.

3. Structures algébriques usuelles

Lois de composition interne : définition, propriétés possibles d'une loi de composition interne (commutativité, associativité, élément neutre, élément symétrique, distributivité d'une loi par rapport à une autre).

Structure de groupe, anneau, corps.

Anneau **Z** des nombres entiers relalifs, corps **Q** des nombres rationnels.

Corps **R** des nombres réels, corps **C** des nombres complexes.

B. Analyse

1. Suites de nombres réels

Espace vectoriel des suites de nombres réels.

Suites majorées, minorées, bornées, monotones.

Limite d’une suite.

Relations de comparaison.

Théorème d’existence de limites.

Suites arithmétiques et géométriques.

Brève extension aux suites complexes.

2. Fonctions numériques d’une variable réelle

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Limite d’une fonction.

Relations de comparaison.

Fonctions continues sur un intervalle.

3. Dérivation des fonctions numériques d’une variable réelle

Dérivée en un point, fonction dérivée.

Étude des fonctions dérivables, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

Fonctions convexes , propriétés algébriques et topologiques.

4. Intégration sur un segment

Définition des fonctions en escalier et intégrale d’une fonction en escalier.

Fonctions continues par morceaux.

Intégrale des fonctions continues et continues par morceaux.

Propriétés.

5. Dérivation et intégration

Primitives.

Calcul des primitives.

Formule de Taylor, formule de Mac-Laurin.

Développements limités au voisinage d'un point, développements limités à l'infini *(résultats classiques uniquement).*

Intégrales généralisées de $1^{\text{ère}}$ espèce et de $2^{\text{ème}}$ espèce : convergence, principaux critères de convergence.

6. Etude des fonctions

Fonctions numériques usuelles : fonction puissance, fonction logarithme, fonction exponentielle.

Fonctions circulaires et principaux résultats de trigonométrie.

7. Notions sur les fonctions de deux variables réelles

Limites, continuités et dérivés partielles.

Différentielles : définition, unicité, toute fonction différentiable est continue, opérations usuelles sur les différentielles, interprétation géométrique.

Intégrales doubles : définition, propriétés et changement de variables.

Fonction Gamma.

8. Équations différentielles

Notion d'équation différentielle du premier ordre *(l'existence des solutions ne sera pas abordée).*

Exemples d'équations différentielles linéaires du premier ordre et d'équations différentielles linéaires du second ordre (à coefficients constants).

C. Algèbre linéaire et polynômes

1. Espaces vectoriels

Définition, sous espace-vectoriel, opérations sur les sous-espaces vectoriels.

Familles de vecteurs, base, dimension d'un espace vectoriel.

Applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre. Cas de la dimension finie.

Rang d'une application linéaire, noyau, image.

2. Polynômes

Polynômes à une indéterminée. Propriétés.

Fractions rationnelles.

3. Calcul matriciel

Matrices : définition, espace vectoriel des matrices, produit d'une matrice par un scalaire, somme et produit de matrices.

Déterminants d'ordre 2 et 3, inversion d'une matrice régulière.

Résolution des systèmes de 2 ou 3 équations linéaires (résolution matricielle).

Matrices carrées, diagonales, triangulaires, symétriques, anti-symétriques.

Valeurs propres. Vecteurs propres. Diagonalisation des matrices carrées. Cas des matrices symétriques.

Puissances d'une matrice carrée. Applications à la résolution des équations linéaires récurrentes.

D. Notions élémentaires de calcul des probabilités

Notion de probabilité d'un événement. Événements élémentaires équiprobables ou non. Exercices classiques dans le cas d'ensembles finis.

Variables aléatoires à une dimension : cas discret, cas continu, espérance mathématique, variance.

Couple de variables aléatoires : définition, moments centrés et non centrés, lois marginales, lois conditionnelles, covariance.

XI - PROGRAMME D'ÉCONOMIE POUR LE CONCOURS ISE OPTION ECONOMIE

A - Formation et répartition du produit national

A-1) Facteurs de la production ; population active, notion de capital, accumulation du capital et amortissement.

A-2) Les divers types d'entreprises industrielles, agricoles et commerciales et leur évolution.

A-3) Formes de la concurrence ; la concentration.

A-4) Consommation et épargne.

A-5) Les revenus : salaires, profits, intérêt, rente.

A-6) Redistribution des revenus.

A-7) Croissance économique : mesure, facteurs.

B - Mécanismes monétaires et financiers

B-1) Définition et fonctions de la monnaie.

B-2) La création monétaire et ses agents.

B-3) La masse monétaire : structure, contreparties.

B-4) Le contrôle de l'émission monétaire.

B-5) Marché monétaire et marché financier.

B-6) Politique monétaire et politique financière : objectifs et moyens.

C - Finances publiques

C-1) Budget de l'État et lois de Finances.

C-2) Les recettes et les dépenses publiques.

C-3) Politique budgétaire et politique fiscale : objectifs et moyens.

D - Économie internationale

D-1) Les mouvements internationaux de marchandises et de capitaux.

D-2) La balance des paiements.

D-3) Régimes de change, politique de change.

D-4) Problèmes monétaires internationaux : déséquilibres externes, crises de paiement et débats sur la régulation des marchés financiers internationaux.

E - Comptabilité nationale

E-1) Valeur ajoutée et Produit Intérieur Brut.

E-2) Les Secteurs Institutionnels et les opérations du Tableau des Comptes Economiques Intégrés.

E-3) Le Tableau Ressources - Emplois : principe, utilisations.

E-4) Les Secteurs Institutionnels et les opérations du Tableau des Opérations Financières.

E-5) Agrégats normalisés.

F - Comptabilité d'entreprise

Notions de comptabilité générale *(les étudiants devront être capables de lire et commenter les documents comptables les plus usuels).*

G - Les politiques de régulation conjoncturelle et les politiques de développement économique et social

G-1) Caractéristiques du sous-développement et politiques de développement économique.

G- 2) Déséquilibres macroéconomiques, stabilisation et ajustement structurel.

G- 3) Développement, échange international et globalisation financière.

G- 4) Les stratégies de lutte contre la pauvreté.

H - Les outils de l'analyse économique

H.1 - Analyse microéconomique

H-1.1) Le consommateur : utilité, fonction de demande.

H-1.2) L'entreprise : fonction de production, productivité marginale, rendements, choix des facteurs de production et fonction d'offre.

H-1.3) Équilibre sur un marché.

H-1.4) Notions sur les théories de l'équilibre général.

H-1.5) Équilibres de court et de long terme.

H.2 - Analyse macroéconomique

H- 2.1) Comportement des agents : consommation, épargne, investissement, demande et offre de monnaie.

H- 2.2) L'approche macroéconomique classique.

H- 2.3) L'analyse keynésienne.

I - Les principaux courants de la pensée économique depuis le XVIIIè siècle

BIBLIOGRAPHIE ÉLÉMENTAIRE

A -Manuels :

A -1 Macroéconomie

- BLANCHARD, O. et D.COHEN, (2007), *Macroéconomie*, Pearson Education, 4ème Ed.

- BURDA, M., WYPLOSZ, C., (2006), *Macroéconomie,* Collection Ouvertures Economiques, Editions de Boeck, 4ème Ed.

A -2 Microéconomie

- PICARD, P. (2002), *Éléments de microéconomie 1.Théorie et applications* - 6ème Ed., Montchrestien.
- VARIAN, H.R. (2002), *Introduction à la microéconomie* – 5ème Ed., De Boeck.

A -3 Économie internationale

- KRUGMAN, P.R. et OBSTFELD M., (2008), *Économie internationale*, Collection Ouvertures Economiques, Editions de Boeck, 4ème Ed.
- RAINELLI, M., (2003), *La nouvelle théorie du commerce international*, Repères, La Découverte, Paris, 3ème Ed
- DE MELO, J. et GRETHER, J-M., (1997), *Commerce international* , De Boeck, Bruxelles.

B -Revues :

- Alternatives Économiques
- Problèmes Économiques
- Finances et Développement (Publication trimestrielle du F.M.I.)

C - Ressources en économie sur internet :

- http://ses.ens-lsh.fr/
- http://www.touteconomie.org/
- http://www.touteconomie.org/index.php?arc=s0
- http://www.journeeseconomie.org/

XII - CONSEILS POUR L'EPREUVE D'ORDRE GENERAL

L'épreuve d'ordre général consiste dans le développement d'un sujet d'ordre général n'impliquant pas la connaissance d'œuvres littéraires déterminées. Elle demande une excellente maîtrise de la langue française écrite (orthographe, expression, concision et clarté) et nécessite de procéder avec méthode et rigueur, tant du point de vue du fond que de la forme. Les conseils qui suivent reflètent les lacunes et défauts les plus couramment observés dans les copies des candidats.

- Analyser avec soin le sujet afin d'en comprendre correctement le sens et de saisir l'étendue du domaine concerné.

- Rassembler les idées à développer, s'assurer de leur cohérence et préparer un plan structuré.

- Rédiger en prenant soin d'expliquer et de fournir des arguments, ce qui va bien au-delà d'un simple catalogue d'idées.

- Veiller à la qualité de l'expression : justesse du vocabulaire, syntaxe des phrases correcte, expression précise et concise, orthographe soignée.

- Relire et corriger les fautes éventuelles.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

Un écrivain écrit à propos de l'immigration ceci : «L'immigration quelle que soit sa couleur et sa saveur, est une injection de vie, d'énergie et de culture et que les pays devraient la recevoir comme une bénédiction».

Appréciez cette affirmation.

SUJET n° 2

Le développement rapide du nombre d'abonnés à INTERNET dans le monde et en particulier en Afrique aura-t-il des conséquences sur la vie politique, sociale, économique des pays africains.

Dans l'affirmative lesquelles ? et pourquoi ? Etayez votre raisonnement par des exemples précis.

SUJET n° 3

EL HADJ OMAR, fondateur du royaume théocratique Toucouleur du Soudan Occidental (1797-1864) parlant de la prévoyance a dit ce qui suit:

«C'est quand on est au sommet de la puissance qu'on doit se frayer une route pour la défaite»

Est-ce toujours d'actualité ? Quelles réflexions vous inspire cette phrase ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve se compose d'un exercice et de deux problèmes ; le candidat peut les traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE

P désigne l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P.

On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des n – 1 entiers qui le précèdent, c'est-à-dire 1, 2, 3, ..., n – 2, n – 1, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que + 1 ou – 1. Par exemple, on a 4 = – 1 + 2 + 3.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque n $\in$ P une décomposition :

$$\text{(D)} \qquad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \, k$$

où le symbole ε_k est le coefficient +1 ou – 1 à affecter à l'entier k.

❶ La décomposition d'un entier pair n$\in$ P est-elle unique ?

❷ Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (D).

PROBLEME N° 1

On rappelle qu'une suite réelle (u_n) est dite « récurrente d'ordre k » lorsque le terme général u_n dépend des k termes précédents u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-k} ; les k premières valeurs u_0, u_1, ..., u_{k-1} de la suite sont données comme conditions initiales.

On considère une suite réelle (u_n), où n est un nombre entier, $n \in N$. La suite (u_n) est une suite récurrente d'ordre 2 définie par la relation :

$$u_{n+2} = (u_{n+1} + u_n) / 2$$

On donne les conditions initiales $u_0 = a$ et $u_1 = b$, où a et b sont deux nombres réels.

❶ En utilisant les résultats classiques sur les suites récurrentes d'ordre 2, donner l'expression, en fonction de n et des paramètres a et b, du terme général de la suite u_n.

❷ Déterminer la limite du terme général u_n de la suite (u_n) quand $n \to +\infty$.

❸ On définit la suite (v_n), $n \in N$, par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on explicitera la raison.

Donner l'expression générale de v_n en fonction de n, a et b.

Retrouver l'expression du terme général de la suite (u_n) établie à la question 1.

❹ On définit la suite (w_n), $n \in N$, par :

$$w_n = u_{n+1} + u_n / 2$$

Etudier la suite (w_n).

En déduire que la suite (u_n) peut être mise sous la forme d'une suite récurrente d'ordre 1, de la forme :

$$u_{n+1} = A\, u_n + B$$

où l'on déterminera les expressions des constantes A et B.

❺ Pour tout entier n, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = (x_{n+1}\, x_n)^{1/2}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

Déterminer la limite de x_n quand $n \to +\infty$.

PROBLEME N° 2

On définit, pour tout entier $n \in N$, l'intégrale I(n) suivante :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

❶ Calculer I(0), I(1), I(2).

❷ En effectuant une intégration par parties, établir la relation suivante :

$$n\, I(n) = (n-1)\, I(n-2) \qquad \forall\, n \in N$$

❸ Montrer que la suite des intégrales I(n) est une suite de termes positifs et qu'elle est décroissante.

❹ En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} I(n+1)/I(n) = 1$.

❺ On définit $Z(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer Z(0) et Z(1).

❻ Montrer par récurrence que, pour tout n, Z(n) est égale à une constante C que l'on explicitera.

❼ Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} nI^2(n) = \pi/2$$

❽ A l'aide de la relation établie à la question 2, établir les formules suivantes :

$$I(2p) = \frac{1\times2\times3\times.....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times......\times2p}\ \pi/2$$

$$I(2p) = \pi\ C_{2p}^{p}\ /\ (2\times4^{p})$$

$$I(2p+1) = \frac{2\times4\times6\times.....\times(2p)}{3\times5\times........\times(2p+1)}$$

$$I(2p+1) = 4^{p}\ /\ [(2p+1)\ C_{2p}^{p}\ ]$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants *:*

SUJET n° 1

La libéralisation interne et externe et la mondialisation des économies permettent-elles encore aux Etats de mener des politiques conjoncturelles indépendantes ? Vous appuierez votre raisonnement sur une reformulation critique des modèles de la théorie macro-économique, et sur l'histoire des politiques récentes appliquées aux économies en développement.

SUJET n° 2

Les théories classique et néoclassique des échanges internationaux (de Ricardo et J.S. Mills à Herksher, Ohlin et Samuelson) vous semblent elles pouvoir guider le développement et l'insertion internationale des économies émergentes ? Vous appuierez votre raisonnement sur des cas empiriques.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve se compose de deux exercices et un problème ; le candidat peut les traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale S(n) par :

$$S(n) = \int_0^1 (1+x)^n \, dx$$

❶ Calculer S(n)

❷ En déduire $\sum_{k=0}^{n} C_n^k / (k+1)$

EXERCICE n° 2

Pour t réel strictement positif, on définit la fonction f_t de la variable réelle x dépendant du paramètre t de la façon suivante :

$$f_t : x \rightarrow (t + 1) / (x^2 + t).$$

❶ Déterminer, quand ils existent, les réels M(x) et m(x) définis par :

$M(x) = \text{Max}_{\,t > 0}\, f_t(x)$

$m(x) = \min_{\,t > 0}\, f_t(x)$

M(x) (resp. m(x)) est le maximum (resp. minimum) de la fonction $f_t(x)$ lorsque t parcourt $R^+ - \{0\}$.

❷ Représenter les graphes des fonctions M et m.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur R^+ par :

$$f(x) = x / (e^x + 1) \qquad (x \geq 0)$$

❶ Calculer la dérivée f ’de f.

❷ Montrer que l’équation f ’(x) = 0 admet une solution et une seule sur R^+ ; on notera par α cette solution.

❸ Montrer que α vérifie l’équation : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

❹ Construire le tableau de variation de f et donner l’allure du graphe de cette fonction.

❺ On introduit la fonction g définie sur R^+ par la relation :

$$g(x) = 1 + e^{-x}$$

Montrer que α est l’unique solution de l’équation g(x) = x.

Etablir que $\alpha > 1$. En déduire que $\alpha - 1 < e^{-1}$.

❻ Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, on a :

$$g(x) \geq 1$$

et que :

$$|g(x) - \alpha| \leq e^{-1}|x - \alpha|$$

❼ On définit la suite (α_n), $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $[1, +\infty[$ par la relation de récurrence d'ordre 1 :

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$$

avec la condition initiale $\alpha_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D’ANALYSE D’UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

<u>Note</u> : l’épreuve est composée de deux problèmes indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

<u>Attention</u> : le tableau 2 est à recopier et à compléter sur votre copie. Sinon, il vous faudra rendre ce document.

PROBLEME n° 1

La société anonyme BOUTY est spécialisée dans la vente d’appareils ménagers. Le dépannage des appareils en atelier est sous-traité à une entreprise extérieure non connue du client dans la mesure où la société BOUTY a un service après vente (S.A.V.) auquel s’adresse directement le client. Chaque intervention du S.A.V. donne lieu à l’envoi d’une fiche d’évaluation au client qui n’en supporte pas les frais d’expédition.

Le directeur de la qualité de BOUTY a décidé de faire faire une étude sur les prestations du S.A.V. d’une des succursales. Un échantillon de 400 fiches d’intervention est prélevé sur les interventions sur des réfrigérateurs, dans le courant du premier trimestre 1994. Les tableaux 1 et 2 fournissent certains résultats de cette étude. Les informations relatives aux clients n’ayant pas retourné la fiche ont été obtenues par relance téléphonique.

❶ Il vous est demandé, tout d’abord, d’analyser et de commenter le tableau 1 relatif au niveau de satisfaction des clients ayant demandé une réparation de réfrigérateur. Pour ce faire, il vous est suggéré d’analyser la dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d’appréciation en complétant le tableau 2 et de commenter les résultats.

Tableau 1

Niveau de satisfaction des clients ayant demandé
une réparation de réfrigérateur

Clients	très satisfaits	satisfaits	peu ou pas satisfaits	Total
ayant retourné la fiche	222	50	28	300
n'ayant pas retourné la fiche	78	20	2	100
Total	300	70	30	400

Tableau 2
(à compléter)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Ni	pi	npi	(ni-npi)	(ni-npi)2	(5)/(3)
1	222	0,56250	225	-3	9	0,04
2	50	0,13125	52,5	-2,5	6,25	0,12
3	28	0,05625				
4	78	0,18750	75	3	9	0,12
5	20	0,04375				
6	2	0,01875	7,5	-5,5	30,25	4,03
Total	400	1,00000	400			

Afin de vous aider à conclure le test, il vous est proposé de comparer la valeur totale obtenue en colonne 6 avec la valeur 5,99. Si la valeur trouvée est supérieure à 5,99 il faut en conclure qu'il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation.

❷ Sur les 400 interventions du S.A.V., 150 sont classés comme mineures parce qu'ayant entraîné un temps de réparation n'excédant pas une heure. Pour les autres, qualifiées de majeures, 35 d'entre elles ont pu être effectuées sur place et 215 ont été réparées en atelier. On ne s'intéressera, ici, qu'aux interventions majeures. Le nombre de jours qui séparent la date d'arrivée du technicien de celle du retour possible de l'appareil (la livraison pouvant être différée à la demande du client pour raison de convenance personnelle) est donné dans le tableau 3 et sera appelé « durée d'une réparation majeure ».

Tableau 3

Distribution des durées d'une réparation majeure

I		1	2	3	4	5	6	7	8	Total
x_i	Durée (en jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	
n_i	Nombre de réfrigérateurs	35	70	66	44	22	10	2	1	250

Il vous est demandé de calculer la moyenne et la variance de la durée d'une réparation majeure. Pour ce faire, on vous donne les définitions suivantes :

- Moyenne $\overline{X} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i x_i}{n}$ où $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ (r étant le nombre de valeurs différentes de x)

- Variance $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$

❸ Pour suivre l'évolution de la demande, le S.A.V. calcule, à la fin de chaque trimestre, le nombre total d'interventions, au cours des douze mois qui viennent de s'écouler (ce qui permet d'éliminer l'incidence de la saisonnalité).

A partir des informations du tableau 4, il vous est demandé de fournir une prévision pour l'année civile 1997 en justifiant votre démarche.

Tableau 4

Nombre d'interventions des douze derniers mois
(données fin de trimestre)

	19 94				19 95				1996
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1
Nombre d'interventions	13200	13500	13700	14000	13900	13800	14200	14100	14300

PROBLEME n° 2

A l'aide des tableaux fournis en annexe, rédiger une note de synthèse sur les salaires des agents de l'Etat français en 1996.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Le champ est constitué des agents des ministères civils de l'Etat, titulaires et non titulaires, en poste en métropole. Sont inclus les enseignants des établissements privés sous contrat, tandis que sont exclus les salariés des établissements publics ainsi que la Poste et France Télécom devenus exploitants publics depuis le 1er janvier 1991.

Les fichiers de paie de la Fonction Publique d'Etat constituent les sources principales d'information. Les résultats ont été établis à partir d'une exploitation au 1/12ème des fichiers de paye 1995 et 1996. Les effectifs inscrits dans le tableau 3, sont issus du fichier complet.

❶ Les notions de salaire et de traitement

Le traitement indiciaire brut s'obtient en multipliant l'indice nouveau majoré par la valeur du point. C'est le traitement avant tout complément et retenue. Pour la plupart des titulaires, c'est sur ce traitement que sont calculées les cotisations sociales autres que la contribution de solidarité alors que les non titulaires cotisent sur l'ensemble de leur salaire brut.

Le salaire brut ou la rémunération brute s'obtient en ajoutant au traitement indiciaire brut l'indemnité de résidence (0 à 3 % du traitement brut), le supplément familial de traitement éventuel, les primes et les indemnités mais en excluant les éventuels avantages en nature. Les primes et indemnités contiennent la « nouvelle bonification indiciaire » mais elles ne comprennent pas l'indemnité logement des instituteurs qui est versée lorsqu'ils ne sont pas logés par la commune : les salaires brut et net excluent aussi cette indemnité. Ils sont tous considérés comme recevant un avantage en nature, non comptabilisé ici. Les indemnités incluent aussi les rémunérations d'activités annexes indépendantes de l'emploi principal et, dans le cas des non titulaires, l'éventuelle indemnisation du chômage.

Le salaire net ou la rémunération nette de prélèvements s'obtient en retranchant du salaire brut les cotisations sociales « salariés » ainsi que la contribution sociale généralisée (CSG) et la contribution au remboursement de la dette sociale (CRDS).

Le salaire moyen par tête correspond à celui d'un agent à temps plein. On convertit en effet les effectifs en « années-travail » au prorata de leur présence. Ainsi, un agent ayant travaillé durant 6 mois à temps complet et perçu 50 000 F compte pour 0,5 année-travail rémunérée à 100 000 F par an. Si ce même agent avait été à mi-temps, il aurait compté pour 0,25 année-travail rémunérée à 200 000 F par an.

Pour l'ensemble des non titulaires, le salaire moyen, converti en équivalent plein temps, peut être surévalué du fait de la méthode de prise en compte de la période de versement des indemnités versées au titre du chômage une partie de l'année.

❷ Evolution à structure constante et effet de structure

L'évolution du salaire moyen entre les années n-1 et n est égale au produit d'une évolution à corps, grade et échelon constants et d'un effet de structure.

L'évolution de salaire à structure constante est calculée en figeant la structure des effectifs par corps, grade et échelon au niveau atteint l'année n-1. Elle retrace la moyenne des évolutions de salaires propres à chaque « poste de travail ».

L'évolution moyenne diffère selon la population sur laquelle elle est calculée : soit l'ensemble des agents, soit les personnels présents deux années de suite.

L'effet de structure ou GVT (glissement vieillissement-technicité) « solde » mesure l'effet des modifications de la répartition de la population entre les différents postes de travail (en cas de strict renouvellement de la population à l'intérieur de chaque poste de travail, cet effet est nul). Il résulte de l'effet de carrière ou GVT « positif » et de l'effet des départs des embauches ou « entrée-sorties » généralement négatif.

L'effet de carrière ou GVT « positif » mesure la contribution à l'évolution du salaire moyen des avancements et promotions des « personnes en place ». Comme le salaire à structure constante s'obtient en figeant la structure des effectifs par corps, grade et échelon, l'effet de carrière inclut l'impact des mesures statutaires. On peut le calculer globalement ou par catégorie d'agents sur la population des personnes en place appartenant à la catégorie l'année n-1, qu'ils aient ou non changé de catégorie l'année n.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

«La technologie est la science de l'homme, en tant que créateur et porteur de culture».

Commentez cette assertion (Votre argumentation doit être soutenue par des exemples précis).

SUJET n° 2

Quelles réflexions vous suggèrent la phrase de Tristan Bernard (écrivain français 1866-1947) dans son dictionnaire humoristique A à Z ?

«Si un individu persiste à marcher droit au milieu d'une foule qui zigzague, c'est lui qui aura l'air de zigzaguer. Il faut suivre le roulis et ne pas lui résister».

SUJET n° 3

Evoquant le passé et l'avenir un proverbe bantou s'exprime ainsi :

«La route n'enseigne pas au voyageur ce qui l'attend à l'étape»

Quelles sont les réflexions que vous inspirent ce proverbe ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée de deux exercices et un problème, tous indépendants.

EXERCICE n° 1

Pour tout nombre réel a, on définit la matrice M(a), carrée d'ordre 3, par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❶ Calculer M(a).M(b) $(b \in R)$

❷ Pour tout entier n et tout réel a, calculer $M^n(a)$

❸ Montrer que M(a) est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE n° 2

Soit U la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

❶ Calculer U^k pour tout entier positif k.

❷ Etudier l'inversibilité de U.

PROBLEME

Le symbole ln désigne le logarithme népérien. L'objet du problème est de travailler sur une approximation numérique de factorielle n!.

Première partie

Dans cette première partie, on se propose de trouver un encadrement de n!, quel que soit l'entier n.

❶ Calculer l'intégrale $J(n) = \int_1^n \ln(t)dt$

❷ On définit, pour tout entier n strictement positif, la quantité :

$$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n)$$

① Montrer, en donnant toutes les justifications de façon précise, que :

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \ln(k+1)$$

② En déduire l'encadrement suivant pour S_n :

$$J(n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq J(n+1)$$

❸ ① Montrer, en utilisant les résultats de la question 2, que l'on a les inégalités suivantes :

$$(1) \qquad (n/e)^n \leq n! \leq e[(n+1)/e]^{n+1}$$

② Application numérique : on prend n=10 ; quel est l'encadrement numérique de 10! fourni par les inégalités (1) précédentes ? Que pensez-vous de la précision de l'encadrement (1) ?

Deuxième partie

On va essayer de déterminer un équivalent de n!, valable pour n grand, qui fournisse une bonne approximation numérique de n!.

❹ On désigne par A(k) le point de coordonnées (k, 0), k entier, et par B(k) le point de coordonnées (k, ln(k)). Pour tout entier k ≥ 2, on note par T(k) la surface du trapèze (A(k–1), A(k), B(k), B(k–1)) et par R(k) la surface :

$$(2) \qquad R(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt - T(k)$$

① Calculer T(k).

② Montrer que l'intégrale $H = \int_{k-1}^{k} [(k - 0{,}5 - t)/t]\,dt$ est égale à R(k).

Montrer ensuite, en le justifiant, que R(k) peut être mis sous les formes :

$$(3) \qquad R(k) = \int_{0}^{1} [(u - 0{,}5)/(k - u)]\,du$$

puis :

$$(4) \qquad R(k) = 0{,}5 \int_{0}^{1} [(u - u^2)/(k - u)^2]\,du$$

❺ Etudier la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(u) = u - u^2$. En déduire que, pour tout nombre entier k ≥ 2 :

$$(5) \qquad 0 \le R(k) \le [(k-1)^{-1} - k^{-1}]/8 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

❻ On pose, pour tout entier n, n ≥ 2, U(n) = R(2) + R(3) + ... + R(n).

① Montrer que :

$$0 \le U(n) \le (1 - 1/n)/8$$

② En déduire que la série U(n) est convergente.

③ Soit u la limite de U(n), $u = \sum_{k \ge 2} R(k)$. Montrer que :

$$0 \le u - U(n) \le 1/8n$$

❼ En sommant les T(k) à partir de la relation (2), montrer que :

$$S_n = (n + 0,5)\ln(n) - n + (1 - u) + \varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n) = u - U(n)$

❽ Déduire de la question 7 que, lorsque $n \to +\infty$, on a l'équivalence suivante :

$$(6) \qquad n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

où C est une constante que l'on exprimera en fonction de u.

❾ A partir de la relation (6), donner un équivalent de C_{2n}^n, nombre de combinaisons de n éléments pris parmi 2n.

Sachant que l'on donne également $C_{2n}^n \sim 4^n/(n\pi)^{1/2}$, calculer la constante C en égalant les deux équivalents; en déduire un équivalent de n! quand $n \to +\infty$.

Application numérique : calculer cet équivalent pour n = 10.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

***les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants** :*

SUJET n° 1

IMPACT DES POLITIQUES MACRO-ECONOMIQUES SUR LA PAUVRETE ; le cas des pays d'Afrique Noire dans les années quatre-vingts

Après avoir étudié les politiques macro-économiques, analysez les mécanismes de transmission et leur impact sur la pauvreté.

SUJET n° 2

Depuis la fin de la décennie 80, nombre de gouvernements semblent considérer que les régimes de taux de change fixes sont plus à même de maintenir la confiance des agents économiques privés domestiques et étrangers, et d'imposer une discipline budgétaire et monétaire. En vous appuyant sur le cadre standard de l'analyse macro-économique keynesienne (le modèle IS/LM en économie ouverte), il vous est demandé de débattre de l'intérêt respectif des différents régimes de taux de change dans des économies en développement soumises à la contrainte de l'internationalisation commerciale et financière.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

PROBLEME n° 1

❶ Soit P(x) un polynôme quelconque non nul de la variable réelle x. Etudier le degré du polynôme $Q(x) = P(x)\,P(x + 2) + P(x^2)$.

❷ On suppose à partir de cette question que le polynôme P vérifie la relation (R):

$$(R) \qquad P(x)\,P(x + 2) + P(x^2) = 0$$

On note par a une racine de P, supposée exister. Démontrer que a^2 et a^4 sont deux racines de P.

❸ En déduire que, si $|a| \neq 1$ et $a \neq 0$, P admet une infinité de racines. Qu'est alors le polynôme P ?

❹ On suppose donc que $|a| = 1$ ou $a = 0$. Démontrer que $(a - 2)^2$ est une racine de P. En déduire que P n'admet qu'une seule racine a et donner sa valeur.

❺ Donner alors l'expression générale de tous les polynômes P(x) non nuls, de la variable réelle x, à coefficients réels, vérifiant la relation (R).

❻ Examiner les résultats des questions 2 à 5 dans le cas où la relation (R) est vérifiée par un polynôme non nul quelconque P(z) de la variable complexe z et à coefficients complexes.

PROBLEME n° 2

❶ On considère la fonction « tangente » $f : x \to \text{tg } x$ définie pour $x \in [0, \pi/4]$. Montrer rigoureusement que f est inversible ; on note Arctg la fonction f^{-1}.

❷ Calculer la dérivée de Arctg.

En déduire que $\text{Arctg } x = \int_0^x 1/(1 + t^2)\, dt$ pour $0 \leq x \leq 1$

❸ Montrer que pour tout réel t et tout entier n, on a :

$$(1 + t^2)^{-1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} + (-1)^{n+1} t^{2n+2}/(1 + t^2)$$

❹ ① Montrer que Arctg x peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Arctg } x = S_n(x) + R_n(x)$$

où les quantités $S_n(x)$ et $R_n(x)$ vérifient :

- $S_n(x) = \Sigma_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i+1}/(2i + 1)$
- $R_n(x)$ est tel que $|R_n(x)| \leq x^{2n+3}/(2n + 3)$

② En déduire que $\text{Arctg } x = \lim S_n(x)$ quand $n \to +\infty$.

③ On prend x = 1 ; établir que $|\pi - 4\, S_n(1)| \leq 4/(2n + 3)$. Déterminer la valeur de n de façon à avoir une approximation de π à 10^{-4} près.

❺ On considère deux nombres réels a et b tels que $b = (a + 1)/(a - 1)$; montrer, en faisant le changement de variable $t \to u$ tel que $t = (au - 1)/(a + u)$ dans l'intégrale de définition de Arctg(1/b), que l'on a :

$$\text{Arctg}\,(1/a) + \text{Arctg}(1/b) = \pi/4$$

❻ On prend a = 2 ; montrer que $\pi/4 = \lim\,[S_n(1/2) + S_n(1/3)]$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $\left|\pi - 4\,[S_n(1/2) + S_n(1/3)]\right| \leq (2^{-(2n+1)} + 4 \times 3^{-(2n+3)})/(2n + 3)$. Quelle précision peut-on avoir pour n = 8 ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Note : l'épreuve est composée de trois exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Attention : le tableau 3 est à rendre impérativement avec votre copie.

Exercice n° 1

❶ ① D'aprés les données du tableau 1, calculer les taux bruts de mortalité (définis comme le rapport du nombre de décès durant une année donnée, à la population moyenne de cette année) de la France et de la Malaisie pour 1991.

② Calculer de même les taux bruts de mortalité par tranche d'âge.

❷ Calculer le nombre de décès qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Malaisie, si ce pays avait les taux de mortalité par âge de la France. Commenter.

Tableau 1 - Données Population

	Malaisie			France	
Age	Population en 1991	Décès en 1991		Population en 1991	Décès en 1991
<1	495.600	6.400		749.000	5.500
1-4	1.939.800	1.700		3.022.800	1.200
5-14	4.222.900	2.100		7.646.700	1.400
15-24	3.552.800	3.600		8.490.000	6.400
25-34	2.977.600	4.000		8.576.300	10.500
35-44	2.095.000	4.900		8.642.000	17.700
45-54	1.315.800	7.600		5.835.700	25.500
55-64	867.700	13.200		5.952.400	56.000
65-74	488.600	18.000		4.310.700	87.700
+ de 75	225.100	22.400		4.037.200	312.800
Total	18.180.900	83.900		57.262.800	524.700

Exercice n° 2

On dispose d'une table de survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et suivies à partir de leur naissance (âge 0).

Tableau 2 - Table de survie

i	âge (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge S_{xi}
1	0	1000
2	10	850
3	20	800
4	30	750
5	40	720
6	50	680
7	60	560
8	70	380
9	80	150
10	90	20
11	100	0

❶ Calculer :

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant l'âge de 40 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder après l'âge de 70 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder entre 30 et 60 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant 30 ans ou après 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 20 ans d'atteindre l'âge de 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 30 ans de décéder avant l'âge de 80 ans.

❷ On définit la variable d(x,x+a) comme étant le nombre de décès entre deux âges séparés de a années. De même, on définit la variable aq_x comme étant le rapport entre d(x,x+a) et le nombre de survivants à l'âge x. En utilisant les données du tableau 2, calculer d(x,x+10) et $10q_x$ pour chacune des classes d'âge du tableau **(pour ce faire, vous compléterez le tableau 3 que vous remettrez avec votre copie)**.

❸ On définit l'espérance de vie à l'âge x par la formule suivante :

$e_x = x + \frac{1}{S_x}\sum_{i=k}^{10} d(x_i, x_i + 10) * (\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x)$ o□ i est défini dans le tableau 2. k étant la valeur de l'indice i dans le tableau 2 correspondant à l'âge x (exemple : pour le calcul de e_{20}, espérance de vie à 20 ans, k=3)

Calculer e_0, e_{20} et e_{70}.

Exercice n° 3

A l'aide des tableaux fournis en annexe, rédiger une note de synthèse faisant un bilan démographique de l'année 1997 en France.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Pour l'année 1997, les résultats provisoires sont évalués à partir des statistiques de l'état civil sur les neuf premiers mois et d'extrapolation de l'enquête démographique auprès d'un échantillon de grandes villes en ce qui concerne le dernier trimestre.

L'indicateur conjoncturel de fécondité est la somme des taux de fécondité par âge observés une année donnée. Cet indicateur donne le nombre d'enfants qu'aurait une femme tout au long de sa vie, si les taux de fécondité observés l'année considérée à chaque âge demeuraient inchangés.

L'espérance de vie à la naissance est égale à la durée moyenne d'une génération fictive qui aurait tout au long de son existence les conditions de mortalité par âge de l'année considérée.

Ces deux indicateurs sont indépendants de la structure par âge de la population. Ils caractérisent la situation du moment tout en permettant des comparaisons dans le temps et dans l'espace.

TABLEAU 3

(A RENDRE IMPERATIVEMENT AVEC VOTRE COPIE)

I	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge S_{xi}	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10q_{xi}$
1	0	1000		
2	10	850		
3	20	800		
4	30	750		
5	40	720		
6	50	680		
7	60	560		
8	70	380		
9	80	150		
10	90	20		
11	100	0		

SESSION

D'AVRIL

2000

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Que pensez-vous de cette citation de MONTESQUIEU (écrivain Français 1689-1755).

«Si dans l'intérieur d'un pays vous n'entendez le bruit d'aucun conflit, vous pouvez être sûr que la liberté n'y est pas».

Est-elle toujours d'actualité ?

SUJET n° 2

NÄBÏ prosateur turc (mort en 1712) a écrit cette phrase :

«La nature, qui nous a donné qu'un seul organe pour la parole, nous en a donné deux pour l'ouïe afin de nous apprendre qu'il faut plus écouter que parler».

A l'aide d'exemples précis, quelles réflexions vous inspire-t-elle ?

SUJET n° 3

Albert EINSTEIN, physicien allemand (1879-1955) a écrit ce qui suit sur l'influence du milieu où l'on vit :

«Peu d'homme sont capable d'exprimer une opinion qui diffère des préjugés de leur milieu ambiant».

Etes-vous d'accord avec lui ? En ce temps des communications rapides, de l'Internet, est ce toujours aussi vrai ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée d'un seul problème, présenté en trois parties.

Dans tout le problème, F désigne l'ensemble des applications continues de U dans R, où U est l'intervalle [0, 1] et R l'ensemble des nombres réels.

Première partie

On définit sur $F \times F$ l'application D par :

$$\text{Pour } f, g \in F,\ D(f, g) = \underset{x \in U}{Sup}\left(\left|f(x) - g(x)\right|\right)$$

Cette définition est licite car la fonction f – g étant continue sur le segment U, elle est bien bornée sur U.

❶ Si f et g $\in$ F, que signifie D(f, g) = 0 ?

❷ Montrer que D est symétrique, c'est-à-dire que D(f, g) = D(g, f), $\forall$ f et g $\in$ F

❸ Montrer que D vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall\ f, g, h \in F, \qquad D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g)$$

❹ On définit les fonctions f et g suivantes, pour $x \in U$: $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Etablir que D(f, g) = 1/4. Tracer les graphes de f et g et représenter graphiquement D(f, g).

❺ Tracer les graphes des fonctions $f(x) = |x - 1/2|$ et $g(x) = 1$; représenter D(f, g) et calculer D(f, g).

❻ Calculer D(f, g) pour les fonctions $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g(x) = \sin(\pi x)$.

❼ On note par O l'application nulle définie sur U = [0, 1] par : $\forall\ x \in U$, O(x) = 0. Donner un exemple de fonction f, qui ne soit pas un polynôme, telle que D(f, O) = 2.

Deuxième partie

❽ Montrer que :

$$\forall \text{ f et g} \in F, \quad \left| \int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt \right| \leq D(f, g)$$

le symbole $\int_U$ désignant simplement l'intégrale de 0 à 1.

❾ On définit sur U la suite de fonctions de F par $f_n(x) = (\sin n^2 x) / n$, où n appartient à l'ensemble N^* des nombres entiers strictement positifs.
O désignant, comme dans la question 7 de la première partie, l'application nulle, et f'_n la dérivée de f_n, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$D(f_n, O) = 1 / n \qquad \text{et} \qquad D(f'_n, O) = n$$

Troisième partie

On désire étudier, dans cette partie, la possibilité d'approximer une application f de F par une suite de polynômes P_n, l'approximation de f par P_n étant définie au sens suivant : $\lim_{n\to+\infty} D(f, P_n) = 0$.
Nous allons étudier successivement trois situations de ce type.

❶⓿ On note par f l'application de F définie par :

$$f(x) = 2/(2 + x)$$

Pour $n \in N^*$, on définit le polynôme P_n élément de F par :

$$P_n(x) = \Sigma_k (-1)^k (x/2)^k \qquad \text{où k varie de 0 à n et } x \in U$$

Etablir que $D(P_n, f) = 1 / (3.2^n)$

❶❶ On prend pour f la restriction à U = [0, 1] de la fonction exponentielle e^x, et on définit pour tout nombre entier n la suite de polynômes P_n de F par :

$$P_n(x) = \Sigma_k x^k / k! \qquad \text{où k varie de 0 à n et } x \in U$$

a) On veut établir que l'on a l'égalité (E) suivante :

$$\text{(E)} \quad e^x - P_n(x) = J(n, x)$$

où J(n, x) est l'intégrale $\int_{[0,x]} [e^t (x-t)^n /n!]\, dt$

Etablir une relation entre J(n, x) et J(n+1, x).
Démontrer ensuite par récurrence l'égalité (E).

b) Montrer que $e^t (x-t)^n$ est majoré par $e(x-t)^n$.

c) En déduire que $D(P_n, f) \leq e/(n+1)!$

❶❷ Dans cette question, on prend pour f la restriction de la fonction sinus à l'intervalle U = [0, 1].

La suite P_n de polynômes de F est définie par récurrence de la façon suivante, pour tout $x \in U$:

$$P_1(x) = x$$

$$P_{n+1}(x) = 3\, P_n(x/3) - 4\, [P_n(x/3)]^3$$

a) Donner les formes explicites des polynômes $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

b)On note par A l'intervalle $[-1, +1]$ et on définit l'application T sur A par : $\forall x \in A$, $T(x) = 3x - 4x^3$. Etudier l'application T.

Montrer, en utilisant la formule des accroissements finis, que :

$$\forall\, u, v \in A \quad |T(u) - T(v)| \leq 9\,|u - v|$$

c)Etablir la formule trigonométrique : $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

d) Montrer que l'on a, pour tout $x \in U$: $0 \leq x - \sin x \leq x^3/6$

e) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in N^*$, on a :

$$\forall\, x \in U,\ P_n(x) \in A,\ \text{ et } \ |P_n(x) - \sin x| \leq x^3 / (2.3^n)$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

Les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants *:*

SUJET n° 1

Après avoir exposé les principales innovations des nouvelles théories de la croissance (endogène) par rapport aux modèles néo-keynesien et néo-classique traditionnels, il vous est demandé d'en déduire les mesures concrètes de politiques de développement économique qu'elles suggèrent.

SUJET n° 2

L'accroissement du taux d'épargne constitue-t-il un préalable à celui des investissements et au raffermissement de la croissance dans les économies en développement ? Après un rappel détaillé des dimensions théoriques du sujet, vous présenterez quelques illustrations passées et récentes.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

On se place dans l'ensemble $M_3(R)$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera I la matrice unité et O la matrice nulle de $M_3(R)$.

Les paramètres a, b et c sont des nombres réels ; on définit la classe Δ des matrices T(a, b, c) de $M_3(R)$ de la forme :

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On note par A la matrice T(1, 2, 3) correspondant aux choix de paramètres a = 1, b = 2, c = 3.

On considère l'équation matricielle (E) : $X^n = A$, où l'inconnue est une matrice X de $M_3(R)$, n étant un nombre entier non nul.

❶ Montrer que T(a, b, c) peut se mettre sous la forme aI + R, où R est une matrice que l'on explicitera.

❷ Donner l'expression de la matrice $T^n(a, b, c)$, pour tout entier n.

❸ On suppose que la matrice X vérifie l'équation (E).

a) Démontrer que X commute avec A : AX = XA.

b) En déduire que X appartient à Δ.

c) Déterminer les éventuelles solutions de (E) en distinguant selon la parité de n.

EXERCICE n° 2

❶ On considère le système linéaire d'inconnues réelles x, y, z, t où a, b, c et d sont des paramètres réels :

$$\begin{aligned} -0{,}75x + y &= a \\ 0{,}25x - y + z &= b \\ 0{,}25x - z + t &= c \\ 0{,}25x - t &= d \end{aligned}$$

Donner une condition (C) nécessaire sur les paramètres a, b, c, d pour que ce système admette au moins une solution.

En supposant cette condition (C) vérifiée, montrer que pour tout réel r il existe une unique solution au système précédent vérifiant de plus l'égalité x + y + z + t = r. Préciser cette solution.

❷ On définit la suite réelle (u_n), $n \in \mathbb{N}$, ensemble des nombres entiers naturels, vérifiant pour tout entier n l'égalité :

$$u_{n+4} = (u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)/4$$

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux suites m_n et M_n par :

$$m_n = \mathrm{Min}\,(u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3})$$

$$M_n = \mathrm{Max}\,(u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3})$$

2 a – Etablir pour tout entier naturel n les inégalités : $m_n \leq u_{n+4} \leq M_n$

2 b – En déduire que la suite (m_n) est croissante et que la suite (M_n) est décroissante, puis que ces deux suites sont convergentes. On notera par m et M leurs limites respectives.

2 c – Etablir pour tout entier naturel n l'inégalité :

$$u_{n+4} \leq 0,75\, M_n + 0,25\, m_n$$

puis l'inégalité :

$$u_{n+4} \leq 0,75\, M_n + 0,25\, m$$

2 d – En appliquant ce résultat successivement à n, n+1, n+2, n+3, établir pour tout entier naturel n l'inégalité :

$$M_{n+4} \leq 0,75\, M_n + 0,25\, m$$

2 e – En déduire que les deux suites (m_n) et (M_n) sont adjacentes et que la suite (u_n) converge.

EXERCICE n° 3

❶ On définit la fonction s de R dans R par : $\forall\, x \in$ R, $s(x) = (e^x - e^{-x})/2$.
Faire l'étude complète de la fonction s, tracer très précisément son graphe (on précisera la tangente au point d'abscisse 0, et les intervalles sur lesquels s est convexe ou concave).

❷ Montrer que s est une bijection de R sur R et expliciter son inverse s^{-1}.

❸ Pour alléger les notations, on note $h = s^{-1}$; montrer que h est dérivable sur R et que, pour tout x réel, on a :

$h'(x) = 1 / (1 + x^2)^{1/2}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

On se propose d'étudier un ensemble de données statistiques sur " Le Cinéma en France ".

Les 2 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Attention *:*

La feuille de papier millimétré nécessaire pour l'exercice 2 est à remettre avec votre copie.

Une attention particulière sera portée aux commentaires.

EXERCICE n° 1

Le tableau 1 donne la répartition, sur les six périodes quinquennales, du nombre d'entrées suivant le pays d'origine du film.

Tableau 1

Nombre d'entrées suivant le pays d'origine du film (millions)

Période	France	USA	Autres	Total
1960-1964	786	460	317	1563
1965-1969	553	295	244	1092
1970-1974	481	210	209	900
1975-1979	432	260	194	886
1980-1984	472	321	163	956
1985-1989	259	326	141	726

Question 1 :

Exprimez les données en pourcentage du total sur chaque période.

Représentez les résultats par un graphique de votre choix et commentez.

Question 2 :

Le tableau 2, qui présente les cinq plus fortes entrées de chaque période, semble contredire le tableau précédent. Imaginez des arguments pour expliquer cette contradiction.

Tableau 2

Le " TOP 5 " du cinéma en France

TITRE	*ORIGINE*	*ENTREES (en millions)*
1960-1964		
Ben Hur	USA	13,8
Le jour le plus long	USA	11,9
Les 101 dalmatiens	USA	11,6
Les canons de Navarone	USA	10,2
La guerre des boutons	F	9,7
1965-1969		
La grande vadrouille	F	17,2
Il était une fois dans l'Ouest	ITA	14,8
Le livre de la jungle	USA	12,5
Le corniaud	F	11,7
le docteur Jivago	USA	9,8
1970-1974		
Les aristochats	USA	10,4
Emmanuelle	F	8,9
Les bidasses en folie	F	7,8
Les aventures de Rabbi Jacob	F	7,4
Robin des bois	USA	6,5
1975-1979		
Les aventures de Bernard et Bianca	USA	7,2
Les dents de la mer	USA	6,2
Le gendarme et les extra-terrestres	F	6,2
Midnight express	USA	5,9
L'aile ou la cuisse	F	5,8
1980-1984		
E.T	USA	8,9
La chèvre	F	7,0
Rox et Rouky	USA	6,7
Les aventuriers de l'arche perdue	USA	6,3
Marche à l'ombre	F	6,1
1985-1989		
Trois hommes et un couffin	F	10,2
L'ours	F	9,1
Le grand bleu	F	9,0
Jean de Florette	F	7,2
Manon des sources	F	6,6

EXERCICE n° 2

Le tableau 3 donne le nombre d'entrées et le prix moyen du billet de 1960 à 1990.

Tableau 3

ANNEE	*ENTREES* (en millions)	*PRIX BILLET* (en francs)
1960	355	2,10
1961	328	2,22
1962	312	2,52
1963	292	2,87
1964	276	3,13
1965	259	3,45
1966	235	3,78
1967	211	4,20
1968	203	4,37
1969	184	4,97
1970	184	5,41
1971	177	5,96
1972	184	6,62
1973	176	7,56
1974	179	8,57
1975	182	9,79
1976	177	11,21
1977	170	12,21
1978	179	13,37
1979	178	14,66
1980	175	16,01
1981	189	18,34
1982	202	20,48
1983	199	22,14
1984	191	23,45
1985	175	24,94
1986	168	26,96
1987	137	27,66
1988	125	29,12
1989	121	30,44
1990	122	31,45

<u>Question 1</u> :

A l'aide du papier millimétré fourni en annexe, tracez la courbe du nombre d'entrées.

Commentez le graphique, en distinguant 3 périodes dans l'évolution.

Sur chacune des 3 périodes, ajustez graphiquement l'évolution par une droite. Que mesure la pente de chaque droite ? Expliquez.

Par lecture graphique, déterminez approximativement le taux annuel moyen de décroissance du nombre des entrées sur la dernière période et estimez le nombre d'entrées pour 1991.

<u>Question 2</u> :

On veut étudier la relation existant entre le nombre d'entrées et le prix du billet. On utilisera, pour cela, l'information des années 1960, 1966, 1972, 1978, 1984 et 1990.

Calculez les indices base 100 en 1960 du nombre d'entrées (**E**) et du prix du billet.

On veut montrer que l'évolution du nombre d'entrées dépend de l'évolution relative du prix du billet par rapport à l'indice général des prix : par exemple, le nombre des entrées baisse quand le prix du billet augmente plus vite que l'indice général des prix (**IGP**).

L'IGP, base 100 en 1960, est le suivant sur les années retenues :

1966	:	123,9
1972	:	171,2
1978	:	307,9
1984	:	569,9
1990	:	695,7

Calculez les indices du prix relatif du billet P suivant la formule :

P = 100 x (indice du prix du billet / IGP)

<u>Question 3</u> :

Représentez sur un graphique les couples (indice du prix relatif du billet **P,** indice du nombre d'entrées **E**). Commentez le résultat.

Tracez la droite ajustant au mieux l'ensemble des points tracés :

$$\mathbf{E = 144{,}9 - (0{,}5 \times P)}$$

Sachant que le prix du billet a subi en 1991 la même hausse qu'en 1990 et que l'indice général des prix a augmenté de 3,1 % de 1990 à 1991, estimez à partir de la relation précédente, le nombre d'entrées en 1991. Comparez au résultat obtenu à la question 1.

Que pensez-vous des 2 méthodes ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Montesquieu (1689-1755) écrivain français en évoquant le bon sens, a écrit ceci ***«j'aime les paysans, ils ne sont pas assez savants pour raisonner de travers».***

Que pensez vous de cette phrase assez provocante ? Est-elle encore d'actualité ?

SUJET n° 2

A l'aide d'exemples précis expliquez ce proverbe EWE du Togo ?

«Un mauvais frère est comme une branche de rônier, on ne peut pas le refuser totalement car il faut penser aux jours de pluie».

SUJET n° 3

Que vous inspire ce proverbe Camerounais ?

«L'amitié est une trace qui disparaît dans le sable si on ne la refait pas sans cesse».

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Problème n° 1

On considère un triangle quelconque ABC.

A partir des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AD}$ appelé produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de la façon suivante :

- $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal en A au plan contenant le triangle ABC
- α étant l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, la longueur du vecteur $\overrightarrow{AD}$, notée $\|AD\|$, est égale à $\|AB\|.\|AC\|.\sin\alpha$

1) Etablir une relation entre $\|AD\|$ et la surface S du triangle ABC

2) A et B sont deux points distincts du plan.
Caractériser et représenter géométriquement l'ensemble des points M du plan tel que la longueur du produit vectoriel de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soit une constante strictement positive a.

Problème n° 2

n étant un nombre entier, on note par E(n) l'espace vectoriel des polynômes de la variable réelle, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

Partie A :

Soit g l'application définie sur E(n) qui à tout polynôme P de E(n) associe le polynôme g(P) défini par :

$$g(P) = (x^2 - 1)P'' + (2x + 1)P'$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde du polynôme P.

1) Montrer que g est une application linéaire de E(n) dans E(n).

2) On suppose que P est strictement de degré n ; quel est le degré du polynôme g(P) ?

3) Quel est le noyau de g, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes tel que g(P) = O, où O désigne le polynôme nul ?

4) On note par $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ la base canonique de E(n).
Donner l'expression de la matrice G de l'application g dans la base B.
Déterminer les valeurs propres de G.

Partie B :

Soit h l'application définie sur E(n) par :

$$h(P) = P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$$

1) Montrer que h est une application linéaire de E(n) dans E(n).

2) Déterminer le degré de h(P) en fonction du degré de P.

3) Déterminer le noyau de h.

Problème n° 3

Partie A :

R^4 désigne l'espace euclidien de dimension 4 muni de sa base canonique usuelle B^4. Soit f l'endomorphisme de R^4 dans R^4 dont la matrice A dans B^4 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de f et donner, pour chacune d'elles, des vecteurs propres associés de longueur 1.

Partie B :

R^3 désigne l'espace euclidien de dimension 3 muni de sa base canonique usuelle B^3. Soit g l'endomorphisme de R^3 dans R^3 dont la matrice G dans B^3 est :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où k est un nombre réel.

Trouver les valeurs propres de g en fonction de k.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Problème n° 1

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$x \to f(x) = \ln(\ln |x|)$$

où ln est le symbole des logarithmes népériens.

Etudier les variations de f (domaine de définition, continuité, dérivation, comportement asymptotique, etc …) et tracer précisément son graphe.

Donner les équations des tangentes à f aux points A et B d'abscisses respectives e et – e, ainsi que les équations des normales à ces tangentes en A et en B.

Calculer la surface du quadrilatère formé par les deux tangentes et les deux normales.

Problème n° 2

On considère la fonction réelle f de la variable réelle définie par $f(x) = (4 + x^4)^{-1/2}$.

1) Etudier les variations et tracer le graphe de f.

2) On considère la fonction F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

En aucune manière il n'est demandé le calcul explicite de l'intégrale définissant F.

2.1) Donner l'ensemble de définition de F et étudier sa parité.

2.2) Calculer la dérivée de F après avoir justifié son existence.

2.3) Montrer que pour tout x positif ou nul, on a :

$$x.(4 + 16x^4)^{-1/2} \leq F(x) \leq x.(4 + x^4)^{-1/2}$$

En déduire la limite de F(x) quand x tend vers $+\infty$.

3) Donner le tableau de variations de F et tracer son graphe.

4) On note u(x) la fonction x^{-2}. On définit alors, pour $x > 0$, la quantité E(x) par :

$$E(x) = x \int_x^{2x} (f(t) - u(t))\,dt$$

Montrer que la limite de E(x) est 0 quand x tend vers $+\infty$.

Problème n° 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par la relation $f(x) = x + x^3$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque, que l'on notera par g.

2) Montrer que la fonction g vérifie, pour tout x, la relation :

$$g(x) + g^3(x) = x$$

3) Tracer le graphe de g.

4) Justifier précisément le fait que g soit dérivable. Donner l'expression de la dérivée g' en fonction de g. En déduire le tableau de variation de g'.

5) Soit G la fonction définie par :

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

Calculer G en fonction de g. Etudier alors les variations de la fonction G.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

***Les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants** :*

SUJET n° 1

Les théories macroéconomiques du comportement de consommation et d'épargne des ménages vous paraissent-elles rendre compte des phénomènes observés dans les économies en voie de développement ? Il vous est demandé :

- de rappeler les différentes théories contemporaines en déduisant soigneusement les principales conclusions des hypothèses retenues (théorie keynesienne, théorie du revenu permanent, théorie du cycle de vie....)

- d'illustrer le débat à l'aide d'exemples choisis dans les économies en développement.

SUJET n° 2

Existe-t-il un régime de change optimal pour les économies en développement ? Dans un premier temps, vous rappellerez les conséquences du choix d'un régime de change sur les grands équilibres internes et externes, et sur les politiques macroéconomiques.

Dans un second temps, vous illustrerez la réponse à la question du régime de change optimal par des exemples choisis dans les économies en développement.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

L'épreuve est composée de 2 exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

La commune d'Adaxer a acquis un parc de photocopieurs auprès de la société Xeric. On estime que la probabilité qu'un photocopieur tombe en panne au cours d'une journée est p=0,002. Ce parc de photocopieurs fait l'objet d'un contrat de maintenance prévoyant le remplacement du matériel si la durée de la panne excède la journée. On admettra, pour simplifier, que la machine en panne est toujours remise en service au début du jour ouvrable qui suit celui de la panne mais n'est jamais remise en service dans la journée de la panne.

1) Calculer, en justifiant, la probabilité, pour une machine donnée, de tomber en panne au moins une fois au cours d'une période de 40 jours.

2) Soit X, la variable aléatoire "nombre de pannes survenant au cours d'une période de 40 jours sur un photocopieur donné". Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier votre réponse.

3) Calculer la probabilité, pour une machine donnée, de tomber en panne au moins une fois au cours d'une période de 40 jours, en utilisant le résultat de la question précédente.

4) Le parc acheté est composé de 52 machines qui sont utilisées dans des conditions identiques et ont une probabilité p'=0,077 de tomber au moins une fois en panne au cours d'une période de 40 jours. On désignera Y, la variable aléatoire "nombre de photocopieurs du parc tombant en panne au moins une fois au cours d'une période de 40 jours". Calculer l'espérance mathématique de Y, sa variance et son écart-type.

Exercice n° 2

Outre son activité “ vente ”, la société Xeric loue à la journée des photocopieurs de haut volume. Le prix de location lui laisse une marge brute de 1000 francs par jour et par machine. Actuellement, elle possède deux machines. Néanmoins, chaque photocopieur est immobilisé 1 jour sur 10 au hasard, pour réglage et contrôle.

1) Calculer la probabilité pour qu’une machine donnée soit disponible pour la clientèle un jour quelconque. Donner, en la justifiant, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y “ nombre de machines disponibles pour la location ”.

Par ailleurs, on admet que le nombre d’entreprises ou de collectivités locales désirant louer un photocopieur de haut volume pour une journée est une variable X caractérisée par la loi de probabilité suivante (on n’a jamais X>3) : P(X=0)=0,05 ; P(X=1)=0,20 ; P(X=2)=0,45 ; P(X=3)=0,30. Cette loi de demande reste invariable au cours du temps et n’a aucune incidence sur le planning des immobilisations pour réglage et contrôle.

2) Le nombre Z de machines louées au cours d’une journée est une variable aléatoire. Donner la loi de probabilité de cette variable.

3) Calculer l’espérance mathématique de Z, puis la marge brute moyenne réalisée au cours d’une journée.

4) La société Xeric envisage l’achat d’une troisième machine destinée à la location. La marge brute unitaire moyenne ne serait plus alors que de 900 francs. Faut-il acheter cette troisième machine ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Qu’a voulu exprimer l’ancien Président du Sénégal Léopold Sédar SENGHOR dans cette phrase :

«Les hommes doivent s’accepter différents et se vouloir complémentaires». En 2002 cette phrase est-elle toujours d’actualité ?

SUJET n° 2

Est ce que vous êtes d’accord avec cette phrase de Jean Rostand biologiste français (1894-1977) ? Donnez des exemples précis.

«La faiblesse des démocraties, c’est qu’il leur faille, trop souvent se renier pour survivre».

SUJET n° 3

Oscar Wilde écrivain anglais (1854-1900) a écrit cette phrase :

«Les tragédies des autres sont toujours d’une banalité désespérante». Qu’a t-il voulu exprimer ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

***Les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants** :*

SUJET n° 1

La définition d'une politique monétaire implique à la fois une capacité à évaluer l'évolution des agrégats monétaires (offre de monnaie), et une spécification de la demande de monnaie. Après avoir rappelé sommairement les fondements de la théorie de l'offre (théorie du multiplicateur de monnaie, théorie du diviseur de crédit…) et de la demande de monnaie (approches en terme de flux, théories du portefeuille…) il vous est demandé de réfléchir sur leurs implications respectives sur la politique monétaire, et en particulier sur les politiques macroéconomiques de stabilisation dans les économies en développement.

SUJET n° 2

L'hypothèse de concurrence imparfaite sur le marché des biens et services, sur le marché du travail et sur le marché des capitaux constitue le socle de la rénovation théorique tant en macroéconomie qu'en microéconomie. Il vous est demandé :

1) de rappeler ici les principes microéconomiques de fixation des prix et des quantités en situation de monopole et d'oligopole sur le marché des biens et services,

2) de déduire les implications de ces hypothèses de concurrence imparfaite dans différents domaines de l'analyse économique (théories du commerce international, théories du marché du travail…).

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Préliminaires :

- On rappelle que le nombre complexe z, $z \in C$, corps des complexes, peut s'écrire sous les formes algébrique et trigonométrique :

(1) $z = a + ib$, $a \in R$, $b \in R$

(2) $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}$

- Ecrire a et b en fonction de z et de son conjugué, noté $\bar{z}$
- Ecrire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

Première partie :

On considère, pour tout entier n strictement positif, les fonctions f_n et g_n d'une variable réelle définies, pour $0 \leq x \leq \pi/2$, par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$$

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin 2kx$$

1) Calculer $f_n(0)$ et $g_n(0)$

2) En écrivant $\cos 2kx + i \sin 2kx = e^{i2kx}$, montrer que $f_n(x)$ peut, pour $0 < x \leq \pi/2$, se mettre sous la forme :

$$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$$

Donner une expression analogue pour $g_n(x)$.

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction $h(x)$ définie sur $[0 , \pi/2]$ par :

$$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x \qquad \text{pour } 0 < x \leq \pi/2$$

$$h(0) = \alpha$$

Montrer que h est dérivable sur $[0 , \pi/2]$. Calculer alors $h'(x)$ pour $x \in [0 , \pi/2]$.

Montrer que h' est continue sur $[0 , \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$$

La notation $\int_{[0, \pi/2]}$ signifie simplement que l'intégrale est prise pour x allant de 0 à $\pi/2$.

a – Montrer que $h(x) \sin nx$ est continue sur $[0 , \pi/2]$. En déduire que H(n) existe.

b – En utilisant <u>une</u> intégration par parties, démontrer qu'il existe un réel K, ne dépendant pas de l'entier n, tel que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$$|H(n)| \leq K/n$$

En déduire la limite de H(n) quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie :

On considère la suite définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$

On note par U la limite, si elle existe, de u_n quand n tend vers $+\infty$:

$U = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$

5) On note par J(k ; α, β) l'intégrale suivante :

$J(k\,;\alpha,\beta) = \int_{[0,\,\pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$

Montrer que :

$J(k\,;\alpha,\beta)) = [(-1)^k (\alpha + \beta\pi) - \alpha] / 4k^2$

Remarque : pour établir ce résultat, on pourra procéder, par exemple, à deux intégrations par parties successives.

6) Déterminer un couple de valeurs (α^*,β^*) pour (α,β) tel que :

$J(k\,;\alpha^*,\beta^*)) = 1/\,4k^2$

On conservera les valeurs $\alpha = \alpha^*$ et $\beta = \beta^*$ pour toute la suite du problème.

7) Montrer que

$u_n = 4 \int_{[0,\,\pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, f_n(x)\, dx$

8) Démontrer alors que u_n peut se mettre sous la forme :

$u_n = 2H(2n+1) - 2 \int_{[0,\,\pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, dx$

où H est l'intégrale introduite à la question 4 de la première partie, la fonction h intervenant dans son expression étant prise avec les valeurs (α^*,β^*) des paramètres (α,β).

9) En déduire que $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et donner la valeur de U.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Problème n °1 :

1) Le symbole ln est celui des logarithmes népériens.

Montrer que, $\forall\ x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$

2) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\forall\ x \in [-(n)^{1/2}, n^{1/2}] \qquad (1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$$

3) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\forall\ x \in R \qquad e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$$

Problème n °2 :

M_4 désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels.

A et B sont deux matrices symétriques de M_4, de coefficients respectifs : pour A, $a_{i,j} = 1$, $\forall i = 1$ à 4, $\forall j = 1$ à 4 ; pour B, $b_{i,i} = 1$ $\forall i = 1$ à 4, $b_{i,i+1} = 0$ $\forall i = 1$ à 3, $b_{i,i+2} = -1$, $\forall i = 1$ à 2, $b_{1,4} = 0$.

1) Calculer A^2, B^2, A^n, B^n, AB et BA.

2) Soit la matrice S = A + B. Donner l'expression de S^n, pour tout entier n strictement positif.

Problème n °3 :

Dans l'espace M_3 des matrices carrées d'ordre 3, on définit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 1 & 1+\cos 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel quelconque.

Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces associés.
La matrice T est - elle diagonalisable ?

Problème n °4 :

Pour tout n entier, on considère l'intégrale U(n) définie par :

$U(n) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{n/2}\, dt$

Le symbole $\int_{[0,1]}$ signifie que l'intégrale est calculée pour t allant de 0 à 1.

1) Calculer U(0) et U(1).

2) Montrer que, $\forall\, n \in N$, $U(n+1) \leq U(n)$

3) Etablir une relation entre U(n) et U(n – 2).
En déduire la valeur de U(n). (On distinguera n pair et n impair).

Problème n °5 :

Dans ce problème, K représente un entier fixé, strictement supérieur à 1 ; α est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0, 1[.

On définit les suites u_n et v_n par les équations de récurrence suivantes :

(I) $\forall\, n \geq 1$, $u_n = \alpha\, u_{n+1} + (1 - \alpha)\, u_{n-1}$

avec $u_0 = 0$ et $u_K = 1$

(II) $\forall\, n \geq 1$, $v_n = \alpha\, v_{n+1} + (1 - \alpha)\, v_{n-1}$

avec $v_0 = 1$ et $v_K = 0$

Donner, selon les valeurs du paramètre α, les expressions de u_n et v_n en fonction de α, n et K.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D’ANALYSE D’UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice n° 1

L’association des élèves (BdE) d’une école envisage, comme à chaque rentrée scolaire, un achat groupé d’ordinateurs dotés des principaux logiciels statistiques d’utilisation courante dans le cursus du diplôme. Actuellement, la machine qui présente le meilleur rapport qualité/prix est la I.T - 22, fabriquée par la société “Intelligent Technics” et auprès de laquelle des commandes similaires ont déjà été passées au début des trois dernières rentrées scolaires. Cette machine pose cependant un problème de conception au niveau de sa carte mère et l’association des élèves a dû retourner 6% des machines au fabricant, dans le cadre de la garantie de 12 mois “pièces et main d’œuvre” mais est d’une très grande fiabilité par ailleurs. Il se trouve que par la suite les incidents de cette nature se raréfient et que sur une durée d’utilisation de 4 ans, le pourcentage de machines donnant satisfaction est de 90% ; autrement dit 4% des ordinateurs doivent être réparés entre leur seconde et leur quatrième année et le coût de la réparation (300 euros) doit alors être supporté par le propriétaire de la machine. Par ailleurs on admettra qu’une machine réparée ne retombe plus jamais en panne sur le reste de la durée d’utilisation de 4 ans. Ce problème préoccupe vivement l’association des élèves, mais les ordinateurs des autres marques sont beaucoup plus chers ; c’est la raison pour laquelle le choix des I.T - 22 est maintenu mais deux solutions caractérisées l’une par une garantie de 1 an et l’autre par une garantie de 4 ans est mise à l’étude. Mais auparavant le BdE cherche à mieux “cerner le marché”.

1. Il est bien connu que tant que des arrhes ne sont pas versées, des “intentions d’achat” ne se concrétisent pas toujours. L’expérience passée montre qu’il existe une probabilité de 90% pour qu’une intention d’achat se transforme en achat définitif. Au cours de la première quinzaine de l’année scolaire, les représentants du BdE ont fait circuler des feuilles pour connaître le nombre d’étudiants désireux de passer par l’association des élèves pour acheter une I.T - 22. Bien entendu les conditions de vente sont alors spécifiées : le prix n’excèdera pas 795 euros et la livraison sera effectuée au maximum 15 jours plus tard. Le nombre d’étudiants ayant répondu positivement s’élève à 824. Donnez le nombre de machines que le BdE doit commander si, voulant limiter le risque de ne pas écouler sa commande, elle accepte une probabilité de 65% d’être en rupture de stock (c’est-à-dire dans l’impossibilité de satisfaire une ou plusieurs demandes d’élèves ayant fait part de leur intention de passer par elle pour l’achat de cette machine).

2. En définitive, l’association des élèves décide d’acheter 740 ordinateurs et l’on supposera, pour simplifier, qu’elles seront toutes vendues. Pour une commande directe de cette importance, la société I.T consent un prix unitaire de 736,5 euros, avec une garantie de 1 an (pièces et main d’œuvre). A ce coût d’acquisition, il convient d’ajouter, au titre de “frais divers de gestion” 30 euros pour déterminer le prix de vente qui s’élèverait donc à 766,5 euros pour cette première solution envisagée. La seconde solution envisagée consiste à offrir systématiquement une garantie de 4 ans (pièces et main d’œuvre) mais à un prix majoré de 16,5 euros (d’où un prix de vente de 783 euros), étant entendu que le BdE prend à sa charge le coût des réparations non couvertes par la garantie annuelle. Calculez la probabilité pour que le cumul des “primes d’assurance” (16,5 euros/ordinateur) perçu par le BdE ne suffise pas à couvrir les dépenses de réparation qu’il s’engage à prendre à sa charge ; qu’en concluez vous ?

Rappel de cours : Si $n > 5 \text{ et } \left| \sqrt{\frac{p}{1-p}} - \sqrt{\frac{1-p}{p}} \right| \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}3$ *alors la loi d’une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de caractéristique n et p peut être approximée par une loi normale de moyenne np et de variance np(1-p)*

On vous donne également pour vous aider la table de la loi normale centrée réduite N(0,1) ci-dessous. Si T suit une loi normale centrée réduite alors :

t	**P(T<t)**	**t**	**P(T<t)**	**t**	**P(T<t)**
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9772
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918
0,5	0,6915	1,5	0,9332	2,5	0,9938
0,6	0,7257	1,6	0,9452	2,6	0,9953
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981

Exercice n° 2

A l'aide des tableaux fournis en annexe, rédiger une note de synthèse traitant des revenus des ménages entre les régions françaises en 1996.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Le revenu disponible brut (RDB) des ménages correspond au montant des revenus de l'année qui reste à la disposition des ménages, une fois payés impôts et cotisations sociales, pour consommer et épargner. Il est égal au revenu primaire brut corrigé des transferts nets de redistribution.

Le revenu primaire brut correspond aux ressources que les ménages tirent de leur participation directe (rémunération du travail) ou indirecte (rémunération du capital) à la production : salaires, excédent brut d'exploitation des entrepreneurs individuels (agriculteurs, artisans, membres de profession libérale,…), loyers, intérêts, dividendes. Il inclut les cotisations sociales, y compris la part patronale.

Les transferts nets de redistribution sont le solde des prélèvements amputant le revenu des ménages (cotisations sociales et impôts directs) et des versements les majorant (prestations sociales).

Les prestations sociales sont de nature très diverses et comprennent principalement les retraites et préretraites, les allocations chômage, les allocations familiales, et les remboursements maladie.

L'opération "autres" figurant dans le tableau 2 est le solde entre diverses ressources (production de services de logement et de services domestiques par les ménages (hors entrepreneurs individuels), intérêts reçus, dividendes, indemnités d'assurance dommage,…) et prélèvements (intérêts versé, cotisations sociales des non salariés, primes d'assurance, …).

Le revenu disponible brut par habitant d'une région est un indicateur qui permet de s'affranchir de la taille de la région.

Tableau 1 – Poids des régions dans la population, le revenu disponible brut (RDB) et le produit intérieur brut (PIB) en 1996

Région	RDB (en millions de francs)	RDB par habitant (en francs)	Part de chaque région dans		
			La population (en %)	Le RDB (en %)	Le PIB (en %)
Alsace	165800	97100	2,9	3,0	3,0
Aquitaine	274200	95100	4,9	5,0	4,4
Auvergne	121000	92000	2,3	2,2	1,8
Bourgogne	149900	92300	2,8	2,7	2,4
Bretagne	266000	92700	4,9	4,9	4,1
Centre	224400	91600	4,2	4,1	3,7
Champagne-Ardenne	124900	92400	2,3	2,3	2,1
Corse	23000	88100	0,4	0,4	0,4
Franche-Comté	98400	88100	1,9	1,8	1,7
Basse-Normandie	126200	88900	2,4	2,3	2,1
Haute-Normandie	160200	89900	3,1	2,9	3,1
Languedoc-Roussillon	197400	87600	3,9	3,6	2,9
Limousin	65100	90600	1,2	1,2	1,0
Lorraine	202100	87400	4,0	3,7	3,4
Midi-Pyrénées	230100	91600	4,3	4,2	3,6
Nord-Pas-de-Calais	325400	81300	6,9	5,9	5,6
Pays de la Loire	279900	88400	5,4	5,1	4,7
Picardie	156000	83600	3,2	2,9	2,6
Poitou-Charentes	141900	87300	2,8	2,6	2,2
Provence-Alpes-Côte d'Azur	418700	93800	7,7	7,6	6,8
Rhône Alpes	511800	91000	9,6	9,3	9,3
Ile-de-France	1224200	110800	18,9	22,3	29,1
France métropolitaine	**5486600**	**94000**	**100,0**	**100,0**	**100,0**

Source : Insee Première n°617 de novembre 1998

Tableau 2 – La formation du revenu disponible brut (RDB) des ménages en 1996
(pour 100 francs)

Région	Salaires nets (+)	Excédent brut d'exploitation des entrepreneurs individuels (+)	Prestations sociales (+)	Impôts (-)	Autres (+)
Alsace	48,8	11,3	32,6	9,8	17,1
Aquitaine	37,6	18,7	37,2	8,6	15,1
Auvergne	37,9	16,4	38,5	8,5	15,7
Bourgogne	38,0	17,9	38,6	8,5	14,0
Bretagne	38,1	18,0	36,5	8,8	16,2
Centre	41,0	15,5	37,5	10,1	16,1
Champagne-Ardenne	40,5	19,2	35,4	8,8	13,7
Corse	30,2	14,4	47,1	9,7	18,0
Franche-Comté	42,7	14,4	36,5	8,3	14,7
Basse-Normandie	41,3	17,1	36,0	8,9	14,5
Haute-Normandie	44,2	12,0	37,0	9,9	16,7
Languedoc-Roussillon	34,5	14,9	43,4	9,4	16,6
Limousin	35,6	14,6	44,2	9,3	14,9
Lorraine	42,3	12,0	39,1	8,6	15,2
Midi-Pyrénées	39,2	16,6	39,0	9,9	15,1
Nord-Pas-de-Calais	41,5	10,7	41,4	9,4	15,8
Pays de la Loire	40,9	16,2	35,6	9,3	16,6
Picardie	42,0	15,0	37,3	9,3	15,0
Poitou-Charentes	36,3	18,2	38,3	8,6	15,8
Provence-Alpes-Côte d'Azur	40,5	12,9	39,7	10,7	17,6
Rhône Alpes	45,1	13,5	35,2	10,1	16,3
Province	**40,7**	**14,9**	**37,9**	**9,4**	**15,9**
Ile-de-France	54,9	8,3	30,0	15,2	22,0
France métropolitaine	**43,9**	**13,4**	**36,1**	**10,7**	**17,3**

Source : Insee Première n°617 de novembre 1998

Lecture : pour disposer de 100 francs de revenu, l'ensemble des ménages métropolitains ont reçu 43,90 francs de salaires nets, 13,40 francs d'excédent brut d'exploitation, 36,10 francs de prestations sociales, 17,30 francs d'autres ressources, et ont versé 10,70 francs d'impôts. L'opération “ autres ” est en fait un solde entre diverses ressources et prélèvements.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Expliquer et commenter ce proverbe «FANG» du Gabon :

«La vie est une branche de palmier que les vents inclinent à leur gré»

SUJET n° 2

En cette période où l'on parle de famines dans plusieurs pays du continent africain que signifie ce proverbe «Bariba» du Bénin ?

«Celui qui est rassasié ne sait pas qu'un autre a faim»

Est-ce qu'il est compris dans notre monde actuel ?

SUJET n° 3

Est-il toujours possible d'appliquer à la lettre ce proverbe «Baoulé» ?

«Il faut dire la vérité même si elle rougit les pupilles, elle ne les crève pas»

Expliquer à l'aide d'exemples précis.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

Les candidats devront traiter au choix l'un des deux sujets suivants :

SUJET n° 1

La théorie du commerce international sert en grande partie de fondement aux défenseurs du libre échange et de la mondialisation. Après avoir rappelé en détail les théories classiques et néoclassiques du commerce international, vous êtes invités à montrer en quoi les approches plus récentes, basées sur la concurrence imparfaite, légitiment au contraire certaines formes de protection et de politique commerciale active dans les économies en développement.

SUJET n° 2

Les récentes crises de balance de paiement dans les économies émergentes ont relancé les réflexions sur le choix des régimes de change. Dans un premier temps, il vous est demandé d'exposer leur principe et leur fonctionnement. Dans un second temps vous en illustrerez les avantages et les risques, en vous appuyant sur des exemples concrets.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PROBLEME n° 1

E désigne l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur R ; F désigne l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur R, deux fois dérivables, de dérivée seconde continue sur R (R désigne l'ensemble des nombres réels).

1) Soit $f \in$ E. On définit les fonctions u et v de la variable réelle x par :

$$u(x) = \int_0^x f(t) \cos t \, dt$$

$$v(x) = \int_0^x f(t) \sin t \, dt$$

Montrer que u et v sont dérivables et calculer leurs dérivées u' et v'.

2) On considère l'application T qui, à la fonction f de E, associe la fonction T_f définie sur R par :

$$T_f(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t)\, dt$$

Exprimer T_f en fonction de u et v.
Montrer que T_f est deux fois dérivable sur R, et que sa dérivée seconde T_f'' est continue sur R.
Etablir que T est une application linéaire de E dans F ; on notera par la suite N(T) et Im(T) respectivement le noyau et l'image de T.

3) Démontrer la relation suivante :

$$T_f + T_f'' = f$$

En déduire le noyau N(T) de l'application T, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f de E telles que $T_f = 0$.

4) On considère le sous-ensemble G de F défini par $G = \{g : g \in F, g(0) = g'(0) = 0\}$

Montrer que $Im(T) \subset G$.

Soit $g \in G$. Calculer $T_{g+g''}$. En déduire alors Im(T).

5) Montrer que T est inversible ; on notera par T^{-1} l'inverse de T.

Montrer que, pour toute fonction g de G, $T^{-1}(g) = g + g''$.

6) On définit la fonction s par : s(x) = sin x.
Calculer T_s.

Déterminer une fonction h de F telle que h + h'' = s.

PROBLEME n° 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues définies sur U = $[0, +\infty[$. Soit H l'application qui, à toute fonction f de E, associe la fonction H(f) = h définie par :

$$H(f)(x) = h(x) = \left[\int_0^x f(t)\,dt\right] / x \qquad \text{si } x \neq 0$$

$$H(f)(0) = h(0) = f(0) \qquad \text{si } x = 0$$

1) Montrer que h est continue sur $]0, +\infty[$ et que $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0)$.

2) Etablir que H est un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.

3) Démontrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4) S'il existe un réel α et une fonction <u>non nulle</u> f de E vérifiant $H(f) = \alpha f$, α sera dite valeur propre de l'application H et f sera un vecteur propre associé à la valeur propre α. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de H.

5) Soit $\alpha \neq 0$ une valeur propre de l'application H et f un vecteur propre associé à α. Démontrer que f est nécessairement dérivable sur $]0, +\infty[$.
On note par φ la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction f, φ' étant la dérivée de φ sur $]0, +\infty[$.
Montrer que l'on a la relation suivante :

$$\forall\, x > 0 \quad \alpha\, x\, \varphi'(x) = (1 - \alpha)\, \varphi(x)$$

6) On pose, pour $x > 0$, $g(x) = x^{(\alpha-1)/\alpha}\, \varphi(x)$.
Calculer g' ; en déduire que g est nécessairement constante sur $]0, +\infty[$.

7) Déterminer une condition nécessaire sur α telle que la fonction φ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une fonction f continue sur $[0, +\infty[$.

8) Donner les valeurs propres de H et les vecteurs propres associés.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

On définit la suite récurrente (u_n), $n \geq 1$, par :

$u_1 = 0$

$\forall\, n \geq 2 \quad (n + 1)^2 u_n = (n - 1)\, u_{n-1} - n$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 0]$.

3) Montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on déterminera.

4) Montrer que, $\forall\, n \geq 2$, $u_n \leq -n/(n + 1)^2$; établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

Exercice n° 2

Soit f la fonction de R dans R définie par :

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

On désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f.

1) Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)\ (1 + x^2)^{-(n+1)}$, où P_n est un polynôme de degré n dont tous les monômes ont des degrés de même parité que n. Calculer P_0 et P_1.

2) Donner une relation simple liant f(x), f'(x) et x.

3) En déduire la relation E :

$$(E) \quad P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

4) Montrer que $P_n'(x) + n(n+1)P_{n-1}(x) = 0$

5) En déduire que le polynôme A défini par :

$$A = (1 + x^2)\, P_n''(x) - 2nxP_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$$

est tel que A = 0.

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{x+2}{2x}}}{e} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f(x) = 1 \qquad \text{si } x = 0$$

1) Le symbole Ln désigne le logarithme népérien. Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction Ln(1 + x) au voisinage de 0.

2) Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

3) On considère la fonction φ définie sur $] - 1, + \infty [$ par :

$\varphi(x) = ½ [1 + x - (1 + x)^{-1}] - Ln(1 + x)$

Calculer f'(x).
Montrer que $f'(x) = x^{-2} \varphi(x) f(x), x \neq 0$.
En déduire que f' est continue sur $] - 1, + \infty [$.

4) Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour $x > - 1$.

5) Démontrer que, pour $x > - 1$, $f(x) \geq 1$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice n° 1

Une des directions du ministère de l'économie reçoit une livraison de 20 postes informatiques. Afin de pouvoir dire au service comptable de payer la facture du fournisseur, n'ayant pas la possibilité matérielle de tester l'ensemble des machines fournies, le responsable décide alors de prélever un échantillon de 3 machines et vous charge de réfléchir sur les risques encourus lors de la prise de décision.

Pour fixer les idées, vous partez de l'hypothèse d'une proportion de 10% de machines défectueuses, autrement dit, la livraison comporterait avec cette hypothèse 2 machines défectueuses (ce paramètre pouvant varier de 0 à 20 si l'on veut avoir une vision complète des risques encourus).

1) Dans cette hypothèse, calculez, en faisant appel aux techniques de dénombrement, la probabilité d'observer sur l'échantillon zéro, une ou deux machines défectueuses.

2) Comment varie cette probabilité d'observer un échantillon totalement conforme (aucune machine défectueuse) en fonction du nombre réel de machines défectueuses dans la livraison ? Tracez une courbe explicitant le phénomène.

A l'examen des réponses apportées dans les questions précédentes, le responsable du ministère s'interroge sur l'opportunité de prélever un échantillon plus important que celui retenu initialement.

3) Sachant qu'un poste informatique est facturé 2.000 euros et que le coût d'un test de machine au sein du ministère s'élève à 200 euros, encouragez-vous le responsable du ministère à augmenter la taille de l'échantillon ? Justifiez.

Exercice n° 2

Les ventes annuelles des paquets de cigarettes de la marque LAFUME sont fournies dans le tableau ci-après. Les hausses tarifaires de cet article prennent effet au 1er janvier. La hausse de prix du 1er janvier 1997 a été de 5%, celle du 1er janvier 1998 de 8%, celle du 1er janvier 1999 de 3% et celle du 1er janvier 2000 de 6% (ces hausses étant calculées sur la base des tarifs au 1er janvier de l'année précédente).

Il vous est demandé de calculer la série des ventes en volume (c'est à dire corrigée de l'incidence de l'inflation) en vous mettant aux conditions économiques de 1er janvier 1996.

Vente des cigarettes LAFUME

(en millions d'euros)

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Ventes	1000	1197	1508	1864	2538

Exercice n° 3

A partir des tableaux joints en annexe, il vous est demandé de rédiger un article de 30 lignes maximum sur les inégalités entre les hommes et les femmes dans le domaine de l'éducation en France, en intégrant au moins 5 critères.

Annexe 1 - Taux de scolarisation des filles et des garçons

Filles (rentrée 2000-2001) / **Garçons (rentrée 2000-2001)**

Age	primaire	secondaire	apprentis	supérieur	total	Age	primaire	secondaire	apprentis	supérieur	total
11	18,9	81,1	0,0	0,0	100,0	11	25,5	74,5	0,0	0,0	100,0
12	4,0	96,0	0,0	0,0	100,0	12	6,2	93,8	0,0	0,0	100,0
13	3,5	96,5	0,0	0,0	100,0	13	5,7	94,1	0,0	0,0	99,8
14	3,5	96,3	0,0	0,0	99,8	14	5,9	93,6	0,0	0,0	99,5
15	3,4	95,5	0,0	0,0	98,9	15	5,6	92,6	0,0	0,0	98,2
16	1,5	90,7	4,3	0,0	96,5	16	2,3	80,8	13,7	0,0	96,8
17	1,1	84,2	5,0	2,6	92,8	17	1,5	73,1	14,8	1,7	91,2
18	0,6	47,3	4,5	30,7	83,1	18	0,8	45,1	11,5	20,7	78,1
19	0,4	23,0	3,8	43,3	70,5	19	0,5	22,7	8,1	31,8	63,1
20	0,2	8,3	3,2	44,9	56,6	20	0,3	8,1	5,5	34,6	48,4
21	0,0	2,7	2,6	39,9	45,2	21	0,0	2,3	3,8	31,9	37,9
22	0,0	1,1	1,9	33,2	36,2	22	0,0	0,7	2,8	29,3	32,8
23	0,0	0,3	1,3	24,5	26,0	23	0,0	0,2	1,8	23,2	25,2
24	0,0	0,1	0,7	16,9	17,7	24	0,0	0,1	1,1	16,6	17,7
25	0,0	0,1	0,6	11,0	11,8	25	0,0	0,0	1,0	10,7	11,7
26	0,0	0,2	0,0	7,5	7,7	26	0,0	0,0	0,0	6,1	6,1
27	0,0	0,0	0,0	5,3	5,3	27	0,0	0,0	0,0	4,6	4,6
28	0,0	0,0	0,0	3,9	3,9	28	0,0	0,0	0,0	3,4	3,4
29	0,0	0,0	0,0	3,0	3,0	29	0,0	0,0	0,0	2,7	2,7

Note : On a ramené à 100 % les taux qui en diffèrent légèrement. Une surestimation de la population scolarisée du premier degré, due à des raisons techniques, est en effet observée pour certaines tranches d'âge.
Champ : France métropolitaine, tous ministères
Source : ministère de l'Education nationale, DPD.

Annexe 2 - Taux de réussite au baccalauréat en 2000

	Présentés		Taux de réussite 2000 (en %)		
	Total	% filles	Filles	Garçons	Ensemble
Baccalauréat général	**339 380**	**56,8**	**81,8**	**77,4**	**79,9**
Série littéraire	74 342	81,7	81,1	76,5	80,2
Série économique et sociale	96 324	62,5	80,2	74,8	78,2
Série scientifique	168 714	42,6	83,7	78,5	80,7
dont : Mathématiques	50 381	39,1	87,7	83,0	84,9
Sciences de la vie et de la Terre	55 669	55,4	80,8	70,7	76,3
Physique-Chimie	48 709	40,5	84,5	79,0	81,3
Baccalauréat technologique	**193 107**	**51,1**	**81,9**	**76,2**	**79,1**
Baccalauréat professionnel	**117 019**	**42,5**	**80,5**	**78,2**	**79,1**
Ensemble	**649 506**	**52,6**	**81,6**	**77,2**	**79,5**

Champ : France métropolitaine et Dom

Source : ministère de l'Education nationale, DPD.

Regards sur la parité - Edition 2002

Annexe 3 - Taux d'accueil des bacheliers généraux et technologiques dans les principales filières de l'enseignement supérieur (rentrée 2000-2001)

En %

	Ensemble	Filles	Garçons
Bacheliers généraux	**94,6**	**92,5**	**97,5**
Université (hors IUT)	62,4	66,1	57,2
IUT	11,2	7,7	16,1
Sections de techniciens supérieurs (STS)	8,4	9,4	7,1
Classes préparatoires aux grandes écoles	12,6	9,4	17,1
Bacheliers technologiques	**73,4**	**67,2**	**80,4**
Université (hors IUT)	19,1	22,2	15,7
IUT	9,2	6,5	12,1
Sections de techniciens supérieurs (STS)	44,1	37,9	51,1
Classes préparatoires aux grandes écoles	1,0	0,6	1,4
Bacheliers Généraux et technologiques	**86,9**	**83,9**	**90,8**
Université (hors IUT)	46,8	51,2	41,1
IUT	10,5	7,3	14,5
Sections de techniciens supérieurs (STS)	21,3	19,0	24,2
Classes préparatoires aux grandes écoles	8,4	6,4	11,0

Lecture : à la rentrée 2000, 73,4% des bacheliers technologiques de l'année se sont inscrits dans l'une des principales filières post-baccalauréat, dont 19,1% à l'université hors IUT et 44,1 % en STS. Ces pourcentages incluent les inscriptions multiples d'un étudiant.
Champ : France métropolitaine et Dom.
Source : ministère de l'Éducation nationale, DPD.

Regards sur la parité - Edition 2002

Annexe 4 - Effectifs et part des femmes dans les principaux cycles universitaires (rentrée 2000-2001)

Disciplines	1er cycle		2eme cycle		3eme cycle		Total	
	Effectifs (en milliers)	% de femmes	Effectifs (en milliers)	% de femmes	Effectifs (en milliers)	% de femmes	Effectifs (en milliers)	% de femmes
Administration économique et sociale	34	59,1	20	59,3	1	63,1	55	59,2
Droit, sciences politiques	90	64,0	63	62,5	31	56,6	184	62,2
Langues	81	70,6	51	79,8	6	68,0	138	73,9
Lettres, sciences du langage, arts	66	71,8	44	76,2	12	65,5	122	72,8
Médecine	36	65,6	21	55,0	50	50,2	107	56,3
Odontologie	1	52,8	3	52,0	4	41,5	8	46,4
Pharmacie	10	67,3	5	65,7	11	66,6	26	66,7
Sciences et technologie des activités physiques et sportives	26	31,8	18	32,0	1	32,6	45	31,9
Sciences de la nature et de la vie	47	59,1	29	57,6	16	49,2	92	56,9
Sciences économiques, gestion (hors AES)	85	52,9	48	50,1	24	45,4	157	50,9
Sciences et structure de la matière	74	32,4	28	39,1	13	32,9	115	34,1
Sciences et technologie, sciences pour l'ingénieur	60	13,4	62	22,8	17	21,3	139	18,6
Sciences humaines et sociales	110	67,7	95	67,1	34	56,6	239	65,9
Ensemble	**720**	**55,6**	**487**	**56,9**	**220**	**50,2**	**1 427**	**55,2**

Champ : France métropolitaine et DOM.
Source : ministère de l'Education nationale, DPD.

Regards sur la parité - édition 2002

Annexe 5 - Diplôme le plus élevé obtenu selon l'âge

En %

	25-34 ans		35-44 ans		45-54 ans	
	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes
Aucun diplôme ou CEP	12,0	16,1	20,4	22,8	31,4	29,1
BEPC seul	4,6	5,0	9,8	7,2	9,3	7,0
CAP, BEP ou équivalent	22,7	29,5	27,9	37,2	25,7	33,7
Baccalauréat ou brevet professionnel	18,7	17,3	15,4	10,5	12,2	9,6
Baccalauréat + 2 ans	20,5	15,7	15,3	10,1	11,8	8,0
Diplôme supérieur	18,5	14,5	10,7	11,8	9,2	12,5
Etudes en cours	3,0	2,0	0,5	0,5	0,3	0,1
	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
% de bacheliers ou plus	60,7	49,5	41,9	32,8	33,6	30,2

Source : Insee, enquête Emploi 2001.

Regards sur la parité - édition 2002

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Êtes-vous d'accord avec les termes de ce proverbe ewe du Togo ?

«Un mauvais frère est comme une branche de rônier, on ne peut pas le refuser totalement car il faut penser aux jours de pluie.»

Sujet n° 2

Êtes-vous prêt (prête) à suivre le conseil de ce proverbe peul ? Expliquez votre décision.

«Un village où ne conduit qu'un seul chemin est un mauvais village. N'y allez pas.»

Sujet n° 3

À votre avis le proverbe arabe suivant est-il justifié ? Analyser à l'aide d'exemples.

«Il y a cinq degrés pour arriver à être sage : se taire, écouter, se rappeler, agir, étudier.»

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs vérifiant les relations suivantes :

$xyz > 1$

$x + y + z < (1/x) + (1/y) + (1/z)$

1) Montrer qu'aucun des réels x, y ou z n'est égal à 1

2) Montrer que l'un au moins des réels x, y, z est strictement supérieur à 1

3) Montrer que l'un au moins des réels x, y, z est strictement inférieur à 1

Exercice n° 2

Ln désigne le symbole des logarithmes népériens.
On considère l'application f de la variable réelle x définie par $f(x) = (x \, \mathrm{Ln}x) / (x^2 - 1)^2$.

1) Calculer une primitive de f(x).

2) u étant un réel tel que u > 2, calculer l'intégrale $I(u) = \int_2^u f(x)\,dx$

3) Déterminer la limite de I(u) quand $u \to +\infty$

Les deux parties du problème sont également indépendantes, et peuvent aussi être traitées dans n'importe quel ordre.

Problème

Partie I :

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par $f(x) = \text{Ln}(1 + e^x)$.

1) Etudier les variations de f : tableau de variations, limites, concavité, asymptotes ; tracer le graphe (C) de f.

2) On définit l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

2a) Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(x) = (x^2 + 4x + 8\,\text{Ln}2)/8$.
On note $d(x) = g(x) - f(x)$.
Montrer que pour tout réel x appartenant à [0, 1], $0 \leq d(x) \leq M$, où M est un réel que l'on précisera à 10^{-3} près.

2b) En déduire un encadrement numérique de l'intégrale I.

3) k est un nombre réel non nul. On désigne par D(k) l'ensemble des solutions, sur R, de l'inéquation :

$$e^x + k > 0$$

Déterminer D(k).

4) A tout réel k, on associe la fonction f_k définie, pour $x \in D(k)$, par $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$. Etudier les variations de f_k.

5) Montrer que, pour $k > 0$, on a, pour tout x réel :

$$f_k(x + \text{Ln}k) = f(x) + \text{Ln}\,k$$

En déduire que la courbe C(k) représentative de f_k se déduit de la courbe C représentant f par une transformation géométrique simple que l'on précisera.

6) Soit Δ la première bissectrice, d'équation $y = x$.

Soit un point M de coordonnées (a, b) ; donner les coordonnées de M', image de M par une symétrie orthogonale par rapport à Δ.

On suppose que M appartient à la courbe C(k) associée à f_k ; donner l'équation de la courbe à laquelle appartient M', déduit de M par une symétrie orthogonale par rapport à Δ.
Construire la courbe C(– 1).

Partie II :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur R par :

$$f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$$

1) Etudier les variations de f_0.
Trouver les coordonnées du centre de symétrie S de la courbe C(0) représentant f_0.

2) On se place dans le cas général : $n \geq 1$.
Donner le tableau des variations de f_n.
Montrer que le point S appartient à toutes les courbes $\Gamma(n)$ représentant f_n.
Tracer Γ (1) ; préciser sa tangente au point S.

3) Pour tout n, on définit la suite v(n) par :

$$v(n) = \int_0^1 e^{-nx}\, dx$$

Calculer explicitement v(n) ; montrer que v(n) est décroissante.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nv(n)$

4) Pour tout n, on définit la suite u(n) par :

$$u(n) = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

4a) Montrer que, $\forall\, x \in [0, 1] : 2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$
En déduire que, pour tout n, on a :

$$v(n+1) \leq 2u(n) \leq v(n)$$

4b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu(n)$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n°1

Dans les économies en développement, la rigidité des prix et la faible mobilité des facteurs contribuent à retarder l'ajustement des économies aux chocs exogènes.

1) Il vous est demandé d'illustrer ces deux caractéristiques à partir d'exemples empiriques précis décrivant le fonctionnement du marché des biens et services, le marché du travail, et/ou le marché monétaire et financier.

2) En vous appuyant sur la théorie économique, vous rechercherez en quoi les propriétés de ces marchés – degré de concurrence, imperfection de l'information, segmentation… – peuvent expliquer ces caractéristiques (le sujet peut être traité au niveau macroéconomique, méso- ou microéconomique, tant au niveau de l'économie domestique qu'à celui des échanges internationaux).

Sujet n° 2

La libéralisation des économies, l'internationalisation des échanges et la diffusion des idéologies libérales semblent discréditer une grande part de l'initiative publique en matière économique. En vous appuyant sur le cas des économies en développement, il vous est demandé de résumer à grands traits les principaux résultats de la théorie économique qui peuvent encore justifier l'intervention de l'État, dans le cadre de l'économie de marché ou à la place de l'économie de marché.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère n points M_i, $1 \leq i \leq n$, le point M_i ayant pour coordonnées (x_i, y_i).

Soit D_a la droite d'équation $y = ax$, $a \in R - \{0\}$.

On note par $A = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (x_i)^2$, $B = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (y_i)^2$, $C = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} x_i y_i$.

A chaque point M_i, $1 \leq i \leq n$, on associe le point H_i, intersection de D_a et de la droite parallèle à l'axe y'Oy d'équation $x = x_i$, et le point Q_i, projection orthogonale de M_i sur D_a.

1) Calculer $Q(a) = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (M_iQ_i)^2$

Déterminer, en fonction de A, B et C, les deux valeurs a_1 et a_2 de a pour lesquelles Q(a) passe par un extremum.

Montrer que les droites D_{a1} et D_{a2} associées à ces valeurs a_1 et a_2 sont perpendiculaires.

2) Calculer $H(a) = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (M_iH_i)^2$

Déterminer en fonction de A, B et C la valeur a* de a pour laquelle H(a) passe par un extremum.

Problème 2

R[X] désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

P étant un polynôme de R[X], on désigne par E l'équation suivante, où a est un paramètre réel :

$$(E) \qquad (x^2 - 1)P''(x) + 4xP'(x) = a.P(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

S(E) désigne l'ensemble des polynômes solutions de E.

1) Montrer que S(E) est un espace vectoriel réel.

2) On suppose que S(E) contient au moins un polynôme de degré n.
Exprimer la constante a en fonction de n.

3) Soit P_n, polynôme de degré inférieur ou égal à n, une solution de E.

   On définit $Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$.

   Montrer que Q_n est également solution de E.

   En déduire que P_n est un polynôme pair si n est pair, et impair si n est impair.

4) On se limite aux polynômes dont le coefficient du terme du plus haut degré est 1.
Calculer les solutions P_0, P_1, P_2, P_3 de l'équation E.

Problème 3

On se situe dans l'espace des fonctions de R dans R.

1) Soit l'équation différentielle :

$$(E_1)\ y'' - 3y' + 2y = 0$$

1a) Montrer que si f_1 et f_2 sont solutions de (E_1), alors pour tous λ et μ réels, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de (E_1).

1b) Chercher les solutions de (E_1) de la forme e^{ax}, où a est un nombre réel.

1c) Donner la forme générale des solutions de (E_1).

2) Quelle est la solution de (E_1) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe représentant $y = e^{3x}$?

3) Le paramètre k est un réel strictement positif.

Montrer que les fonctions $h_k(x) = -k^2 e^x + 2k e^{2x}$ vérifient la relation (E_1).

4) Soit l'équation : $(E_2)\ y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

4a) Déterminer le polynôme du second degré, P, solutions de (E_2).

4b) Soient f et g deux fonctions réelles de la variable réelle, telles que $f(x) = g(x) - x^2/2 - x$

Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1).

En déduire les fonctions f solutions de (E_2).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice n° 1

Un agent d'assurance dont le nombre C de clients est resté constant au cours des deux dernières années, a noté avoir reçu 1 040 dossiers d'accidents de la circulation automobile au cours des 104 dernières semaines. Ceci lui a permis de dresser la statistique ci-dessous du nombre hebdomadaire d'accidents survenus à sa clientèle :

Nombre d'accidents	Moins de 5	De 5 à 7	8 ou 9	10 ou 11	12 à 14	15 à 19	20 et plus
Nombre de semaines	3	20	25	25	23	8	0

Question 1

a) Calculer de deux façons différentes le nombre hebdomadaire moyen d'accidents qui se sont produits parmi les clients de cet agent.
b) Calculer la variance du nombre hebdomadaire d'accidents, puis l'écart-type.
c) Donner la médiane de la distribution du nombre hebdomadaire d'accidents.

Question 2

L'agent d'assurance considère maintenant ces 104 observations comme un échantillon, à l'aide duquel il voudrait faire une estimation du nombre hebdomadaire moyen d'accidents survenant à ses assurés.

a) Préciser la population dont sera extrait cet échantillon, les individus qui la composent, ce qu'on mesure sur ces individus,…
b) Donner une estimation du nombre hebdomadaire moyen d'accidents.

Question 3

a) Combien d'accidents se produit-il par jour en moyenne ?

b) Et par demi-journées ?

c) Ayant par ailleurs constaté qu'il ne se produit qu'extrêmement rarement plus de 2 accidents par jour, cet agent décide de diviser les 104 semaines en 1 456 demi-journées au cours desquelles il décide de supposer qu'il se produit uniformément 1 accident avec la probabilité p (ou qu'il ne s'en produit aucun avec la probabilité 1-p). Quelle est alors l'espérance mathématique du nombre d'accidents qui se produisent au cours d'une demi-journée ? Quelle est sa variance ? Compte tenu de la moyenne calculée à la question précédente, donner une valeur estimée de p.

Question 4

L'agent d'assurance décide alors de diviser la journée en n=24 tranches de temps égales au cours desquelles il supposera qu'il se produit uniformément 1 accident avec la probabilité p'.

a) Quelle est alors l'espérance mathématique du nombre d'accidents qui se produisent en une semaine, et sa variance ?

b) Quelle est la valeur minimale à donner à n pour que la différence entre espérance mathématique et variance du nombre d'accidents soit inférieure à 0,1 ?

Exercice n° 2

«Selon une étude de l'Insee (parue dans INSEE Première n° 929 de novembre 2003), le salaire médian des ingénieurs en France (qui sépare la moitié la moins payée de la moitié la mieux payée) était de 50 320 euros annuels en 2002. Leurs rémunérations varient du simple au triple entre les 10% les moins bien payés et les 10% les mieux payés : les 10% les mieux rémunérés ont perçu en 2002 un salaire brut annuel de plus de 100 000 euros, alors que la rémunération des 10% les moins bien payés était inférieure à 31 000 euros…»

A partir du tableau suivant, il vous est demandé de poursuivre l'article ainsi commencé sur les salaires des ingénieurs en France en 2002.

Salaires des ingénieurs (Ecarts en %)

Caractéristiques individuelles	Ecart	Caractéristiques de l'entreprise	Ecart
Situation conjugale		**Taille de l'entreprise**	
Homme en couple	*(Réf)*	500 à 4999 salariés	10,1
Homme célibataire	-6,2	Plus de 5000 salariés	9,6
Femme célibataire	-9,9	21 à 499 salariés	4,2
Femme en couple	-11,3	*1 à 20 salariés*	*(Réf)*
Niveau d'étude avant l'école d'ingénieur		**Lieu d'emploi**	
Classe préparatoire	4,2	*Région Ile de France*	*(Réf)*
Bac + 4 ou plus	3,1	DOM-TOM	-0,8
Bac (prépa intégrée)	1,6	Province	-12,0
Bac + 2 ou + 3 (DUT, BTS, Licence)	*(Réf)*		
		Secteur d'activité	
Ecole d'ingénieur		Agroalimentaire	9,2
Groupe 1 :		Finance, Banque, Assurance	8,0
Polytechnique	43,0	Chimie, Pharmacie	7,6
Mines de Paris	42,5	Autre industrie	3,5
Centrale Paris	35,3	Commerce, grande distribution	3,1
Groupe 2 :		Société de services non informatiques	1,6
ENSTA Paris	28,9	SSII, société de services informatiques	1,1
Mines de Saint-Etienne	27,9	*Automobile*	*(Réf)*
Mines de Nancy	26,4	Energie	-0,7
ENIC Villeneuve d'Ascq	24,4	Matériel electronique, électrique, ordinateurs	-1,9
Sup Aéro	23,7	BTP/Construction	-2,6
La cellulose EFPG	22,8	Opérateur de télécommunication	-3,0
IIE Evry	22,6	Autre tertiaire (logistique,transport,…)	-6,3
ESIEE Noisy le Grand	20,9	Agriculture	-9,3
Supelec	20,2	Fonction publique	-21,5
INSA Lyon	18,8		
Groupe 3 :	16,6	**Activité dominante**	
Groupe 4 :	13,1	Direction générale	44,0
Groupe 5 :	8,7	Administration des entreprises	10,2
Groupe 6 :	*(Réf)*	Activités transversales ou multiples	9,3
		Technico-commercial, marketing, vente	8,9
Second diplôme d'ingénieur		Production et fonctions connexes à la production	6,8
Diplôme étranger	9,3	*Etudes, Recherche, Projets*	*(Réf)*
Diplôme français	4,4	Informatique, systèmes d'information, réseaux	-0,5
Aucun	*(Réf)*	Enseignement, formation	-17,5
Autre diplôme qu'ingénieur			
Gestion/Management	11,6		
Aucun	*(Réf)*		
Scientifique	-0,9		
Thèse ou PhD	-1,0		
Expérience professionnelle			
Plus de 25 ans	112,4		
Entre 16 et 25 ans	91,5		
Entre 11 et 15 ans	67,5		
Entre 6 et 10 ans	44,0		
Entre 4 et 5 ans	22,1		
Entre 2 et 3 ans	12,0		
Moins d'un an	*(Réf)*		
Périodes de chômage			
Aucune	*(Réf)*		
1 période	-8,7		
2 périodes	-14,2		
Plus de 2 périodes	-17,3		
Mobilité			
Plus de 5 établissements	11,2		
4 ou 5 établissements	8,5		
2 ou 3 établissements	3,6		
1 établissement	*(Réf)*		
Temps de travail			
Temps complet	*(Réf)*		
Temps partiel	-8,7		

Lecture : Les effets de chaque facteur de disparité sont estimés en écart à une situation de référence notée (Réf).

Après avoir fait un classement, sur la base d'une estimation "toutes choses égales par ailleurs" de l'effet propre à chaque école, on a constitué six groupes d'écoles homogènes.

Ne figurent dans ce tableau que les écoles dont les ingénieurs ont répondu au questionnaire diffusé par le Conseil National des Ingénieurs et Scientifiques de France en 2003.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles Interprétations peut-on donner du proverbe peul suivant dans différents contextes (ville ou village, pays, Afrique, monde) ?

«Les hautes herbes peuvent avaler les pintades, mais elles ne peuvent étouffer leurs cris.»

Sujet n° 2

Commentez ce proverbe guinéen qui évoque la prévoyance :

«Ce n'est pas le jour du combat qu'on aiguise sa lance.»

Que veut-il dire ? Expliquez avec des exemples précis.

Sujet n° 3

Que signifie ce proverbe arabe ?

«Les proverbes sont les lampes des mots.»

Expliquez à l'aide d'exemples.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 0$; $u_{n+1} = (3u_n + 1)/4$

$v_0 = 2$; $v_{n+1} = (3v_n + 1)/4$

1. Donner les valeurs numériques de (u_n) et (v_n) pour n = 1, 2, 3.

2. Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
   Montrer que, pour tout n, $u_n < v_n$.

3. On considère la suite $s_n = u_n + v_n$; calculer s_0, s_1, s_2. Montrer que la suite (s_n) est une suite constante.

4. On considère la suite $t_n = v_n - u_n$.
   Calculer t_{n+1} en fonction de t_n.
   En déduire l'expression de t_n en fonction de n.

5. Déduire de ce qui précède les expressions de (u_n) et (v_n) en fonction de n.

6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et calculer leurs limites respectives.

Problème 2

Partie I

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.
On considère les fonctions f_n définies pour $x > 0$ par :

$$f_n(x) = (1 + nLnx) / x^2$$

1. Calculer la dérivée f_n' de f_n. Etudier le signe de $f_n'(x)$.

2. Donner la solution a(n) de l'équation $f_n(x) = 0$. Etudier la suite a(n) et trouver la limite de a(n) quand $n \to +\infty$.

3. Déterminer les limites de f_n quand $x \to 0_+$ et quand $x \to +\infty$.
   Construire le tableau de variations de f_n. Donner la valeur M(n) du maximum de f_n.

4. On note par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé usuel. Tracer les courbes C_2 et C_3 sur le même graphe.

5. On définit la fonction $D_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Quelle est sa particularité ?
   Expliquer très précisément comment il serait possible de construire point par point la courbe C_4 représentant f_4.

Partie II

6. Soit g(x) la fonction définie pour $x > 0$ par $g(x) = (Lnx) / x^2$.
   Calculer l'intégrale indéfinie $I = \int g(x)dx$.
   En déduire l'aire A(n) du domaine délimité par les courbes C_n et C_{n+1}, les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

7. On note par B(n) l'aire du domaine délimité par la courbe C_n et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$.
   Calculer B(n).

8. Etudier la nature de la suite B(n). Que vaut la limite de B(n) quand $n \to +\infty$?

Partie III

Dans cette partie, on suppose $n \geq 3$. On cherche à résoudre l'équation (E) $f_n(x) = 1$.

9. On pose $u(n) = e^{(n-2)/2n}$.
   Montrer que, $\forall\, n \geq 3$, $u(n) > 1$.
   Montrer également que, $\forall\, n \geq 3$, $f_n(u(n)) > 1$.

10. L'équation (E) $f_n(x) = 1$ a-t-elle une solution sur l'intervalle $]1, u(n)[$?

11. Démontrer que l'équation (E) $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule sur l'intervalle $D = [u(n), +\infty[$. On notera par $\alpha(n)$ cette solution.

12. On considère la suite $(\alpha(n))$, $n \geq 3$.
Montrer que pour $n \geq e^2$, on a : $f_n(n^{1/2}) \geq 1$.
En déduire que, pour $n \geq 8$, on a l'inégalité $\alpha(n) \geq n^{1/2}$.
Donner la limite de la suite $\alpha(n)$ quand $n \to +\infty$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n°1

Depuis quelques décennies, la mondialisation des échanges n'empêche pas la multiplication des accords commerciaux, économiques et financiers visant la constitution de « blocs régionaux ». **En vous limitant à la seule dimension commerciale**, il vous est demandé d'exposer les fondements théoriques des processus d'intégration régionale. (Vous n'oublierez pas de rappeler les conséquences d'une asymétrie des agents – pays, ou firmes – sur le fonctionnement des marchés et sur le bien-être).

Vous illustrerez ces rappels théoriques d'exemples récents pris à la fois dans le monde développé et dans les économies émergentes.

Sujet n° 2

L'analyse néo-classique relative au fonctionnement du marché des capitaux prédit qu'une libre circulation des capitaux (intégration économique internationale) doit effacer pour chaque pays les liens entre effort d'épargne et investissement. Pourtant, Feldstein et Horioka ont montré en 1980 que se maintenait une forte corrélation entre les épargnes et les investissements nationaux (ce que l'on appelle « paradoxe de Feldstein-Horioka »). Des études plus récentes tendent à confirmer au moins partiellement l'actualité du débat. Après avoir rappelé les fondements théoriques de la relation entre épargne et investissement, il vous est demandé d'expliquer le constat de Feldstein et Horioka en vous appuyant sur des exemples empiriques.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé usuel d'origine O, on considère les deux droites parallèles D et Δ d'équations respectives $y = -1$ et $y = 2$.
On notera par R la rotation de centre O et d'angle $+\pi/3$.

1. Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées x_M et y_M. Déterminer les coordonnées X et Y du transformé de M par la rotation R.

2. Donner l'équation de D', transformée de D par la rotation R.
Trouver les coordonnées du point A intersection de D' et Δ.

3. Quelles sont les coordonnées de B, image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/3$?

4. Caractériser le triangle OAB. Calculer sa surface.

Problème 2

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
Soit n un entier naturel strictement positif. Pour tout n, on définit l'intégrale :

$$J(n) = \int_1^e (\mathrm{Ln}x)^n \, dx$$

1. Calculer J(1).

2. Montrer que $J(n)$ et $J(n+1)$ sont liées par une relation de la forme $J(n+1) = a + bJ(n)$ où a et b sont des paramètres que l'on précisera.
   En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

3. Etudier très précisément la suite $J(n)$ (signe, croissance ou décroissance). Quelle est sa limite ? Quelle est la limite de $nJ(n)$?

Problème 3

Une loterie est constituée par une urne contenant un ensemble de n billets tous différents ($n \geq 3$) dont deux seulement sont gagnants.
L'objet du problème est de comparer deux stratégies de tirage.

1. Stratégie n°1 : Un joueur tire au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
   On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets tirés par le joueur.
   a) Calculer les probabilités $p(x) = P(X = x)$, pour $x = 0, 1, 2$.
   b) Calculer $E(X)$, espérance de X, et $V(X)$, variance de X.
   c) Application numérique : $n = 10$

2. Stratégie n°2 : Un joueur tire au hasard successivement deux billets dans l'urne, remettant le premier billet dans l'urne avant de procéder au second tirage.
   Dans ce mode de tirage, on note par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets tirés par le joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
   c) Application numérique : $n = 10$

3. On s'intéresse maintenant à la probabilité d'avoir un et un seul billet gagnant parmi les deux billets choisis.
   On note : $a(n) = P(X = 1)$ et $b(n) = P(Y = 1)$.
   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a la relation :
   $$a(n) - b(n) = 4(n - 2) / n^2(n - 1)$$
   b) Déterminer un entier naturel n^* tel que, pour tout $n \geq n^*$, on ait : $a(n) - b(n) < 10^{-3}$

4) L'objectif est maintenant de gagner à cette loterie : parmi les deux stratégies étudiées, laquelle préférez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Question 1

Un chargé d'études doit fournir à sa hiérarchie une estimation du solde commercial pour les années 2003 et 2004 de la France. Pour ce faire, il dispose des données sur les cinq dernières années. Il définit les variables suivantes :

X : « année »

Y : « montant des exportations françaises (en milliards d'euros) »

Il dresse le tableau ci-dessous :

Montant des exportations
(en milliards d'euros)

Année (X)	France (Y)
1998	271,0
1999	281,5
2000	323,2
2001	328,6
2002	323,0

Il vous est demandé de calculer le coefficient de corrélation entre les deux variables X et Y et de faire un graphique représentant le nuage de points.

Question 2

A l'aide de la méthode des moindres carrés, au vu du graphique établi à la question précédente, il vous est proposé de chercher la droite de régression entre X et Y (notée Y estimé = aX+b). On rappelle que a est le quotient entre la covariance de X et de Y et la variance de X.

Calculer a et b.

Question 3

A partir de la question précédente, donner une estimation de Y pour les années 2003 et 2004

Question 4

Question 4

A partir de la droite trouvée à la question 2, on peut calculer des valeurs estimées de Y pour les années étudiées. Les résultats vous sont donnés dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau :

X	Y	Y estimé	E = Y – Y estimé
1998	271,0	275,2	-4,2
1999	281,5	290,4	$e_2 = ?$
2000	$Y_3 = ?$	305,5	$e_3 = ?$
2001	328,6	$Y_4 = ?$	8,0
2002	323,0	$Y_5 = ?$	$e_5 = ?$
Moyenne	305,5	305,5	$E(e) = ?$
Variance	583,9	456,6	127,3

(en milliards d'euros)

Vous pouvez observer que la variance de Y est la somme de la variance de Y estimé et de la variance de l'écart entre Y et Y estimé, pouvez-vous justifier cette égalité ?

Question 5

La valeur « Y estimé » par le modèle aX+b est d'autant « meilleure » que le rapport entre la variance de « Y estimé » et la variance de Y est proche de 1. Ce rapport est le coefficient de détermination. C'est aussi le carré du coefficient de corrélation. Calculer celui-ci.

Question 6

Le solde commercial est la différence entre les exportations et les importations. On cherche à estimer ce solde pour les années 2003 et 2004. Pour ce faire, deux méthodes sont proposées :

- Méthode 1 : on procède de la même façon que pour les exportations pour la variable « importations », puis, à partir des deux estimations obtenues pour chacune des années, on calcule le solde commercial estimé ;
- Méthode 2 : on fait une régression linéaire directement sur la variable « solde commercial ».

Année (X)	Montant des exportations (Y)	Montant des importations (Z)	Montant du solde commercial (S)
1998	271,0	261,6	9,4
1999	281,5	276,5	5,0
2000	323,2	336,3	-13,1
2001	328,6	333,7	-5,1
2002	323,0	322,0	1,0
2003 (chiffres estimés)	350,8	359,4	-8,6
2004 (chiffres estimés)	365,9	377,2	-11,3

(en milliards d'euros)

Le coefficient de corrélation entre X et Z est égal à 0,81 et celui entre X et S vaut -0,48. A partir de ces éléments, quelle méthode d'estimation du solde commercial préconisez-vous ?

Question 7

A partir des six tableaux ci-après, il vous est demandé de rédiger un article de 25 lignes maximum sur le commerce extérieur en 2003 dans une région française.

(source des données : Douanes)

Tableau 1 – Données CAF/FAB hors matériel militaire
(en millions d'euros)

	Export	Import	Solde
1998	3 678	3 649	29
1999	3 609	3 772	-163
2000	4 418	3 985	433
2001	3 832	3 843	-11
2002	3 547	3 872	-325
2003	3 384	3 640	-256

Tableau 2 – Part des échanges par produits (Nes 16)

	2002		2003	
	% export	% import	% export	% import
Produits agricoles, sylvicoles et piscicoles	2,9	2,6	3,1	2,5
Produits des IAA	16,0	9,6	18,6	10,1
Biens de consommation courante	12,0	15,5	10,5	13,4
Produits de l'industrie automobile	24,3	7,5	21,8	7,9
Biens d'équipement professionnel	20,3	29,5	22,6	27,1
Biens intermédiaires	24,0	34,9	23,0	38,5
Divers	0,2	0,1	0,2	0,1
Produits énergétiques	0,3	0,3	0,2	0,4
Ensemble hors matériel militaire	100,0	100,0	100,0	100,0

Tableau 3 – Données par produits (Nes 16) en millions d'euros

	2002			2003		
	export	Import	solde	export	import	solde
Produits agricoles, sylvicoles et piscicoles	103	102	1	105	93	12
Produits des IAA	568	372	196	628	368	260
Biens de consommation courante	427	600	-173	357	489	-132
Produits de l'industrie automobile	863	289	574	739	288	451
Biens d'équipement professionnel	718	1 141	-423	763	986	-223
Biens intermédiaires	852	1 352	-500	776	1 400	-624
Divers	7	3	4	8	2	6
Produits énergétiques	9	13	-4	8	14	-6
Ensemble hors matériel militaire	3 547	3 872	-325	3 384	3 640	-256

Tableau 4 – Palmarès par produits (Nes 114) en millions d'euros

Exportations 2003	valeur	%	Rang antérieur	Importations 2003	valeur	%	rang antérieur
Produits de la construction automobile	370	10,9	1	Machines de bureau et matériel informatique	281	7,7	2
Equipements pour automobiles	369	10,9	2	Produits pharmaceutiques	268	7,4	1
Produits laitiers et glaces	263	7,8	3	Equipements mécaniques	252	6,9	3
Matériel de mesure et de contrôle	195	5,8	4	Equipements pour automobiles	220	6,0	5
Produits des industries alimentaires diverses	159	4,7	5	Composants électroniques	215	5,9	6
Moteurs, génératrices et transformateurs électriques	159	4,7	10	Matériel de mesure et de contrôle	208	5,7	4
Meubles	130	3,8	8	Produits des industries alimentaires diverses	197	5,4	7
Equipements mécaniques	125	3,7	6	Matériel électrique	194	5,3	8
Machines d'usage général	123	3,6	11	Produits laitiers et glaces	137	3,8	10
Produits pharmaceutiques	108	3,2	7	Articles en papier ou en carton	119	3,3	14
Viandes, peaux et produits à base de viande	106	3,1	13	Produits de la chimie organique	118	3,2	9
Matériel électrique	105	3,1	9	Pâte à papier, papiers et cartons	108	3,0	11
Métaux non ferreux	100	3,0	14	Produits en matière plastique	94	2,6	12
Produits de la parachimie	98	2,9	15	Produits métalliques	93	2,6	13
Composants électroniques	81	2,4	12	Produits de la parachimie	81	2,2	15
Produits de la culture et de l'élevage	80	2,4	16	Métaux non ferreux	80	2,2	16
Produits en matière plastique	72	2,1	17	Produits de la construction automobile	68	1,8	17
Matériel médicochirurgical et d'orthopédie	72	2,1	19	Produits du travail du bois	61	1,7	19
Produits métalliques	64	1,9	18	Produits de la sidérurgie et 1ère transformation de l'acier	57	1,6	20
Boissons	55	1,6	23	Produits de la culture et de l'élevage	57	1,6	21
Autres	550	16,3		Autres	732	20,1	
	3384	100,0			3640	100,0	

Tableau 5 – Données par secteur géographique en millions d'euros

	2002			2003		
	export	Import	solde	export	import	solde
Europe	2 914	2 805	109	2 809	2 661	148
dont Union européenne	*2 640*	*2 569*	*71*	*2 526*	*2 401*	*125*
Zone euro	*2 124*	*2 249*	*-125*	*2 061*	*2 121*	*-60*
Afrique	127	134	-7	116	133	-17
Amérique	197	263	-66	159	217	-58
Proche et Moyen Orient	57	2	55	85	2	83
Asie	233	650	-417	199	588	-389
Divers	19	18	1	16	39	-23
Ensemble	3 547	3 872	-325	3 384	3 640	-256

Tableau 6 – Palmarès par pays en millions d'euros

Exportations par pays en 2003	valeur	%	rang antérieur	Importations par pays en 2003	valeur	%	rang antérieur
Allemagne	691	20,4	1	Allemagne	795	21,8	1
Espagne	499	14,7	2	Italie	436	12,0	2
Royaume-Uni	378	11,2	3	Belgique	237	6,5	4
Italie	322	9,5	4	Espagne	224	6,1	6
Belgique	257	7,6	5	Royaume-Uni	212	5,8	3
Pays-Bas	120	3,5	6	Chine	204	5,6	9
Etats-Unis	100	3,0	7	Pays-Bas	197	5,4	7
Portugal	70	2,1	11	Japon	160	4,4	5
République tchèque	64	1,9	8	Etats-Unis	159	4,4	8
Suède	55	1,6	10	Irlande	80	2,2	10
Pologne	48	1,4	9	Hongrie	71	1,9	13
Suisse	43	1,3	12	Thaïlande	68	1,9	11
Iran	41	1,2	65	Portugal	47	1,3	15
Danemark	32	1,0	14	Finlande	47	1,3	14
Tunisie	31	0,9	21	Tunisie	46	1,3	20
Autres	633	18,7		Autres	657	18,1	
	3384	100,0			3640	100,0	

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le développement durable a été défini en 1987 par Mme Brundtland, Premier Ministre norvégien, comme «*un développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs.»*

Selon vous, quelles sont les conditions nécessaires à cet équilibre, en Afrique notamment ?

Sujet n° 2

«Une éthique des sciences est-elle nécessaire ?»

Argumentez avec des exemples.

Sujet n° 3

«*Ceux qui ne peuvent pas se souvenir du passé sont condamnés à le répéter*.» (George Santayana, «La Vie de la Raison»)

Quelles réflexions vous inspire cette phrase ? Vous pouvez envisager votre réflexion du point de vue de l'histoire collective mais aussi individuelle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

L'épreuve traitant en partie de la divisibilité et des nombres premiers, on rappelle donc en préambule que :

- a et b étant deux nombres entiers naturels, b > 0, b divise a s'il existe q $\in$ N tel que a = bq,

- un nombre entier naturel a est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même,

- deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1,

- le chiffre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.

Exercice 1

On appelle *nombre parfait* un nombre entier naturel a dont la somme des diviseurs est égale à 2a.

1) Parmi les entiers suivants, y en a-t-il de parfaits : 3, 6, 10, 14, 20, 28 ?

2) Soit $a = 2^n (2^{n+1} - 1)$, $n \in N$. On suppose que $(2^{n+1} - 1)$ est premier. Montrer que a est un nombre parfait.

Exercice 2

On appelle nombre polymonadique tout nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 : 1, 11, 111, etc. On note P(n) le nombre polymonadique s'écrivant avec n chiffres 1.

1) Montrer que $P(n) = (10^n - 1)/9$.

2) Montrer que, pour n pair, P(n) est divisible par 11.

3) Montrer que pour m entier, si m divise n, P(m) divise P(n).

4) En déduire que si P(n) est un nombre premier, alors n est premier.

5) Etudier P(5). Qu'en est-il de la réciproque du résultat de la question (4) ?

Problème

Ce problème comporte trois parties ; la partie A établit des résultats généraux qui seront utilisés dans les parties B et C.

Préambule :

Soit u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
Montrer que la suite u_n est positive et croissante.

Partie A :

1) On définit la suite v_n, $n > 0$, par : $v_n = u_n + 1$. Ecrire la relation existant entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Montrer que la suite v_n est positive et croissante.

2) Donner l'expression précise de v_n en fonction de n.

3) En raisonnant par récurrence, démontrer les relations suivantes :

(R1) $(v_{2n})^2 = v_{2n-1}.v_{2n+1} - 1$

(R2) $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

4) Déduire de la question (3) la relation :

(R3) $(u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

5) Montrer la relation (R4) et en déduire (R5):

(R4) $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

(R5) $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$

Partie B :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n, ayant un rang impair.

6) A partir de la relation (R5), démontrer que si u_{2n-1} est premier, il divise soit u_{2n+1}, soit $u_{2n+1} - 1$.

7) On considère le premier cas : u_{2n-1} divise u_{2n+1}, c'est-à-dire $u_{2n+1} = q.\ u_{2n-1}$, q entier.

7a) Montrer que $q > 1$.

7b) A partir de (R4), en déduire : (R6) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

7c) Montrer que les seules valeurs possibles pour q dans la relation (R6) sont $q = 3$ ou 4. Le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

8) Dans cette question, on considère le deuxième cas : u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$, c'est-à-dire que l'on a $(u_{2n+1} - 1) = q'.\ u_{2n-1}$, q' entier.

8a) Montrer que $q' > 1$.

8b) Démontrer (R7) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q'$

8c) Montrer que la seule valeur possible pour q' dans la relation (R7) est $q' = 3$. Dans ce cas, le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

9) Un terme de rang impair de la suite u_n peut-il être un nombre premier ?

Partie C :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence des nombres premiers de la suite u_n ayant un rang pair.

10) En utilisant la relation (R2), démontrer :

(R8) $[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

En déduire :

(R9) $5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

11) Démontrer alors que si u_{2n} est premier, il divise $u_{2n+2} - 2$ ou $u_{2n+2} + 1$.

12) On considère le premier cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} - 2$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} - 2) = q.\ u_{2n}$, q entier.

12a) Montrer que $q > 1$.

12b) Démontrer : (R10) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n} = 7 - 3q$

12c) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R10) ?

13) On considère le deuxième cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} + 1$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} + 1) = q' u_{2n}$, q' entier.

13a) Montrer que $q' > 1$.

13b) Démontrer : (R11) $\quad (q'^2 - 3q' + 1) u_{2n} = 3q' - 2$

13c) A partir de (R11), montrer que les seuls cas possibles sont q' = 3, 4 ou 5. Déterminer alors le(s) seul(s) terme(s) nombre(s) premier(s) de la suite u_n.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les récentes négociations de l'Organisation Mondiale du Commerce à Hongkong se sont terminées par un demi succès pour les économies en développement : en effet, les échanges agricoles semblent devoir encore rester limités par le protectionnisme des grandes puissances industrielles mais la tendance est à la libéralisation. Dans un premier temps, vous rappellerez rapidement les grandes tendances du commerce international depuis les premiers «Rounds» diplomatiques menés au sein du GATT (grandes étapes des négociations internationales et évolution des flux géographiques et sectoriels). Dans un second temps, vous vous appuierez sur la théorie économique (et en particulier la théorie de la croissance en économie ouverte) pour exposer les enjeux du commerce pour le développement des économies émergentes. Enfin, vous vous demanderez à quelles conditions les scénarios prédits par la théorie peuvent s'appliquer aux économies les moins développées.

Sujet n° 2

Pendant longtemps, le régime de change fixe a été la règle. L'effondrement du système de Bretton Woods, puis la mondialisation des échanges de biens et services et la mobilité accrue des flux de capitaux ont remis en question la pertinence de la fixité. Toutefois, la généralisation du régime de change flexible semble se heurter au scepticisme d'une grande part des gouvernements des économies en développement. D'une part, le régime de change fixe constitue l'un des outils de stabilisation des prix dans des régimes de politique économique à ancrage nominal cambiaire. D'autre part, les économies redoutent la forte volatilité des taux de change dans des économies peinant à atteindre simultanément équilibres externe et interne. En vous appuyant sur le modèle de Mundell Fleming, il vous est demandé de poser le problème du choix d'un régime de change «optimal» permettant d'assurer tout à la fois stabilité macroéconomique et croissance dans les économies en développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit le nombre entier $a = 3^{2n} - 2^n$. Montrer que a est divisible par 7.

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, $n \in N$, on définit le nombre $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

1) Calculer f(0), f(1), f(2), f(3)

2) Montrer que : $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1$

3) Montrer que $f(n) = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$

Exercice n° 3

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ par :

$f_n(x) = 1 / \cos^{2n+1}x$

et l'intégrale J(n) par :

$J(n) = \int_0^{\pi/4} f_n(x)\, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre J(n) et J(n+1) de la forme $J(n+1) = a_n + b_n J(n)$ où a_n et b_n sont des fonctions de n que l'on explicitera.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on peut trouver deux réels u et v tels que :

$$1/\cos x = u \cos x/(1 - \sin x) + v \cos x/(1 + \sin x)$$

3) Calculer J(0)

4) Calculer J(2)

Exercice n° 4

A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$\forall x \geq 1$, $f_n(x) = (\text{Ln } x)^n/(n!.x^2)$ où Ln désigne le logarithme népérien.

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Etablir précisément le tableau de variations de f_n.

3) On note M(n) la valeur maximale de $f_n(x)$ sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2})/2$.
En déduire que $M(n+1) \leq M(n)/2$.
Quelle est la limite de M(n) quand n tend vers $+\infty$?

4) On considère maintenant l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt$$

4a) Calculer $I_1(x)$.

4b) Montrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - h_n(x)$, où $h_n(x)$ est une fonction de n et x dont on donnera l'expression.
En déduire que, $\forall n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k / k!.x]$$

5) Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel.
Montrer que : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) M(n)$
En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.

6) Pour n entier, $n \geq 1$, et x réel $x \geq 1$, on pose :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Ln}\, x)^k / k!$$

Exprimer $L_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
Déterminer la limite de $L_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$, α étant un nombre réel, $1 \leq \alpha < +\infty$.
En déduire la limite γ de la suite v_n dont le terme général de rang n est :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1

Soit une population de six personnes (4 hommes et 2 femmes) représentées par l'initiale de leur nom. On s'intéresse au salaire de ces personnes.

Monsieur A	960 euros
Monsieur B	990 euros
Monsieur C	1110 euros
Monsieur D	1170 euros
Madame E	930 euros
Madame F	990 euros

Question 1

Donner le nombre de tirages sans remise (échantillons) de taille 3 que l'on peut constituer à partir de la population des 6 personnes.

Question 2

Les salaires moyens obtenus pour chaque échantillon possible sont résumés dans le tableau ci-dessous.

ABC	1020	ABD	1040	ABE	960	ABF	980
ACD	1080	ACE	1000	ACF	1020	ADE	1020
ADF	1040	AEF	960	BCD	1090	BCE	1010
BCF	1030	BDE	1030	BDF	1050	BEF	970
CDE	1070	CDF	1090	CEF	1010	DEF	1030

Calculer la moyenne et l'écart type de cette série de valeurs.

Question 3

On souhaite réaliser un tirage stratifié à taux de sondage constant dans les strates Homme/Femme, toujours avec n = 3. Donner le nombre d'hommes (et de femmes) que l'on devra tirer. Préciser les échantillons retenus parmi les échantillons possibles présentés à la question précédente.

Question 4

A partir des échantillons retenus à la question 3, calculer la moyenne et l'écart type de ces moyennes d'échantillon. Commenter.

Exercice 2

Une filiale de l'entreprise Logica avait au 1er janvier 2000, 1000 salariés permanents. Quatre ans plus tard, au 1er janvier 2004, il n'en restait plus (sur ces 1000 salariés) que 846. 154 personnes ont quitté l'entreprise pour des raisons de retraite ou de convenances personnelles. La répartition de ces salariés par niveau est donnée dans le tableau ci-dessous.

Situation au 1er janvier 2004 des salariés déjà présents au 1er janvier 2000

1/1/2000 \ 1/1/2004	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	37	0	0	13	50
Agent de maîtrise	6	123	0	21	150
Agent d'exécution	0	20	660	120	800
Total	43	143	660	154	1000

Question 1

Calculer, pour chaque niveau en 2000, les probabilités pour qu'un individu pris au hasard et ayant en 2000 le niveau considéré se retrouve en 2004 dans l'une des 4 situations considérées (distribution marginale).

Question 2

Peut-on dire que le niveau de classification ait une influence sur les départs ? Commenter.

Question 3

Au bout de combien de périodes de 4 ans, plus d'un employé sur deux, parmi ceux présents au 1er janvier 2004, aura quitté l'entreprise si le taux de départs observé se maintient ?

Question 4

En supposant que les distributions marginales observées soient stables au cours du temps, quels seront, en l'absence d'embauche, les effectifs de l'entreprise par niveau au 1er janvier 2008 et au 1er janvier 2012 si l'on raisonne en espérance mathématique ?

Question 5

Combien de cadres faudra-t-il embaucher au 1er janvier 2004 pour qu'au 1er janvier 2012, l'entreprise compte 40 cadres, toujours dans l'hypothèse ou aucune autre embauche ne sera faite ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Que pensez-vous de cette phrase de Victor Hugo, écrivain français du 19ème siècle : « *Une moitié de l'espèce humaine est hors de l'égalité, il faut l'y faire rentrer : donner pour contre-poids au droit de l'homme le droit de la femme ».* Est-elle toujours d'actualité ? Expliquez votre point de vue.

Sujet n° 2

Quelles sont, selon vous, les conditions indispensables pour qu'un accès à l'éducation pour tous soit possible ?

Sujet n° 3

Nelson Mandela, ancien Président de la République d'Afrique du Sud, a déclaré en novembre 2006 : « *Ce sont les hommes qui créent la pauvreté et la tolèrent, et ce sont les hommes qui la vaincront.* » Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Exercice :

On considère la suite u(n) définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels par la relation :

$u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$
avec comme valeur initiale $u(0) = 1$.

Pour tout n entier, la suite v(n) est définie par la relation :

$$v(n) = \sum_{p=0}^{n} u(p)$$

1) Etudier le signe et le sens de variation de u(n).

2) Trouver la limite de u(n) quand $n \to +\infty$.

3) Montrer que $u(n+1) = f(v(n))$, où f est une fonction que l'on explicitera.
En déduire la limite de v(n) quand $n \to +\infty$.

Problème 1 :

On donne : Ln3 = 1,099.

Partie I :

Soit φ la fonction définie sur $]\,0, +\infty[$ par :

$\varphi(x) = Lnx / x$

Etudier les variations de φ et donner très précisément son tableau de variation.
Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
Tracer le graphe de φ.

Partie II :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1) Calculer a^b et b^a pour a = 2 et b = 3, pour a = 4 et b = 2, et pour a = Ln3 et b = 3.

2) Montrer que comparer a^b et b^a revient à rechercher le signe de $ab(\varphi(a) - \varphi(b))$.

3) En déduire la comparaison de a^b et b^a dans les cas suivants :

3a) $0 < a < b \leq e$

3b) $e \leq a < b$

4) Sans faire le moindre calcul, comparer π^e et e^π.

5) Montrer que pour tout a > e, il existe un réel b appartenant à l'intervalle $]1, e\,[$ tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$. En déduire que $a^b = b^a$.

Partie III :

On prend maintenant a = 3, et on cherche à résoudre l'équation $3^x = x^3$.

1) Soit g la fonction définie sur $]\,0, +\infty[$ par :

$g(x) = 3Lnx - xLn3$

Etudier les variations de g.

2) Etablir l'existence de deux réels x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
Donner la valeur (évidente) de x_2.
En déduire une valeur approchée de la solution de l'équation $3^x = x^3$.

Problème 2 :

N est l'ensemble des entiers naturels, N* = N – {0} ; Z est l'ensemble des entiers relatifs ; R est l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
On suppose que, pour tout (x, y) $\in R^2$, f vérifie la relation (E) :

(E) $f(x+y) = [f(x) + f(y)] / [1 + f(x)f(y)]$

1) Montrer que s'il existe un nombre réel a tel que f(a) = 1 ou f(a) = – 1, la fonction f est constante sur R.

Dans toute la suite, on supposera f non constante.

2) On écrit x = (x/2) + (x/2).

2a) Montrer que $-1 < f(x) < 1$, $\forall x \in R$.

2b) Montrer que f(0) = 0.

2c) Montrer que f est impaire.

3) On pose $g(x) = [1 + f(x)]/[1 - f(x)]$.

3a) Démontrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif :

$g(nx) = g^n(x)$.

3b) On note $\lambda = g(1)$. Pour tout entier n naturel, donner la valeur de f(n) en fonction de λ.

3c) En déduire f(n) pour tout n appartenant à Z.

4) On suppose maintenant, et pour toute la suite de l'énoncé, que f, en plus de vérifier la relation (E), est dérivable au point 0. La dérivée de f en 0 est le nombre d défini par :

$d = \lim_{h \to 0} f(h)/h$

4a) Montrer que f est dérivable en tout point réel x et que $f'(x) = d(1 - f^2(x))$.

4b) Le nombre d peut-il être nul ?

4c) Montrer que f est monotone sur R.

5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f. On admet que f^{-1} est dérivable sur] – 1, 1 [.

5a) Donner l'expression de la dérivée de f^{-1} en tout point de] – 1, 1 [.

5b) En déduire f^{-1}.

5c) En déduire alors l'expression de f.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

L'internationalisation des économies, et en tout premier lieu le poids des flux de capitaux, accroît les difficultés que rencontrent les Etats dans la définition et l'application de leur politique macroéconomique. Dans ce contexte, deux postulats – fondamentalement libéraux – semblent s'imposer dans les institutions internationales :

- d'une part, la « transparence » doit être la principale préoccupation d'un gouvernement,
- d'autre part, la meilleure politique macroéconomique est celle de l'intervention minimum.

Ces deux postulats sont fondés sur l'idée que la « mauvaise gouvernance » du secteur public est quasi-générale tandis que le marché limiterait un tel risque dans le secteur privé. Ils prennent en compte en outre la faiblesse des marges de manœuvre de la puissance publique pour de petites économies ouvertes. Ils tendent enfin à déboucher sur un mode de décision fondé essentiellement sur la « règle », et bannissant autant que possible les mesures discrétionnaires.

Il vous est demandé d'analyser les politiques monétaires et budgétaires récentes pour vérifier le bien-fondé d'un tel parti pris. Pour ce, vous définirez rapidement les principes de ces politiques (objectifs et outils). Puis vous en évaluerez l'efficacité au cours des années récentes à partir d'exemples pris dans des économies émergentes, mais également dans des économies développées. Enfin vous utiliserez les conclusions de cette évaluation pour juger du bien-fondé des deux postulats libéraux.

Sujet n° 2

La croissance de nombre d'économies émergentes bute de plus en plus fréquemment sur l'insuffisance des infrastructures économiques (transport, énergie, infrastructures portuaires…) et sociales (éducation, santé, recherche…). En vous appuyant sur la théorie économique (économie publique, théorie de la croissance endogène) il vous est demandé :

- d'expliquer pourquoi le marché peut s'avérer incapable de fournir une offre d'infrastructure suffisante,

- d'analyser le rôle de ces infrastructures dans le maintien d'une croissance durable.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve comporte cinq problèmes indépendants à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

E est un espace vectoriel sur R, de dimension 3, de base B = (e_1, e_2, e_3) ; T est l'espace vectoriel sur R des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. O est la matrice nulle, I la matrice identité de T.

Soit U un élément de T, U ≠ O et U ≠ I.

On définit l'application φ_U de T dans T par : $\varphi_U(X) = UX - XU$.

1) Montrer que φ_U est linéaire.

2) L'application φ_U est-elle une bijection ?

Problème 2 :

On considère le système (S) suivant, composé de deux équations à deux inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} ax - by = c \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Les paramètres a, b et c sont obtenus en lançant trois fois consécutives, de façon indépendante, un dé supposé parfait, à six faces numérotées de 1 à 6. Le premier lancer donne la valeur de a, le deuxième celle de b et le troisième celle de c.

1) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le triplet (a, b, c) ?

Dans toute la suite du problème, on donnera les probabilités demandées sous forme de fractions de dénominateur 108.

2) Calculer la probabilité P_1 que (S) ait une infinité de solutions.

3) Calculer la probabilité P_2 que (S) n'admette aucune solution.

4) Calculer la probabilité P_3 que (S) admette une solution unique.

5) Calculer la probabilité P_4 que (S) admette le couple (x = 3, y = 0) comme unique solution.

Problème 3 :

Partie I :

Soit k un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f_k(x) = k^2x^2 - (\mathrm{Ln}x)/2 - 1/4$

1) Etudier les variations de f_k.

2) Soit M(k) le point correspondant au minimum de f_k.
Donner l'équation de l'ensemble des points M(k) quand k décrit $]0, +\infty[$.

Partie II :

On prend dans cette partie k = 1/2. On notera f la fonction $f_{1/2}$.

1) Donner précisément le tableau de variations de f.

2) Soit a un réel strictement positif. Calculer $I(a) = \int_a^1 f(x)dx$.

3) Déterminer la limite de I(a) quand $a \to 0^+$.

4) Soit n entier naturel, $n \geq 2$; on pose pour p entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$:

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f(p/n)$$

4a) Soit p tel que $1 \leq p \leq n - 1$; on note J(p, n) l'intervalle élémentaire J(p, n) = [p/n, (p+1)/n].

Démontrer que : $f((p+1)/n) \leq n \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq f(p/n)$.

4b) En déduire l'encadrement :

$S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$.

4c) En déduire la limite de S(n) quand $n \to +\infty$.

Problème 4 :

C désigne le corps des nombres complexes.

Soit f la fonction de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par :

$f(z) = (z - 1)/(z - 2i)$

M, A et B sont les points d'affixes respectives z, 1, 2i.

1) Donner les formes cartésienne et trigonométrique de f(i).

2) Résoudre l'équation $f(z) = 2i$

3) Déterminer l'ensemble D des points M tels que $|f(z)| = 2$.

Problème 5 :

B est la base canonique de l'espace vectoriel C^4, C étant l'ensemble des nombres complexes. M est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients complexes.

Id est l'application identité de C^4 dans C^4, I est sa matrice identité associée.
o est le symbole de la composition des applications.

Soit g l'application de C^4 dans C^4 dont la matrice associée est J :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g. La matrice J est-elle diagonalisable ?

2) A tout quadruplet (a, b, c, d) de C^4, on associe la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

On note φ l'application dont A est la matrice relativement à la base B.

Montrer que φ est une combinaison linéaire de Id, g, g^2 (= g o g), g^3 (= g o g o g).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

Exercice 1

On étudie les dépenses mensuelles d'un étudiant en 1ère année d'école d'ingénieur. La répartition est donnée dans le tableau 1 :

Tableau 1

Dépenses en euros (x_i)	Effectifs (n_i)
[300,400[	10
[400,500[	60
[500,600[	15
[600,700[	40
[700,800[	20
[800,1000[	5

1) Tracer l'histogramme des dépenses mensuelles pour ces classes.

2) Donner le mode et calculer la médiane Me par interpolation linéaire. Interpréter les résultats.

3) Calculer la moyenne. Commenter.

4) Calculer l'écart-type σ.

5) On considère la distribution des sommes dépensées (dépenses totales par tranche: $n_i x_i$). Calculer la médiane de cette série par interpolation linéaire (remarque : cette médiane s'appelle la médiale et est notée Ml). Interpréter.

   Une mesure de la concentration se calcule par la formule $C = \dfrac{|Me - Ml|}{Max(x_i) - Min(x_i)}$.

   Calculer C.

Exercice n°2

On s'intéresse maintenant aux activités faites par les étudiants de $1^{ère}$ année au cours des 3 premiers mois de l'année. La distribution des activités réalisées, suivant les deux critères du type d'activité et du mois, est donnée au tableau 2.

Tableau 2

	Mois 1	Mois 2	Mois 3
Sortie au cinéma	159	115	101
Sortie au bowling	28	40	37
Sortie au restaurant	102	99	78
Sortie en discothèque	81	116	101

1) Donner les distributions marginales des deux variables.

2) Si la répartition des sorties mensuelles était identique d'un mois sur l'autre, donner la répartition des 1057 sorties effectuées. Commenter.

Exercice n°3

Depuis cinq ans, la cafétéria de l'école concentre son effort pour promouvoir le commerce équitable en vendant des produits à l'ensemble des étudiants du campus universitaire. Elle souhaite analyser l'évolution des ventes. On dispose pour ce faire des ventes trimestrielles (en milliers d'euros) réalisées au cours des sept derniers trimestres (voir tableau 3). Ces données sont corrigées des variations saisonnières.

Tableau 3

	2004				2005		
Trimestre	1	2	3	4	5	6	7
Ventes réalisées	38,5	38,92	39,4	39,7	40,1	40,45	40,89

On étudiera le modèle $y = y_0\, k^t$ où "t" représente le trimestre et "y" le volume de ventes.

Donner une estimation du chiffre d'affaires qu'on peut en déduire au 4ème trimestre 2005.

Exercice n°4

A l'aide du tableau 4, rédiger une note de synthèse faisant un bilan de l'évolution de l'indice des prix à la consommation depuis janvier 2000 dans l'Union Européenne, dans les pays de la zone euro, dans certains pays européens.

Tableau 4

Statistiques internationales – Indice des prix à la consommation harmonisé (Base 100 en 2005) – Europe des 15 avant mai 2004, à 25 ensuite

Période	Année	Union Européenne	Zone Euro	France	Allemagne	Espagne	Royaume-Uni	Grèce	Hongrie	Pologne	Suède
Juillet	2006	102,4	102,4	102,1	102,4	103,8	102,5	103,0	103,9	101,4	101,4
Avril	2006	102,1	102,2	101,9	101,6	103,8	101,7	103,8	102,3	101,1	101,6
Janvier	2006	100,6	100,7	100,6	100,7	101,5	100,5	101,7	100,6	100,3	100,0
Octobre	2005	101,0	101,0	100,8	100,8	101,6	100,7	101,5	100,4	100,7	101,0
Juillet	2005	100,0	100,0	99,9	100,3	99,7	100,1	99,1	100,7	100,0	99,7
Avril	2005	99,7	99,8	99,9	99,3	99,9	99,7	100,3	99,9	99,9	99,8
Janvier	2005	98,4	98,3	98,4	98,6	97,4	98,6	98,7	98,1	99,4	98,9
Octobre	2004	98,6	98,6	98,8	98,5	98,2	98,4	97,9	97,4	99,1	100,1
Juillet	2004	97,9	97,9	98,2	98,5	96,6	97,8	95,4	97,2	98,5	99,0
Avril	2004	97,7	97,7	97,9	97,9	96,6	97,8	97,1	96,3	96,9	99,3
Janvier	2004	96,5	96,5	96,8	97,0	94,4	97,0	94,7	94,4	95,8	98,4
Octobre	2003	96,4	96,3	96,5	96,3	94,8	97,2	94,8	91,6	94,7	98,6
Juillet	2003	95,8	95,7	95,7	96,5	93,4	96,5	92,5	90,6	94,1	97,8
Avril	2003	95,9	95,8	95,7	96,3	94,0	96,7	94,2	90,0	94,7	98,4
Janvier	2003	94,8	94,7	94,7	95,9	92,3	95,7	91,9	88,5	94,1	97,1
Octobre	2002	94,7	94,4	94,4	95,3	92,3	95,9	91,9	87,3	93,7	96,7
Juillet	2002	94,1	93,9	93,8	95,7	90,8	95,2	89,4	86,5	93,5	95,6
Avril	2002	94,1	93,8	93,8	95,4	91,1	95,3	91,2	86,6	94,6	96,1
Janvier	2002	93,0	92,7	93,0	95,0	89,0	94,4	89,0	84,5	93,7	94,6
Octobre	2001	92,7	92,3	92,6	94,0	88,7	94,7	88,4	83,3	92,6	95,1
Juillet	2001	92,4	92,1	92,4	94,7	87,7	94,2	86,3	82,8	92,3	93,9
Avril	2001	92,1	91,7	91,9	93,9	87,8	94,0	87,7	81,7	91,8	94,0
Janvier	2001	90,8	90,4	90,7	93,0	86,3	92,9	84,9	79,2	90,5	92,0
Octobre	2000	90,8	90,3	91,0	92,5	86,5	93,5	85,6	77,5	89,3	92,4
Juillet	2000	90,2	89,8	90,4	92,7	85,7	92,8	82,8	75,7	88,0	91,3
Avril	2000	89,9	89,3	90,1	91,9	84,8	92,9	84,5	74,1	86,2	91,4
Janvier	2000	89,1	88,6	89,5	91,8	83,9	92,1	82,3	72,0	84,4	90,6

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

En 2001, 246 millions d'enfants à travers le monde étaient astreints à un travail nuisible à leur santé ou à leur éducation, y compris dans des pays signataires de la Déclaration des Droits de l'Enfant, alors même que celle-ci l'interdit. Selon vous, quels sont les obstacles rencontrés dans l'éradication du travail des enfants ?

Sujet n° 2

« La famille sera toujours la base des sociétés » écrivait Honoré de Balzac, auteur français du 19è siècle. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

Quel est le rôle des contes dans la société africaine ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un seul problème comportant quatre parties autonomes, qui peuvent être traitées dans un ordre quelconque. R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in R$, $\forall\, x > 0$, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur R^+ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

1) En découpant l'intégrale sur $[x, +\infty[$ en une intégrale sur $[x, 1[$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$, montrer que f_0 est, en fait, définie sur R.

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

<u>Partie B</u> : a > – 1, étude de l'intégrale g(a)

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale g(a) est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

1) Calculer g(1) et g(2).

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$g(a + 2) = (a + 1)g(a)$$

3) Pour tout nombre entier n, écrire g(a + 2n) en fonction de g(a + 2(n – 1)).
En déduire l'expression de g(a + 2n) en fonction de g(a).

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de g(m) en fonction de m.

4a) Démontrer que $1\times3\times5\times \ldots\times(2n - 1) = (2n)! / 2^n.n!$

4b) Donner les expressions de g(m) en fonction de m pour m pair, m = 2p, puis pour m impair, m = 2p + 1.

<u>Partie C</u> : a > – 1, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a définie sur R^+ pour tout a > – 1 par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur]0, + ∞ [.
En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a.

2) Quel est le sens de variation de f_a sur]0, + ∞ [?

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers + ∞.
(on pourra couper l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [)

4) *Dans toute cette question, on se restreint à a > 0.*

4a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

4b) En déduire que $\lim_{x\to 0} f_a'(x) = f_a'(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

5) *Dans toute cette question, on se restreint à $-1 < a < 0$.*

5a) Montrer que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

5b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f_a'(x)$. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?

5c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

6) Pour toute la suite du problème, on revient au cas général $a > -1$.
A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1)f_{a-2}(x)$$

7) A partir de la relation établie à la question 6, étudier le signe de $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}$.

8) Démontrer que, pour tout $a > -1$, on a la majoration suivante :

$$\left| f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \right| \leq |a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$$

En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent :

$$f_a(x) \sim x^{a-1} e^{-x^2/2}$$

9) Dans le cas où $-1 < a \leq 1$, montrer que la majoration trouvée à la question 8 peut être améliorée en :

$$\left| f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \right| \leq 2\, x^{a-3} e^{-x^2/2}$$

<u>Partie D</u> : polynômes de Hermite

On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Etudier précisément les variations et donner la forme du graphe de h.

2) Donner l'expression de la dérivée $h'(x)$ en fonction de $h(x)$.

3) Montrer que $h''(x) = P_2(x).h(x)$ et $h'''(x) = P_3(x).h(x)$, où P_2 et P_3 sont des polynômes respectivement de degré 2 et 3.

4) Montrer rigoureusement que la dérivée d'ordre n de h, $h^{(n)}(x)$, peut être écrite sous la forme $P_n(x).h(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ne comportant que des puissances paires de x si n est pair, ou uniquement des puissances impaires de x si n est impair.
Le polynôme $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est appelé polynôme de Hermite. Ecrire H_1, H_2, H_3.

5) Etablir une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
On donne $P_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$. En déduire l'expression de P_5 et celle de H_5.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

A l'heure de la globalisation financière, l'accroissement du taux d'épargne constitue-t-il un préalable à celui des investissements et au raffermissement de la croissance dans les économies en développement ? Après un rappel détaillé des différentes dimensions théoriques du sujet, vous présenterez quelques illustrations passées et récentes.

Sujet n° 2

Depuis les années 2000, la littérature théorique parle le plus souvent de « peur du flottement », pour désigner le choix, par les économies émergentes, soit d'un régime de change fixe, soit d'un système de flexibilité fortement administré. En vous appuyant sur la théorie économique, et en particulier sur le modèle de Mundell-Fleming, vous chercherez à déterminer s'il existe un régime de change optimal pour les économies en développement.

Dans un premier temps, vous rappellerez les conséquences du choix d'un régime de change sur les grands équilibres internes et externes, et sur les politiques macroéconomiques.

Dans un second temps, vous illustrerez la réponse à la question du régime de change optimal par des exemples choisis dans les économies en développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

1) Soit A la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1a) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice A.
On notera D la matrice diagonale formée par les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant.

1b) Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $A = P D P^{-1}$

1c) En déduire la matrice A^n, n entier strictement positif.

2) On considère la suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$
$$\text{avec } u_0 = u_1 = 1$$

On note V_{n+2} le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

2a) Montrer que $V_{n+2} = A\, V_{n+1}$

2b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

2c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Problème 2 :

N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

Pour tout entier non nul n, on définit les sommes suivantes :

$$S_1(n) = 1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

<u>Partie I</u> :

1) Démontrer que $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

2) On désire établir une relation entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$ de la forme $S_3(n) = h(S_1(n))$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal usuel, d'origine O, on définit par leurs coordonnées les trois suites de points ci-après ($n \geq 1$):

$A_n\ (S_1(n), 0)$

$C_n\ (0, S_1(n))$

$B_n\ (S_1(n), S_1(n))$

2a) Quelle est la forme du quadrilatère $Q_n = (O, A_n, B_n, C_n)$?

2b) Donner l'aire q_n de Q_n

2c) Pour $n \geq 2$, donner l'aire p_n du polygone $(A_{n-1}, A_n, B_n, C_n, C_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-1})$

2d) En déduire la relation $S_3(n) = h(S_1(n))$, et l'expression de $S_3(n)$ en fonction de n.

Partie II :

On considère le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(x) = ax + bx^2 + x^3/3$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\forall\ x \in R,\ P(x + 1) – P(x) = x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(-1).

2) Calculer les coefficients a et b.

3) Montrer que la somme $S_2(n)$ est égale à la valeur du polynôme P en un point que l'on précisera.

4) Donner l'expression explicite de $S_2(n)$ en fonction de n.

Partie III :

On définit $I_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$, somme des cubes des n premiers nombres impairs.

1) A l'aide des expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ trouvées dans les deux premières parties, montrer que $I_3(n) = 2n^4 – n^2$.

2) Déterminer l'entier n tel que la somme des cubes des n premiers nombres entiers impairs soit égale à 29 161.

3) Donner en fonction de n l'expression de $U_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3$, somme des cubes des n premiers nombres pairs.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Note* : L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.**

Exercice n° 1

Le service financier d'une société d'investissement étudie la rentabilité de son portefeuille d'actions acquises en 1999 et composé en actions A et en actions B. Les dividendes perçus au titre des exercices 1999 à 2005 sont réévalués à l'aide d'un indice d'inflation des prix du Produit Intérieur Brut. Le directeur décide en outre de ne pas tenir compte des plus-values sur valeur de revente de ces deux titres. Les rentabilités pour 100 euros investis initialement dans chaque titre, sont données dans les premières colonnes du tableau ci-dessous.

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés avec une précision de 10^{-3}.

Tableau

Calcul de la variance du portefeuille d'actions constitué par 50% d'actions A et 50% d'actions B

I	Année	Dividendes versés pour 100 euros investis		Calculs complémentaires (pour un portefeuille de 200 euros)				
		A x_i	B y_i	$z_i = x_i + y_i$	x_i^2	y_i^2	z_i^2	$x_i\, y_i$
1	1999	14	11	25	196	121	625	154
2	2000	11	12	23	121	144	529	132
3	2001	15	12	27	225	144	729	180
4	2002	12	9	21	144	81	441	108
5	2003	13	10	23	169	100	529	130
6	2004	10	11	21	100	121	441	110
7	2005	9	12	21	81	144	441	108
$\sum$	-	84	77	161	1036	855	3735	922

La variable X est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions A ;

La variable Y est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions B ;

La variable Z est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions A et 100 euros dans les actions B.

Question 1

a) Calculer E(X) et V(X) (E désignant l'espérance mathématique et V la variance)
b) Calculer E(Y) et V(Y)
c) Calculer E(Z) et V(Z)

Question 2

a) Comparer E(Z) et E(X) + E(Y). Commenter
b) Comparer V(Z) et V(X) + V(Y). Commenter

Question 3

a) Calculer la Covariance entre X et Y (donner la formule)
b) Calculer A = V(X) + V(Y) + 2 COV(X,Y)
c) Comparer V(Z) et A
d) Calculer le dividende moyen annuel versé entre 1999 et 2005, ainsi que la variance, d'un portefeuille de 100 000 euros constitué de 50% d'actions A et de 50% d'actions B.

Question 4

Plus généralement, on montre que si Z=aX + bY, on a :

- $E(Z) = a\,E(X) + b\,E(Y)$
- $V(Z) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y) + 2ab\,COV(X,Y)$

A l'aide des relations précédentes, vous calculerez le dividende moyen annuel versé entre 1999 et 2005 (ainsi que la variance) d'un portefeuille de 100 000 euros constitué à raison de 30% d'actions A et de 70% d'actions B (au lieu des 50%-50% initialement choisis).

Question 5

Les relations données à la question précédente permettent également de définir la composition du portefeuille de 100 000 euros qui a la variance de Z la plus faible, c'est-à-dire dont le revenu annuel, entre 1999 et 2005, a été le plus régulier.

a) Calculer cette répartition (vous pourrez désigner par α la part que représentent les actions A dans le portefeuille et chercher V(Z) en fonction de α)

b) Calculer E(Z) pour la répartition obtenue à la question précédente (5a)

c) Commenter

Exercice n° 2

Une agence de voyage possède un certain nombre de villages-clubs, chacun d'une capacité de 300 places. Les conditions de réservation sont assez avantageuses pour la clientèle, et c'est d'ailleurs l'un des arguments commerciaux qui doit affronter une forte concurrence sur le marché des villages-clubs. Le taux des défections est loin d'être négligeable, puisqu'il est de l'ordre de 2 %, aussi le potentiel offert est-il mal exploité car, jusqu'à maintenant, les réservations se limitaient à 300 places et aucune liste d'attente efficace n'avait pu être mise en place. Cette agence de voyage étudie la possibilité d'émettre des réservations conditionnelles (RC) pour mieux remplir ses villages-clubs. Ces RC donneront lieu à un dédommagement (égal au double des arrhes) si l'agence ne peut satisfaire le client ayant acheté ce billet RC.

1) Donner la loi du nombre de désistements pour un village-club dans le système antérieur (300 réservations, sans émission de RC).

2) A partir du tableau ci-après, donner la probabilité qu'il y ait 3 défections, puis celle d'avoir 5 défections ou plus, pour une semaine donnée dans un village-club.

3) Si le bénéfice marginal par client est de l'ordre de 300 euros, et si le coût du dédit est de 500 euros, se pose le problème du nombre maximal de billets RC que l'agence accepte d'émettre. Le raisonnement est le suivant. Pour un nombre maximal k de billets RC émis, l'espérance de gain est :

$$\sum_{x=1}^{k} 300\,x\,P(X = x) + 300\,k\,P(X > k)$$

tandis que l'espérance de perte est : $\displaystyle\sum_{x=1}^{k} 500\,(k - x)\,P(X = x)$

a) Justifier les formules.

b) Il suffit donc de rechercher par tâtonnement, en faisant varier k, pour quelle valeur de k la différence entre l'espérance de gain et l'espérance de perte est la plus forte. Pour déterminer ce nombre optimal de réservations conditionnelles, on s'aidera du tableau ci-dessous :

Tableau

X	$P(X = x)$	$x\,P(X = x)$	$\sum_{y=1}^{x} y\,P(X=y)$	$P(X > x)$
0	0,0023	0,0000	0,0000	0,9977
1	0,0143	0,0143	0,0143	0,9834
2	0,0436	0,0872	0,1015	0,9398
3	0,0883	0,2649	0,3664	0,8515
4	0,1338	0,5352	0,9016	0,7177
5	0,1617	0,8085	1,7101	0,5560
6	0,1623	0,9738	2,6839	0,3937
7	0,1391	0,9737	3,6576	0,2546
8	0,1040	0,8320	4,4896	0,1506

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

En quoi l'accès à l'eau est-il considéré comme un enjeu majeur pour les décennies à venir ?

Sujet n° 2

Évoquant l'une de ses œuvres, Den Muso (la jeune fille), réalisée en 1975, le cinéaste malien Souleymane Cissé explique : «*J'ai voulu mon héroïne muette pour symboliser une évidence : chez nous, les femmes n'ont pas la parole...*». Commentez.

Sujet n° 3

«*Les graines d'un vieillissement en bonne santé se sèment tôt*» a déclaré Kofi Annan, alors secrétaire général de l'ONU, lors d'un discours à l'Assemblée mondiale sur le vieillissement en 2001. Qu'a voulu dire l'auteur ? Développez en vous appuyant sur des exemples précis.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice :

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle J =] - π/2, + π/2 [.
On considère l'équation (E) de la variable complexe z :

(E) $z^2\cos^2\theta - 4z\cos\theta + 5 - \cos^2\theta = 0$

1 – Résoudre (E) dans l'ensemble des complexes. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de θ l'équation (E) admet une racine double et la valeur de cette racine.

2 – Le plan complexe étant rapporté à un repère orthogonal, on note par M_1 et M_2 les points du plan complexe dont les affixes respectives sont z_1 et z_2, solutions de (E).

Donner l'équation cartésienne de la courbe du plan, lieu géométrique de M_1 et M_2 lorsque θ varie dans l'intervalle J.

Problème :

Dans tout le problème, on se place dans l'espace des polynômes, à coefficients réels, d'une variable réelle.

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme P dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre, et sont donc égaux par paires.
L'objectif du problème est d'avancer dans la recherche des solutions de l'équation P(x) = 0.

Plus précisément, pour un polynôme symétrique P_{2n+1} de degré impair 2n+1 :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$$

Les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k+1}$ pour k = 0 à n.

De même, pour un polynôme symétrique P_{2n} de degré pair 2n :

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

Les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k}$ pour k = 0 à n-1, le coefficient médian a_n n'étant pas apparié.

<u>Partie 1</u>

On pose $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, et $u(k) = x^k + (1/x)^k$, pour k entier, $k \geq 0$
(et donc u(1) = y).

1 – Calculer u(0) et exprimer u(2) en fonction de y.

2 – Montrer que u(k+1) peut être exprimé en fonction de u(k), u(k-1) et y au moyen d'une relation R que l'on explicitera précisément.

3 – En utilisant la relation R établie à la question 2, discuter les conditions d'existence de la solution de R et donner la forme générale de u(k) en fonction de y et de k.

4 – Montrer que u(k) est un polynôme de degré k en y.

5 – Calculer u(3), u(4), u(5) et u(6) en fonction de y.

<u>Partie 2</u>

1 – Donner un exemple de polynôme symétrique de degré 1.

2 – On considère le polynôme P_2 de degré 2 tel que : $x \longmapsto ax^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$.
Dans le cas où P_2 admet deux racines distinctes, les comparer.

<u>Partie 3</u>

Considérons maintenant le polynôme P_3 du troisième degré tel que :

$$x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bx + a, \; a \neq 0.$$

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_3 et que si α est racine de P_3, alors 1/α l'est aussi.

2 – Discuter le nombre de solutions de l'équation $P_3(x) = 0$.

3 – Soit $P_3(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$. Résoudre l'équation $P_3(x) = 0$.

Partie 4

Soit le polynôme P_4 du quatrième degré tel que : $x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, où $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_4 et que si α est racine de P_4, alors 1/α l'est aussi.

2 – Soit $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, introduite dans la partie 1.

Montrer que $P_4(x) = x^2g(x)$, où g est une fonction de la variable réelle x que l'on explicitera.

Exprimer g en fonction de y et y^2, et des coefficients a, b, c.

3 – A quelle condition sur a, b et c l'équation $P_4(x) = 0$ admet-elle des solutions ? Montrer que résoudre l'équation $P_4(x) = 0$ revient à résoudre deux équations du second degré.

4 – Résoudre l'équation : $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$.

Partie 5

On se place dans le cas général.

1 – Soit P_{2n+1} un polynôme symétrique. Trouver une racine évidente de P_{2n+1}.

2 – Montrer que $P_{2n+1}(x) = H(x).Q_{2n}(x)$ où H est un polynôme de degré 1 que l'on précisera et Q_{2n} un polynôme de degré 2n. On pose :

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

Exprimer les coefficients a_k, k = 0 à 2n+1, du polynôme P_{2n+1} en fonction des coefficients b_i, i = 0 à 2n, du polynôme Q_{2n}.

Montrer que le polynôme Q_{2n} est un polynôme symétrique.

3 – Montrer que $Q_{2n}(x)/x^n$ peut être mis sous la forme $R_n(y)$ où R_n est un polynôme de degré n de la variable y déjà définie dans la partie 1, et utilisée également dans la partie 4.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans le numéro de septembre 2008 de la revue Finances et Développement, D.C.L. Nellor (économiste du FMI) notait « que l'accession de certains pays africains au statut d'économie émergente leur offre des perspectives économiques formidables. (…) On constate déjà que les flux financiers se traduisent par une intermédiation financière accrue des pays concernés. Pour que la croissance reste soutenue, il faut notamment que les politiques macroéconomiques et la réglementation prudentielle des mouvements de capitaux permettent d'éviter les pièges de la volatilité des flux de court terme et que la surveillance favorise la stabilité du secteur financier et l'efficacité de l'intermédiation ». A la lumière de la crise internationale actuelle, ces précautions sont plus nécessaires que jamais.

En vous appuyant sur l'appareil conceptuel de la politique économique en économie ouverte, illustré par des exemples pris en Afrique mais également dans le reste du monde, détaillez ce que l'on peut considérer comme « des politiques macroéconomiques prudentes ». Vous rappellerez en particulier des contraintes que font peser sur la balance des opérations courantes, mais également sur les bilans des entreprises et des banques, la volatilité des capitaux et la volatilité des taux de change qu'elle tend à provoquer.

Sujet n° 2

Selon S.Gupta et Y.Yang (Finances et Développement, décembre 2006), la part de l'Afrique dans les échanges mondiaux est tombée de 4% dans les années 70 à 2% au cours des années 2000. Son ouverture au commerce a progressé plus lentement que celle de toutes les autres grandes régions en développement. Rappelant les principales conclusions de la théorie des blocs commerciaux, les auteurs stigmatisent en particulier le rôle néfaste des accords commerciaux régionaux, provoquant en particulier des détournements de trafic particulièrement défavorables. En vous appuyant vous-même sur la théorie du commerce international, et sur les faits stylisés que vous pouvez connaître, il vous est demandé d'expliquer cette évolution. A la lumière des exemples non africains, vous vous demanderez alors si le libre échange – prôné par l'Organisation Mondiale du Commerce – constitue une solution susceptible de doper la croissance.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit f une application de]0, 1 [dans R^+ définie par $x \to f(x) = x - 2x^{1/2} + 1$.
Le symbole o représente la composition des applications.

Montrer que f o f (x) = x.

Exercice n° 2

Un individu vit dans un environnement où il est susceptible d'être contaminé par une maladie. Son état de santé est suivi mensuellement.

Pour un mois donné m, trois états sont possibles :

- il est immunisé (état I)
- il est malade (état M)
- il est non malade et non immunisé (état S)

D'un mois m au mois suivant m+1, son état peut évoluer selon les règles épidémiologiques suivantes :

- étant immunisé au mois m, il peut, au mois m+1, être encore immunisé avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1
- étant malade au mois m, il peut, au mois m+1, être encore malade avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état immunisé avec une probabilité 0,8
- étant en l'état S au mois m, il peut, au mois m+1, être encore en l'état S avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état malade M avec une probabilité 0,5.

1 – Ecrire la matrice A qui résume les probabilités de transition entre l'état du mois m et l'état du mois m+1.

2 – Dans chacun des cas suivants, calculer les probabilités pour qu'un individu soit dans l'état e au mois m+2, e = I ou M ou S, sachant :

a) qu'il était immunisé au mois m

b) qu'il était non malade et non immunisé au mois m

c) qu'il était malade au mois m

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

On considère la suite de fonctions numériques f_n où, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = (\mathrm{Ln}\, x) / x^n$$

1 – Etudier précisément les variations de f_n, pour $n \geq 1$ (limites, points particuliers, …). Soient x_M et y_M les coordonnées du point M en lequel f_n passe par son maximum. Déterminer le lieu géométrique de M, courbe décrite par le point M, lorsque n varie sur l'ensemble des nombres entiers.

2 – Pour tout réel u, $u \geq 1$, on définit l'intégrale $J_n(u)$ par :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

2a – Exprimer $J_n(u)$ en fonction de u et de n.
(Indication : on pourra être conduit à distinguer les cas n = 1 et $n \geq 2$).
Calculer $J_n(2)$.

2b – On pose $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$.
Exprimer $F_n(u)$ en fonction de u et de n.

2c – Déterminer $\lim\limits_{u \to +\infty} J_n(u)$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} F_n(u)$

3 – Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la suite v définie par son terme général d'ordre p, p entier strictement supérieur à 2 :

$$v(p) = \sum_{k=2}^{p} f_n(k) = \sum_{k=2}^{p} (\mathrm{Ln}\, k)/k^n$$

3a – Montrer que la suite v(p) est croissante.

3b - Montrer que pour tous entiers n et k, $n \geq 2$, $k \geq 2$, on a :

$$f_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_n(x)dx \leq f_n(k)$$

3c – En déduire que $v(p) - (\mathrm{Ln}2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) - (\mathrm{Ln}\, p)/p^n$.

3d – Trouver un encadrement pour v(p).

3e – Montrer que v(p) est une suite majorée.
Justifier l'existence d'une limite de la suite v(p), que l'on notera V : $V = \lim\limits_{p \to +\infty} v(p)$.

Déduire de ce qui précède un encadrement pour V.
Application numérique : n = 5 (on donne : Ln 2 = 0,693)

3f – A partir de quelle valeur de n la longueur de l'intervalle encadrant V est inférieure ou égale à 0,001 ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note* : *L'épreuve est composée de questions indépendantes qui peuvent être traitées dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

L'indice de production industrielle (IPI) calculé mensuellement par l'institut national de statistique est constitué de plus de 400 séries témoins.

Les statistiques de production alimentant l'IPI sont représentatives de plus de 90% de la valeur ajoutée des entreprises non artisanales.

On s'intéresse ici à la série témoin du produit A qui correspond à un produit d'emballage.

Question 1 : les entreprises fabriquant le produit A sont interrogées mensuellement. Le tableau ci-dessous donne les facturations mensuelles déclarées par les entreprises en 2000.

Tableau 1

Facturation mensuelle du produit A en 2000 (en K euros)

Mois	janv	fév	mars	avr	mai	juin	juil	août	sept	oct	nov	déc	Total
Montant	4.534	5.159	5.511	4.896	5.882	6.150	6.150	5.522	5.971	5.598	4.896	4.079	64.348

a) Calculer E(X) et V(X), en précisant les unités, où X est la facturation mensuelle du produit A.

b) Il vous est demandé de calculer les indices mensuels de l'année 2000 avec la formule

$$I_{mois} = \frac{\text{montant mensuel}}{\left(\dfrac{\text{montant annuel}}{12}\right)}$$

Question 2 : à l'examen du tableau 2 et du graphique 1, commentez cette série témoin en insistant sur l'effet saisonnier.

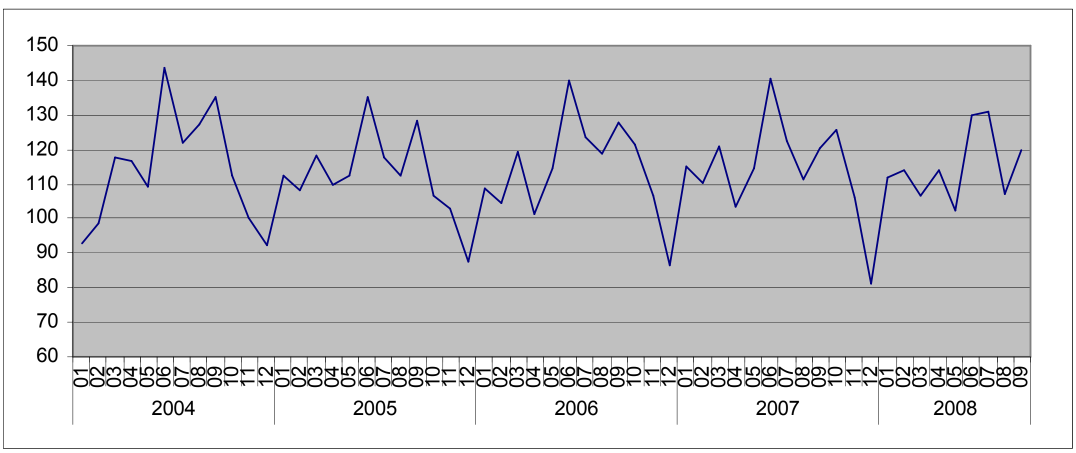
Tableau 2

Indices de facturation de produit A en base 100 en 2000

Année	Janv	Févr	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc	Moyenne
2004	92,60	98,41	117,55	116,48	109,44	143,49	121,71	127,15	135,39	112,32	100,34	92,27	113,93
2005	112,64	108,00	118,45	109,79	112,41	135,02	117,88	112,64	128,51	106,79	102,94	87,37	112,70
2006	108,63	104,49	119,47	101,52	114,47	139,93	123,56	118,88	127,76	121,39	106,78	86,53	114,45
2007	115,02	110,16	121,02	103,27	114,73	140,27	122,31	111,56	120,60	125,52	105,88	80,99	114,28
2008	111,70	114,17	106,80	114,18	102,21	129,69	130,98	107,35	119,82				115,21

Graphique 1

Evolution des facturations du produit A (en données brutes)



Question 3 : pour éliminer le caractère saisonnier de production de certains produits, on construit des séries corrigées des variations saisonnières (CVS). Cela rend plus facilement interprétable les variations mensuelles des indices.

a) Pour cela, nous allons calculer des moyennes mobiles de longueur 12 puisque la série est mensuelle.

$$mm_{12,t}(y) = \frac{1}{12}\left[\left(\sum_{i=-6+1}^{6-1} y_{t+i}\right) + \frac{1}{2}y_{t-6} + \frac{1}{2}y_{t+6}\right]$$ où t est le mois et y l'indice de facturation.

A partir des données du tableau 2, il vous est demandé de calculer, pour l'année 2005, la moyenne mobile du mois de septembre et celle du mois de décembre.

b) Il nous faut ensuite calculer des coefficients saisonniers. Ces coefficients sont obtenus en calculant la moyenne des rapports saisonniers de chaque mois, un rapport saisonnier étant défini par $z_t = {y_t}/{mm_{12,t}(y)}$

Il vous est demandé de calculer, pour l'année 2005, le rapport saisonnier des mois de septembre et de décembre.

c) Combien de rapports saisonniers peut-on calculer à partir des données à votre disposition et de la limitation sur les périodes annuelles 2004 à 2008 ?

d) Calculer le coefficient saisonnier du mois de décembre qui se définit comme la moyenne des rapports saisonniers des mois de décembre.

e) Le tableau 3 vous donne les coefficients saisonniers (S_j) des mois autres que celui de décembre que vous avez été amené à calculer dans la question précédente.

Tableau 3

Coefficients saisonniers (S_j)

Mois	Coefficient
Janvier	0,9828
Février	0,9594
Mars	1,0259
Avril	0,9217
Mai	0,9984
Juin	1,2144
Juillet	1,0642
Août	1,0272
Septembre	1,1188
Octobre	1,0190
Novembre	0,9106
Décembre	A calculer

La dernière étape pour pouvoir établir une série corrigée des variations saisonnières (CVS) consiste à faire une correction de ces coefficients saisonniers en calculant la moyenne de ceux-ci et en divisant chacun des coefficients par cette moyenne. C'est ainsi que le coefficient corrigé pour le mois de janvier est $0{,}9828 \Big/ \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} S_j$. Calculer les 12 coefficients corrigés.

Question 4 :

La série corrigée des variations saisonnières (série CVS) est obtenue en divisant chaque valeur de la série initiale par son coefficient saisonnier corrigé. Le tableau 4 vous donne la série CVS.

a) Il manque 2 valeurs que vous devrez calculer

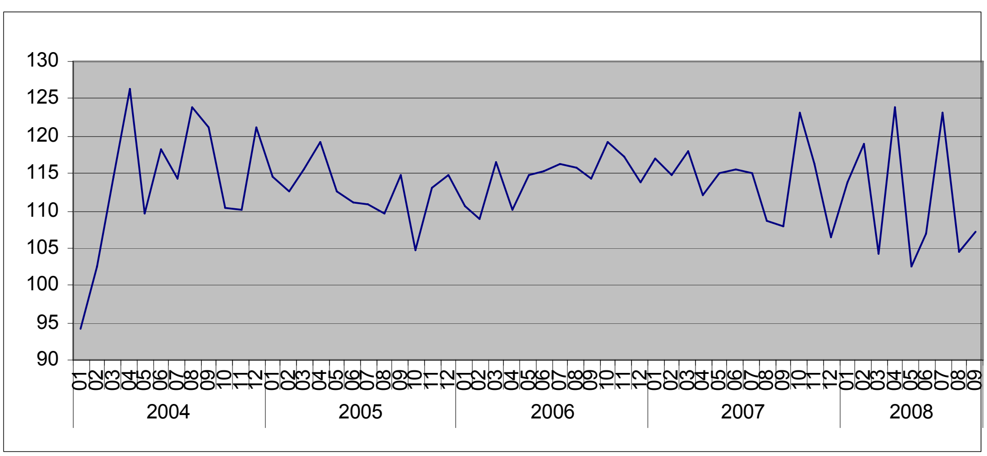
Tableau 4

	Janv	Févr	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc	Moyenne
2004	94,25	102,61	114,62	126,41	109,64	118,20	114,40	123,82	121,05	110,25	110,22	121,25	113,89
2005	114,65	112,61	115,50	119,15	112,62	111,22	110,80	109,69	114,90	104,83	113,07	114,81	112,82
2006	110,56	108,95	116,49	110,18	114,68		116,14	115,77	114,23	119,16	117,29	113,71	114,37
2007	117,07	114,86	118,00	112,08	114,94	115,54	114,97	108,64	107,83	123,21	116,30		114,16
2008	113,69	119,04	104,14	123,92	102,40	106,83	123,12	104,54	107,13				111,65

b) Estimer le chiffre d'octobre 2008 à partir du graphique 2 par une méthode graphique que vous explciterez.

Graphique 2

Evolution des facturations du produit A (en données CVS)



<u>Question 5</u> :

A partir du tableau 5 qui fournit la moyenne annuelle de la série témoin associée au produit A depuis 1990, il vous est demandé de calculer le taux de croissance annuel moyen de cette série.

<u>Tableau 5</u>

Année	Moyenne
1990	89,25
1991	90,14
1992	89,80
1993	90,01
1994	92,77
1995	94,64
1996	93,87
1997	96,30
1998	95,94
1999	96,65
2000	100,00
2001	99,23
2002	102,35
2003	99,61
2004	113,93
2005	112,70
2006	114,45
2007	114,28

Base 100 année 2000

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

«Le passé, c'est le trésor des vieux.» a écrit Benjamin Matip, écrivain camerounais, dans *Afrique, nous t'ignorons.* Qu'a voulu dire l'auteur ? Quelle est votre opinion ? Argumentez.

Sujet n° 2

Le sommet de Copenhague a réuni en décembre 2009 les pays industrialisés et les pays émergents autour de la problématique du climat, afin de s'accorder sur leurs engagements respectifs pour limiter le réchauffement climatique. L'Union Africaine a estimé que, si aucun accord n'était trouvé, «cela constituerait la mort de l'Afrique». Expliquez et commentez.

Sujet n° 3

Les dessins publiés dans la presse sont «le baromètre de la liberté d'expression d'un pays», d'après Plantu, caricaturiste français. Commentez.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

On considère la suite numérique $u(n)$ définie sur N par son origine $u(0) = 1$ et son terme général $u(n+1) = au(n) + bn + c$, où a, b et c sont des nombres réels, $a \neq 0$.

A partir de $u(n)$ on définit la suite $v(n)$ par :

$v(n) = \alpha u(n) + \beta n + \gamma$, pour n entier ≥ 0, α, β et γ étant des nombres réels, $\alpha \neq 0$.

1) Quelles conditions doivent vérifier les paramètres a, b, c, α, β et γ pour que la suite $v(n)$ soit une suite géométrique ?

2) On donne pour toute la suite de l'exercice : $a = 1/3$, $b = 1$, $c = -1$, $\alpha = 4$, $\beta = -6$, et $\gamma = 15$. Calculer $v(n)$ en fonction de n.

3) En déduire que $u(n)$ peut s'écrire sous la forme $u(n) = g(n) + h(n)$, où $g(n)$ est une suite géométrique et $h(n)$ une suite arithmétique dont on écrira les expressions en fonction de n.

4) Calculer explicitement, en fonction de n, la somme $U = \sum_{k=0}^{n} u(k)$.

Problème

1) Soit f l'application de R dans R^+ définie par $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$.

1a - Etudier précisément les variations de f (dérivées, tableau de variations, concavité, limites, asymptotes, graphe…)

1b - Montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) > |x|$

2) On considère l'application g définie sur R par $g(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$.
Etudier g et tracer son graphe dans le repère orthonormal usuel.

3) On donne maintenant l'application h définie sur R par $h(x) = (x^2 – 1)/2x$.
Etudier h. Donner, en fonction de x, des expressions simples pour $h(g(x))$ et $g(h(x))$.

4) Soit l'application u définie sur R par $u(x) = (x^2 + 1)/2x$.
Etudier précisément les variations de u.

5) n étant un entier naturel, on considère la suite d'applications v_n définie sur R par :

$v_n(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x – (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

5a – Calculer $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $v_3(x)$.

5b – Pour tout réel x, comparer $v_n(x)$ et $v_n(–x)$.

5c – Pour tout réel x, comparer $v_n(x)$ et $v_{-n}(x)$; en déduire directement les relations existant entre $v_n(–x)$, $v_{-n}(x)$, $v_{-n}(–x)$ et $v_n(x)$.

6) Montrer que v_n est un polynôme.

Préciser le degré de ce polynôme et le coefficient de son terme du plus haut degré.
Calculer le coefficient du terme du plus haut degré pour les polynômes v_4 et v_5.

7) On note par w l'application définie sur R par $w(x) = x^n$, où n est un entier naturel.

Le symbole o désignant la loi de composition des applications, montrer que, selon la parité de n, v_n peut s'écrire sous les formes ($u \ o \ w \ o \ g$) ou ($h \ o \ w \ o \ g$).

8) Déduire de la question précédente les tableaux de variations de v_n, selon la parité de n.

9) Dans cette question, on suppose que n est un entier non nul.

Soit k un nombre réel donné.
Discuter, selon la valeur de k, le nombre de racines réelles de l'équation $v_n = k$.

10) Soit le nombre réel θ tel que $0 < \theta < \pi/2$

10a - Résoudre, dans le corps C des nombres complexes, l'équation (E) :

$$\text{(E)} \qquad z^n + z^{-n} = 2\cos\theta$$

10b - z_s étant une racine de l'équation (E), calculer $h(z_s) = t_s$.

10c - En notant encore par v_n le prolongement à C de l'application définie à la question 5, calculer $v_n(t_s)$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans la synthèse de son rapport, la Commission sur la mesure des performances économiques présidée par Amartya Sen et Joseph Stiglitz note : «*Ce que l'on mesure a au moins autant d'importance que ce que l'on fait. Le choix entre accroître le PIB et protéger l'environnement peut se révéler être un faux choix(…)*».

En vous appuyant sur les différentes théories relatives aux limites du marché comme mode de régulation de l'activité économique, aux biens collectifs et aux fondements de l'intervention publique, vous montrerez pourquoi la croissance du PIB doit demeurer un objectif central de la politique économique et pourquoi elle ne peut en être l'unique objectif dans une optique de croissance soutenable et de développement durable.

Sujet n° 2

Dans son rapport de 2003 sur le commerce mondial, l'OMC indique : «*A mesure que le marché se développe, des possibilités sont offertes à davantage de producteurs spécialisés ce qui s'accompagne d'une nouvelle réduction des coûts. Il est tout à fait possible que ce processus crée un cercle vertueux. Le cercle vertueux ne peut s'auto-entretenir que lorsqu'une masse critique de producteurs et un niveau critique de demande sont atteints. Les pays dont les marchés se situent en deçà de ce niveau critique peuvent se trouver pris au piège de la pauvreté, la majorité de la population se consacrant à la production familiale et de subsistance, très peu spécialisée (…)*».

En vous appuyant sur les différentes théories de la croissance et du commerce international et sur les enseignements tirés de quelques expériences nationales de pays développés, de pays émergents et de pays moins avancés, vous discuterez la pertinence de ce diagnostic et les conséquences en matière de politique économique que l'on peut en déduire.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

On considère trois villes, A, B et C telles que A et C sont à égale distance de B :

d(A, B) = d(B, C).

Deux voitures se rendent de A à C en passant par B.

La première va à la vitesse v de A à B, puis deux fois plus vite ensuite de B à C.

La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse (v + 20) entre B et C.

Les deux voitures mettent le même temps pour aller de A à C.

Quelle est la valeur de v ?

Exercice n° 2

On se place dans le corps *C* des nombres complexes et dans le plan complexe *P*.

1) Le symbole $\bar{\ }$ désigne la conjugaison. Déterminer l'ensemble *D* des points *M* dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$z - i\bar{z} = 0.$$

2) Au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = h(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$$

Calculer $h(i)$.

Donner le module et un argument de $h(i)$.

Que peut-on dire de $(h(i))^8$?

3) Résoudre l'équation $h(z) = i$.

4) Déterminer R, I et U, respectivement ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel, ensemble des points M tels que z' soit un nombre imaginaire pur, ensemble des points M tels que le module de z' soit égal à 1.

Problème

Soit f une application de R dans R^+ définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

NB: on fournit les données numériques suivantes, qui pourront être utiles dans le problème :

$Ln50 = 3{,}91$; $e^{1/2} = 1{,}648$; $e^{-1/2} = 0{,}607$; $e^{1/8} = 1{,}133$; $e^{-1/8} = 0{,}882$.

1) Trouver une relation $R1$ entre f et f', sa dérivée d'ordre 1.

2) Trouver une relation $R2$ entre f et f'', et une relation $R3$ entre f et $f^{(3)}$.

3) Etudier de façon précise et complète les variations de f' et de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution, que l'on notera α.

5) On note J l'intervalle fermé $J = [1/2, 1]$.

5a - Montrer que $\alpha \in J$.

5b - Montrer que pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$.

6) Montrer que, $\forall\ x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, où M est le meilleur majorant de $|f'(x)|$, que l'on calculera.

7) On définit la suite de terme général $u(n)$, n entier, par $u(0) = 1$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

Montrer, par récurrence, que $\forall\ n \in N$, $1/2 \leq u(n) \leq 1$.

8) Démontrer que, $\forall\, n \in N$, on a l'inégalité (E) suivante :

$$\text{(E)} \qquad |u(n+1) - \alpha| \leq M.|u(n) - \alpha|$$

9) Montrer que : $|u(n) - \alpha| \leq e^{-n/2}/2$.

10) A partir de quelle valeur n^*, $|u(n) - \alpha|$ est–il inférieur ou égal à 10^{-2} ?
Proposer une méthode pour connaître la valeur de $u(n^*)$ à 10^{-2} près.

11) On appelle intégrale de Gauss l'expression $\int_{\mathrm{R}} f(x)\,dx$. Fin du 18ème siècle, Pierre Simon de Laplace a calculé cette intégrale, égale à $(2\pi)^{1/2}$.

On note $\varphi(x) = f(x) / (2\pi)^{1/2}$, et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$.

11a – Donner l'interprétation probabiliste de $\varphi(x)$ et de $\Phi(x)$.
Donner la valeur de la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

11b – Soit $K(x) = \int_{-\infty}^{x} t^2\, \varphi(t)\, dt$

Calculer la limite de $K(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : L'épreuve est composée de questions indépendantes qui peuvent être traitées dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice n° 1

A l'issue d'une enquête sur les dépenses de santé des ménages, on a établi le tableau suivant (tableau 1) sur le coût annuel des dépenses de santé pour des couples ayant 0, 1, 2 ou 3 enfants.

Tableau 1

Coût annuel des dépenses de santé

	Nombre d'enfants du ménage			
	0	1	2	3
Nombre de ménages (N)	100	100	100	100
Dépense par personne (DP)	1500	1300	1125	960

Question 1 : On suppose que la dépense par adulte ne dépend pas du nombre d'enfants, et que chaque ménage ne comprend que deux adultes.

a) On suppose que la dépense totale DT(e) est une fonction affine du nombre d'enfants e. On écrit donc l'équation suivante : DT(e) = a e + b + aléa. Estimer les paramètres a et b par la méthode des moindres carrés.

b) A partir de la question précédente, estimer la dépense par adulte (notée DPA) et par enfant (notée DPE) selon la taille du ménage.

c) Commenter.

Question 2 : On suppose toujours que chaque ménage ne comprend que deux adultes mais on suppose maintenant que la dépense par enfant (DPE) est une fonction affine du nombre d'enfants. On écrit donc l'équation suivante : DPE = c e + d + aléa.

a) Sachant que la dépense par adulte (DPA) ne dépend pas du nombre d'enfants, écrire l'équation liant la dépense totale DT(e) au nombre d'enfants e.

b) En déduire l'expression de DT(e) – DT(e-1) en fonction de c,e et d. Calculer les paramètres de cette équation, par la méthode des moindres carrés, et en déduire une estimation de c et d.

c) Estimer par différence la dépense liée aux adultes.

Exercice n° 2

Question 1 : A partir des tableaux (tableaux 2 à 5) donnés ci-dessous, calculer :

a) La dépense annuelle de santé par personne pour l'année 1990

b) La dépense annuelle de santé par personne pour l'année 2000

c) Le taux annuel moyen d'évolution entre 1990 et 2000 de la dépense annuelle par personne

Question 2 : Calculer la dépense annuelle de santé par personne de l'année 2000 en euros constants de l'année 1990

Question 3 : Calculer la part des soins hospitaliers en 2000 et en 2007. Commenter

Question 4 : Rédiger une note de synthèse faisant un bilan de la consommation de soins et de biens médicaux

Tableau 2

Consommation de soins et de biens médicaux à partir de 2000
En milliards d'euros courants

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Soins hospitaliers	52,7	54,8	58,0	61,5	64,4	67,6	69,9	72,7
Soins ambulatoires	31,2	33,0	35,4	38,0	39,6	40,9	42,7	45,1
Médecins	*15,2*	*15,7*	*16,8*	*17,9*	*18,5*	*19,1*	*19,9*	*20,9*
Auxiliaires médicaux	*6,3*	*6,7*	*7,3*	*7,9*	*8,4*	*8,9*	*9,5*	*10,2*
Dentistes	*6,7*	*7,3*	*7,7*	*8,2*	*8,6*	*8,7*	*9,0*	*9,4*
Analyses	*2,8*	*3,0*	*3,3*	*3,6*	*3,8*	*4,0*	*4,1*	*4,2*
Cures thermales	*0,3*	*0,3*	*0,3*	*0,3*	*0,3*	*0,3*	*0,3*	*0,3*
Transports de malades	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	2,8	3,1	3,2
Médicaments	23,6	25,5	26,9	28,6	30,2	31,5	31,9	33,4
Autres biens médicaux (1)	5,7	6,4	6,9	7,4	8,0	8,4	8,8	9,5
Consommation de soins et de biens médicaux	115,1	121,7	129,5	137,9	144,9	151,2	156,5	163,8

(1) Optique, prothèses, orthèses, petits matériels et pansements.

Champ : France métropolitaine et Dom.
Source : Drees, comptes de la santé (base 2000).

Tableau 3

Consommation de soins et de biens médicaux de 1970 à 1998 (en millions d'euros courants)

	1970	1975	1980	1985	1990	1995	1996	1997	1998
Soins hospitaliers et en sections médicalisés	2 597	6 394	14 902	27 305	36 952	47 625	48 990	49 551	50 576
Soins ambulatoires	1 656	3 527	7 067	13 887	21 475	26 756	27 299	27 730	28 754
Transports de malades	41	109	285	678	1 068	1 476	1 464	1 474	1 608
Médicaments	1 592	2 998	4 968	9 533	14 244	18 454	18 739	19 360	20 522
Autres biens médicaux	151	324	630	1 279	2 355	3 721	3 925	4 093	4 466
Consommation de soins et de biens médicaux	6 038	13 352	27 851	52 682	76 094	98 032	100 418	102 208	105 926

Champ : France métropolitaine et Dom.
Source : Drees, comptes nationaux de la santé, Etudes & Résultats n° 572.

Tableau 4

Variation annuelle de l'indice des prix à la consommation
en % de l'indice moyen annuel

1970	5,2	1989	3,6
1971	5,5	1990	3,4
1972	6,2	1991	3,2
1973	7,3	1992	2,4
1974	13,7	1993	2,1
1975	11,8	1994	1,7
1976	9,6	1995	1,7
1977	9,4	1996	2,0
1978	9,1	1997	1,2
1979	10,8	1998	0,7
1980	13,6	1999	0,5
1981	13,4	2000	1,7
1982	11,8	2001	1,7
1983	9,6	2002	1,9
1984	7,4	2003	2,1
1985	5,8	2004	2,1
1986	2,7	2005	1,8
1987	3,1	2006	1,6
1988	2,7	2007	1,5

Champ : ensemble des ménages en France.
Indice des prix à la consommation (y compris tabac), base 100 en 1998.
La variation annuelle de l'indice est l'évolution de l'indice moyen annuel. Cet indice est la moyenne arithmétique des douze indices mensuels.
Source : Insee, indice des prix à la consommation

Tableau 5

Évolution de la population
en milliers

	Population en milieu d'année	Naissances	Décès	Solde naturel	Solde migratoire évalué
1985	56 600	796,5	560,5	+ 236,0	+ 42
1986	56 886	806,0	554,8	+ 251,2	+ 44
1987	57 192	796,3	535,5	+ 260,8	+ 55
1988	57 519	801,2	532,6	+ 268,6	+ 70
1989	57 859	796,8	537,6	+ 259,2	+ 82
1990	58 171	793,9	534,5	+ 259,4	+ 77
1991	58 459	790,9	533,0	+ 257,9	+ 88
1992	58 745	775,5	529,9	+ 245,6	+ 89
1993	58 995	742,0	540,6	+ 201,4	+ 70
1994	59 210	741,5	528,2	+ 213,3	+ 51
1995	59 419	759,7	540,4	+ 219,3	+ 42
1996	59 624	764,7	544,7	+ 220,0	+ 38
1997	59 831	758,1	539,4	+ 218,7	+ 43
1998	60 047	768,6	543,5	+ 225,1	+ 50
1999	60 348	776,5	547,4	+ 229,1	+ 61
2000	60 751	808,2	540,7	+ 267,5	+ 71
2001	61 182	804,1	541,2	+ 262,9	+ 87
2002	61 616	793,6	545,4	+ 248,2	+ 97
2003	62 042	793,9	562,6	+ 231,3	+ 102
2004	62 445	800,2	519,6	+ 280,6	+ 105
2005	62 818	807,8	538,2	+ 269,6	+ 92
2006 (r)	63 195	830,3	527,0	+ 303,3	+ 90
2007 (p)	63 573	816,5	526,5	+ 290,0	+ 71

p : données provisoires.
r : données révisées.
Champ : France métropolitaine et DOM
Source : Insee, bilan démographique.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les indépendances africaines ont-elles eu une influence sur l'évolution de la littérature ces cinquante dernières années ?

Sujet n° 2

La tradition est-elle un frein ou un repère dans une société ?

Sujet n° 3

Kofi Annan, ancien Secrétaire Général des Nations-Unies, a déclaré lors du congrès international de Yaoundé *Africa21* en mai 2010 que « *l'Afrique est un géant endormi sur le point d'être éveillé* ». Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Données :

Les valeurs numériques suivantes pourront servir dans le problème : e = 2,718 ; 1/e = 0,368 ; cos(51°8) = 0,618 ; $e^{0,618} = 1,86$.

On note par f la fonction numérique définie sur R par $f(x) = e^{-\cos x}$.

1 – Etudier la fonction f : parité, périodicité, dérivée.

Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$. On précisera les points d'inflexion de f .

2 – Dans cette question, on se propose de rechercher les tangentes à C issues de l'origine O.

2 a – Soit A un point de C d'abscisse a, $0 < a < \pi$.
Ecrire une équation d'une tangente en A à C.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que cette tangente passe par l'origine O.

2 b – On définit la fonction numérique φ sur $]0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

Etudier précisément les variations de φ.

Montrer que φ passe par un maximum M dont on cherchera le signe.
En déduire que φ s'annule en deux points x_1 et x_2 que l'on positionnera par rapport à $\pi/2$.
Conclure sur le nombre de tangentes à C que l'on peut mener depuis l'origine O.

3 a – Calculer une primitive Φ de φ.

3b – Calculer l'intégrale $F(a, b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

Etudier la limite de $F(a, b)$ quand a tend vers 0 et b tend vers π.

Problème 2

On note $M_4(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients réels, $U_4(R)$ le sous-ensemble de $M_4(R)$ formé des matrices inversibles, et I la matrice identité d'ordre 4.

1 – On donne la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.

Déterminer l'inverse A^{-1} de A.

2 – On note par L_i, $i = 1$ à 4, les lignes d'une matrice M de $M_4(R)$; Λ est l'ensemble des lignes de M.

On considère l'ensemble E formé par les trois opérations élémentaires que l'on peut définir sur l'espace Λ des lignes de M ; ces opérations sont :

a) homothétie : $h(L_i) = a\, L_i$, où $i = 1$ à 4, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la ligne $a\, L_i$, a étant un nombre réel non nul.

b) mélange : $m(L_i) = L_i + bL_k$, où i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la combinaison de L_i et bL_k, b étant un nombre réel.

c) permutation : $p(L_i) = L_k$ et $p(L_k) = L_i$, où i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que les lignes L_i et L_k sont permutées.

On appellera de façon générique e une opération quelconque de E, e étant selon les cas h, m ou p.

Montrer que h, m et p, applications de Λ dans Λ, admettent des inverses notées h^{-1}, m^{-1} et p^{-1} que l'on exprimera.

3 – Soit M une matrice de $U_4(R)$, et e une application de E.

Par convention, on notera $e(M)$ la matrice de $M_4(R)$ obtenue en appliquant l'opération e à M.

Montrer que $e(M) = e(I).M$

Montrer que $e(I)$ est inversible.

En déduire que $(e(M))^{-1} = M^{-1}.\, e^{-1}(I)$

4 – On considère la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B = e(A)$ où e est une application de E que l'on précisera.

Calculer l'inverse B^{-1} de B.

5 – Soit L le vecteur-ligne d'élément courant a_i, $i = 1$ à 4, et C le vecteur-colonne d'élément courant b_i, $i = 1$ à 4.

On suppose L et C non nuls.

Quelles sont les dimensions de LC et CL ?

6 – On suppose que $LC + 1 = 0$.

6a – Calculer $(I + CL)C$

6b – La matrice $I + CL$ est-elle inversible ?

7 – On suppose que $LC + 1 \neq 0$.

Montrer que $I + CL$ admet une matrice inverse de la forme $I + k.CL$, où k est un nombre réel :

$(I + CL)^{-1} = I + k.CL$

8 – Soit une matrice M de $U_4(R)$.
On considère la matrice $N = M + CL$.

8a – Montrer que N est inversible si et seulement si : $LM^{-1}C + 1 \neq 0$.

8b – En déduire que, sous cette condition : $N^{-1} = M^{-1} – (M^{-1}CLM^{-1}) / (1 + LM^{-1}C)$

9 – On considère la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9a – Montrer que la matrice $D - A$ peut être écrite sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

9b – Montrer que D est inversible

9c – Calculer D^{-1}

10 – On considère la matrice F définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & x & y & 1 \end{pmatrix}$$

où x et y sont deux nombres réels.

10a – Montrer que $F = A + G$, où G est une matrice que l'on explicitera.

10b – Montrer que G peut être mis sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

10c – En déduire la relation $t(x, y) = 0$ que doivent vérifier x et y pour que F ne soit pas inversible.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Après avoir analysé l'impact des asymétries d'information et des politiques d'incitation sur les théories usuelles du fonctionnement du marché du travail que vous aurez initialement rappelées, vous préciserez brièvement l'apport des modèles de négociations collectives à l'économie du travail.

Sujet n° 2

En vous appuyant sur les principales théories explicatives des comportements de consommation et d'investissement, vous indiquerez dans quelle mesure les autorités publiques peuvent recourir à une politique de relance par la demande dans des économies ouvertes.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et de deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

1 – On considère deux nombres entiers relatifs a et b.
Montrer que le nombre $n = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

2 – Montrer que le produit P de trois nombres entiers naturels, pairs, consécutifs, est divisible par 48.

Problème 1

1 – Soit la fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$f(x) = x \sin x$$

1a – Calculer la dérivée f' de f.
1b – La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
1c – Etudier précisément la fonction f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.
1d – Calculer une primitive F de f.

2 – On considère maintenant la fonction g définie sur R par :

$$g(x) = x\sin(\frac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

2a – La fonction g est-elle continue en 0 ?

2b – Etudier la parité de g

2c – Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$

2d – g est-elle dérivable en 0 ?

2e – Soit G la courbe représentative de g dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de G situés sur les bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

3 – On considère maintenant la fonction h définie sur R par :

$$h(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0$$

3a – La fonction h est-elle continue en 0 ?

3b – Etudier la parité de h

3c – Montrer que h est dérivable en tout point x non nul ; h est-elle dérivable en 0 ?

3d – Soit H la courbe représentative de h dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de H situés sur les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = -x^2$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Problème 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1 – On considère une courbe C du plan définie comme l'ensemble des points M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, dépendant d'un paramètre réel t.
On donne, pour $t \in R$:

$$x(t) = t + \frac{t^2}{2} \text{ et } y(t) = t - \frac{t^2}{2}$$

1 a – Etudier, dans le même tableau de variations, les variations de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

1b – Etudier les points de la courbe C en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes du repère.

1c – Préciser les points d'intersection de C avec les axes Ox et Oy. Donner un vecteur directeur des tangentes en ces points.

1d – Donner graphiquement l'allure de la courbe C, en positionnant les points remarquables déterminés.

1e – Donner l'équation cartésienne $v(x, y) = 0$ de la courbe C.

2 – On se propose de déterminer précisément ce qu'est la courbe C.

2 a – Le plan étant assimilé au plan complexe, on considère l'application h qui, à tout point M d'affixe z du plan, associe un point M' d'affixe Z, définie par :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,z$$

Donner de façon précise la nature de l'application h.

2b – Soit M le point d'affixe $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.

Déterminer les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de M', image de M par h.
Donner une équation cartésienne $\varphi(X, Y) = 0$ de la courbe C' des points M'.
Comment appelle-t-on la courbe C' ?
En déduire le nom de la courbe C.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Il vous est proposé d'étudier des indicateurs démographiques de pays du continent africain. Les données vous sont présentées dans les tableaux joints en annexe. Ces tableaux sont issus d'un document « La démographie de l'Afrique au sud du Sahara des années 1950 aux années 2000 » de Dominique Tabutin et Bruno Schoumaker.

Question 1

a) A partir du tableau A.2, calculer le taux d'évolution annuel moyen de la population entre 1950 et 2010 pour la zone « Afrique de l'ouest ».

b) Dans l'hypothèse où le taux d'accroissement annuel reste identique à celui observé au cours de la période 1950-2010, calculer une estimation de la population de la zone « Afrique de l'ouest » en 2040.

c) Comparer le chiffre obtenu à la question 1b avec le chiffre du tableau A.2 et donner les raisons qui peuvent expliquer l'écart constaté.

Question 2

Toujours pour la zone « Afrique de l'ouest », dans le tableau A.8, on constate que l'espérance de vie a progressé entre 1950 et 1994 et a diminué sur la dernière période.

a) Commenter cette diminution au sein de la zone « Afrique de l'ouest » et en la comparant aux autres zones africaines.

b) Calculer l'évolution de l'espérance de vie entre les deux périodes 2000/2004 et 1990/1994 pour chaque pays de la zone « Afrique de l'ouest ».

c) Calculer le coefficient de détermination entre le taux de prévalence du VIH début 2002 (cf. tableau A.10) et la variable calculée à la question 2b.

d) Commenter.

Question 3

Dans cette question, nous allons nous intéresser à l'indicateur de développement humain des pays de la zone « Afrique de l'ouest » (cf. tableau A.13).

a) Calculer les indices 2001 en base 100 en 1980 des pays concernés pour lesquels les données sont disponibles.

b) Commenter.

c) Globalement, les pays de la zone ont progressé de 20 points en une vingtaine d'années. A ce rythme d'évolution, calculer dans combien d'années, ces pays rejoindront le niveau actuel de la Norvège dont l'indicateur est 0,944.

Question 4

Dans son ensemble, l'Afrique au sud du Sahara est sans aucun doute entrée dans le processus global de la transition démographique, avec une baisse préalable de la mortalité dès les années 1950 et 1960, suivie plus récemment d'un début de recul de la natalité, mais seule une minorité de pays suivent le modèle classique, sans à-coup ni rupture ou retournement de situation.

En Afrique, coexistent actuellement quatre grandes situations ou modèles, qui apparaissent clairement en prenant 4 pays qui ont connu depuis vingt ans des histoires économiques, politiques et sanitaires diverses, le Mali, le Ghana, le Liberia et le Zimbabwe (figures 2 ci-dessous)

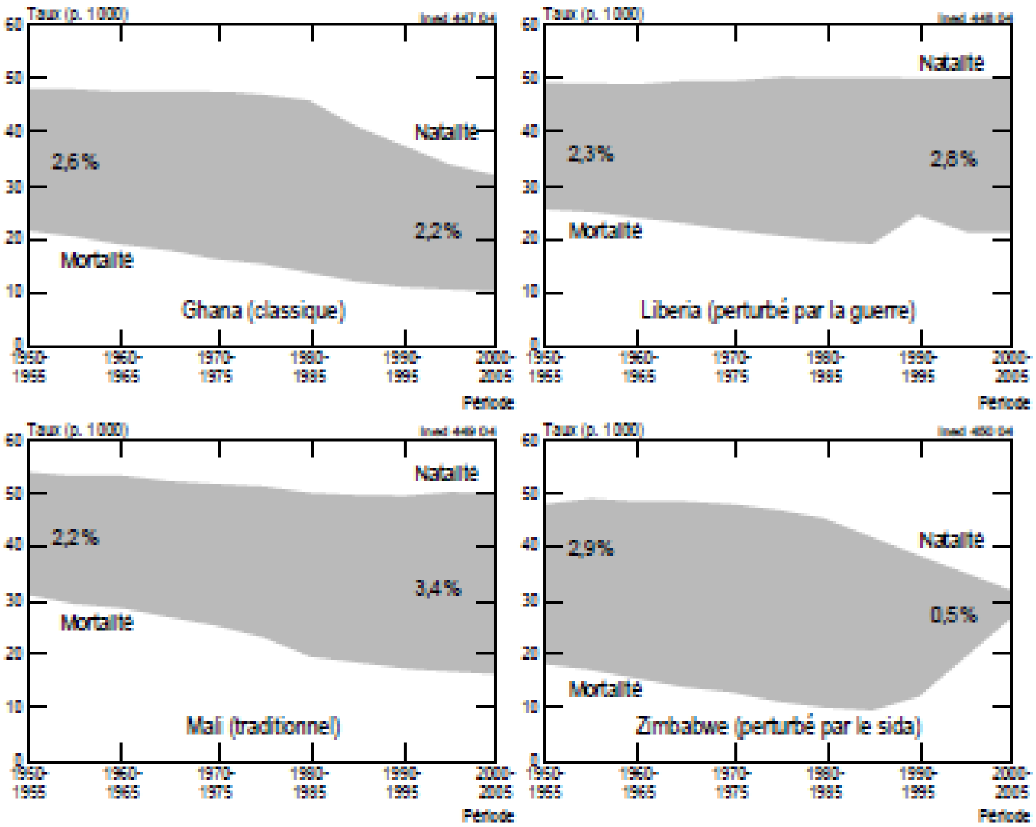


Figure 2.– Quatre modèles types de transition démographique en Afrique sub-saharienne de 1950 à 2005

Source : à partir des données des Nations unies (2003b).

a) *le modèle encore traditionnel*, illustré par le Mali, où la mortalité a reculé mais où la natalité se maintient à des niveaux très élevés (de 45 à 50 ‰). Il vous est demandé d'identifier 3 ou 4 autres pays qui sont sur ce modèle.

b) *le modèle classique de changement*, illustré par le Ghana, où la mortalité baisse régulièrement depuis cinquante ans, la natalité diminue depuis vingt ans et la croissance ralentit tout en demeurant encore forte. Il vous est demandé d'identifier 3 ou 4 autres pays qui sont sur ce modèle.

c) *le modèle perturbé par le sida*, illustré par le Zimbabwe : fécondité et mortalité ont reculé normalement jusque vers 1990, mais le processus a été brutalement interrompu par des reprises importantes de la mortalité, conduisant à des réductions parfois drastiques de la croissance. Il vous est demandé d'identifier 3 ou 4 autres pays qui sont sur ce modèle.

d) *le modèle perturbé par des guerres*, illustré ici par le Liberia, avec des reprises brutales de mortalité dues aux conflits eux-mêmes, mais aussi à la paupérisation qui s'en suit, ainsi parfois qu'au sida. Il vous est demandé d'identifier 3 ou 4 autres pays qui sont sur ce modèle.

Tableau A.2. – Superficies et densités en 2000, évolution de la population de 1950 à 2040 (48 pays)

Sous-régions et pays	Histoire		Superficie[a] (milliers de km²)	Densité (hab./km²) (2000)		Effectifs de la population (milliers d'habitants)[b]							
	Pays colonisateur	Indépendance en		Brute[b]	Terres arables[c]	1950	1970	1990	2000	2005	2010	2020	2040
Afrique de l'Ouest			6145	37	–	60408	96713	171509	226129	256918	289381	357841	502003
Bénin	France	1960	113	55	281	2046	2705	4650	6222	7103	8068	10122	13960
Burkina Faso	France	1960	274	43	309	3960	5441	8921	11905	13798	16018	21403	35130
Cap-Vert	Portugal	1975	4	108	1063	146	267	349	436	482	529	623	769
Côte d'Ivoire	France	1960	323	49	215	2775	5521	12505	15827	17165	18526	21026	25519
Gambie	Grande-Bretagne	1965	11	116	558	294	469	936	1312	1499	1680	2015	2644
Ghana	Grande-Bretagne	1957	239	82	337	4900	8623	15277	19593	21833	24117	28521	36423
Guinée	France	1958	246	33	547	2550	3897	6122	8117	8788	9990	12478	17340
Guinée-Bissau	Portugal	1974	36	38	391	505	584	1016	1367	1584	1827	2421	3934
Liberia	–	–	111	26	495	824	1387	2135	2943	3603	4130	5367	8327
Mali	France	1960	1242	10	255	3520	5607	9046	11904	13829	16208	22140	37893
Mauritanie	France	1960	1027	3	529	825	1262	2030	2645	3069	3520	4473	6510
Niger	France	1960	1268	8	239	2500	4141	7650	10742	12873	15388	21731	41145
Nigeria	Grande-Bretagne	1960	925	124	372	29790	47980	86018	114746	130236	145922	177158	234501
Sénégal	France	1960	197	48	391	2500	4158	7345	9393	10587	11869	14422	19404
Sierra Leone	Grande-Bretagne	1961	72	62	803	1944	2657	4054	4415	5340	5859	6979	9348
Togo	France	1960	57	80	173	1329	2014	3455	4562	5129	5730	6962	9156
Afrique centrale			6620	14	–	26316	40610	71053	92960	106241	120960	153827	229816
Angola	Portugal	1975	1248	10	375	4131	5588	9340	12386	14533	16842	22036	35882
Cameroun	France	1960	476	32	211	4466	6631	11661	15117	16564	17775	19874	23499
Centrafrique	France	1960	624	6	184	1314	1871	2943	3715	3962	4265	4900	6038
Congo	France	1960	342	10	1567	808	1323	2494	3447	3921	4532	5960	9159
Congo (RD)	Belgique	1960	2348	21	616	12184	20603	37370	48571	56079	64714	84418	129973
Gabon	France	1960	268	5	254	469	529	953	1258	1375	1509	1781	2284
Guinée équatoriale	Espagne	1968	28	16	198	226	294	354	456	521	590	736	1040
Sao Tomé-et-Principe	Portugal	1975	1	155	317	60	74	116	149	169	190	232	316
Tchad	France	1960	1285	6	221	2658	3697	5822	7861	9117	10543	13890	21625
Afrique de l'Est			8877	40	–	74720	122746	219705	283873	317226	352643	429974	594934
Burundi	Belgique	1962	28	225	497	2456	3514	5609	6267	7319	8631	11072	16546
Comores	France	1975	2	315	551	173	275	527	705	812	927	1154	1613
Djibouti	France	1977	23	29	–	62	157	528	666	721	773	912	1235
Erythrée	–	1993	118	32	741	1140	1831	3103	3712	4456	5256	6584	9294
Éthiopie	–	–	1106	59	611	18434	29035	48856	65590	74189	83530	104797	149336
Kenya	Grande-Bretagne	1963	581	53	676	6265	11370	23585	30549	32849	34964	38507	42987
Madagascar	France	1960	588	27	456	4230	6939	11956	15970	18409	21093	27077	39947
Malawi	Grande-Bretagne	1964	119	96	508	2881	4518	9456	11370	12572	13796	16668	22927
Maurice	Grande-Bretagne	1968	2	581	1119	493	826	1057	1186	1244	1294	1382	1465
Mozambique	Portugal	1975	803	22	432	6442	9392	13465	17861	19495	21009	24004	29068
Ouganda	Grande-Bretagne	1962	241	100	337	5210	9428	17359	23487	27623	32996	46634	83344
Réunion	DOM	–	3	288	1903	248	461	604	723	777	821	900	996
Rwanda	Belgique	1962	26	293	672	2162	3776	6775	7724	8607	9559	11557	15310
Somalie	Grande-Bretagne	1960	638	14	817	2264	3601	7163	8720	10742	12948	17928	31936
Soudan	Grande-Bretagne	1956	2509	13	191	9190	14469	24927	31437	35040	38323	44493	55895
Tanzanie	Grande-Bretagne	1961	946	37	704	7886	13756	26068	34837	38365	41931	49784	63445
Zambie	Grande-Bretagne	1964	753	14	197	2440	4228	8200	10419	11043	11768	13558	16899
Zimbabwe	Grande-Bretagne	1980	391	32	378	2744	5170	10467	12650	12963	13024	12963	12691
Afrique australe			2676	19	–	15620	25628	42028	50448	52040	51667	50349	47382
Afrique du Sud	Grande-Bretagne	1910	1222	36	280	13683	22657	36848	44000	45323	44939	43683	40940
Botswana	Grande-Bretagne	1966	582	3	46	419	700	1354	1725	1801	1767	1665	1463
Lesotho	Grande-Bretagne	1966	30	59	549	734	1028	1570	1785	1797	1757	1663	1461
Namibie	Afrique du Sud	1990	825	2	231	511	800	1409	1894	2032	2120	2276	2539
Swaziland	Grande-Bretagne	1968	17	60	549	273	443	847	1044	1087	1084	1062	979
Total Afrique sub-saharienne			24318	27	–	177064	285697	504295	653410	732425	814651	991991	1374135

(a) Les superficies sont tirées de G. Pison (2003), « Tous les pays du monde », *Population et sociétés*, n° 392.
(b) Les densités brutes ainsi que les effectifs de population (1950 à 2040) proviennent du *World Population Prospects. The 2002 Revision*, Population database on-line (www.unpopulation.org). Hypothèse moyenne des Nations unies pour les projections.
(c) Les densités par km² de terres arables ont été calculées à partir des superficies des terres arables et des cultures permanentes, issues de FAOSTAT 2000 (www.fao.org).

TABLEAU A.3. – TAUX DE NATALITÉ, DE MORTALITÉ ET D'ACCROISSEMENT NATUREL DE 1950 À 2005 (48 PAYS)

Sous-régions et pays	Taux de natalité (p. mille)						Taux de mortalité (p. mille)						Taux d'accroissement naturel annuel moyen (p. cent)[a]					
	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004
Afrique de l'Ouest	50,3	49,7	49,1	48,4	44,3	40,6	28,7	25,1	21,6	18,2	15,5	14,9	2,2	2,5	2,8	3,0	2,9	2,6
Bénin	48,2	53,9	52,4	51,5	45,7	41,5	35,8	30,3	23,7	18,0	15,2	14,3	1,2	2,4	2,9	3,4	3,1	2,7
Burkina Faso	47,4	51,8	52,6	50,6	49,0	47,8	31,7	27,6	24,0	19,6	17,6	17,4	1,6	2,4	2,9	3,1	3,1	3,0
Cap-Vert	50,9	48,5	38,8	39,5	34,8	27,7	18,6	15,0	11,7	10,7	7,5	5,4	3,2	3,4	2,7	2,9	2,7	2,2
Côte d'Ivoire	53,5	52,6	50,9	49,9	40,4	35,5	27,9	23,8	19,4	15,9	15,7	20,0	2,6	2,9	3,2	3,4	2,5	1,6
Gambie	47,6	51,3	49,0	47,3	41,0	35,8	34,0	31,4	26,0	20,5	14,9	12,7	1,4	2,0	2,3	2,7	2,6	2,3
Ghana	48,0	47,6	47,4	45,8	37,5	31,9	21,6	18,7	16,0	13,4	10,7	10,0	2,6	2,9	3,1	3,2	2,7	2,2
Guinée	54,7	52,3	51,6	51,4	44,0	42,9	34,1	30,1	27,5	24,2	18,7	16,1	2,1	2,2	2,4	2,7	2,5	2,7
Guinée-Bissau	43,8	44,9	50,3	49,0	50,0	49,9	31,0	29,0	28,4	25,6	22,1	19,6	1,3	1,6	2,2	2,3	2,8	3,0
Liberia	48,8	49,1	49,5	49,8	50,1	50,0	25,7	23,8	21,8	19,8	24,2	21,5	2,3	2,5	2,8	3,0	2,6	2,9
Mali	53,5	53,0	51,6	49,8	49,7	49,9	31,3	28,3	25,3	19,6	17,3	16,2	2,2	2,5	2,6	3,0	3,2	3,4
Mauritanie	44,4	46,8	45,4	43,2	42,4	41,8	26,7	23,7	20,6	17,5	16,2	14,2	1,8	2,3	2,5	2,6	2,6	2,8
Niger	57,7	55,9	56,2	56,4	55,2	55,2	33,3	29,8	26,7	24,3	22,1	19,1	2,4	2,6	3,0	3,2	3,3	3,6
Nigeria	50,1	48,4	47,6	47,5	44,0	39,1	27,7	24,2	20,6	17,5	14,3	13,7	2,2	2,4	2,7	3,0	3,0	2,5
Sénégal	49,0	49,6	49,2	46,0	41,3	37,1	27,8	26,8	23,9	18,2	14,2	12,2	2,1	2,3	2,5	2,8	2,7	2,5
Sierra Leone	47,9	48,4	48,9	48,9	49,6	49,6	34,3	32,2	29,2	28,8	29,6	29,3	1,4	1,6	2,0	2,0	2,0	2,0
Togo	49,3	48,3	47,5	45,4	42,5	38,5	29,2	24,1	19,6	15,8	13,2	14,7	2,0	2,4	2,8	3,0	2,9	2,4
Afrique centrale	46,2	46,9	47,4	47,7	47,2	47,0	28,0	24,3	20,7	18,8	19,2	20,5	1,8	2,3	2,7	2,9	2,8	2,7
Angola	49,8	49,4	49,5	51,1	52,1	52,3	34,8	30,2	26,1	24,6	24,7	23,6	1,5	1,9	2,3	2,7	2,7	2,9
Cameroun	43,6	44,5	45,5	44,9	40,9	35,4	27,3	23,5	19,5	15,9	12,8	16,9	1,6	2,1	2,6	2,9	2,8	1,9
Centrafrique	43,4	42,7	42,6	42,7	41,8	37,7	29,1	24,9	21,7	18,9	18,1	22,1	1,4	1,8	2,1	2,4	2,4	1,6
Congo	42,3	43,3	43,8	43,4	44,2	44,2	21,9	17,2	13,0	11,7	12,7	15,4	2,0	2,6	3,1	3,2	3,2	2,9
Congo (RD)	47,3	48,3	48,2	48,7	48,7	50,2	25,4	22,2	19,2	18,2	20,3	21,4	2,2	2,6	2,9	3,1	2,8	2,9
Gabon	30,5	31,3	37,7	39,7	38,5	31,6	27,7	24,8	19,4	14,0	12,0	11,5	0,3	0,7	1,8	2,6	2,7	2,0
Guinée équatoriale	41,7	40,7	41,8	43,3	43,4	43,1	30,6	27,0	24,0	21,3	18,3	16,7	1,1	1,4	1,8	2,2	2,5	2,6
Sao Tomé-et-Principe	41,5	50,6	42,8	39,7	35,3	33,2	26,7	18,5	12,1	9,6	7,4	5,8	1,5	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7
Tchad	45,1	46,2	48,7	48,1	48,7	48,4	32,0	28,8	25,7	22,5	20,3	19,5	1,3	1,7	2,3	2,6	2,8	2,9

Sous-régions et pays	Taux de natalité (p. mille)						Taux de mortalité (p. mille)						Taux d'accroissement naturel annuel moyen (p. cent)[a]					
	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004
Afrique de l'Est	50,9	50,0	49,2	47,8	44,9	41,3	28,1	23,5	19,8	17,7	17,7	18,8	2,3	2,7	2,9	3,0	2,7	2,3
Burundi	48,4	45,3	44,0	47,2	45,8	44,2	25,1	22,0	20,2	18,6	23,0	20,6	2,3	2,3	2,4	2,9	2,3	2,4
Comores	46,5	50,2	49,3	48,7	39,4	36,7	23,5	20,5	16,7	13,7	10,2	8,4	2,3	3,0	3,3	3,5	2,9	2,8
Djibouti	50,3	52,2	48,2	44,3	43,1	39,5	30,4	26,6	22,5	19,0	17,3	17,7	2,0	2,6	2,6	2,5	2,6	2,2
Érythrée	48,4	48,5	46,1	44,9	43,2	39,7	28,0	23,6	19,7	19,9	14,2	11,9	2,0	2,5	2,6	2,5	2,9	2,8
Éthiopie	52,0	50,4	48,8	48,2	47,0	42,5	31,8	26,5	22,2	21,4	18,4	17,7	2,0	2,4	2,7	2,7	2,9	2,5
Kenya	51,5	51,7	52,0	50,1	38,2	32,5	24,8	20,4	16,3	12,6	10,1	16,7	2,7	3,1	3,6	3,8	2,8	1,6
Madagascar	51,2	48,3	46,1	45,4	44,5	41,6	27,4	23,3	19,6	17,3	15,9	13,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,9	2,8
Malawi	52,3	54,7	56,7	52,9	49,4	44,6	30,9	27,5	23,5	20,7	20,1	24,1	2,1	2,7	3,3	3,2	2,9	2,1
Maurice	47,3	42,5	26,1	22,0	20,4	16,2	15,7	9,1	7,0	6,5	6,7	6,7	3,2	3,3	1,9	1,6	1,4	1,0
Mozambique	48,7	48,1	47,5	45,7	44,6	41,2	32,7	27,4	23,0	21,4	20,6	23,5	1,6	2,1	2,5	2,4	2,4	1,8
Ouganda	50,6	49,5	50,5	50,5	50,4	50,7	24,5	20,6	19,0	18,1	20,8	16,7	2,6	2,9	3,2	3,2	3,0	3,4
Réunion	39,4	39,8	30,7	23,6	21,6	18,6	13,3	10,3	7,0	6,0	5,4	5,5	2,6	3,0	2,4	1,8	1,6	1,3
Rwanda	51,8	52,8	52,6	51,1	43,9	44,0	24,0	21,6	20,3	18,8	41,4	21,8	2,8	3,1	3,2	3,2	0,3	2,2
Somalie	53,4	51,0	51,3	51,8	52,0	52,1	31,8	27,4	23,7	22,0	24,8	17,7	2,2	2,4	2,8	3,0	2,7	3,4
Soudan	47,2	47,9	47,3	41,6	37,9	33,0	26,3	24,2	20,7	15,9	13,3	11,7	2,1	2,3	2,9	3,0	2,4	2,2
Tanzanie	51,1	51,1	49,3	46,4	44,4	39,3	26,6	22,4	18,5	14,4	14,9	18,1	2,5	2,9	3,1	3,2	3,0	2,1
Zambie	50,1	49,4	51,5	45,2	45,6	42,2	26,1	21,4	16,5	14,3	18,8	28,0	2,4	2,8	3,5	3,1	2,7	1,4
Zimbabwe	47,6	48,2	48,0	44,9	38,1	32,1	18,1	15,4	12,5	10,0	12,1	27,0	3,0	3,3	3,6	3,5	2,6	0,5
Afrique australe	43,5	42,0	38,0	34,9	29,4	23,8	20,6	16,9	13,4	10,5	8,4	17,6	2,3	2,5	2,5	2,4	2,1	0,6
Afrique du Sud	43,3	41,6	37,1	33,9	28,3	22,6	20,3	16,7	13,1	10,2	8,1	16,9	2,3	2,5	2,4	2,4	2,0	0,6
Botswana	48,2	48,5	48,4	42,3	34,1	30,6	19,7	15,5	12,0	7,6	6,2	21,4	2,9	3,3	3,6	3,5	2,8	0,9
Lesotho	42,2	41,7	42,2	41,5	34,6	31,1	23,1	18,7	17,0	15,2	13,4	25,7	1,9	2,3	2,5	2,6	2,1	0,5
Namibie	43,3	44,2	45,1	41,2	40,9	33,4	24,5	20,4	16,3	12,7	10,4	17,9	1,9	2,4	2,9	2,9	3,1	1,6
Swaziland	51,3	49,5	49,7	46,6	40,7	34,5	24,2	22,1	18,3	14,4	11,6	25,4	2,7	2,7	3,1	3,2	2,9	0,9
Total Afrique sub-saharienne	49,1	48,6	47,8	46,6	43,4	40,2	27,5	23,6	20,0	17,3	16,2	17,2	2,2	2,5	2,8	2,9	2,7	2,3

[a] Les taux d'accroissement naturel ont été calculés à partir des taux de natalité et de mortalité issus de Nations unies (2003b, référence ci-dessous).
Source : Nations unies (2003b), *World Population Prospects. The 2002 Revision*, Population database on-line (www.unpopulation.org).

TABLEAU A.8. – ESPÉRANCES DE VIE ET MORTALITÉ INFANTILE DE 1950 À 2005 (48 PAYS)

Sous-régions et pays	Espérance de vie (en années)						Taux de mortalité infantile (p. mille)					
	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004
Afrique de l'Ouest	35,5	39,1	43,0	47,1	50,0	49,6	192	168	143	120	104	90
Bénin	33,9	38,0	44,0	49,2	51,3	50,6	200	173	137	111	100	93
Burkina Faso	31,9	36,7	41,2	46,1	47,5	45,7	215	181	153	126	110	93
Cap-Vert	48,5	53,0	57,5	61,8	66,4	70,2	130	105	83	63	44	30
Côte d'Ivoire	36,0	40,4	45,4	50,0	48,3	41,0	186	158	130	106	101	101
Gambie	30,0	33,0	38,0	44,1	51,0	54,1	231	207	173	135	99	81
Ghana	42,0	46,0	49,9	53,6	56,9	57,9	149	127	108	90	72	58
Guinée	31,0	34,3	37,3	40,2	44,8	49,1	222	197	177	157	130	102
Guinée-Bissau	32,5	34,5	36,5	39,1	43,0	45,3	211	196	183	164	140	120
Liberia	38,5	40,5	42,6	44,9	39,3	41,4	194	180	165	150	191	147
Mali	32,7	35,3	38,2	44,4	47,5	48,6	240	218	196	153	131	119
Mauritanie	35,4	39,4	43,4	47,4	49,4	52,5	189	164	141	120	110	97
Niger	32,2	35,2	38,2	40,7	42,7	46,2	213	191	171	156	144	126
Nigeria	36,5	40,1	44,0	48,1	52,0	51,5	183	160	137	115	95	79
Sénégal	36,5	38,3	41,8	46,3	50,4	52,9	184	168	122	91	68	61
Sierra Leone	30,0	32,0	35,0	35,3	34,5	34,2	231	215	193	189	194	177
Togo	36,0	40,5	45,5	50,2	53,6	49,7	186	158	130	106	88	82
Afrique centrale	36,1	39,8	44,1	46,6	45,3	42,7	186	162	137	123	118	116
Angola	30,0	34,0	38,0	40,0	39,9	40,1	231	200	173	160	158	140
Cameroun	36,0	40,5	45,7	50,7	54,8	46,2	186	158	128	103	82	88
Centrafrique	35,5	39,5	43,0	46,5	46,8	39,5	190	164	144	124	108	100
Congo	42,1	48,5	55,0	56,8	54,1	48,2	170	130	95	86	84	84
Congo (RD)	39,1	42,1	45,8	47,1	43,5	41,8	167	149	127	118	120	120
Gabon	37,0	40,5	48,7	56,3	58,0	56,6	179	158	114	78	67	57
Guinée équatoriale	34,5	37,5	40,5	43,8	47,6	49,1	196	176	157	138	118	101
Sao Tomé-et-Principe	46,4	51,4	56,5	61,6	66,2	69,9	169	98	64	62	44	32
Tchad	32,5	35,5	39,0	42,3	44,7	44,7	211	189	167	146	129	115

Sous-régions et pays	Espérance de vie (en années)						Taux de mortalité infantile (p. mille)					
	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004	1950-1954	1960-1964	1970-1974	1980-1984	1990-1994	2000-2004
Afrique de l'Est	36,3	40,8	45,0	47,5	46,0	43,1	182	156	134	119	109	97
Burundi	39,0	42,0	43,9	46,6	39,8	40,9	167	149	137	120	132	107
Comores	40,7	44,5	48,9	52,9	57,2	60,8	178	154	127	106	84	67
Djibouti	33,0	37,0	41,0	44,7	47,1	45,7	207	179	155	133	117	102
Érythrée	35,9	40,2	44,3	43,3	50,0	52,7	176	151	129	117	89	73
Éthiopie	32,9	37,3	41,8	42,7	46,3	45,5	208	177	150	143	119	100
Kenya	40,9	45,9	50,9	55,7	57,4	44,6	155	127	103	82	65	69
Madagascar	36,7	40,9	44,9	48,0	49,8	53,6	181	155	132	117	108	92
Malawi	36,3	38,5	41,0	45,7	45,1	37,5	212	204	191	158	138	115
Maurice	51,0	60,2	62,9	66,7	69,9	72,0	99	61	55	28	21	16
Mozambique	31,3	36,2	41,1	42,8	43,4	38,1	220	185	154	143	137	122
Ouganda	40,0	44,0	46,3	47,2	41,5	46,2	161	138	125	120	107	86
Réunion	52,7	57,7	64,2	69,8	73,5	75,2	141	87	41	14	9	8
Rwanda	40,0	43,0	44,6	46,1	24,0	39,3	161	143	134	125	135	112
Somalie	33,0	37,0	41,0	43,0	39,5	47,9	207	179	155	143	163	118
Soudan	37,6	39,6	43,6	49,1	52,9	55,6	175	163	139	110	93	77
Tanzanie	37,0	41,7	46,5	51,0	49,4	43,3	160	143	125	100	99	100
Zambie	37,8	42,8	49,7	52,0	44,2	32,4	150	130	109	98	107	105
Zimbabwe	47,4	51,7	56,0	59,6	53,3	33,1	120	100	81	65	59	58
Afrique australe	44,5	49,5	53,2	57,3	61,3	46,4	105	92	82	66	52	52
Afrique du Sud	45,0	50,0	53,7	57,7	61,8	47,7	96	87	77	62	48	48
Botswana	46,0	51,5	56,1	62,8	65,0	39,7	144	113	90	58	47	57
Lesotho	41,7	47,1	49,5	52,0	53,9	35,1	172	138	124	110	99	92
Namibie	39,2	44,2	49,9	55,2	59,2	44,3	165	136	108	83	65	60
Swaziland	40,1	42,3	47,3	52,4	55,8	34,4	160	147	121	96	79	78
Total Afrique sub-saharienne	36,7	40,6	44,7	48,0	48,6	45,7	180	156	134	116	105	95

Source : Nations unies (2003b), *World Population Prospects. The 2002 Revision*, Population database on-line (www.unpopulation.org).

TABLEAU A.10. – MORTALITÉ MATERNELLE ET PRÉVALENCE DU VIH À 15-49 ANS (48 PAYS)

Sous-régions et pays	Taux de mortalité maternelle en 2000[a]	Taux de prévalence du VIH[b] début 2002 (%)
Afrique de l'Ouest		
Bénin	850	3,6
Burkina Faso	1 000	6,5
Cap-Vert	150	–
Côte d'Ivoire	690	9,7
Gambie	540	1,6
Ghana	540	3,0
Guinée	740	–
Guinée-Bissau	1 100	2,8
Liberia	760	–
Mali	1 200	1,7
Mauritanie	1 000	–
Niger	1 600	–
Nigeria	800	5,8
Sénégal	690	0,5
Sierra Leone	2 000	7,0
Togo	570	6,0
Afrique centrale		
Angola	1 700	5,5
Cameroun	730	11,8
Centrafrique	1 100	12,9
Congo	510	7,2
Congo (RD)	990	4,9
Gabon	420	–
Guinée équatoriale	880	3,4
Sao Tomé-et-Principe	–	–
Tchad	1 100	3,6

TABLEAU A.10. – (SUITE) MORTALITÉ MATERNELLE ET PRÉVALENCE DU VIH À 15-49 ANS (48 PAYS)

Sous-régions et pays	Taux de mortalité maternelle en 2000[a]	Taux de prévalence du VIH[b] début 2002 (%)
Afrique de l'Est		
Burundi	1 000	8,3
Comores	480	–
Djibouti	730	–
Érythrée	630	2,8
Éthiopie	850	6,4
Kenya	1 000	15,0
Madagascar	550	0,3
Malawi	1 800	15,0
Maurice	24	0,1
Mozambique	1 000	13,0
Ouganda	880	5,0
Réunion	41	–
Rwanda	1 400	8,9
Somalie	1 100	1,0
Soudan	590	2,6
Tanzanie	1 500	7,8
Zambie	750	21,5
Zimbabwe	1 100	33,7
Afrique australe		
Afrique du Sud	230	20,1
Botswana	100	38,8
Lesotho	550	31,0
Namibie	300	22,5
Swaziland	370	33,4
Total Afrique sub-saharienne	870	10,4

[a] Défini comme le nombre de décès maternels pour 100000 naissances vivantes.
[b] Hommes et femmes âgés de 15-49 ans. Le taux de prévalence du VIH mesure la proportion de personnes infectées par le VIH, qu'elles soient ou non malades du sida.
Note : le Cap-Vert, Maurice et la Réunion ont été exclus des moyennes générales en raison de leur situation exceptionnellement bonne en Afrique.
Sources : Nations unies (2003b), voir le site web http//unstats. un. org/unsd/mi/mi_goals. asp; Onusida (2003), site web pour le sida (www.unaids.org).

Tableau A.13. – Indicateurs de développement (économie, éducation, développement humain et pauvreté) dans 47 pays d'Afrique sub-saharienne vers 2001

Sous-régions et pays	% de population urbaine en 2001[a]	RNB/hab. en 2002[b] $ US PPA	% d'analphabètes à 15 ans et plus en 2000	Taux net de scolarisation primaire en 2000 (%)	Indicateur de développement humain[c] 1980	Indicateur de développement humain[c] 2001	Indicateur de développement humain[c] Rang mondial en 2001[d]	Indicateur de pauvreté humaine en 2000[e]	Indicateur sexo-spécifique du développement humain en 2001[f]
Afrique de l'Ouest									
Bénin	43	1 030	63	70	0,322	0,411	159	46	0,395
Burkina Faso	17	1 020	76	36	0,260	0,330	173	59	0,317
Cap-Vert	64	4 870	26	99	0,593	0,727	103	20	0,719
Côte d'Ivoire	44	1 470	51	62	0,413	0,396	161	45	0,376
Gambie	31	1 730	63	69	0,291	0,463	151	46	0,457
Ghana	36	1 980	28	58	0,464	0,567	129	46	0,564
Guinée	28	1 980	–	47	–	0,425	157	–	–
Guinée-Bissau	32	710	62	54	0,267	0,373	166	48	0,353
Liberia	46	–	46	–	–	–	–	–	–
Mali	31	810	74	38[g]	0,261	0,337	172	55	0,327
Mauritanie	59	1 680	60	64	0,369	0,454	154	49	0,445
Niger	21	770	84	30	0,262	0,292	174	62	0,279
Nigeria	45	830	36	–	0,384	0,463	152	34	0,450
Sénégal	48	1 560	63	63	0,328	0,430	156	45	0,420
Sierra Leone	37	480	–	–	–	0,275	175	–	–
Togo	34	1 420	43	86	0,450	0,501	141	39	0,483
Afrique centrale									
Angola	35	1 550	–	37	–	0,377	164	–	–
Cameroun	50	1 670	29	71[g]	0,445	0,499	142	36	0,488
Centrafrique	42	1 180	53	55	0,356	0,363	168	48	0,352
Congo	66	580	19	–	0,506	0,502	140	32	0,496
Congo (RD)	31	–	39	52[h]	0,426	0,363	167	43	0,353
Gabon	82	5 460	–	88	–	0,653	118	–	–
Guinée équatoriale	49	5 640	17	72	–	0,664	116	–	–
Sao Tomé-et-Principe	48	–	–	–	–	0,639	122	–	–
Tchad	24	930	57	58	0,265	0,376	165	50	0,366
Afrique de l'Est									
Burundi	9	590	52	54	0,312	0,337	171	46	0,331
Comores	34	1 610	44	56	0,485	0,528	134	32	0,521
Djibouti	84	2 120	35	33	–	0,462	153	34	–
Érythrée	19	970	44	41	–	0,446	155	42	0,434
Éthiopie	16	710	61	47	0,281	0,359	169	56	0,347
Kenya	34	1 020	18	69	0,487	0,489	146	38	0,488
Madagascar	30	870	33	68	0,431	0,468	149	36	0,467
Malawi	15	620	40	–	0,341	0,387	162	47	0,378
Maurice	42	10410	15	95	0,654	0,779	62	11	0,770
Mozambique	33	1 000	56	54	0,309	0,356	170	50	0,341
Ouganda	15	1 250	33	–	–	0,489	147	37	0,483
Rwanda	6	1 000	33	72[g]	0,394	0,422	158	45	0,416
Somalie	28	–	–	–	–	–	–	–	–
Soudan	37	1 970	41	55	0,378	0,503	138	32	0,483
Tanzanie	33	540	25	47	–	0,400	160	36	0,396
Zambie	40	790	22	66	0,470	0,386	163	50	0,376
Zimbabwe	36	2 340	11	80	0,570	0,496	145	52	0,489
Afrique australe									
Afrique du Sud	58	9 510	15	89	0,676	0,684	111	32	0,678
Botswana	49	8 810	23	84	0,573	0,614	125	44	0,611
Lesotho	29	2 670	17	78	0,517	0,510	137	48	0,497
Namibie	31	6 700	18	82	–	0,627	124	38	0,622
Swaziland	27	4 690	20	93	0,541	0,547	133	–	0,536
Total Afrique sub-saharienne	38	1 620	40	64	–	0,468	–	–	–

(a) Calculs des Nations unies basés sur les définitions nationales.
(b) Revenu brut par habitant calculé par la Banque mondiale en termes de parités de pouvoir d'achat (PPA).
(c) Indicateur synthétique de mesure du développement (IDH), intégrant l'espérance de vie, les taux d'alphabétisation adulte et de scolarisation et le PIB par habitant. Plus il est proche de l'unité, meilleure est la situation : il va dans le monde en 2001 de 0,944 (Norvège) à 0,275 (Sierra Leone).
(d) Sur 175 pays au total.
(e) Indicateur de synthèse de mesure (ISDH) des carences ou insuffisances en matière de santé (mortalité de 0 à 40 ans), d'éducation (analphabétisme des adultes) et de niveau de vie (disponibilité d'eau et malnutrition à moins de 5 ans). Plus il est proche de 0, meilleure est la situation : en 2001, il va dans le monde de 2,5 (Barbade) à 62 (Niger).
(f) Indicateur basé sur les mêmes critères et type de mesure que l'IDH, mais intégrant les inégalités entre hommes et femmes. En 2001, il varie dans le monde de 0,941 (Norvège) à 0,279 (Niger).
(g) Taux net de fréquentation scolaire (7-10 ou 7-12 ans) selon la dernière enquête EDS du pays.
(h) Taux net de scolarisation primaire à 6-11 ans (enquête MICS2 du Congo RD).
Sources : Unesco (2003) pour l'éducation; PNUD (2003) pour les indices de développement et de pauvreté; Nations unies (2002d) pour l'urbanisation; Banque mondiale (2003) pour le revenu brut par habitant.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Un proverbe dit «*L'erreur n'annule pas la valeur de l'effort accompli*». Commentez.

Sujet n° 2

Qu'est-ce que l'économie verte et quels en sont les enjeux, notamment pour l'Afrique ?

Sujet n° 3

«*Les Etats africains doivent intégrer le droit à l'alimentation dans leur constitution en vue d'assurer la sécurité alimentaire des citoyens*». Ce point de vue a été défendu par une militante de la société civile africaine lors du Forum Social Mondial qui s'est tenu en février 2011 à Dakar. Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

Les symboles *Ln* et *tan* représentent respectivement le logarithme népérien et la tangente. On donne *L*n 2 = 0,69.

1) Comparer les intégrales A et B :

$$A = \int_0^{\pi/4} Ln(\cos x)\, dx$$

$$B = \int_0^{\pi/4} Ln(\cos(\pi/4 - x))\, dx$$

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} Ln(1 + \tan x)\, dx$

Problème 1

Le symbole *Ln* représente le logarithme népérien et *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

1) Soit l'application $g :]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow R$, définie par : $g(x) = \dfrac{1}{Lnx}$

Etudier très précisément les variations de *g* (dérivées, sens de variation, concavité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, graphe).

Pour toute la suite du problème, on admettra l'existence d'une primitive *G* de *g*, qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

2) On considère l'ensemble $D =]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

On définit l'intégrale $J(x)$ par :

$$J(x) = \int_x^{2x} g(t)\, dt$$

Montrer que $J(x)$ existe pour tout $x \in D$.

3) Soit l'ensemble $D^+ = [0, ½[\cup]1, +\infty[= D \cup \{0\}$

On définit l'application $f : D^+ \to R$ par :

$$\forall x \in D,\ f(x) = J(x)$$
$$f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur D, et calculer sa dérivée f'.

Etudier le signe de f' et en déduire le sens des variations de f.

4) Démontrer que, $\forall x \in D$:

$$\frac{x}{Ln(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{Ln\, x}$$

En déduire les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \to 0$.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5) Quelles sont les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \to +\infty$?

6) Soit l'application $h :]0, 1] \to R$, définie par :

$$h(u) = Ln(u) - 2u + 2$$

Montrer qu'il existe un réel unique, noté α, $0 < \alpha < ½$, tel que $h(\alpha) = 0$.

Montrer que $\forall$ u $\in [\alpha, 1]$, on a $Ln(u) \geq 2u - 2$.

En déduire que $f(x)$ est majorée, pour tout $x \in [\alpha, ½]$, par $\frac{1}{2} Ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$.

Calculer la limite de f quand $x \to ½$.

7) Montrer que, $\forall\ u \geq 1$, $Ln(u) \leq u - 1$.

En déduire la limite de f quand $x \to 1$.

8) Construire le tableau de variations de f.

Problème 2

Soit l'application f :]-1, +1[$\to R$, telle que :

$$f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

1) On veut montrer que f est indéfiniment dérivable sur]-1, +1[et que, $\forall\ n \in N$, il existe un polynôme réel P_n de la variable réelle x, de degré n, tel que :

$$\forall\ x \in\ ]-1, +1[,\ f^{(n)}(x) = P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$$

a) Calculer les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur]-1, +1[et exprimer P_{n+1} sous la forme :

$$(R1) \qquad P_{n+1}(x) = a(x)\, P'_n(x) + \alpha(n)\, b(x)\, P_n(x)$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $\alpha(n)$ sont respectivement des fonctions de x et n que l'on explicitera.

2) Montrer que, $\forall\ x \in$]-1, +1[: $(1 - x^2) f'(x) - x\ f(x) = 0$

3) Rappel : Formule de Leibniz : on rappelle que la dérivée d'ordre n du produit de deux fonctions u et v, notée $(uv)^{(n)}$, est donnée par la formule suivante :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)}$$

En utilisant les résultats des questions (2) et (1), montrer que la suite de polynômes (P_n) vérifie la relation :

$$(R2) \qquad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x\, P_n(x) - n^2(1 - x^2)\, P_{n-1}(x) = 0$$

4) Etablir que, $\forall$ n $\in$ N*, $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

5) En déduire que, pour tout n entier, $n \neq 0$ et $n \neq 1$, on a la relation $(R3)$:

$$(R3) \qquad n^2 P_n(x) - (2\text{n} - 1)x\, P'_n(x) - (1 - x^2)\, P''_n(x) = 0$$

6) Pour tout n entier, calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Après avoir rappelé les principales causes de l'explosion de la dette publique aux Etats-Unis et précisé la nature des liens entre les « *déficits jumeaux* », vous analyserez l'impact de ces déficits sur la croissance de l'économie mondiale au cours des deux dernières décennies et vous discuterez l'hypothèse de Milton FRIEDMAN selon laquelle « *si les Etats-Unis ne mettent pas un terme à leurs importants déficits commerciaux, ils finiront par perdre leur influence internationale* ».

Sujet n° 2

En juin 2011, Nourriel ROUBINI, influent trader de Wall Street, écrivait :

« Les plus optimistes sont d'avis que l'économie mondiale connaît seulement un moment passager de ralenti. Les entreprises et consommateurs ont réagi aux chocs de cette année en ralentissant temporairement leurs consommations, dépenses en capital et créations d'emplois. Pour autant que les chocs ne s'aggravent pas (et quand certains auront diminué en importance), la confiance et la croissance reviendront (…)

Cependant, il y a de bonnes raisons de penser que nous connaissons une dépression plus persistante. Premièrement, les problèmes de la périphérie de la zone euro sont dans certains cas de vrais problèmes d'insolvabilité, et non pas d'illiquidité : des dettes et déficits publics et privés élevés et en augmentation ; des systèmes financiers endommagés qui ont besoin d'être nettoyés et recapitalisés ; d'énormes pertes de compétitivité ; une absence de croissance économique et un taux de chômage en augmentation. Il n'est aujourd'hui plus possible de nier le fait que les dettes publiques et/ou privées en Grèce, en Irlande et au Portugal devront être restructurées ».

A la lumière des événements les plus récents et des principaux apports de la théorie économique, vous discuterez la pertinence de ce commentaire en mettant notamment l'accent sur les facteurs de croissance et les interdépendances au sein de l'économie mondiale.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

Le paramètre a est un réel strictement positif, $a > 0$.

Soit une application $f : [0, a] \rightarrow R$ continue, vérifiant pour tout réel x, $0 \leq x \leq a$, les deux conditions suivantes :

$$f(x) \neq -1$$

$$f(x) \,.\, f(a-x) = 1$$

Calculer l'intégrale I = $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\,dx$

Problème 1

(les trois parties sont indépendantes)

Partie A

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0$$

(1) $\forall\, n \in \mathrm{N},\ u_{n+2} = (u_n^2\, u_{n+1})^{1/3}$

1) Calculer le terme général de la suite (u_n).

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (1) en une expression (*1*') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$$u_0 > 0, \ u_1 > 0$$

(2) $\forall$ n $\in N$, $u_{n+2} = 2\, u_n\, u_{n+1} / (u_n + u_{n+1})$

1) Calculer le terme général de la suite u_n.

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (2) en une expression (2') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1$$

(3) $\forall$ n $\in N$, $u_{n+3} = (1 + u_{n+2}u_{n+1}) / u_n$

1) Calculer les premiers termes de (u_n), pour $n = 3$ à 8.

2) Montrer par récurrence que l'on peut écrire la suite (u_n) sous la forme (4) :

(4) $\forall\, n \geq 0$, $u_{n+4} = a\, u_{n+2} + \mathrm{b}\, u_n$

où a et b sont des entiers que l'on déterminera.

3) En déduire que $\forall\, n \in N$, $u_n \in N^*$.

Problème 2

Partie 1

Soit A un réel non nul.

Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on peut déterminer une suite unique de n+1 nombres réels (t_0, t_1, ….. t_{n-1}, t_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $t_0 = 0,\ t_n = A$

(ii) $t_0 < t_1 < \ldots.. t_{n-1} < t_n$

(iii) $\forall\ k \in \{0, ..., n\text{-}1\}\ \ t_{k+1} - t_k = A/n$

Partie 2

Soit la fonction f : [0, 1] → R, continue et strictement positive.

1) Montrer que, pour tout n entier non nul, il existe dans $[0, 1]^{n+1}$ une suite unique de n+1 nombres réels (x_0, x_1, ….. x_{n-1}, x_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $x_0 = 0,\ x_n = 1$

(ii) $x_0 < x_1 < \ldots.. x_{n-1} < x_n$

(iii) $\forall\ k \in \{0, ..., n\text{-}1\}\ \ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,dt$

2) Soit $U(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Déterminer la limite L de $U(n)$ quand n tend vers + ∞.

3) Calculer L dans le cas particulier de $f(x) = e^x$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note* : *La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

Exercice 1

Les importations du Burkina-Faso (en milliards de francs CFA) ont suivi l'évolution suivante pendant 4 ans :

Tableau 1 - Importations du Burkina-Faso

Dates t	Trimestre et année	Milliards de F CFA
1	T3 2007	184,3
2	T4 2007	197,7
3	T1 2008	194,0
4	T2 2008	228,5
5	T3 2008	230,1
6	T4 2008	250,2
7	T1 2009	211,8
8	T2 2009	241,4
9	T3 2009	240,8
10	T4 2009	283,0
11	T1 2010	232,4
12	T2 2010	258,9
13	T3 2010	284,5
14	T4 2010	291,4
15	T1 2011	272,1
16	T2 2011	287,6

Source : Site internet d'Afristat

(Lecture : T3 2007 signifie 3$^{\text{ème}}$ trimestre de l'année 2007)

Question 1

a) Représenter graphiquement l'évolution des importations. Expliquer quelle méthode de prévision peut convenir. Rappeler le principe de la méthode.

b) Déterminer la tendance en faisant un ajustement linéaire. On vous donne les éléments suivants : si t est la variable temps et X le montant des importations en Milliards de Francs CFA, on a $E(t) = 8{,}5$; $E(X) = 243{,}0$; $V(t) = 21{,}25$; $V(X) = 1135{,}9$; $COV(t,X) = 138{,}1$.

Question 2

a) Représenter sur le même graphique l'évolution des importations année par année. Pour cela, porter en abscisses les 4 trimestres T1, T2, T3 et T4 et tracer 5 courbes correspondant aux évolutions des 5 années étudiées (2007 à 2011). Commenter.

b) Pour tenir compte de la saisonnalité dans ce schéma dit « multiplicatif », les coefficients saisonniers sont estimés en calculant les moyennes des rapports entre les importations et la tendance pour une même saison. Pour vous aider, le tableau 2 ci-dessous vous fournit quelques calculs déjà établis que vous serez amenés à compléter en tant que de besoin. Commenter.

Tableau 2 - Importations du Burkina-Faso

T	Importations (1)	Estimation à partir du modèle (2)	rapport (1)/(2)
1	184,3	194,3	0,948
2	197,7		
3	194,0	207,3	0,936
4	228,5	213,8	1,069
5	230,1	220,3	1,044
6	250,2	226,8	1,103
7	211,8	233,3	0,908
8	241,4		
9	240,8	246,3	0,978
10	283,0	252,8	1,120
11	232,4	259,3	0,896
12	258,9	265,8	0,974
13	284,5		
14	291,4	278,8	1,045
15	272,1		
16	287,6	291,8	0,986

Question 3

a) Etablir des prévisions sur l'année 2012 à partir du modèle linéaire défini à la question 1b.

b) Corriger les prévisions de la question 3a des variations saisonnières en utilisant la question 2b. Commenter.

Exercice 2

Commenter les tableaux 3 donnés en annexe sur l'évolution de l'indice de la production industrielle (IPI) dans quelques pays africains, notamment sous l'angle des comparaisons entre les Etats et sous l'angle de l'utilisation de données CVS (corrigées des variations saisonnières) ou non.

Tableaux 3
Indice de la Production industrielle
(source : site web www.afristat.org)

Bénin - Base 1999 = 100

Années	Trimestres	Brute 1999=100	CVS 1999=100
2007	T3	182,9	183,2
	T4	197,1	186,8
2008	T1	181,4	187,3
	T2	189,5	192,5
	T3	188,2	195,8
	T4	218,6	203,3
2009	T1	203,1	205,7
	T2	206,0	208,2
	T3	204,9	213,5
	T4	217,5	207,0
2010	T1	207,9	208,9
	T2		
	T3		
	T4		
2011	T1		
	T2		

Cameroun - Base 1995/1996 = 100

Années	Trimestres	Brute 1995/1996=100	CVS 1995/1996=100
2007	T3	138,5	157,5
	T4	141,9	144,4
2008	T1	168,5	146,2
	T2	161,9	158,9
	T3	139,7	162,7
	T4	144,3	148,4
2009	T1	177,9	153,5
	T2	170,5	167,3
	T3	136,6	160,0
	T4	143,2	147,6
2010	T1	169,8	145,2
	T2	143,3	140,0
	T3	127,2	150.6
	T4	147,5	151,9
2011	T1		
	T2		

Gabon - Base 1989 = 100

Années	Trimestres	Brute 1989=100	
2007	T3	197,9	
	T4	193,3	
2008	T1	190.1	
	T2	204.7	
	T3	204.4	
	T4	200.9	
2009	T1	186,0	
	T2	186,2	
	T3	197,1	
	T4	193,8	
2010	T1	196,0	
	T2	210,0	
	T3	197,2	
	T4		
2011	T1		
	T2		

Mali - Base 2001 = 100

Années	Trimestres	Brute 2001=100	
2007	T3	87,3	
	T4	98,9	
2008	T1	97,8	
	T2	82,9	
	T3	74,7	
	T4	100,9	
2009	T1	119,4	
	T2	87,0	
	T3	77,1	
	T4	96,8	
2010	T1	108,2	
	T2	76,6	
	T3	70,0	
	T4	92,1	
2011	T1	106,4	
	T2	87,7	

Sénégal - Base 2006 = 100

Années	Trimestres	Brute 2006=100	
2007	T3	106,9	
	T4	108,8	
2008	T1	109,3	
	T2	100,3	
	T3	91,4	
	T4	94,7	
2009	T1	109,6	
	T2	109,3	
	T3	98,2	
	T4	107,8	
2010	T1	118,6	
	T2	117,2	
	T3	95,5	
	T4	108,0	
2011	T1	123,8	
	T2	126,1	

Tchad - Base 2005 = 100

Années	Trimestres	Brute 2005=100	CVS 2005=100
2007	T3	83,9	88,0
	T4	87,1	84,7
2008	T1	82,7	82,2
	T2	83,4	82,8
	T3	77,0	78,2
	T4	80,3	78,6
2009	T1	77,7	77,7
	T2	77,0	76,3
	T3	76,0	77 ,1
	T4	78,0	76,8
2010	T1	78,0	77,8
	T2		
	T3		
	T4		
2011	T1		
	T2		

Togo - Base 2002 = 100

Années	Trimestres	Brute 2002=100	
2007	T3	118,2	
	T4	98,7	
2008	T1	106,9	
	T2	110,9	
	T3	116,0	
	T4	115,1	
2009	T1	115,1	
	T2	106,4	
	T3	123,5	
	T4	124,9	
2010	T1	116,3	
	T2	117,5	
	T3	113,3	
	T4	122,7	
2011	T1		
	T2		

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles sont les conditions d'une réelle sécurité alimentaire au niveau international ?

Sujet n° 2

« *Parler une langue, c'est assumer un monde, une culture.* » a écrit Frantz Fanon, psychiatre et essayiste contemporain. Commentez.

Sujet n° 3

"Si la coutume était de mettre les petites filles à l'école, elles apprendraient aussi parfaitement." a dit Christine de Pisan, auteure française du 15è siècle. Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Dans le plan orthonormé usuel, on donne les points $A(m)$ et $B(m)$ de coordonnées :

$$A(m) : ((\frac{1}{2} + m), 0)$$

$$B(m) : (0, (\frac{1}{2} - m))$$

où m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $U = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On note par $D(m)$ la droite passant par les points $A(m)$ et $B(m)$.

1) Donner une équation de $D(m)$ sous la forme :

$$a(m)\, x + b(m)\, y + c(m) = 0$$

où a, b et c sont trois fonctions de m, dérivables, que l'on explicitera.

2) On note par $D'(m)$ la droite d'équation : $a'(m)\, x + b'(m)\, y + c'(m) = 0$, a', b' et c'étant les dérivées respectives de a, b et c.
Montrer que les droites $D(m)$ et $D'(m)$ se coupent en un point $M(m)$ dont on déterminera les coordonnées.

3) Déterminer le lieu géométrique du point $M(m)$ quand m parcourt l'intervalle U. Tracer sa courbe dans le repère orthonormé usuel.

Problème 2

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :
$e = 2{,}718$, $e^{1/2} = 1{,}65$; $e^2 = 7{,}39$; $e^{2,1} = 8{,}17$; $e^{2,2} = 9{,}03$; $e^{2,3} = 9{,}97$; $e^{2,4} = 11{,}02$;
$e^{2,5} = 12{,}18$; $Ln2 = 0{,}69$; $Ln5 = 1{,}61$.

Partie A **:**

On considère la fonction numérique *f*, qui, à tout *x* réel associe :

$$f(x) = e^x(x-1) + x^2$$

1) Etudier très précisément les variations de *f* (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation.
On ne demande pas l'étude de la concavité de *f*.

2) Etudier l'existence des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans la suite du problème, on notera α la solution positive de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que α appartient à l'intervalle $L = [\frac{1}{2}, 1]$. Encadrer l'autre racine β par un intervalle (a, b) de longueur $\frac{1}{2}$ la contenant.
Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de *f* aux points d'abscisses α et β.

3) Calculer l'intégrale $A = \int_0^1 f(x)dx$

4) Calculer en fonction de α l'intégrale $B = \int_\alpha^1 f(x)dx$

Partie B **:**

On considère la fonction *g* définie sur R^* par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

1) Etudier précisément les variations de *g* (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation. Indiquer les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

2) On veut étudier la concavité de g.
Calculer la dérivée seconde g'' de g.
Montrer que g'' peut être mise sous la forme :

$$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3} U(x)$$

où $U(x)$ est une fonction de x que l'on explicitera.
Montrer que U ne peut s'annuler que pour $x > 2$.
Donner un intervalle pour l'abscisse du point d'inflexion.

3) Tracer la courbe G représentative de g.

4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique.
Quelle est cette racine ?

5) Montrer que pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

6) Montrer que pour tout $x \in L$, $|g'(x)| \leq M$, où M est un majorant inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ que l'on déterminera.

<u>Partie C</u> :

On définit la suite $u(n)$, n entier naturel non nul, par :

$$u(1) = \frac{1}{2}$$
$$u(n) = g(u(n\text{-}1)), \text{ pour tout } n > 1$$

1) Montrer que, pour tout $n \in N^*$, $u(n) \in L$.

2) Démontrer que, pour tout $n > 1$:

$$|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$$

3) En déduire que $u(n)$ converge vers a.

4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Le Directeur général de l'OMC, Pascal Lamy, dans son rapport annuel sur l'évolution de l'environnement commercial international, a indiqué ce qui suit: « *Le monde a besoin que tous les gouvernements prennent l'engagement renouvelé et renforcé de relancer le système commercial multilatéral de façon à pouvoir restaurer la sécurité économique à une époque où elle fait cruellement défaut. La volonté politique de résister aux politiques autocentrées semble faiblir dans certains pays, alors même que l'économie mondiale a besoin de davantage de commerce pour éloigner le danger de la récession* ».

Après avoir présenté une analyse coûts/avantages des principales stratégies mises en œuvre dans les échanges internationaux, vous discuterez la pertinence de la position du directeur général de l'OMC au regard des évolutions économiques actuellement observées.

Sujet n° 2

«*Après trois années de crise chronique sur les marchés mondiaux du travail et dans le contexte d'une nouvelle détérioration de l'activité économique, le chômage accumulé touche actuellement 200 millions de personnes à l'échelle mondiale*», constate l'OIT dans son rapport annuel intitulé «*Tendances mondiales de l'emploi 2012: Prévenir une aggravation de la crise de l'emploi*». Le rapport affirme également que « *plus de 400 millions de nouveaux emplois seront nécessaires au cours des dix prochaines années pour absorber l'accroissement annuel de la main-d'œuvre estimé à 40 millions par an* ».

Après avoir rappelé les principales explications théoriques du chômage, vous présenterez les pistes de réforme du marché du travail envisageables pour en améliorer le fonctionnement dans les économies développées, émergentes et en développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Les questions 2, 3 , 4 et 5 sont indépendantes.

Soit P un polynôme de degré 3, sur le corps des nombres complexes C :

$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
On note z_1, z_2, z_3 les racines de P.

Soient les expressions :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$
$S(3) = z_1z_2z_3$

1) Exprimer $S(1)$, $S(2)$ et $S(3)$ en fonction de a, b et c.

2) Soit l'équation $P(z) = z^3 + 5z^2 – 8z + m = 0$.
On suppose que deux des racines de l'équation vérifient $z_1 + z_2 = – 1$.
Résoudre l'équation.

3) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Pour quelles valeurs de p cette équation admet-elle trois racines réelles dont deux de différence 1 ?
Résoudre l'équation.

4) Soit l'équation $P(z) = z^3 - 7z + m = 0$.
On suppose que deux des solutions de cette équation vérifient la relation $z_2 = 2z_1$.
Résoudre l'équation.

5) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Calculer, en fonction de p et q, la somme $E = (1/z_1)^2 + (1/z_2)^2 + (1/z_3)^2$

Problème 2

Données : $Ln2 = 0{,}693$; $Ln1000 = 6{,}908$, *Ln* désigne le logarithme népérien.

On considère une urne de 11 boules, de même taille et de même texture. Le seul élément qui les différencie est la couleur. Il y a 6 boules bleues, 3 boules rouges, et deux boules vertes.

1) On tire au hasard, en même temps, trois boules dans l'urne en fermant les yeux.

1a - Soient les deux événements suivants :

A = {les 3 boules sont toutes de couleurs différentes}

B = {les 3 boules sont de la même couleur}

Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des deux événements A et B.

1b – *A* tout tirage de 3 boules on associe X, nombre de boules bleues tirées.
Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
Calculer les probabilités $P(X = x)$, x parcourant l'ensemble des valeurs possibles pour X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Au lieu de tirer en même temps les boules, on modifie la procédure et on procède de la façon suivante : dans l'urne, on tire au hasard, toujours sans regarder les couleurs, une première boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une deuxième, selon le même processus, etc …

On effectue k tirages successifs indépendants, k étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On définit les deux événements suivants :

C = {toutes les boules tirées sont bleues}

D = {toutes le boules tirées sont rouges}

Quelle est la plus petite valeur de k telle que $P(C) \geq 1000\, P(D)$?

Problème 3

1) Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls x, y, avec $x \leq y$, dont la somme est un multiple du produit.

2) Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls x, y, z, avec $x \leq y \leq z$, tels que :

$$xyz = 4(x + y + z)$$

Problème 4

Soit n un entier positif non nul donné.

On considère une suite $S = \{u_0, u_1, \ldots, u_{2n+1}\}$ constituée de $2n+2$ entiers naturels consécutifs classés dans l'ordre croissant : $u_0 < u_1 < \ldots < u_{2n+1}$.

Indication :

a étant un nombre entier, la suite $\{a - n, a - n + 1, \ldots, a, a + 1, a + 2, \ldots a + n\}$ est une suite de $2n+1$ entiers consécutifs positifs et croissants.

1) Préliminaires :

1a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$

1b) Etudier la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = (x - n)^3 + (x - n + 1)^3 + \ldots + x^3 - (x + 1)^3 - (x + 2)^3 - \ldots - (x + n)^3$$

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée α où α vérifie :

$$3n(n+1) < \alpha < 1 + 3n(n+1)$$

2) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation A ?

$$(A) \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_{n+1} + \ldots + u_{2n+1}$$

3) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation B ?

$$(B) \quad (u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 = (u_{n+1})^2 + \ldots + (u_{2n+1})^2$$

4) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation C ?

$$(C) \quad (u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 = (u_{n+1})^3 + \ldots + (u_{2n+1})^3$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

L'indice de pauvreté multidimentionnelle (IPM) utilisé par l'ONU dans son rapport sur le développement humain se veut le reflet des privations multiples dont souffre chaque individu sur trois dimensions : l'éducation, la santé et le niveau de vie. Il s'appuie sur des micro-données tirées des enquêtes auprès des ménages effectuées dans chaque pays et tous les indicateurs requis pour l'élaboration de la mesure doivent impérativement provenir de la même enquête.

Méthodologie

Il est attribué à chaque personne du ménage un score en fonction du nombre de privations subies par le ménage pour chacun des 10 indicateurs retenus. Le score maximal est de 100, chaque dimension faisant l'objet d'une pondération égale. En d'autres termes, le score maximal pour chaque dimension est de 33,3%. Les dimensions de l'éducation et de la santé présentent chacune deux indicateurs; chaque composante a donc une valeur de 16,7%. Pour sa part, la dimension du niveau de vie repose sur six indicateurs; par conséquent, chaque composante est égale à 5,6%.

Les seuils sont définis de la manière suivante :

- Education : aucun membre du ménage n'a achevé cinq années de scolarité et au moins un enfant d'âge scolaire (moins de 14 ans) ne fréquente pas l'école.

- Santé : au moins une personne du ménage souffre de malnutrition, et un ou plusieurs enfants sont décédés.

- Niveau de vie : pas d'électricité, pas d'accès à une eau claire et potable, pas d'accès à des installations d'assainissement adéquates, utilisation de combustible de cuisson « sales » (déjections animales, bois ou charbon de bois), sol en terre battue dans l'habitation ; le ménage ne possède ni voiture, ni camionnette, ni véhicule motorisé similaire, mais possède tout au plus l'un des biens suivants : bicyclette, motocyclette, radio, réfrigérateur, téléphone ou téléviseur.

Pour permettre de déterminer les personnes en situation de pauvreté multidimentionnelle, on fait la somme des privations de chaque ménage afin d'obtenir le niveau de privations par ménage noté *k*. La valeur seuil de 33,3% qui correspond à un tiers des indicateurs pondérés, sert à faire la distinction entre les pauvres et les non pauvres. On considère qu'un ménage (et chaque personne qui en fait partie) est « multidimentionnellement » pauvre si *k* est égal ou supérieur à 33,3%. Un ménage dont le niveau de privations se situe entre 20% et 33,3% est vulnérable à la pauvreté multidimentionnelle ou risque de se retrouver dans cette situation. Les ménages dont le niveau de privations est supérieur ou égal à 50% sont en situation de pauvreté multidimentionnelle sévère.

La valeur de l'IPM correspond au produit de deux mesures, le taux de pauvreté multidimentionnelle et la sévérité (ou ampleur) de la pauvreté.

Le taux de pauvreté, H, représente la proportion de la population en situation de pauvreté multidimentionnelle : $H = \frac{q}{n}$ où q correspond au nombre de personnes en situation de pauvreté multidimentionnelle et n à la population totale.

La sévérité de la pauvreté, A, reflète la proportion des indicateurs pondérés des composantes dans laquelle, en moyenne, les personnes pauvres souffrent de privation. Dans le cas des ménages pauvres uniquement, nous faisons la somme des niveaux de privations et nous divisons par le nombre total de personnes pauvres : $A = \frac{\sum_1^q k}{q}$ où *k* correspond au niveau de privations subies.

Question 1

A partir des données hypothétiques du tableau 1 ci-dessous, calculer l'IPM.

Tableau 1

Indicateurs	**Ménage 1**	**Ménage 2**	**Ménage 3**	**Ménage 4**	**Pondération**
Taille du ménage	**4**	**7**	**5**	**4**	
Éducation					
Personne n'a achève cinq années de scolarité	0	1	0	1	5/3 = 16,7%
Un enfant d'âge scolaire au moins ne fréquente pas l'école	0	1	0	0	5/3 = 16,7%
Santé					
Une personne au moins souffre de malnutrition	0	0	1	0	5/3 = 16,7%
Un ou plusieurs enfants sont décédés	1	1	0	1	5/3 = 16,7%
Conditions de vie					
Pas d'électricité	0	1	1	1	5/9 = 5,6%
Pas d'accès a une eau claire et potable	0	0	1	0	5/9 = 5,6%
Pas d'accès a des installations d'assainissement adéquates	0	1	1	0	5/9 = 5,6%
Sol en terre battue dans l'habitation	0	0	0	0	5/9 = 5,6%
Combustible de cuisson « sale » (déjections animales, bois, charbon)	1	1	1	1	5/9 = 5,6%
Le ménage n'a pas de voiture et possède tout au plus l'un des biens suivants : bicyclette, motocyclette, radio, réfrigérateur, téléphone ou téléviseur	0	1	0	1	5/9 = 5,6%
Niveau de privations du ménage, *k* (somme de chaque privation multipliée par sa pondération)	22,2%	72,2%	38,9%	50,0%	
Le ménage est-il pauvre (*k* > 33,3 %) ?	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Oui**	

Note : 1 indique une privation selon l'indicateur ; zéro indique l'absence de privation

Question 2

Le tableau 2 ci-dessous fournit pour quelques pays le niveau du PIB par habitant et la valeur de l'IPM. On donne les éléments suivants pour l'ensemble de ces pays pour l'ensemble de ces pays :

Moyenne (PIB/hab) = 7411,3
Moyenne (IPM) = 0,1775
Variance (PIB/hab) = 39135204,8
Variance (IPM) = 0,0377924
Covariance (PIB/hab ; IPM) = -966,42995

Rappeler la définition du coefficient de détermination et faites le calcul pour ces 10 pays. Commenter.

Tableau 2

Pays	PIB/hab	IPM
Argentine	14.527	0,011
Bénin	1.364	0,412
Brésil	10.162	0,011
Chine	7.476	0,056
Côte d'Ivoire	1.387	0,353
Estonie	16.499	0,026
Hongrie	16.581	0,016
Mali	1.123	0,558
Maroc	4.196	0,048
Togo	798	0,284

Question 3

A partir des tableaux fournis en annexe, il vous est demandé de rédiger une note, (en deux phrases par pays), sur la situation des états suivants : Bénin, Burkina-Faso, Cameroun, République Centrafricaine, Côte d'Ivoire, Madagascar, Mali, Niger, Sénégal, Togo.

Annexe

Classement à l'IDH		Indice de pauvreté multidimensionnelle		Population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle[a]					Part de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle avec des carences en services environnementaux			Population dont le revenu est inférieur au seuil de pauvreté	
				Incidence									
		Année[b]	Valeur[a]	(%)	(milliers)	Degré de privation (%)	Population exposée à la pauvreté (%)	Population vivant dans une extrême pauvreté (%)	Eau salubre (%)	Système d'assainissement amélioré (%)	Combustibles modernes (%)	1,25 $ par jour (PPA) (%)	Seuil de pauvreté national (%)
												2000–2009[c]	2000–2009[c]
DÉVELOPPEMENT HUMAIN TRÈS ÉLEVÉ													
21	Slovénie	2003 (W)	0,000[d]	0,0[d]	0[d]	0,0[d]	0,4[d]	0,0[d]	0,0	0,0	0,0	0,0	..
27	République tchèque	2003 (W)	0,010	3,1	316	33,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	..	..
30	Émirats arabes unis	2003 (W)	0,002	0,6	20	35,3	2,0	0,0	0,1	0,1	0,0	..	..
34	Estonie	2003 (W)	0,026	7,2	97	36,5	1,3	0,2	0,3	0,6	2,4	0,0	..
35	Slovaquie	2003 (W)	0,000[d]	0,0[d]	0[d]	0,0[d]	0,0[d]	0,0[d]	0,0	0,0	0,0	..	..
38	Hongrie	2003 (W)	0,016	4,6	466	34,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	..
39	Pologne	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0,0	16,6
40	Lituanie	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0,0	..
43	Lettonie	2003 (W)	0,006[e]	1,6[e]	37[e]	37,9[e]	0,0[e]	0,0[e]	0,0	0,8	0,1	0,0	5,9
44	Chili	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0,8	15,1
45	Argentine	2005 (N)	0,011[f]	3,0[f]	1.160[f]	37,7[f]	5,7[f]	0,2[f]	0,2[f]	2,2[f]	2,2[f]	0,9	..
46	Croatie	2003 (W)	0,016	4,4	196	36,3	0,1	0,3	0,1	0,3	1,2	0,0	11,1
DÉVELOPPEMENT HUMAIN ÉLEVÉ													
48	Uruguay	2003 (W)	0,006	1,7	56	34,7	0,1	0,0	0,0	0,0	0,3	0,0	20,5
50	Roumanie	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0.5	13.8
52	Seychelles	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0.3	..
54	Monténégro	2005 (M)	0,006	1,5	9	41,6	1,9	0,3	0,2	0,4	0,9	0,0	4,9
55	Bulgarie	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1,0	12,8
57	Mexique	2006 (N)	0,015	4,0	4.313	38,9	5,8	0,5	0,6	2,1	2,8	3,4	47,4
58	Panama	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	9,5	32,7
59	Serbie	2005 (M)	0,003	0,8	79	40,0	3,6	0,1	0,1	0,2	0,7	0,1	6,6
61	Malaisie	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0,0	3,8
62	Trinité-et-Tobago	2006 (M)	0,020	5,6	74	35,1	0,4	0,3	0,3	0,5	0,0	..	..
65	Bélarus	2005 (M)	0,000	0,0	0	35,1	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5,4
66	Fédération de Russie	2003 (W)	0,005[e]	1,3[e]	1.883[e]	38,9[e]	0,8[e]	0,2[e]	0,1	0,4	0,1	0,0	11,1
68	Kazakhstan	2006 (M)	0,002	0,6	92	36,9	5,0	0,0	0,3	0,1	0,5	0,2	15,4
69	Costa Rica	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0,7	21,7
70	Albanie	2009 (D)	0,005	1,4	45	37,7	7,4	0,1	0,3	0,4	1,1	0,6	12,4
73	Venezuela (Rép. bolivarienne du)	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	3,5	29,0
74	Bosnie-Herzégovine	2006 (M)	0,003	0,8	30	37,2	7,0	0,1	0,1	0,1	0,5	0,0	14,0
75	Géorgie	2005 (M)	0,003	0,8	36	35,2	5,3	0,0	0,4	0,3	0,8	14,7	23,6
76	Ukraine	2007 (D)	0,008	2,2	1.018	35,5	1,0	0,2	0,1	0,1	0,3	0,1	7,9
78	Ex-Rép. yougoslave de Macédoine	2005 (M)	0,008	1,9	39	40,9	6,7	0,3	0,4	0,8	1,5	0,3	19,0
79	Jamaïque	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	0,2	9,9
80	Pérou	2004 (D)	0,086	19,9	5.421	43,2	16,9	6,0	14,1	19,4	19,2	5,9	34,8
83	Équateur	2003 (W)	0,009	2,2	286	41,6	2,1	0,6	0,7	0,6	0,3	5,1	36,0
84	Brésil	2006 (N)	0,011	2,7	5.075	39,3	7,0	0,2	1,0	1,1	..	3,8	21,4
86	Arménie	2005 (D)	0,004	1,1	34	36,2	3,9	0,0	0,2	0,4	0,3	1,3	26,5
87	Colombie	2010 (D)	0,022	5,4	2.500	40,9	6,4	1,1	2,4	2,6	3,6	16,0	45,5
88	Iran (République islamique d')	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1,5	..
91	Azerbaïdjan	2006 (D)	0,021	5,3	461	39,4	12,5	0,6	3,1	2,4	1,6	1,0	15,8
92	Turquie	2003 (D)	0,028	6,6	4.378	42,0	7,3	1,3	2,0	3,2	..	2,7	18,1
93	Belize	2006 (M)	0,024	5,6	16	42,6	7,6	1,1	1,9	2,5	4,1	..	33,5
94	Tunisie	2003 (W)	0,010[e]	2,8[e]	272[e]	37,1[e]	4,9[e]	0,2[e]	1,2	1,4	0,5	2,6	3,8
DÉVELOPPEMENT HUMAIN MOYEN													
95	Jordanie	2009 (D)	0,008	2,4	145	34,4	1,3	0,1	0,2	0,0	0,0	0,4	13,3
97	Sri Lanka	2003 (W)	0,021[e]	5,3[e]	1.027[e]	38,7[e]	14,4[e]	0,6[e]	3,0	2,6	5,3	7,0	15,2
98	République dominicaine	2007 (D)	0,018	4,6	438	39,4	8,6	0,7	1,5	2,7	2,9	4,3	50,5
100	Fidji	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	31,0
101	Chine	2003 (W)	0,056	12,5	161.675	44,9	6,3	4,5	3,0	7,7	9,1	15,9	2,8
103	Thaïlande	2005 (M)	0,006	1,6	1.067	38,5	9,9	0,2	0,5	0,5	1,2	10,8	8,1
104	Suriname	2006 (M)	0,039	8,2	41	47,2	6,7	3,3	5,2	6,5	5,3	..	..
105	El Salvador	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	5,1	37,8

Classement à l'IDH	Indice de pauvreté multidimensionnelle		Population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle[a]					Part de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle avec des carences en services environnementaux			Population dont le revenu est inférieur au seuil de pauvreté	
			Incidence		Degré de privation	Population exposée à la pauvreté	Population vivant dans une extrême pauvreté	Eau salubre	Système d'assai-nisse-ment amélioré	Combus-tibles mo-dernes	1,25 $ par jour (PPA)	Seuil de pauvreté national
	Année[b]	Valeur[a]	(%)	(milliers)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
											2000–2009[c]	2000–2009[c]
106 Gabon	2000 (D)	0,161[d]	35,4[d]	437[d]	45,5[d]	22,4[d]	13,2[d]	19,4	32,6	26,9	4,8	32,7
107 Paraguay	2003 (W)	0,064	13,3	755	48,5	15,0	6,1	8,8	11,2	12,4	5,1	35,1
108 Bolivie (État plurinational de)	2008 (D)	0,089	20,5	1.972	43,7	18,7	5,8	8,2	19,8	17,7	14,0	60,1
109 Maldives	2009 (D)	0,018	5,2	16	35,6	4,8	0,3	0,2	0,4	0,9	1,5	..
110 Mongolie	2005 (M)	0,065	15,8	402	41,0	20,6	3,2	11,6	13,7	15,7	22,4	35,2
111 Moldova (République de)	2005 (D)	0,007	1,9	72	36,7	6,4	0,1	0,5	1,0	1,5	1,9	29,0
112 Philippines	2008 (D)	0,064	13,4	12.083	47,4	9,1	5,7	2,9	6,1	11,0	22,6	26,5
113 Égypte	2008 (D)	0,024	6,0	4.699	40,7	7,2	1,0	0,3	1,0	..	2,0	22,0
114 Territoires palestiniens occupés	2007 (N)	0,005	0,4	52	37,3	8,8	0,1	0,6	0,2	0,1	..	21,9
115 Ouzbékistan	2006 (M)	0,008	2,3	603	36,2	8,1	0,1	0,6	0,1	0,9	46,3	..
117 Guyana	2005 (D)	0,053	13,4	100	39,5	6,7	2,1	1,6	4,6	2,5	..	..
118 Botswana	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	30,6
119 République arabe syrienne	2006 (M)	0,021[d]	5,5[d]	1.041[d]	37,5[d]	7,1[d]	0,5[d]	1,7	1,0	0,1	1,7	..
120 Namibie	2007 (D)	0,187	39,6	855	47,2	23,6	14,7	14,7	36,4	37,5	..	38,0
121 Honduras	2006 (D)	0,159	32,5	2.281	48,9	22,0	11,3	11,9	23,0	29,6	23,3	60,0
123 Afrique du Sud	2008 (N)	0,057	13,4	6.609	42,3	22,2	2,4	4,6	9,6	8,0	17,4	23,0
124 Indonésie	2007 (D)	0,095	20,8	48.352	45,9	12,2	7,6	10,2	13,2	15,5	18,7	13,3
125 Vanuatu	2007 (M)	0,129	30,1	67	42,7	33,5	6,5	7,9	20,1	29,5	..	..
126 Kirghizistan	2006 (M)	0,019	4,9	249	38,8	9,2	0,9	1,6	1,0	2,8	1,9	43,1
127 Tadjikistan	2005 (M)	0,068	17,1	1.104	40,0	23,0	3,1	10,5	3,4	10,1	21,5	47,2
128 Viet Nam	2002 (D)	0,084	17,7	14.249	47,2	18,5	6,0	15,3	10,0	..	13,1	14,5
129 Nicaragua	2006 (D)	0,128	28,0	1.538	45,7	17,4	11,2	20,4	27,7	27,4	15,8	46,2
130 Maroc	2007 (N)	0,048[e]	10,6[e]	3.287[e]	45,3[e]	12,3[e]	3,3[e]	4,4	6,5	4,9	2,5	9,0
131 Guatemala	2003 (W)	0,127[e]	25,9[e]	3.134[e]	49,1[e]	9,8[e]	14,5[e]	3,7	6,6	23,0	16,9	51,0
132 Iraq	2006 (M)	0,059	14,2	3.996	41,3	14,3	3,1	6,4	5,1	2,7	4,0	22,9
133 Cap-Vert	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	21,0	26,6
134 Inde	2005 (D)	0,283	53,7	612.203	52,7	16,4	28,6	11,9	48,2	51,1	41,6	27,5
135 Ghana	2008 (D)	0,144	31,2	7.258	46,2	21,6	11,4	12,2	29,9	31,0	30,0	28,5
137 Congo	2009 (D)	0,208	40,6	1.600	51,2	17,7	22,9	17,2	38,9	35,9	54,1	50,1
138 Rép. démocratique populaire lao	2006 (M)	0,267	47,2	2.757	56,5	14,1	28,1	27,8	38,6	47,1	33,9	27,6
139 Cambodge	2005 (D)	0,251	52,0	6.946	48,4	21,3	22,0	28,6	48,3	51,6	28,3	30,1
140 Swaziland	2007 (D)	0,184	41,4	469	44,5	24,4	13,0	24,0	37,8	37,8	62,9	69,2
141 Bhoutan	2010 (M)	0,119	27,2	197	43,9	17,2	8,5	2,6	16,9	22,1	26,2	23,2
DÉVELOPPEMENT HUMAIN FAIBLE												
143 Kenya	2009 (D)	0,229	47,8	18.863	48,0	27,4	19,8	30,8	42,6	47,6	19,7	45,9
144 Sao Tomé-et-Principe	2009 (D)	0,154	34,5	56	44,7	24,3	10,7	9,4	29,6	31,3	28,6	53,8
145 Pakistan	2007 (D)	0,264[e]	49,4[e]	81.236[e]	53,4[e]	11,0[e]	27,4[e]	6,9	32,1	40,5	22,6	22,3
146 Bangladesh	2007 (D)	0,292	57,8	83.207	50,4	21,2	26,2	2,5	48,2	56,7	49,6	40,0
147 Timor-Leste	2009 (D)	0,360	68,1	749	52,9	18,2	38,7	35,7	47,6	67,6	37,4	49,9
148 Angola	2001 (M)	0,452	77,4	11.137	58,4	10,7	54,8	51,3	68,5	71,0	54,3	..
149 Myanmar	2000 (M)	0,154[e]	31,8[e]	14.297[e]	48,3[e]	13,4[e]	9,4[e]	25,2	19,1	..	..	..
150 Cameroun	2004 (D)	0,287	53,3	9.149	53,9	19,3	30,4	32,5	48,5	52,5	9,6	39,9
151 Madagascar	2009 (D)	0,357	66,9	13.463	53,3	17,9	35,4	49,4	66,5	66,9	67,8	68,7
152 Tanzanie (République-Unie de)	2008 (D)	0,367	65,2	27.559	56,3	23,0	43,7	47,3	64,1	65,0	67,9	33,4
154 Yémen	2006 (M)	0,283	52,5	11.176	53,9	13,0	31,9	31,9	25,7	28,4	17,5	34,8
155 Sénégal	2005 (D)	0,384	66,9	7.273	57,4	11,6	44,4	31,7	51,4	53,2	33,5	50,8
156 Nigéria	2008 (D)	0,310	54,1	81.510	57,3	17,8	33,9	35,7	39,6	52,8	64,4	54,7
157 Népal	2006 (D)	0,350	64,7	18.008	54,0	15,6	37,1	14,4	56,3	63,4	55,1	30,9
158 Haïti	2006 (D)	0,299	56,4	5.346	53,0	18,8	32,3	35,6	52,2	56,2	54,9	77,0
159 Mauritanie	2007 (M)	0,352[e]	61,7[e]	1.982[e]	57,1[e]	15,1[e]	40,7[e]	45,4	54,5	53,4	21,2	46,3
160 Lesotho	2009 (D)	0,156	35,3	759	44,1	26,7	11,1	18,4	31,2	32,8	43,4	56,6
161 Ouganda	2006 (D)	0,367	72,3	21.235	50,7	19,4	39,7	60,3	69,1	72,3	28,7	24,5
162 Togo	2006 (M)	0,284	54,3	3.003	52,4	21,6	28,7	33,4	52,9	54,2	38,7	61,7
163 Comores	2000 (M)	0,408[d]	73,9[d]	416[d]	55,2[d]	16,0[d]	43,8[d]	45,0	72,8	72,3	46,1	44,8
164 Zambie	2007 (D)	0,328	64,2	7.740	51,2	17,2	34,8	49,8	57,4	63,0	64,3	59,3
165 Djibouti	2006 (M)	0,139	29,3	241	47,3	16,1	12,5	6,7	16,3	8,8	18,8	..
166 Rwanda	2005 (D)	0,426	80,2	7.380	53,2	14,9	50,6	63,5	65,7	80,2	76,8	58,5
167 Bénin	2006 (D)	0,412	71,8	5.652	57,4	13,2	47,2	33,2	69,5	71,3	47,3	39,0

Classement à l'IDH		Indice de pauvreté multidimensionnelle		Population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle[a]			Population exposée à la pauvreté	Population vivant dans une extrême pauvreté	Part de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle avec des carences en services environnementaux			Population dont le revenu est inférieur au seuil de pauvreté	
				Incidence		Degré de privation			Eau salubre	Système d'assai-nisse-ment amélioré	Combus-tibles mo-dernes	1,25 $ par jour (PPA)	Seuil de pauvreté national
		Année[b]	Valeur[a]	(%)	(milliers)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
												2000–2009[c]	2000–2009[c]
168	Gambie	2006 (M)	0,324	60,4	935	53,6	17,6	35,5	20,8	32,1	60,3	34,3	58,0
170	Côte d'Ivoire	2005 (D)	0,353	61,5	11.083	57,4	15,3	39,3	25,0	51,9	..	23,8	42,7
171	Malawi	2004 (D)	0,381	72,1	8.993	52,8	20,0	40,4	44,0	71,6	72,0	73,9	52,4
172	Afghanistan	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	36,0
173	Zimbabwe	2006 (D)	0,180	39,7	4.974	45,3	24,0	14,8	24,2	31,6	39,0	..	72,0
174	Éthiopie	2005 (D)	0,562	88,6	65.798	63,5	6,1	72,3	53,8	83,7	88,3	39,0	38,9
175	Mali	2006 (D)	0,558	86,6	11.771	64,4	7,6	68,4	43,7	79,5	86,5	51,4	47,4
176	Guinée-Bissau	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	48,8	64,7
178	Guinée	2005 (D)	0,506	82,5	7.459	61,3	9,3	62,3	37,7	75,6	82,5	43,3	53,0
179	République centrafricaine	2000 (M)	0,512	86,4	3.198	59,3	11,8	55,4	53,6	53,3	86,1	62,8	62,0
180	Sierra Leone	2008 (D)	0,439	77,0	4.321	57,0	13,1	53,2	50,3	71,1	76,9	53,4	66,4
181	Burkina Faso	2006 (M)	0,536	82,6	12.078	64,9	8,6	65,8	43,0	69,6	82,4	56,5	46,4
182	Libéria	2007 (D)	0,485	83,9	2.917	57,7	9,7	57,5	33,5	78,9	83,9	83,7	63,8
183	Tchad	2003 (W)	0,344	62,9	5.758	54,7	28,2	44,1	42,9	58,4	61,3	61,9	55,0
184	Mozambique	2009 (D)	0,512	79,3	18.127	64,6	9,5	60,7	44,1	63,2	78,7	60,0	54,7
185	Burundi	2005 (M)	0,530	84,5	6.127	62,7	12,2	61,9	51,6	63,1	84,3	81,3	66,9
186	Niger	2006 (D)	0,642	92,4	12.437	69,4	4,0	81,8	64,1	89,3	92,3	43,1	59,5
187	Congo (République démocratique du)	2007 (D)	0,393	73,2	44.485	53,7	16,1	46,5	55,5	62,0	72,8	59,2	71,3
AUTRES PAYS OU TERRITOIRES													
	Somalie	2006 (M)	0,514	81,2	6.941	63,3	9,5	65,6	70,0	69,1	81,0	..	..

NOTES

a. Tous les indicateurs ne sont pas disponibles pour tous les pays. Les comparaisons transnationales doivent donc être abordées avec prudence. En l'absence de certaines données, les indicateurs sont pondérés sur un total de 100 %. Pour connaître les données manquantes par pays, consulter Alkire et al. (2011).

b. La lettre D indique que les données sont issues d'enquêtes démographiques et sanitaires ; la lettre M indique que les données sont issues d'enquêtes en grappes à indicateurs multiples ; la lettre W indique que les données sont issues d'enquêtes sur la santé dans le monde et la lettre N indique que les données sont issues d'enquêtes nationales.

c. Données relatives à l'année la plus récente disponible pour la période mentionnée.

d. Estimation à considérer comme une limite supérieure.

e. Estimation à considérer comme une limite inférieure.

f. Estimations concernant uniquement une partie du pays.

DÉFINITIONS

Indice de pauvreté multidimensionnelle : pourcentage de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle, ajusté au degré de privation. Consulter la Fiche technique n° 4 pour en savoir plus sur la méthode de calcul de l'Indice de pauvreté multidimensionnelle.

Incidence de la pauvreté multidimensionnelle : pourcentage de la population présentant un degré de privation pondéré de 33 % ou plus.

Degré de privation de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle : degré moyen de privation subi par les personnes vivant dans une pauvreté multidimensionnelle.

Population exposée à la pauvreté : pourcentage de la population exposée au risque de privations multiples, à savoir les personnes dont le degré de privation atteint 20 à 33 %.

Population vivant dans une extrême pauvreté : pourcentage de la population vivant dans une extrême pauvreté multidimensionnelle, à savoir les personnes dont le degré de privation atteint ou dépasse 50 %.

Part de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle sans eau salubre : pourcentage de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle sans accès à l'eau salubre à moins de 30 minutes de marche de son domicile. L'eau salubre est définie conformément aux Objectifs du Millénaire pour le développement. Elle comprend l'approvisionnement en eau des logements, terrains ou cours de maisons ; les bornes/fontaines publiques ; les forages/puits tubulaires ; les puits ordinaires protégés ; les sources protégées ; le captage des eaux de pluie et l'eau en bouteille (s'il existe une source secondaire améliorée). Elle ne comprend pas les puits non protégés, les sources non protégées, l'eau transportée par voiture dans de petits réservoirs/bidons, l'eau transportée par camion-citerne, l'eau en bouteille (s'il n'existe pas de source secondaire améliorée) ni l'eau de surface puisée directement dans les rivières, les étangs, les ruisseaux, les lacs, les barrages ou les canaux d'irrigation.

Proportion de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle sans système d'assainissement amélioré : pourcentage de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle sans accès à un système d'assainissement amélioré. Les systèmes d'assainissement améliorés sont définis conformément aux Objectifs du Millénaire pour le développement. Ils comprennent les latrines à chasse d'eau automatique ou manuelle raccordées au réseau d'égouts ou à une fosse septique, les latrines améliorées à fosse autoventilée, les latrines à fosse avec dalle et les toilettes à compost. Les systèmes ne sont pas considérés comme améliorés lorsqu'ils sont partagés avec d'autres ménages ou ouverts au public.

Proportion de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle sans combustibles modernes : pourcentage de la population vivant dans une pauvreté multidimensionnelle sans accès aux combustibles modernes. Les ménages sont considérés comme privés de combustibles modernes s'ils cuisinent en se servant de bois, de charbon ou de déjections animales.

Population vivant avec moins de 1,25 $ par jour (PPA) : pourcentage de la population vivant sous le seuil de pauvreté international de 1,25 $ par jour (en parité de pouvoir d'achat).

Population vivant sous le seuil de pauvreté national : pourcentage de la population vivant sous le seuil de pauvreté national jugé adapté à un pays par ses autorités. Les estimations nationales sont basées sur des estimations des sous-groupes pondérés (population) à partir d'enquêtes auprès des ménages.

PRINCIPALES SOURCES DE DONNÉES

Colonnes 1 et 2 : calculs basés sur différentes enquêtes auprès des ménages, notamment les enquêtes démographiques et sanitaires d'ICF Macro, les enquêtes en grappes à indicateurs multiples du Fonds des Nations Unies pour l'enfance et les enquête sur la santé dans le monde de l'Organisation mondiale de la Santé réalisées entre 2000 et 2010.

Colonnes 3 à 10 : calculs basés sur les données des différentes enquêtes auprès des ménages répertoriées dans la colonne 1 concernant les privations des ménages en matière d'éducation, de santé et de niveau de vie.

Colonnes 11 et 12 : Banque mondiale (2011a).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La Cour Pénale Internationale a pour objectif de « *contribuer à mettre fin à l'impunité des auteurs des crimes les plus graves qui touchent la communauté internationale.* » Est-ce une avancée selon vous et en quoi ?

Sujet n° 2

L'aide internationale, « *soutien précieux ou facteur de domination culturelle pour l'Afrique?* », s'interroge le Monde diplomatique, mensuel français, en mai 2013. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

« *La protection des droits fondamentaux des femmes ne peut plus souffrir de considérations ou prétextes politiques, culturels ou religieux.*» (Soyata Maiga, rapporteure spéciale de la Commission Africaine des Droits de l'Homme et des Peuples)**.** Commentez.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un seul problème, composé de quatre parties non indépendantes notées de A à D.

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien de base e, e = 2,718.

Partie A

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x, strictement positive, définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \mathrm{Ln}\, x$$

Etudier très précisément les variations de h.
On étudiera en particulier le signe et les variations de h' et h'' pour établir le tableau complet des variations de h ; on n'oubliera pas les points caractéristiques, leurs tangentes, les limites et les asymptotes éventuelles de h, etc.

Partie B

1) Soient les deux fonctions a(t) et b(t) de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définies par :

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad b(t) = \mathrm{Ln}\,(1 + t)$$

Donner les développements limités à l'ordre 3 de a(t) et b(t) au voisinage de 0.

2) Montrer que $b(t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, pour $t \in J$.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$f(t) = \frac{(1+t)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right)}}{e} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

3a - Quel est le signe de f ?

3b - Montrer que f est continue en 0.

4) Calculer f'(t). Montrer que f est dérivable en 0.

Partie C

1) On considère la fonction numérique g de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$g(t) = \frac{1 + t - \frac{1}{1+t}}{2} - \mathrm{Ln}(1+t)$$

Etablir un lien entre g et h (h introduite à la Partie A).

2) Montrer que la dérivée f '(t) peut être mise sous la forme $\frac{f(t).g(t)}{t^2}$, pour $t \neq 0$.

3) Démontrer que f ' est continue pour tout $t \in J$.

4) A partir des tableaux de variations de g et f, montrer que $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in J$.

5) Montrer que $\mathrm{Ln}\, f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$ pour $t \in J$.

Partie D

Soit une suite $\{u_n\}$, à termes positifs, n entier > 0 ; on définit la suite $\{U_n\}$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) Montrer qu'une condition nécessaire pour que la suite $\{U_n\}$ admette une limite finie U est que $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Que peut-on dire du comportement de la suite $\{U_n\}$ si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$?

3) Pour x réel > 0, n entier > 0, on définit la suite de fonctions $\{u_n(x)\}$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(nx)^n\sqrt{n}}{n!}$$

Montrer que, pour x > 0, le ratio $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ est égal à e.x.f$(\frac{1}{n})$ où f a été définie en B3.

4) Dans cette question, on suppose que $x \geq \frac{1}{e}$

4a – Montrer que la suite de terme général $\{u_n(x)\}$, n entier > 0, est une suite croissante.

4b - En déduire alors la nature de la suite associée $\{U_n(x)\}$ où $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

5) Dans cette question, on suppose que ex < 1.
Soit q un nombre réel tel que ex < q < 1.

5a - Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout n ≥ N, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.

5b - En déduire alors que, pour tout n ≥ N, $u_n(x) \leq q^{n-N}\, u_N(x)$.

5c - Quelle est la nature de la suite $\{U_n(x)\}$?

6) Pour n entier > 0 , on définit les deux suites (v_n) et (w_n) par :

$$v_n = \frac{(\frac{n}{3})^n \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{2})^k \sqrt{k}}{k!}$$

Quelles sont les limites de ces deux suites ?

7) On étudie la suite $u_n(\frac{1}{e})$.

7a – Donner l'expression de $u_n(\frac{1}{e})$.

7b – Pour tout entier k ≥ 1, calculer le rapport $R(k, e) = u_{k+1}(\frac{1}{e}) / u_k(\frac{1}{e})$.

7c – Montrer, en utilisant la question 5 de la partie C, que Ln R(k, e) est majoré par $M(k) = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}$

7d – En déduire que, pour n entier > 1 :

$$\mathrm{Ln}[u_n(\tfrac{1}{e})] \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} M(k)$$

7e – Montrer que la suite $u_n(\frac{1}{e})$ est majorée.

8) Soit la suite $z_n = \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}$, n entier > 0.

8a – Donner une relation entre z_n et $u_n(\frac{1}{e})$.

8b – Quelle est la limite de la suite z_n quand n tend vers + ∞ ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Au 21e siècle, un des défis majeurs pour les pays africains reste l'amélioration de la gouvernance pour assurer un développement stable et durable bénéficiant à une majorité d'Africains. Ce continent aux 54 pays et aux différents intérêts doit s'efforcer de mettre en avant une vision commune de développement et se donner les moyens d'appliquer les actions concrètes qui aideront à atteindre cet objectif.

Après avoir présenté une analyse de la portée et des limites des unions économiques régionales, vous présenterez les principales stratégies qui pourraient aujourd'hui permettre aux pays africains de promouvoir un développement stable et durable.

Sujet n° 2

Dans son rapport annuel sur la situation des flux d'investissements directs à l'étranger (IDE) pour l'année 2012, la CNUCED (Conférences des Nations Unies sur le commerce et le développement) fait état de trois principales tendances caractérisant la situation économique mondiale : des montants globaux à la baisse, une part croissante à destination des pays en développement, et une plus forte prise en compte de facteurs liés au développement durable. Pour l'Afrique, la CNUCED souligne que les perspectives sont prometteuses : une forte croissance de l'activité, les réformes économiques en cours et les prix élevés des matières premières ayant amélioré la perception du continent par les investisseurs.

Après avoir rappelé les principales théories sur le rôle de l'investissement dans la croissance économique, vous indiquerez dans quelle mesure les évolutions relevées par la CNUCED sont de nature à permettre aux pays africains de diversifier leur production, d'acquérir de la technologie et de développer les marchés régionaux.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Soit a un paramètre réel qui vérifie $0 < a < 1$.
N désigne un entier fixé, $N > 1$.

1) On considère la suite (u_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$u_0 = 0$
$u_N = 1$
$u_n = a.u_{n+1} + (1 - a)u_{n-1}$, pour tout n entier > 0

Exprimer u_n en fonction de n, N et a (on discutera selon les valeurs du paramètre a).

2) On considère la suite (v_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$v_0 = 1$
$v_N = 0$
$v_n = a.v_{n+1} + (1 - a)v_{n-1}$, pour tout n entier > 0

Exprimer v_n en fonction de n, N et a.

Problème 2

Le Calife appelle son Grand Vizir, et lui tient ce discours :
« Cher ami, tout le monde sait que tu rêves de prendre ma succession quand je me retirerai, et même peut-être avant.
Alors, pour que tout soit clair entre nous, je te propose le jeu suivant.
J'ai dans les mains deux sacs de formes et de couleurs identiques. Celui que je tiens dans ma main droite contient deux boules rouges, celui que j'ai dans ma main gauche en contient trois. Tu peux vérifier.
Voici six boules bleues : je te laisse les mettre dans ces sacs comme tu le souhaites. Quand tu auras procédé à la totale répartition de ces six boules bleues entre les deux sacs, tu fermeras les yeux, je tirerai au sort, entièrement au hasard, un sac, et tu choisiras une boule au hasard dans le sac que je te proposerai.
Si la boule est bleue, tu prendras ma succession instantanément.
Mais si elle est rouge, tu seras banni à jamais et condamné à l'exil ».

Comment le Grand Vizir doit-il répartir ses six boules bleues entre les deux sacs de façon à maximiser ses chances de devenir Calife ? Le résultat doit être justifié.

Problème 3

C désigne le corps des nombres complexes.

Partie A

Soit f l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq -3$, associe f(z) défini par :

$$f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble, noté U, des points M tels que le module $|f(z)|$ de f(z) soit égal à 1.

2) Déterminer l'ensemble V des points M tels que f(z) soit un nombre réel strictement négatif.

3) Déterminer l'ensemble W des points M tels que $|f(z)|$ soit un nombre imaginaire pur.

Partie B

Soit g l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq 2i$, associe g(z) défini par :

$$g(z) = \frac{z-1}{z-2i}$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Ecrire g(i) sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique.

2) Résoudre l'équation g(z) = 2i

3) Déterminer l'ensemble A des points M tels que $|g(z)| = 2$.

4) Déterminer l'ensemble B des points M tels que l'argument arg(g(z)) soit égal à $\pi/2$, modulo 2π.

5) Etudier l'intersection de A et B.

6) Résoudre l'équation f(z) = g(z).

Problème 4

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien, de base e = 2,718.

On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$, où a et b sont deux paramètres réels, définie sur $R^{+*} - \{1\}$, par :

$$f_{a,b}(x) = ax + \frac{b}{\text{Ln}x}$$

1 – Déterminer les réels a et b pour que la courbe C représentant graphiquement $f_{a,b}$ dans le repère orthonormé usuel coupe l'axe des abscisses au point E (e, 0), et pour que la tangente à C au point E soit parallèle à la droite y = 2x.

Dans la suite du problème, on notera par f la fonction correspondant aux valeurs ainsi trouvées de a et b.

2 – Etudier très précisément les variations de f (dérivées, concavité, limites, asymptotes éventuelles, intersection avec les axes, etc …).

3 – Soit la fonction g définie sur l'intervalle $R^{+*} - \{1\}$ par : $g(x) = x - \dfrac{e}{x.\text{Ln}x}$

3a) Etudier les positions respectives des courbes F et G représentant les fonctions f et g.

3b) Calculer une primitive de g(x).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

L'humanité se doit de donner le meilleur d'elle-même aux enfants (Nations Unies, préambule de la Déclaration des Droits de l'Enfant, 1959). Commentez.

Sujet n° 2

Le problème aujourd'hui n'est pas l'énergie atomique, a affirmé Albert Einstein*, mais le cœur des hommes*. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

D'après les Nations Unies, *éradiquer l'extrême pauvreté et la faim avant 2030 est un programme ambitieux mais reste possible*. Etes-vous d'accord ? Argumentez avec des exemples précis.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice

On considère l'ensemble C des nombres complexes.

1) Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

2) Résoudre dans C l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable auxiliaire $u = z + \frac{1}{z}$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}39$; $Ln\ 2 = 0{,}69$; $Ln\ 0{,}6 = -0{,}51$; $Ln\ 0{,}7 = -0{,}36$; $Ln\ 0{,}8 = -0{,}22$.

Définition générale
Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On considère la famille W(p, q), paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(Ln\ x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$ et pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

$$f_p(x) = \frac{(Ln\, x)^p}{x}$$

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc …).
Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé.
2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a.
Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A.
Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x)dx$.
Donner la valeur de $U(3)$.
Que vaut la limite de $U(p)$ quand $p \to +\infty$?

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.
On notera par g_p une fonction de $W(p, 2)$: $g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(Ln\, x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)\,dx$.

Calculer la valeur de $J(2)$.

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p.

4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)\,dx$.

Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.

1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de Δ et de F_2.
Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2, graphe de g_2 En donner un encadrement à 0,1 près.

Partie D

On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

2) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$?

3) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

4) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer le nombre de points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x)dx$
Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q).A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Lors d'un récent séminaire, le président du Groupe de la Banque Mondiale, Jim Yong Kim a déclaré *« Pensez-y : un groupe bien moins nombreux que les personnes présentes dans cette salle possède plus de richesses que la moitié de la population mondiale. Alors que tant de personnes vivent dans une pauvreté extrême en Afrique, ainsi qu'en Asie et en Amérique latine, cette situation entache notre conscience collective. Il est extrêmement important de préserver la capacité des individus à tirer un bénéfice financier de leur dur labeur et de leur réussite. Cela crée de la motivation, stimule l'innovation et permet aux gens de s'entre-aider. En même temps, que signifie le fait qu'une telle proportion des énormes richesses de la planète revient à si peu de gens ? »*

Après avoir présenté les principaux instruments utilisés pour mesurer les inégalités et les apports de la théorie économique sur la répartition des revenus, vous discuterez la pertinence des propos rapportés ci-dessus.

Sujet n° 2

Après avoir rappelé les limites du marché comme mode exclusif de régulation de l'économie, vous vous interrogerez sur la place et le rôle de la puissance publique dans le soutien à la croissance économique en fonction des différents niveaux de développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de trois problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.

2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.

3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.
Donner la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance et son écart-type.

Problème 2

Les parties A et B sont indépendantes.

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Partie A

Soit une matrice $M \in M_3$.
On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \quad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de M_3, et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1}.

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R), et donner les valeurs de a et b associées.

3) En déduire l'expression de A^{-1}, inverse de A.

<u>Partie B</u>

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale semblable à B).

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

Problème 3

<u>Partie A</u>

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$
(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On considère la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n, $a(1)$, $b(1)$.

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?

4) On donne la liste de chiffres : 1 – 6 – 3 – 5 – 5 – 4 – 7 – ….
Quels sont les trois chiffres suivants ?

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1)$ et $a(n+1) = a(n) + \lambda$
(2) $b(1)$ et $b(n+1) = b(n) + \mu$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie *A*, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n, $u(1)$, λ et μ.
La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, $b(1)$, λ et μ. Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Martin Luther King, militant non-violent pour les droits civiques des Noirs aux Etats-Unis, a dit : *« Nous devons apprendre à vivre ensemble comme des frères, sinon nous allons mourir tous ensemble comme des idiots ».*
Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 2

Lors de la quatrième conférence de l'ONU sur les femmes, à Pékin, Hillary Clinton, femme politique américaine, a déclaré : *« Les droits de l'homme sont les droits des femmes, et les droits des femmes sont les droits de l'homme ».*

Selon vous, qu'a-t-elle voulu dire ?

Sujet n° 3

Albert Einstein, célèbre physicien, a dit : " *Le monde est dangereux à vivre! Non pas tant à cause de ceux qui font le mal, mais à cause de ceux qui regardent et laissent faire* ".

Quelles réflexions vous inspire cette phrase ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants.

Exercice
Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

Problème
Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A toute fin utile, on donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^{1/2} = 1{,}649$; $e^{-1/2} \approx 0{,}607$; $e^{-3/2} \approx 0{,}223$

Contexte
Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.
On considère la famille F(p, q), doublement paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par : $x \to f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$

On notera par $C_{p,q}$ le graphe de $f_{p,q}$.
L'objet du problème est d'étudier la famille F(p, q).

Partie A
On prend p = q = 1, et, pour alléger les notations, on notera par f_1 la fonction $f_{1,1}$ et par C_1 le graphe $C_{1,1}$: $f_1(x) = x^x$, pour $x > 0$

A1) Etudier précisément les variations de f_1 (limites, asymptotes, points d'inflexion, points caractéristiques, etc …). Dresser le tableau de variation de f_1.

A2) Tracer le graphe C_1 de f_1.

Partie B
On prend maintenant p = q = 2, et on notera f_2 pour $f_{2,2}$ et par C_2 le graphe $C_{2,2}$.
$f_2(x) = (x^2)^{(x^2)}$, pour $x > 0$

B1) Donner l'expression de f'_2, dérivée première de f_2. Etudier son signe.

B2) Donner l'expression de f''_2, dérivée seconde de f_2. Etudier son signe et en déduire la concavité de f_2. Donner le tableau de variations de f_2.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_2(x)$ une expression de la forme $a(x) - b(x)$, où a et b sont deux fonctions à expliciter.

B3) Donner la forme du graphe C_2.
Etudier l'intersection de C_1 et C_2 et en déduire les positions respectives de f_1 et f_2.

Partie C

On considère dans cette partie le cas général $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, les cas particuliers p = q = 1 et p = q = 2 ayant fait l'objet des parties A et B.

C1) Donner l'expression de la dérivée $f'_{p,q}$.
Etudier les éventuelles racines de l'équation $f'_{p,q}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{p,q}$.

C2) Donner l'expression de $f''_{p,q}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $f_{p,q}$.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_{p,q}(x)$ une expression de la forme $u(x) - v(x)$, où u et v sont deux fonctions à expliciter.

C3) En déduire les variations de $f_{p,q}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale du graphe $C_{p,q}$.

C4) Existe-t-il un point fixe F au faisceau de courbes $\{C_{p,q}\}$. Si oui, donner ses coordonnées, et calculer l'équation de la tangente en F à $C_{p,q}$.

C5) Etudier l'intersection de C_1 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 1$.

C6) Etudier l'intersection de C_2 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 2$.

C7) Etudier l'intersection de $C_{p,q}$ avec la première bissectrice d'équation y = x.

Partie D

Dans cette partie, on suppose que p et q sont entiers positifs ou nuls.
Pour tout x réel strictement positif, on définit la fonction $g_{p,q}$ par : $x \to g_{p,q}(x) = x^p(Lnx)^q$

Pour tout réel x > 0, on définit l'intégrale $J_{p,q}(x) = \int_0^x g_{p,q}(t)dt$.

D1) Calculer $J_{p,0}(x)$

D2) Montrer que, pour $q \geq 1$, $J_{p,q}(x)$ peut se mettre sous la forme :
$J_{p,q}(x) = h(x ; p, q) + k(p, q)\, J_{p,q-1}(x)$
où h dépend de x, p et q, et k dépend uniquement de p et q.

D3) Dans cette question, on prend x = 1, et on notera $J_{p,q}$ pour $J_{p,q}(1)$.

D3 a) Calculer explicitement J(p, 0) et J(0, q)

D3 b) Calculer $J_{p,q}$ en fonction des entiers p et q

.

D4) On pose $w(x) = xLnx$.

D4a) Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de x^x de la forme $P(x) = a + bw(x) + cw^2(x)$, où a, b et c sont des constantes dont on donnera les valeurs.

D4b) On veut calculer $F(x) = \int_0^x t^t dt$, pour x proche de 0.

On décide d'approximer $F(x) = \int_0^x t^t dt$ par l'intégrale $F^*(x) = \int_0^x P(t)dt$.

Donner l'expression de $F^*(x)$.

D5) En s'inspirant de la démarche de la question D4, avec la fonction $m(x) = px^q(Lnx)$, proposer un développement limité d'ordre 2 de $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, et en déduire une approximation de l'intégrale $K_{p,q}(x) = \int_0^x (t^p)^{(t^q)}(t)dt$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants

Sujet 1

En novembre 2013, lors de son allocution au Forum du FMI, Lawrence Summers avait défendu l'idée selon laquelle l'économie américaine pouvait être aux prises avec une « stagnation séculaire » en raison d'un déficit pérenne de demande globale. Ce terme a été inventé à la fin des années1930 par l'économiste Alvin Hansen, qui suggérait que la Grande Dépression pouvait être le début d'une nouvelle ère marquée par une économie durablement déprimée. Il avait alors identifié les facteurs démographiques comme étant une cause majeure de stagnation séculaire ; la baisse du taux de fécondité, arguait-il, entraînait une faible demande d'investissement qui donnait lieu à un excès d'épargne.

Après avoir analysé le rôle et la place du progrès technique et des innovations dans les théories de la croissance et des cycles économiques, vous vous interrogerez sur la pertinence de l'hypothèse selon laquelle le 21ème siècle pourrait être caractérisée par une « stagnation séculaire » .

Sujet 2

De nombreux débats entourent la recherche d'institutions optimales de régulation du marché du travail. L'acuité des controverses est renforcée par le contexte actuel de crise financière et économique. Différentes théories et courants s'opposent ainsi sur l'impact positif ou négatif des institutions qui le régissent sur le fonctionnement du marché du travail.

Après avoir rappelé les principales théories relatives au chômage et au fonctionnement du marché du travail, vous préciserez, à l'aide d'exemples, quels peuvent être leurs apports dans la définition et la mise en œuvre des politiques publiques de l'emploi.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, couvrant les thèmes suivants : polynômes, matrices, probabilités, nombres complexes.
Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : polynômes

On se place dans l'espace des polynômes définis sur R, et donc à coefficients réels.
On rappelle que la notation n! (« factorielle n ») désigne le produit des entiers de 1 à n.

1) On considère les polynômes Q_1 et Q_2 définis par :
$Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1$
$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1$
Factoriser Q_1 et Q_2.

2) Soit le polynôme P_n défini sur R par :
$P_n(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$

2a) Calculer P_1 et factoriser P_2
2b) Donner l'expression générale de P_n comme produit de polynômes irréductibles (on pourra raisonner par récurrence).

Problème 2 : matrices

A - On se place dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
A1) Mettre A sous la forme aI + bJ, a et b étant deux entiers à déterminer

A2) Calculer A^n, pour tout entier $n \geq 2$.

B - On se place dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

Calculer B^n, pour tout entier $n \geq 2$.

C - On considère toujours M_3.

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$

où les réels a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

I_3 désigne la matrice identité de M_3.

C1) Mettre C sous la forme $C = D - I_3$, D étant une matrice de M_3 à déterminer.

C2) Calculer D^2 et comparer D et D^2. Quelle est la nature de l'application linéaire associée à D ?

C3) En déduire C^n, pour tout entier $n \geq 2$.

Problème 3 : probabilités

Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On procède à n ($n \geq 2$) tirages successifs d'une boule, avec remise à chaque tirage.

On définit les quatre événements suivants :

A = {il y a des boules des deux couleurs}

B = {il y a au plus une boule bleue}

C = {toutes les boules tirées ont la même couleur}

D = {il y a une seule boule bleue}

1) Calculer la probabilité P(C)

2) Calculer la probabilité P(D)

3) En déduire les probabilités des événements $A \cap B$, A et B.

4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a la relation suivante :

$$2^{n-1} = n + 1$$

5) Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 2^{n-1} - n - 1$

Montrer que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

6) Pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants ?

Problème 4 : nombres complexes

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal usuel.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives – 1, 1 et i.

A – Soit M un point de P d'affixe non nulle z(M). N désigne le point de P d'affixe $\frac{1}{z(M)}$.

A1) Démonter la relation :

$$AN = \frac{AM}{OM}$$

A2) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
|z| désignant le module du complexe z, calculer $|z(M) + 1|^2$
En déduire la valeur de AN.

B – A tout point M du plan P distinct de C on associe le point M', d'affixe z(M') défini par l'application h : M → M' telle que :

$$z(M') = \frac{z^2(M)}{i - z(M)}$$

B1) Déterminer les point fixes de la transformation h.

B2) En écrivant z(M) = x + iy et z(M') = x' + iy', donner les expressions de x' et y'.
Quel est l'ensemble U des points M de P dont l'image par h est un nombre imaginaire pur ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

D'après Juliana Rotich, professionnelle des technologies informatiques, *« les nouvelles technologies ont un rôle crucial dans le développement du continent africain »*. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 2

Les droits humains sont-ils universels ?

Sujet n° 3

L'éducation des filles est-elle un facteur de lutte contre la pauvreté ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit un entier n strictement positif.
On note $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ les k diviseurs de n, indicés en sens strictement croissant, avec $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$.
1. On donne n = 6.
Quelles sont les valeurs des 4 diviseurs (d_1, d_2, d_3, d_4) de 6.
Montrer que $(\prod_{j=1}^{4} d_j)^2 = 6^4$

2. On se place dans le cas général.
Démontrer la relation suivante :

$$(\prod_{j=1}^{k} d_j)^2 = n^k$$

Exercice n° 2

Rappel : soient 2 événements A et B, de probabilités P(A) et P(B) non nulles.
On rappelle que la probabilité de A conditionnellement à B, notée P(A/B) est donnée par :

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B / A).P(A)/P(B)$$

Dans un pays imaginaire, on sait a priori que 3 % des automobilistes du pays conduisent en état d'ébriété. Le gouvernement lance une campagne de lutte contre l'alcool au volant.
À cet effet, la gendarmerie est équipée d'un alcootest dont les performances sont les suivantes :
- Dans 2 % des cas, l'alcootest est positif à tort (la personne contrôlée n'est pas en état d'ébriété)

- Dans 96 % des cas, l'alcootest est positif à juste titre (la personne contrôlée est effectivement en état d'ébriété)
1. Calculer la probabilité que l'alcootest soit positif.
2. Calculer la probabilité qu'un conducteur ne soit pas en état d'ébriété alors que son alcootest a été positif.
Quelle conclusion en tirez-vous ?

Problème

Soient n et p deux nombres entiers naturels strictement positifs.
On considère la famille G(n, p), dépendant des paramètres n et p, des fonctions $g_{n,p}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$x \rightarrow g_{n,p}(x) = (x^n)e^{(-x^p)}$

Partie I
Dans cette première partie, on prend n = 1 et p = 2.
Pour simplifier, on notera par g la fonction $g_{1,2}$: $g_{1,2}(x) = x\, e^{-x^2}$.

I-1. Calculer g' et g'', dérivées première et seconde de g, et étudier leur signe.

I-2. Étudier très précisément les variations de g (limites, asymptotes, points caractéristiques et pentes en ces points, convexité, …). Étudier la position de G, graphe de g, par rapport à la première bissectrice d'équation y = x. Donner le tableau de variation de g.

I-3. Donner la forme du graphe G de g.

I-4. On définit l'intégrale $L_1 = \int_0^{+\infty} g(x)dx$.
Calculer L_1.

Partie II
Dans cette deuxième partie, on prend n = 3 et p = 2.
On notera par g_3 la fonction $g_{3,2}$: $g_{3,2}(x) = x^3 e^{-x^2}$.

II-1. Étudier très précisément les variations de g_3 : limites, asymptotes, étude des dérivées première et seconde, points d'inflexion, points caractéristiques, convexité, … Dresser le tableau de variation de g_3.

II-2. Donner la forme du graphe G_3 de g.

II-3. Étudier l'intersection de G et G_3.

II-4. On définit l'intégrale $L_3 = \int_0^{+\infty} g_3(x)dx$
Calculer L_3.

Partie III
Dans cette troisième partie, on prend p = 2, et n est un entier quelconque strictement positif.
On notera par g_n la fonction $g_{n,2}$: $g_{n,2}(x) = x^n e^{-x^2}$.

III-1. Montrer que g_n passe par un maximum pour un point d'abscisse α(n) que l'on déterminera.

III-2. On pose $u(n) = g_n(\alpha(n))$.
Calculer $u(n)$.
Montrer que la suite $\{u(n)\}$, $n \geq 3$, est croissante.

III-3. On définit l'intégrale $L(n) = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$.
Trouver une relation de récurrence entre $L(n)$ et $L(n-2)$.

Partie IV
On considère dans cette partie le cas général $g_{n,p}(x) = x^n e^{-x^p}$.

IV-1. Donner l'expression de $g'_{n,p}$, dérivée première de $g_{n,p}$.
Étudier les racines éventuelles de l'équation $g'_{n,p}(x) = 0$ et en déduire le signe de $g'_{n,p}$.

IV-2. Donner l'expression de $g''_{n,p}$, dérivée seconde de $g_{n,p}$. Étudier son signe et en déduire la concavité de $g_{n,p}$.

IV-3. En déduire les variations de $g_{n,p}$. Étudier ses points particuliers, et donner la forme générale de son graphe $G_{n,p}$.

IV-4. Montrer que toutes les courbes $\{G_{n,p}\}$ passent par un point fixe A ; donner les coordonnées de A ainsi que l'équation de la tangente en A à $G_{n,p}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants

Sujet 1

Après avoir rappelé l'importance et le rôle des incertitudes et des anticipations dans les théories économiques, vous vous interrogerez sur les conditions et les conséquences pour la politique monétaire et la conjoncture de la déclaration du Président de la BCE, Mario DRAGHI en novembre 2016 : *« Adopter une position attentiste du fait du choc du prix du pétrole et laisser l'inflation faible s'installer pourraient éroder les anticipations à long terme et la confiance dans la banque centrale et conduire à des pressions continuellement baissières sur les prix ».*

Sujet 2

30 ans après la publication du rapport BRUNDTLAND (1), vous vous interrogerez sur les enjeux, les instruments et les limites d'une croissance soutenable et d'un développement durable aujourd'hui.

(1) Le **rapport BRUNDTLAND** est le nom communément donné à une publication, officiellement intitulée ***Notre avenir à tous*** (*Our Common Future*), rédigée en 1987 par la Commission mondiale sur l'environnement et le développement de l'Organisation des Nations Unies.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : diagonalisation

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable dans R, ensemble des nombres réels.

Problème 2 : puissance de matrice

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D semblable à A.

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.
En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n.

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2.

On définit la suite (u_n), $n \in N$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec les valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique P(x) de A. Diagonaliser la matrice A.

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par P(x), $n \geq 2$.
Montrer que $R_n(x) = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n.

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite A* à déterminer.

4c – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.
Pour toute matrice A de M_n, de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j, j = 1 à n, la $j^{ième}$ colonne de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i \leq n$.
On s'intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout i = 1 à n, l'ensemble (H) d'inégalités :

$$\text{(H)} \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante.*

1 – Soit A une matrice de M_2, vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H).
On désigne par B, de coefficients b_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \geq 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.\ c_1$

$$c_j \to c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij}. Que valent les coefficients b_{1j}, pour j = 1 à n ?

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H* :

$$\text{(H*)} \quad \forall\, i \geq 2,\ b_{ii} > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij}$$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H. Montrer qu'elle est inversible.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Pour l'écrivain français Paul Valéry *« Tout état social exige des fictions »*. Selon vous, une société a-t-elle besoin de fictions, de rêves, d'utopies ?

Sujet n° 2

Léopold Sédar Senghor, poète et homme d'état sénégalais a dit : *« La francophonie, c'est cet humanisme intégral qui se tisse autour de la terre »*. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

Emmanuel Macron, président de la République française affirme : *« Je n'aime pas le terme (de pénibilité) car il induit que le travail est une douleur »*. Pensez-vous que le travail est nécessairement une douleur ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque. Le problème comporte trois parties, qu'il est recommandé de traiter dans l'ordre proposé.
Dans toute l'épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels et R l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Déterminer au moins un entier naturel x, strictement supérieur à 1, tel que le nombre entier $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 3.
Même question, pour que n soit divisible par 7.

Exercice n° 2

Déterminer le polynôme P de degré 2, à coefficients entiers naturels, tel que pour tout $x \in N$, on a l'égalité :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = [P(x)]^2$$

Problème

Ln désigne le symbole des logarithmes népériens ; le symbole $|\ |$ désigne la valeur absolue.
On donne $e = 2{,}718$ et $1/e = 0{,}368$.

Partie A

Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par : $x \to g(x) = x \operatorname{Ln}x$.
A1) Etudier précisément les variations de g.
A2) Donner une primitive G de g.

Partie B

Soit f l'application de $R^{+*} =]0, +\infty[$ dans R^+ définie par : $x \to f(x) = |x \operatorname{Ln}x|$.

B1) Calculer la limite de f quand x tend vers 0_+. On prolongera f sur R^+ par la valeur ainsi trouvée.

B2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f ; on étudiera particulièrement les points $x = 0_+$ et $x = 1$.

B3) Etudier très précisément les variations de f et tracer son tableau de variations.

B4) Montrer qu'existent deux points a et b appartenant à l'intervalle $]1, e[$ vérifiant :
$f(a) = 1/e$ et $f(b) = 1$.
Donner les valeurs approchées de a et b à 0,01 près.

B5) Etudier le signe de $v(x) = f(x) - x$.

B6) Tracer le plus précisément possible la courbe C représentant f dans un repère orthonormé.

Partie C

$u(0)$ étant un réel positif ou nul, on considère la suite à termes positifs ou nuls $\{u(n)\}$, $n \geq 0$, définie par $u(0)$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

C1) Déterminer les valeurs de $u(0)$ pour lesquelles la suite $u(n)$ est constante.

C2) Dans cette question, on considère que $0 < u(0) < 1/e$.

- 2a – Montrer que $0 < u(n) < 1/e$ pour tout $n \in N$.
- 2b – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.
- 2c – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

C3) Dans cette question, on considère que $1/e < u(0) < 1$.

3a – Montrer que $0 < u(1) < 1/e$.

3b – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

C4) Dans cette question, on considère que $u(0) > e$.

4a – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

Nous allons montrer par deux approches différentes que la suite $\{u(n)\}$ est divergente.

4b – Première approche : en raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u(n) = +\infty$.

4c – Deuxième approche :

- Montrer que, pour tout $x \geq e$, on a $f'(x) \geq 2$.
- En déduire que pour tout $n \in N^*$, on a : $u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$
- En déduire que $u(n+1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))(2^{n+1} - 1)$
- Retrouver le résultat de la question 4b.

C5) Dans cette question, on considère que $1 < u(0) < e$.

5a – Supposons qu'il existe un entier n^* tel que $u(n^*) = b$ (b a été défini à la Partie B, question 4).

Quelle est alors la nature de la suite $\{u(n)\}$?

5b – On suppose maintenant que $u(n) \neq b$ pour tout entier $n \in N$.

Montrer qu'il existe un entier $n°$ tel que $u(n°) < b$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Etudier alors la convergence de la suite $u(n)$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Dans un document intitulé « *Les infrastructures à l'horizon 2030* », l'OCDE note que « Les réseaux d'infrastructure jouent un rôle vital dans le développement économique et social. De plus en plus interdépendants, ils constituent un moyen d'assurer la fourniture et la prestation de biens et de services qui concourent à la prospérité et à la croissance économique et contribuent à la qualité de vie. La demande d'infrastructure est appelée à sensiblement augmenter dans les décennies à venir, sous l'impulsion de facteurs majeurs de changement comme la croissance économique mondiale, le progrès technologique, le changement climatique, l'urbanisation et l'intensification de la congestion. Toutefois, les défis à relever sont multiples (…) ».

Après avoir rappelé les théories relatives à la croissance, vous préciserez le rôle des infrastructures et les défis auxquels sont confrontées les nations à différents niveaux de croissance pour en assurer la pérennité et le développement.

Sujet 2

Le monde du travail est en mutation, sous l'effet de la numérisation de l'économie et du changement technologique global. Ces processus, associés à la mondialisation et les changements dans l'organisation du travail vont façonner le monde du travail et poseront des défis inédits aux politiques publiques.

Après avoir rappelé les différentes théories permettant d'expliciter les dysfonctionnements du marché du travail, vous présenterez les principaux dilemmes des politiques de l'emploi.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de sept exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit la fonction f de R dans R définie par $f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$.

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice n° 2

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice $C = A^3 - A$

2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Exercice n° 3

Pour tout n entier naturel strictement positif, on définit la somme S(n) par :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1) z désigne le nombre complexe $z = \cos(\pi/n) + i.\sin(\pi/n)$.

On considère la somme $Z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$

Ecrire Z(n) en fonction de z et n sous forme de fraction rationnelle.

2) En déduire l'expression de S(n) en fonction de $\tan(\pi/2n)$.

3) Déterminer la limite de S(n)/n quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 4

On considère la fonction $f : R \to R^+$, définie par $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = ke^{-ax}$, pour $x \geq 0$, où a est un paramètre réel strictement positif et k une constante à déterminer.

1) Trouver la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité sur R^+.

2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité admet pour densité la fonction déterminée à la question 1.

Donner la fonction de répartition F de X.

3) Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X) de X.

4) Soient deux réels positifs u et v tels que $v > u$.

Calculer la probabilité conditionnelle $P(X > v / X > u)$.

Exercice n° 5

On considère la suite {u(n)}, $n \in N$, définie par :

$u(0) = 0$, $u(1) = 1$ et $u(n+1) = 7u(n) + 8u(n-1)$

1) Pout tout $n \in N$, on définit la suite $s(n) = u(n) + u(n+1)$.

Déterminer la nature de la suite $\{s(n)\}$.

Donner l'expression générale de $s(n)$ en fonction de n.

Que vaut la limite de $s(n)$ quand $n \to +\infty$?

2) On pose $v(n) = (-1)^n u(n)$, et on définit la suite $\{t(n)\}$, $n \in N$, par :

$t(n) = v(n+1) - v(n)$

Exprimer $t(n)$ en fonction de $s(n)$.

3) Donner les expressions de $v(n)$ et $u(n)$ en fonction de n.

4) Que vaut la limite de $u(n)/s(n)$ quand $n \to +\infty$?

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel n, on note par F(n) l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle, infiniment dérivables, vérifiant la relation suivante pour tout x réel :

$$4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0$$

1) Montrer que, $\forall n \in N$, F(n) n'est pas vide.

2) Soit la fonction $f_0(x) = e^{x/2}$

Montrer que $f_0 \in F(0)$.

3) Soit une fonction f_n appartenant à F(n).

On définit la fonction f_{n+1} par : $f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$

3a – Etablir la relation :

$f_{n+1}'(x) = -x f_n(x)/2$

3b – Montrer que $f_{n+1} \in F(n+1)$.

Exercice n° 7

(deux questions indépendantes)

1) On rappelle que le polynôme réel B divise le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ.

Soit le polynôme A défini sur R, à coefficients réels, par : $A(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$

A quelles conditions sur les paramètres a, b et c le polynôme A est-il divisible par le polynôme B défini par $B(x) = x^2 + x + 1$?

2) Déterminer la valeur du réel v telle que le polynôme $P(x) = (x + 1)^7 – x^7 – v$ admet une racine réelle multiple.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« Le sport est souvent mythifié, à tort. » (Dominique Baudin, *Libération,* 21 Juillet 2018). Vous semble-t-il légitime d'accorder une grande valeur au sport ?

Sujet n° 2

Une œuvre d'art peut-elle vous aider à comprendre le monde dans lequel vous vivez ?

Sujet n° 3

« Le monde régi par la technologie intelligente (…) est un cauchemar dans lequel les humains sont réduits à être des automates. » (Brett M. Frischmann, revue *Scientific American*, 30 juillet 2018).
Partagez-vous cette conception de Brett M. Frischmann sur les technologies intelligentes ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque au choix des candidats. Le problème comporte trois parties, qu'il est recommandé de traiter dans l'ordre proposé.

Exercice

1) Soit la fonction f de la variable réelle positive x, définie par $x \to f(x)$ avec :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Etudier la fonction f.

2) On considère la suite u_n, n entier naturel positif ou nul, définie par $u_0 = 1$ et de terme général :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2 + 1}}$$

Etudier la suite u_n.

3) Donner la forme explicite en fonction de n du terme général u_n.

Problème

Notations et valeurs numériques :

Le symbole e désigne la base des logarithmes népériens, notés Ln ; e = 2,718.
Ln 2 = 0,693
$e^{1,5} = 4,482$; $e^{1,6} = 4,953$; $e^{1,7} = 5,474$; $e^{1,8} = 6,050$; $e^{1,9} = 6,686$; $e^{2} = 7,389$
$e^{-0,5} = 0,607$; $e^{-0,6} = 0,549$; $e^{-0,7} = 0,497$; $e^{-0,8} = 0,449$; $e^{-0,9} = 0,407$; $e^{-1} = 0,368$

Partie 1 : Etude des variations d'une fonction

On considère la fonction réelle f, de la variable réelle x, définie par $x \to f(x)$ avec :

$$f(x) = 2x + 2 - e^x$$

On veut étudier les variations de f.

1) Calculer les dérivées f' et f'' ; étudier leurs signes.

2) Etudier le comportement de f quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
Construire le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions notées α et β, avec $\alpha < \beta$. Situer numériquement α et β dans des intervalles de longueur 0,1.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction f aux points A de coordonnées $(\alpha, 0)$, B $(\beta, 0)$, et C d'abscisse 0.

5) Tracer le plus précisément possible le graphe de f dans un repère orthonormé.

Partie 2 : Intégrales

6) Donner la valeur exacte de l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 f(x)dx$.

7) On rappelle que les nombres réels α et β ont été introduits en Partie 1, question 3.
Donner, en fonction de α, la valeur exacte de l'intégrale $J(\alpha)$ définie par :
$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$.

8) Donner, en fonction de β, la valeur exacte de l'intégrale $J(\beta)$ définie par :
$J(\beta) = \int_0^\beta f(x)dx$.

9) Démontrer que la valeur exacte de $J(\alpha, \beta)$ définie par $J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ est :
$J(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

Partie 3 : Famille paramétrée

Dans cette partie, on considère la famille F de fonctions réelles f_a de la variable réelle x, définie par $x \to f_a(x)$ avec :

$$f_a(x) = 2x + 2 - e^{ax}$$

où a est un paramètre réel quelconque.
On veut étudier les variations de la fonction f_a selon les valeurs du paramètre a.

10) Etudier le cas a = 0.

Dans les quatre questions suivantes, on supposera $a \neq 0$.

11) Etudier le signe de $(f_a)'$ et $(f_a)''$.

12) En déduire le tableau de variation de f_a selon les valeurs du paramètre a.
Montrer qu'il existe un point commun aux courbes des fonctions de la famille F.

13) On note par M(a) le maximum de f_a, lorsque ce maximum existe. Montrer alors que $M(a) > 0$.

14) Combien y a-t-il de solutions à l'équation $f_a(x) = 0$?

15) Pour k entier strictement positif, calculer la différence $f_{a+k}(x) - f_{a+k-1}(x)$.
En déduire l'expression de $f_{a+k}(x) - f_a(x)$ en fonction de a, k et x.

16) Soit l'intégrale J(a) définie par : $J(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$

16a) Donner la valeur de J(0) sans faire le moindre calcul intégral.

16b) Donner, en fonction de a, la valeur exacte de J(a).

16c) Etudier les limites de J(a) quand le paramètre a tend vers $-\infty$, $+\infty$, et 0.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Dans son ouvrage « Le prix de l'inégalité » (2014), Joseph Stiglitz indique *« Laissés à eux-mêmes, les marchés se révèlent souvent incapables de produire des résultats efficaces et souhaitables, et dans ce cas l'Etat a un rôle à jouer : corriger ces échecs du marché, autrement dit concevoir des mesures (impôts et des réglementations) qui alignent les incitations privées sur les rendements sociaux.* »

Après avoir analysé les principales théories sur les défaillances de marchés, vous montrerez quels sont les instruments et les mesures envisageables par la puissance publique pour y remédier.

Sujet 2

Dans une note publiée en août 2018, l'OCDE souligne que « *le commerce international soutient que la prospérité a rarement, voire jamais, été atteinte ou maintenue sans le concours du commerce. Néanmoins, à lui seul, il ne constitue pas une condition suffisante à l'obtention de cette prospérité. Des politiques orientées vers l'emploi, l'éducation, la santé et d'autres domaines encore sont nécessaires pour favoriser le bien-être et s'attaquer aux défis d'une économie mondialisée ».*

Après avoir présenté les théories sur les avantages du commerce international, vous préciserez le double défi politique que pose la mondialisation : en tirer le maximum au profit du plus grand nombre tout en limitant ses effets négatifs.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de huit exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Un point M, de coordonnées x et y, décrit une courbe C. Les coordonnées x et y de M dépendent d'un paramètre réel t, selon les relations suivantes :

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$
$$y(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}$$

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ? pour y ?

2) Montrer que le point O (0, 0) appartient à la courbe C.
On rappelle que la pente p de la tangente en un point de coordonnées (x_0, y_0) est telle que $(y - y_0)/(x - x_0) = p$. Quelle est la pente de la tangente à C au point O ?

3) Donner l'équation de la courbe C en coordonnées cartésiennes sous la forme y = g(x).
Calculer y' et donner les variations de g et la forme générale de la courbe C.

Exercice n° 2

Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel n positif ou nul par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1) Montrer que, pour tout entier n : $1 \leq u_n < 2$

2) Etudier le sens de variation de la suite u_n.

3) Montrer que la suite u_n est convergente. Quelle est la valeur de sa limite L ?

Exercice n° 3

1) Soit n un entier naturel strictement positif.
On appelle diviseur strict de n tout nombre strictement positif divisant n, autre que lui-même.
Quels sont les diviseurs stricts de 220 ?

2) On appelle nombres amiables deux entiers n et m tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Les entiers 220 et 284 sont-ils amiables ?

3) On appelle nombre parfait un entier égal à la somme de ses diviseurs stricts. Les nombres 21 et 28 sont-ils parfaits ?

4) On rappelle qu'un nombre entier premier n'est divisible que par 1 et par lui-même. Déterminer la valeur d'un nombre entier premier p tel que le nombre $2^4.p$ soit parfait.

5) Soient p un nombre entier premier impair, et n un nombre entier naturel strictement positif. On suppose que le nombre $2^n.p$ est parfait. Exprimer alors p en fonction de n.

Exercice n° 4

1) Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
Donner dans C, corps des nombres complexes, les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

2) z étant un complexe quelconque différent de 1, on définit z* par $z^* = \frac{2z+1}{z-1}$.
Résoudre dans C l'équation $(z^*)^4 = 1$.

Exercice n° 5

1) Pour un examen oral, un étudiant a fait des impasses et n'a préparé que 50 des 100 sujets qu'il doit connaître. Chaque sujet fait l'objet d'une question, écrite sur un papier, les 100 papiers sont dans une urne présentée à l'étudiant.
L'étudiant tire deux papiers au hasard, simultanément.

1a) Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ?
1b) Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
1c) Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul des deux sujets ?
1d) Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?

2) L'étudiant a préparé n des 100 sujets possibles ($n \leq 100$).
2a) Quelle est la probabilité p(n) qu'il connaisse au moins un des deux sujets tirés ?
2b) Quelle est la plus petite valeur de n pour que p(n) soit supérieur à 0,95 ?

Exercice n° 6

1) Soit la matrice A à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

2) Résoudre le système linéaire suivant, où les inconnues x, y, z sont réelles et m est un paramètre réel :
$x - z = m$
$-2x + 3y + 4z = 1$
$y + z = 2m$

Exercice n° 7

Soit la fonction f définie sur $R^{+*} =]0, +\infty[$ par $x \rightarrow f(x) = (\mathrm{Ln}\, x) / x$, où Ln est le symbole des logarithmes népériens.

1) Calculer l'intégrale $J_1 = \int_1^e f(x)dx$.
2) L'intégrale $J_2 = \int_0^1 f(x)dx$ existe-t-elle et, si oui, quelle est sa valeur ?

3) Calculer $J(n) = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
Donner le signe de $J(n)$ et calculer la limite de $J(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 8

On se place dans l'espace E des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, n entier strictement positif.
Soit P un polynôme de E : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
P' étant le polynôme dérivé de P, on définit g, application de E dans E, par :
$P \to g(P) = P + (1 - x)P'$

1) Ecrire les coefficients de g(P) en fonctions des coefficients de P

2) Une application f de E dans E est linéaire si pour tous polynômes P et Q de E, et tout réel a, $f(aP + Q) = af(P) + f(Q)$.
L'application g est-elle linéaire ?

CORRIGE DES SUJETS ISE OTION ECONOMIE 1998-2019

NIVEAU LICENCE EN EN ECONOMIE/

INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

EXERCICE n° 1

1) Pour conclure, il était proposé de compléter le tableau 2 de l'énoncé. On trouvera ci-dessous celui-ci complété (les chiffres que les candidats devaient trouver sont inscrits en italique)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	n_i	p_i	np_i	(n_i-np_i)	$(n_i-np_i)^2$	(5)/(3)
1	222	0,56250	225	-3	9	0,04
2	50	0,13125	52,5	-2,5	6,25	0,12
3	28	0,05625	*22,5*	*5,5*	*30,25*	*1,34*
4	78	0,18750	75	3	9	0,12
5	20	0,04375	*17,5*	*2,5*	*6,25*	*0,36*
6	2	0,01875	7,5	-5,5	30,25	4,03
Total	400	1,00000	400			*6,01*

Conclusion : la valeur calculée de 6,01 étant supérieure à la valeur donnée 5,99, il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation. On constate que le calcul opéré à la case n°6 (croisement des critères « clients n'ayant pas retourné la fiche » et « clients peu ou pas satisfaits ») contribue pour beaucoup à cette conclusion : c'est en effet là que l'écart est le plus fort

2) La moyenne vaut 1,964 jours et la variance est égale à 1,955 jours^2

3) Les candidats avaient une grande marge de manœuvre pour le calcul. Le résultat devait être voisin de 15.140 interventions.

EXERCICE n° 2

Pour cet exercice, il n'y a pas de corrigé type. Cependant, quelques idées devaient être énoncées :

- le salaire brut a augmenté de 0,6% en francs constants entre 95 et 96 ;
- le salaire net a reculé de 0,1% en francs constants entre 95 et 96 ;
- A corps, grade, échelon, identiques, il y a recul en brut et en net ;
- le salaire moyen annuel brut s'établit à 169.030 francs ;
- l'éventail des salaires s'est ouvert…

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice :

1) On remarque que 2 n'est pas décomposable,

que $8 = -1-2-3-4+5+6+7$

$= 1-2-3+4-5+6+7$

$= -1+2+3-4-5+6+7$

etc...

Donc :

a) tout nombre pair n'est pas décomposable

b) la décomposition n'est pas unique

2) On remarque que 6 n'est pas décomposable.

Montrons par récurrence que les multiples de 4 sont décomposables

$4p$

a) vrai pour $p = 1$

b) $4p = \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k$

$$4p+4 = \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k + 4 = \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k - 1 + 2 + 3$$

$$= \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k + 4p - (4p+1) + (4p+2) + (4p+3)$$

$$= \sum_1^{4p+3} \varepsilon_k k$$

Problème 1

1) $2r^2 - r - 1 = 0$

$\Rightarrow r_1 = 1 , \ r_2 = -\frac{1}{2}$

$u_n = \lambda(1)^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$u_0 = a = \lambda + \mu$

$u_1 = b = \lambda - \frac{\mu}{2}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{a+2b}{3} \qquad \mu = \frac{2(a-b)}{3}$

$$u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

2) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}$

3) $v_n = u_{n+1} - u_n$

$u_{n+2} = v_{n+1} + u_{n+1}$

$2(v_{n+1} + u_{n+1}) = u_{n+1} + u_n$

$\Rightarrow 2v_{n+1} = -(u_{n+1} - u_n)$

$$\begin{cases} v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n \\ v_0 = b - a \end{cases}$$

$$v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

$\vdots$

$v_0 = u_1 - u_0$

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_0 = u_n - u_0$

$u_n = a + v_0 \sum_{0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

$$u_n = a + (b-a)\,\frac{1-(-1/2)^n}{3/2}$$

$$= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On retrouve la forme générale de la question 1.

4) $u_{n+2} + \frac{u_{n+1}}{2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2}$

$$\Rightarrow \quad W_{n+1} = W_n$$

La suite (W_n) est constante, égale à $W_0 = u_1 + \frac{u_0}{2} = b + \frac{a}{2}$

$$u_{n+1} + \frac{u_n}{2} = b + \frac{a}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + b + \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{a}{2} + b \end{cases}$$

5) $x_n > 0 \quad \forall n$

On passe au logarithme : $u_n = \ln x_n$

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

$$u_0 = \ln 1 = 0$$

$$u_1 = \ln 2$$

$$x_n = \exp\left\{\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$= e^{+\frac{2}{3}\ln 2\,[1-(-1/2)^n]}$$

$$u_n \to \frac{2}{3}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad x_n \to e^{\frac{2}{3}\ln 2} = 2^{2/3}$$

<u>Problème 2</u> : $I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$

1) • $I(0) = \pi/2$

• $I(1) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$

• $I(2) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$

$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

2) $I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t \cos t \, dt$

$= \left(\sin t \cos^{n-1} t\right)_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-2} t \sin t \, dt$

$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t) \cos^{n-2} t \, dt$

$= (n-1)\, I(n-2) - (n-1)\, I(n)$

$n\, I(n) = (n-1)\, I(n-2)$

3) Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n t \geqslant 0 \Rightarrow I(n) \geqslant 0$

$I(n+1) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \cos t \, dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = I(n)$

en majorant $\cos t$ par 1

4) On a : $I(n+2) \leq I(n+1) \leq I(n)$

$\frac{I(n+2)}{I(n)} \leq \frac{I(n+1)}{I(n)} \leq 1$

$\downarrow$

$= \frac{n+1}{n+2}$

D'où, en passant à la limite :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = 1$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE - AVRIL 1998

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \int_1^2 u^n\,du$ en posant $u = 1+x$

$$= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Exercice 2 :

$$f_t(x) = \frac{t+1}{x^2+t}$$

$x \in \mathbb{R}$, $t > 0 \Rightarrow$ dénominateur toujours > 0

1) $\displaystyle f_t'(x) = \frac{(x^2+t)-(t+1)}{(x^2+t)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+t)^2}$

1er cas : $|x| > 1$

t	0		$+\infty$
$f_t'(x)$		$+$	
$f_t(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\nearrow$	1

2e cas : $|x| < 1$

t	0		$+\infty$
$f_t'(x)$		$-$	
$f_t(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\searrow$	1

3ᵉ cas :

$|x| = 1 \Rightarrow f_t(x) = 1$

D'où :

Minimum : $m(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| > 1$

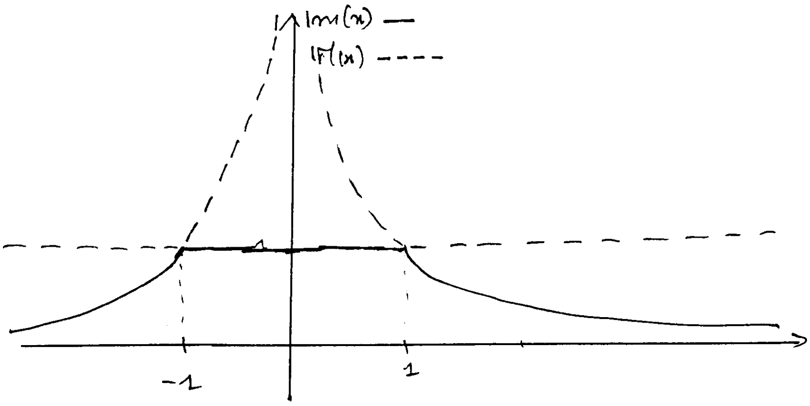
$m(x) = 1$ si $|x| = 1$

$m(x) = 1$ si $|x| < 1$

Maximum : $M(x) = 1$ si $|x| > 1$

$M(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| < 1$

$M(x) = 1$ si $|x| = 1$



Problème :

$f(x) = \frac{x}{e^x+1} \qquad x \geq 0$

1) $f'(x) = \frac{e^x+1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2}$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) - 1 = 0$

$h(x) = e^x(x-1) - 1$

$h'(x) = xe^x$

x	0	1	α	$+\infty$
h'			$+$	
h	-2 ↗	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

h varie continûment en croissant de -2 à $+\infty$ qd x varie de 0 à $+\infty$ $\Rightarrow \exists\, \alpha \,/\, h(\alpha)=0 = f'(\alpha)$

3) α vérifie : $e^{\alpha}(\alpha-1)-1=0$

et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}$

$$e^{\alpha} = \frac{\alpha}{f(\alpha)} - 1$$

$$(\alpha - f(\alpha))(\alpha-1) - f(\alpha) = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha - \alpha f(\alpha) + f(\alpha) - f(\alpha) = 0$$

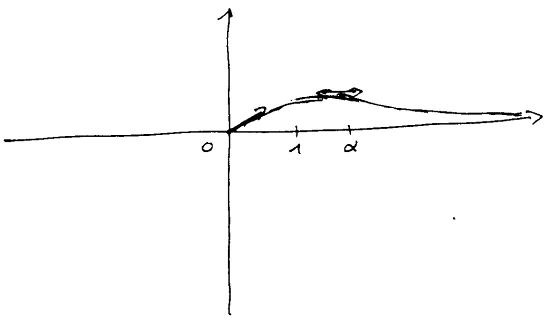
$$\alpha - 1 - f(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$$

4)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\alpha-1$	↘	0

$f'(0) = \frac{1}{2}$



5) $g(x) = 1 + e^{-x}$

$g(\alpha) = 1 + e^{-\alpha} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}} = \alpha - 1 \Rightarrow e^{\alpha}(\alpha - 1) - 1 = 0$

$\downarrow$

(équation vérifiée par α (Q2))

Est-ce l'unique ?

$u(x) = g(x) - x = 1 + e^{-x} - x$

$u'(x) = -e^{-x} - 1 = -\frac{1}{e^{x}} - 1 < 0$

	0	1	α	$+\infty$
$u'(x)$		$-$		
$u(x)$	2	$1/e$	0	$-\infty$

$\exists$ 1 et 1 seule valeur x_0 telle que $u(x_0) = g(x_0) - x_0 = 0$

$\Rightarrow x_0 = \alpha$.

$u(1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

• $g(\alpha) = \alpha \Rightarrow 1 + e^{-\alpha} = \alpha$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha - 1$

Comme $\alpha > 1$, $e^{-\alpha} < e^{-1} \Rightarrow \alpha - 1 < e^{-1}$

6) $g'(x) = -e^{-x}$

x	0	1	α	$+\infty$
g'		$-$		
g	2	$1+\frac{1}{e}$	α	1

Il est trivial que $g(x) \geq 1$

$\forall x \geq 1 \quad g(x) - g(\alpha) = (x - \alpha)\, g'(c) \quad c > 1$

$|g(x) - g(\alpha)| = |x - \alpha| \underbrace{|g'(c)|}_{\text{majoré par } |g'(1)| = e^{-1}}$

7) En utilisant la réponse à la question 6

$$\underbrace{|g(\alpha_0) - \alpha|}_{=|\alpha_1-\alpha|} \leq e^{-1} |\alpha_0 - \alpha|$$

$$|\alpha_2 - \alpha| \leq e^{-1} |\alpha_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-1} |\alpha_{n-1} - \alpha|$$

$$|\alpha_n - \alpha| \leq (e^{-1})^n \underbrace{|1 - \alpha|}_{< e^{-1} \text{ d'après la Q.5}} \quad \text{car } \alpha_0 = 1$$

$$\Rightarrow |\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$

SESSION

D'AVRIL

1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

PROBLEME n° 1

(R) $P(x)\,P(x+2)+P\left(x^2\right)=0$

❶ $Q(x)=P\left(x^2\right)+P(x)\,P(x+2)$

Soit P de degré n, $a_n x^n$ sont terme du plus haut degré.

Le terme du plus haut degré de Q est $a_n x^{2n}+a_n^2 x^{2n}$

$\Rightarrow$ il est de degré $2n$ si $a_n \neq -1$

❷ $P(a)=0$

$$\underbrace{P(a)P(a+2)}_{=0}+P\left(a^2\right)=0$$

$$\Rightarrow P\left(a^2\right)=0 \qquad a^2 \text{ est racine}$$

De même :

$$P\left(a^2\right)P\left(a^2+2\right)+P\left(a^4\right)=0$$

$$\Rightarrow P\left(a^4\right)=0 \qquad a^4 \text{ est racine}$$

❸ Plus généralement, $\left(a^2\right)^k$, $k\in\mathbb{N}$, est racine de P.

Si $a=1$ ou $a=0$, toutes ces quantités sont égales (à 1 ou 0) :

- a = 1 $\Rightarrow$ 1 seule racine (1)
- a = 0 $\Rightarrow$ 1 seule racine (0)
- a = 1 $\Rightarrow$ 2 racines : -1 et 1

On sait, si $|a| \neq 1$ ou 0, il existe une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

❹ $P(a-2)\underbrace{P(a)}_{=0} + P\left((a-2)^2\right) = 0$

$\Rightarrow P\left((a-2)^2\right) = 0$

D'où $(a-2)^2$ est racine de P

et donc : $(a-2)^2 = 0$ ou $(a-2)^2 = 1$

$a = 2$: impossible ($a = 0{,}1$ ou -1)
$a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$ impossible
$a - 2 = 1 \Rightarrow a = 1$ = ok

❺ Soit r l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de P

$$P(x) = \lambda(x-1)^r$$

$$\lambda^2(x-1)^r + \lambda\left(x^2-1\right)^r = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 0 \ ou \ \lambda = -1$$

$$P(x) = -(x-1)^r \qquad (r \in \mathbb{N}^*)$$

❻ Pas de changement si le corps de base est $\mathbb{C}$, sinon que l'on est certain que a existe.

PROBLEME n° 2

❶ $x \in \left[0, \pi/4\right]$

$f(x) = tgx$ est une bijection $\left[0, o/4\right] \to [0,1]$

$\Rightarrow \exists f^{-1} = [0,1] \to \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] fct$ inverse de f

On la note $f^{-1} = Arctg$

❷ $y = Arctg\, x$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \left(\frac{dx}{dy}\right)$$

$$x = tg\, y \qquad \frac{dx}{dy} = 1 + tg^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$Arctg$ est une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$

$Arctg\, x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$ (car $Arctg 0 = 0$)

❸

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(t^2\right)^i = 1 - t^2 + t^4 + \ldots$$

$=$somme des $(n+1)$premiers termes $\sum_{i=0}^{n} \left(-t^2\right)^i$

$$= \frac{1-\left(--t^2\right)^{n+1}}{1-\left(-t^2\right)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

❹ ①

$$Arc\ tg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \underbrace{\int_0^x \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i}\right) dt}_{S_{(n)}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}_{R_n(x)}$$

. $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\dfrac{t^{2i+1}}{2_{i+1}}\right]_0^2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dfrac{x^{2i+1}}{2_{1+1}}$

. $\left|R_n(x)\right| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

sur $[0,1]\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

$\Rightarrow \left|R_n(x)\right| \leq \left[\frac{t^{2n+2}}{2_{n+3}}\right]_0^2 = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$

② $S_n(x) = Arc\ tg - R_n(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = Arc\,tgx$$

③ $S_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2_{i+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

$$\left|Arc\,tg\,1 - S_n(1)\right| = \left|R_n(1)\right| \leq \frac{1}{2_{n+3}}$$

$$\left|\frac{\pi}{4} - S_n(1)\right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$\left|\pi - 4S_n(1)\right| \leq \frac{4}{2n+3}$$

Si on veut une approximation à 10^{-4}

$$\frac{4}{2n+3} \leq 10^{-4}$$
$$\Rightarrow\ n > 9999$$

❺ $Arc\ tg\frac{1}{b} = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{dt}{1+t^2}$

$$t = \frac{au-1}{au+u} \Rightarrow at + nt = au - 1\ ;\ \frac{dt}{du} = \frac{1+u^2}{(a+u)^2}$$

$u(a-t) = at+1$

$u = \frac{at+1}{a-t}$ varie de $\frac{1}{a}$ à 1 (remplacer t par 0 puis t par $\frac{1}{b}$ avec $b = (a+1)/(a-1)$)

$$\int_0^{1/b}\frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{au-1}{a+u}\right)^2}\frac{a^2+1}{(a+u)^2}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1+a^2}{(a+u)^2+(a-u)^2}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1+a^2}{\left(1+a^2\right)u^2+\left(a^2+1\right)}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+u}du = \underbrace{Arc\ tg\ 1}_{\pi/4} - Arc\ tg\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow Arc\ tg\frac{1}{a} + Arc\ tg\frac{1}{b} = \pi/4$$

❻ $a=2(\Rightarrow b=3)$

$$\frac{\pi}{4} = Arc\ tg\frac{1}{2} + Arc\ tg\frac{1}{3}$$

$$= S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left|\pi - 4\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right| = 4\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\leq 4\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$\leq 4\left(\frac{(1/2)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(1/3)^{2n+3}}{2n+3}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2n+3}\left(\frac{4}{2^{2n+1}} + \frac{4}{2^{2n+3}}\right)$$

Pour $n=8, \frac{1}{2n+3}\left(\frac{4}{2^{2n+1}} + \frac{4}{2^{2n+3}}\right) \approx 4{,}02.10^{-7}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1- $M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b \\ a+b & 0 & -(a+b)^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(a)M(b) = M(a+b)$$

2- $M(2a) = M^2(a)$

On montre sans difficulté (récurrence) :

$$M^n(a) = M(na)$$

3- Soit $b = -a$

$$M(a)M(-a) = M(0) = I$$

$$\Rightarrow \quad M^{-1}(a) = M(-a)$$

EXERCICE n° 2

1- $U^2 = nU$

$U^3 = U^2U = nU^2 = n^2U$

<u>Récurrence :</u>

Hypothèse : $U^k = n^{k-1}U$
Vrai pour $k = 1$
Vrai pour k

$$U^{k+1} = U^kU = n^{k-1}UU = n^{k-1}U^2 = n^kU$$

2- Soit A l'inverse de U :

$$AU = I$$

$\Rightarrow$ $AU^2 = U = nAU = nI$

en multipliant par U et en utilisant le résultat de la question 1.

$\Rightarrow$ $U = nI$

ce qui est impossible (sauf si $n = 1$, cas particulier vraiment « très particulier »).

PROBLEME

1- $$I(n) = \int_1^n \ln t \ dt = [t \ \log \ t - t]_1^n$$
$$= n \ln n - (n-1)$$

2- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$

On remarque que $S_n = \ln(n!)$

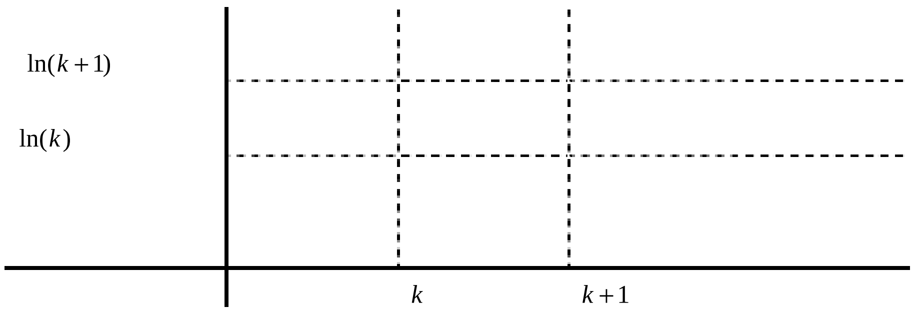
2a- La fonction $t \to \ln t$ est <u>croissante</u> sur $[k, k+1]$, donc $\forall \ t \in [k, k+1]$

$$\ln k \leq \ln t \leq \ln(k+1)$$

Et, par positivité de l'intégrale :

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) \ dt \leq \ln(k+1) \qquad \forall \ k \geq 1$$

<u>Remarque</u> : l'intégralité précédente revient à comparer les aires des rectangles entourant la courbe (C)



2b- Par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_{1}^{n+1} \ln(t)\ dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

ou :

$$S_n \leq I(n+1) \leq S_n + \ln(n+1)$$

D'où l'encadrement :

$$I(n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq I(n+1)$$

$$n\ \ln(n+1) - n \leq S_n \leq (n+1)\ \ln(n+1) - n$$

3- En passant à l'exponentielle :

$$e^{n\ln(n+1)-n} \leq n! \leq e^{(n+1)\ln(n+1)-n}$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n} \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Comme $\left(\frac{n}{e}\right)^{n} < \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n}$, on en déduit l'encadrement (1) demandé.

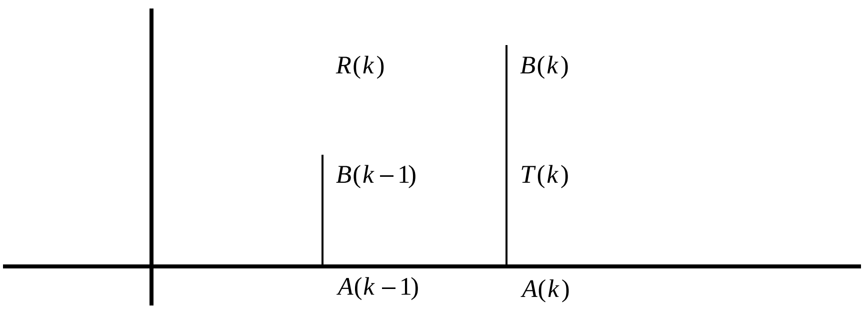
<u>A- Numérique</u> : $n = 10$, $10! = 3628800$

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 453999$$

$$e\left(\frac{11}{e}\right)^{11} \approx 12953130$$

L'encadrement (1) n'apporte à l'évidence aucune approximation intéressante : trop large

4-



Par construction :

$$R(k) + T(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt$$

4a- $T(k)=\frac{1}{2}\left[\ln(k-1)+\ln(k)\right] \qquad (k\geq 2)$

4b- $R(k)=\int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt-T(k)$

$$J=\int_{k-1}^{k}\frac{k-0{,}5-t}{t}\ dt$$

en posant $du=\frac{dt}{t}$ et $u=k-0{,}5-t$

$$J=\left[(k-0{,}5-t)\ \ln t\right]_{k-1}^{k} \qquad + \int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{2}\left[\ln(k)+\ln(k-1)\right]}_{T(k)} \qquad + \int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt=R(k)$$

Posons $t=k-u$, $u=k-t$, $du=-dt$

$$R(k)=\int_{1}^{0}\frac{u-1/2}{k-u}\ (-du)=\int_{0}^{1}\frac{u-0{,}5}{k-u}\ du$$

Intégrons par parties :

$$R(k)=\underbrace{\left[\frac{1}{k-u}\left(\frac{1}{2}\ u^2-\frac{1}{2}\ u\right)\right]_0^1}_{0}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(u^2-u)\ du}{(k-u)^2}$$

$$=\quad -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u(u-1)\ du}{(k-u)^2}$$

5- $g(u)=u-u^2 \qquad 0\leq u\leq 1$

$g'(u)=1-2u$

	0		1/2		1
g'		+	0	-	
g	0	↗	1/4	↘	0

On en déduit :

$$R(k)\leq\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1/4}{(k-u)^2}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{k-u}\right]_0^1$$

$$R(k)\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

6- $U(n)=\sum_{k=2}^{n} R(k)$

6a- $$0 \le \sum_{k=2}^{n} R(k) \le \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}$$
$$= \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

6b- On a :

$$0 \le U(n) \le \frac{1}{8}$$

La série $U(n)$ est croissante (trivial) et majorée, donc convergence :

soit $u = \lim_{n\to+\infty} U(n) = \sum_{k=2}^{\infty} R(k)$

6c- $u - U(n) = \sum_{k \ge n+1} R(k)$

D'où, pour M fixé $\ge n+1$

$$\sum_{k=n+1}^{M} R(k) \le \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{k=n+1}^{M}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{M}\right)$$

$\Rightarrow$, en faisant $M \to +\infty$:

$$u - U(n) \le \frac{1}{8n}$$

7- On sait que :

$$T(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt - R(k)$$

$$\sum_{k=2}^{n} T(k) = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt - \sum_{k=2}^{n} R(k)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n}\ln(k)+\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)\right]}_{\downarrow} = \int_{1}^{n}\ln(t)\, dt - U(n)$$

$$= S_n - \frac{1}{2}\ln(n) \qquad (\text{car } \ln 1 = 0)$$

$$S_n - \frac{1}{2}\ln(n) = n\ \ln(n) - (n-1) + u - U(n) - u$$

$$S_n = n\ \ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + (1-u) + \underbrace{u - U(n)}_{\varepsilon(n)}$$

8- En passant à l’exponentielle :

$$e^{S_n} = n! = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\ n}\ e^{-n}\ e^{1-u}\ e^{u-U(n)}$$

$$= \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\ e^{1-u}\ e^{\varepsilon(n)}$$

D’après 6c, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0 \Rightarrow e^{\varepsilon(n)} \to 1$

$$n! \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

avec $C = e^{1-u}$

9- $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{C\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}{C^2 n\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}}$

$$\frac{1}{C}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ \frac{2^{2n}}{n^{2n}} = \frac{4^n\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{2\pi}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Pour $n = 10$, $n! \sim 3598696$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

EXERCICE n° 1

1) Pour l'année 1991, on a :

- TBM (Malaisie) = 4,6‰
- TBM (France) = 9,2‰ > TBM (Malaisie)

Age	Malaisie	France
<1	12,9‰	7,3‰
1-4	0,9‰	0,4‰
5-14	0,5‰	0,2‰
15-24	1,0‰	0,8‰
25-34	1,3‰	1,2‰
35-44	2,3‰	2,0‰
45-54	5,8‰	4,4‰
55-64	15,2‰	9,4‰
65-74	36,8‰	20,3‰
+ de 75	99,5‰	77,5‰

Par tranche d'âge, tous les taux bruts de mortalité de la France sont inférieurs à ceux de la Malaisie alors que globalement le TBM de la France est plus élevé que le TBM de la Malaisie. Cela s'explique par la structure de la population, plus jeune en Malaisie…

2) Le nombre de décès qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Malaisie, dans l'hypothèse d'un taux de mortalité identique à celui de la France est donné ci-dessous :

Age	Nb de décès
<1	3600
1-4	800
5-14	800
15-24	2900
25-34	3600
35-44	4200
45-54	5800
55-64	8200
65-74	9900
+ de 75	17500
Total	57300

Soit un TBM (Malaisie) de 3,1‰, encore plus faible que celui constaté (4,2‰)…

EXERCICE n° 2

1) P(D<40) = 0,28
P(D>70) = 0,38
P(30<D<60) = 0,19
P(D<30 ou D>60) = 0,81
P(D>60 sachant 20 ans) = 0,70
P(D<80 sachant 30 ans) = 0,80

2)

i	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge S_{xi}	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10q_{xi}$
1	0	1000	150	0,150
2	10	850	50	0,059
3	20	800	50	0,063
4	30	750	30	0,040
5	40	720	40	0,056
6	50	680	120	0,176
7	60	560	180	0,321
8	70	380	230	0,605
9	80	150	130	0,867
10	90	20	20	1,000
11	100	0		

2) e_0 = 54,1 ans
e_{20} = 65,75 ans
e_{70} = 79,47 ans

EXERCICE n° 3

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice. Toutefois, un certain nombre d'idées doivent figurer dans le commentaire :

- la population augmente de 231.000 habitants en 1997 ;
- la population continue de vieillir ;
- le nombre de naissances et de décès diminue ;
- l'indicateur de fécondité est de 1,71 enfant par femme ;
- recul de la mortalité ;
- l'espérance de vie à la naissance est de 74,2 ans pour un homme ;
- l'espérance de vie à la naissance est de 82,1 ans pour une femme ;
- stabilité de l'immigration pour long séjour ;
- 284.500 mariages, augmentation pour la deuxième année consécutive ;
- l'âge au premier mariage est retardé un peu plus chaque année….

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Première partie

1 – $D(f, g) = \text{Sup}_{x \in U} (|f(x) - g(x)|) = 0 \iff |f(x) - g(x)| = 0$ pour tout $x \in U$
$\iff f(x) = g(x) \ \forall x \in U \iff f$ identique à g

2 – On sait que $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \ \forall x \in U$, d'où $D(f, g) = D(g, f)$

3 – $\forall x \in U$, $f - g = f - h + h - g$
D'où $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$

Et donc le résultat.

D est une <u>distance</u> sur l'ensemble F.

4 – On note par $d(x)$ la différence $f(x) - g(x)$.
On montre facilement que d atteint son maximum sur U au point $x = ½$, et que ce maximum $D(f, g)$ vaut $¼$.
$D(f, g)$ est l'écart le plus grand mesuré parallèlement à l'axe des ordonnées entre les graphes des fonctions f et g.

5 – Comme pour la question précédente, soit par le calcul, soit par la représentation graphique, on établit $D(f, g) = 1$. L'écart maximum entre les graphes de f et g est atteint pour $x = ½$.

6 – $d(x) = \cos\pi x - \sin\pi x$; $d'(x) = -\pi(\sin\pi x + \cos\pi x)$.
Il est facile de montrer que d décroît de 1 pour $x = 0$ à $-\sqrt{2}$ pour $x = ¾$.
$D(f, g) = \sqrt{2}$.

7 – Prenons $f(x) = 2\cos\pi x$. $D(f, O) = 2$, atteint en $x = 0$ ou $x = 1$.

Deuxième partie

8 – On sait que la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est majorée par l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction.
D'où :

$$\left|\int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt\right| \leq \int_U \left|f(t) - g(t)\right| dt$$

Soit M = D(f, g) le sup sur U de $|f(t) - g(t)|$.

On a de façon évidente, en majorant $|f(t) - g(t)|$ par M dans la deuxième intégrale :

$$\left|\int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt\right| \leq M = D(f, g)$$

9 – $f_n(x) = (\sin n^2x) / n$

$D(f_n, O) = \text{Sup } |\sin n^2x| / n = 1 / n$ car le maximum en valeur absolue du numérateur est 1, atteint pour $x = \pi / 2n^2$ qui est bien dans U dès que n est supérieur ou égal à 2.

$f'_n(x) = n(\cos n^2x)$; le sup sur U de $n(\cos n^2x)$ est égal à n, atteint pour x = 0 ou π/n^2.

Troisième partie

11 – On remarque que $P_n(x) = \Sigma_k (-1)^k (x/2)^k$, où k varie de 0 à n et $x \in U$, n'est autre que la somme des n+1 premiers termes d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $-x/2$.

$P_n(x) = [1 - (-x/2)^{n+1}]/[1 + x/2]$

Donc un calcul élémentaire permet d'établir que:
$f(x) - P_n(x) = - (x/2)^{n+1}/ [1 + x/2]$

D'où : $|f(x) - P_n(x)| = (x/2)^{n+1}/ [1 + x/2]$, quantité notée d(x)

Le calcul de d'(x) montre que la dérivée de d(x) a le signe de x^n (n + 1 – nx/2), c'est-à-dire est positif ou nul sur U.
La fonction d(x) est donc croissante sur U, son maximum est ainsi atteint en x = 1 et :

$D(f, g) = (1/2)^{n+1}/(1 + ½) = 1 / (3.2^n)$.

12 a – Soit à établir l'égalité suivante :
(E) $e^x - P_n(x) = J(n, x)$
où J(n, x) est l'intégrale $\int_{[0,x]} [e^t (x-t)^n /n!]\, dt$

Faisons une intégration par parties pour calculer J(n, x) : on prend $u(t) = e^t$ et $v'(t) = (x-t)^n /n!$.

On obtient : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -(x-t)^{n+1} /(n+1)!$.

D'où :

$$J(n, x) = [-e^t (x-t)^{n+1} /(n+1)!]^x_0 + \int_{[0,x]} [e^t (x-t)^{n+1} /(n+1)!]\, dt$$

$$J(n, x) = x^{n+1} /(n+1)! + J(n+1, x)$$

De la relation précédente, on en déduit :

- L'égalité (E) est évidemment vérifiée pour n = 1
- Supposons que (E) soit vérifiée au niveau n. On a :

$$e^x - P_n(x) = J(n, x) = x^{n+1} /(n+1)! + J(n+1, x)$$

Or $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1} /(n+1)!$

D'où le résultat cherché :

$$e^x - P_{n+1}(x) = J(n+1, x)$$

12 b – On a :

$$\left| e^x - P_n(x) \right| = \left| \int_{[0,x]} e^t (x-t)^n /n!\, dt \right|$$

Or, $\forall$ t $\in$ [0, x], $e^t \leq e$ (car $x \leq 1$), d'où :

$0 \leq e^t (x–t)^n /n! \leq e (x–t)^n /n!$

Par intégration :

$$0 \leq \int_{[0,x]} e^t (x–t)^n /n! \leq \int_{[0,x]} e (x–t)^n /n! = e[– (x–t)^{n+1} /(n+1)!]^x_0$$

$= e\, x^{n+1} /(n+1)!$

$\forall x \in U, \left| e^x – P_n(x) \right| \leq e\, x^{n+1} /(n+1)! \leq e/(n+1)!$

Comme cette majoration est vraie quel que soit x, $D(f, P_n) \leq e/(n+1)!$

13 a – Les premiers polynômes de la suite sont :

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = 3\, P_1(x/3) – 4\, (P_1(x/3))^3 = x – 4\, x^3/27$

De même :

$P_3(x) = 3\, P_2(x/3) – 4\, (P_2(x/3))^3 = x – 40\, x^3/27 + 16\, x^5/3^7 – 64\, x^7/3^{12} + 256\, x^9/3^{18}$

13 b – $T(x) = 3x – 4\, x^3$ définie pour x entre –1 et +1 (intervalle noté A)

On remarque immédiatement que la récurrence sur les polynômes s'écrit :
$P_{n+1}(x) = T(P_n(x/3))$

Un calcul élémentaire montre que T' est négative entre – 1 et – ½, positive entre – ½ et ½ et négative entre ½ et 1. L'application T est donc décroissante de 1 à – 1 entre – 1 et – ½, croissante de – 1 à 1 entre – ½ et ½ et à nouveau décroissante de 1 à – 1 entre ½ et 1.

On constate donc que $\forall x \in A, T(x) \in A$.

On montre en outre que T'' est positive entre – 1 et 0, négative entre 0 et 1, et donc T' croit de –9 à 3 entre – 1 et 0 puis décroit de 3 à – 9 entre 0 et 1.

Il s'en suit que $\forall x \in A, \left| T'(x) \right| \leq 9$.

D'après la formule des accroissements finis, on a :

$T(u) - T(v) = (u - v)\, T'(w)$, w entre u et v, d'où :

$|T(u) - T(v)| = |u - v|\, |T'(w)|$

En majorant $|T'(w)|$ par 9, on obtient :

$$\forall\, u, v \in A \quad |T(u) - T(v)| \leq 9\,|u - v|$$

13 c – Calcul classique en écrivant sin (2a + a) = sin 2a cosa + cos 2a sin a
En remplaçant sin2a par 2sina cosa et cos2a par cos²a – sin²a, on a (en notant sina = S et cosa = C) :

$\sin 3a = 2S\,(1 - S^2) + S(1 - 2S^2) = 3S - 4S^3$

On remarque immédiatement que $\sin x = T(\sin(x/3))$.

13 d – Exercice classique ; il suffit d'étudier sur U les variations des fonctions intermédiaires $u(x) = x - \sin x$ et $v(x) = x^3/6 - x + \sin x$ pour obtenir la double inégalité recherchée :

$$0 \leq x - \sin x \leq x^3/6$$

13 e – Procédons par récurrence :

- Pour n = 1, on a bien sûr $P_1(x) \in A$ puisque $P_1(x) = x$, et $|P_1(x) - \sin x| \leq x^3 / 6$, d'après les inégalités de la sous-question 13d.

- Supposons la propriété vérifiée au rang n.

Faisons intervenir l'application T.

On a remarqué précédemment que $P_{n+1}(x) = T(P_n(x/3))$. Or puisque $P_n(x/3) \in A$, $T(P_n(x/3)) \in A$ d'après l'étude de l'application T à la sous-question 13b.

De plus, $\sin x = T(\sin(x/3))$, et donc :

$|P_{n+1}(x) - \sin x| = |T(P_n(x/3)) - T(\sin(x/3))| \leq 9\,|P_n(x/3) - \sin(x/3)| \leq 9\,(x/3)^3 / (2.3^n) =$
$= x^3 / (2.3^{n+1})$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1 – On peut écrire T = a I + R avec R la matrice d'ordre 3 de coefficients r(i, j) dont tous les coefficients sont nuls sauf r(1, 2) = r(2, 3) = b et r(1, 3) = c.

Un calcul simple montre que R^2 est nulle sauf le coefficient (1, 3) égal à b^2 et que $R^k = 0$ pour $k \geq 3$.

2 – En appliquant la formule du binôme à T = aI + R, et en tenant compte de ce qui précède, on obtient :

$T^n = a^n I + n a^{n-1} R + n(n-1) a^{n-2} R^2 / 2$

La matrice T^n appartient à la classe Δ avec comme élément diagonal a^n, élément de type « b » $n a^{n-1}b$, et élément de type « c » $n a^{n-1}c + n(n-1) a^{n-2} b^2 / 2$.

3 a – On a : $AX = X^n.X = X^{n+1} = X.X^n = XA$
Donc X commute avec A.

3 b – Ecrivons de façon générique la matrice X sous la forme :

$$X = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ G & h & i \end{matrix}$$

Le calcul de XA donne pour éléments :

(1, 1) a
(1, 2) 2a + b
(1, 3) 3a + 2b + c
(2, 1) d
(2, 2) 2d + e
(2, 3) 3d + 2e + f
(3, 1) g
(3, 2) 2g + h
(3, 3) 3g + 2h + i

De même, le calcul de AX conduit à :

(1, 1) a + 2d + 3g
(1, 2) b + 2^e + 3h
(1, 3) c + 2f + 3i
(2, 1) d + 2g
(2, 2) e + 2h
(2, 3) f + 2i
(3, 1) g
(3, 2) h
(3, 3) i

Le fait que AX = XA entraîne que :

g = 0 d'après (3, 2)
h = 0 d'après (3, 3)
h = d = 0 d'après (2, 2)
e = i d'après (2, 3)
a = e d'après (1, 2)
a = e = i et donc b = f d'après (1, 3)

X appartient donc à la classe Δ.

3 c – Soit à résoudre l'équation (E). Compte tenu de la forme particulière de A, on a le système :

$a^n = 1$
$n\, a^{n-1} b = 2$
$n\, a^{n-1} c + n(n-1)\, a^{n-2}\, b^2 / 2 = 3$

Pour n impair, on obtient :

a = 1
b = 2/n
nc + 2(n – 1)/n = 3

Il y a une unique solution pour n impair : T(1, 2/n, (n+2)/n²)

Pour n pair, on trouve le triplet (1, 2/n, (n+2)/n²) ainsi que le triplet opposé (–1, – 2/n, – (n+2)/n²).

EXERCICE n° 2

1 – La somme des équations du système donne a + b + c + d = 0. Cette condition est donc nécessaire pour que le système admette au moins une solution.

Supposons cette solution satisfaite, l'une des équations est la conséquence des autres ; calculons y, z et t en fonction de x.

$y = a + 0{,}75x$
$z = b + y - 0{,}25x = a + b + 0{,}5x$
$t = 0{,}25x - d$

La condition supplémentaire équivaut alors à $2a + b + d + 2{,}5x = r$.

Il en résulte les expressions suivantes :

$x = 2(r - 3a - 2b - c) / 5$
$y = (3r + a - 6b - 3c) / 10$
$z = (r + 2a + 3b - c) / 5$
$t = (r + 7a + 8b + 9c) / 10$

2 a – En appliquant la définition de m_n et M_n, on peut écrire pour tout n :
$m_n \leq u_n \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+1} \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+2} \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+3} \leq M_n$; il en résulte que :

$4m_n \leq u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \leq 4M_n$

ou encore $m_n \leq u_{n+4} \leq M_n$

2 b – Puisque m_n est inférieur à u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, u_{n+4} , il est inférieur au plus petit de quatre et donc $m_n \leq m_{n+1}$, et la suite m_n est croissante.

De même, on a $M_{n+1} \leq M_n$, et la suite M_n est décroissante.

On peut donc écrire pour tout entier n : $m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0$

Il en résulte que les suites m_n et M_n sont respectivement majorée et minorée : ces deux suites sont donc convergentes et leurs limites m et M vérifient $m \leq M$.

2 c – Parmi les quatre nombres u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, l'un est égal à m_n et les autres sont inférieurs à M_n. Il en résulte $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \leq 3M_n + m_n$, ou encore $u_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m_n$.

2 d – Par ailleurs, la suite m_n étant croissante de limite m, on a $u_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$.
En remplaçant n par n+1, n+2, n+3, on peut écrire $4u_{n+5} \leq 3M_{n+1} + m$, $4u_{n+6} \leq 3M_{n+2} + m$, $4u_{n+7} \leq 3M_{n+3} + m$. Or la suite M_n est décroissante donc pour k = n+', n+5, n+6, n+7, on a $u_k \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$ et le maximum M_{n+4} de ces nombres vérifie alors est $M_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$.

2 e – Puisque la suite M_n converge vers M, en passant à la limite dans cette inégalité, on a $M \leq m$.
On sait en plus que $m \leq M$, d'où m = M et les deux suites m_n et M_n sont adjacentes.

Pour tout n, l'inégalité $m_n \leq u_n \leq M_n$ prouve que u_n converge vers la limite commune à m_n et M_n.

EXERCICE n° 3

1 – La fonction s est impaire, s(0) = 0.
$s'(x) = (e^x + e^{-x})/2$
La tangente en (0, 0) est la droite d'équation y = x, car s'(0) = 1.
$s''(x) = s(x)$
Comme s est croissante sur R et s(0) = 0, $s(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 0$, et $s(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
Donc s est convexe sur R^- , concave sur R^+.
Il est clair que s(x) tend vers + ∞ quand x tend vers + ∞ : branche parabolique dans la direction de Oy.

2 – Continue et strictement croissante sur R, s est une bijection de R sur R.

Soit a un réel ; s(x) = a est équivalent à $x = \ln(a + (1 + a^2)^{1/2})$

Ainsi, h, inverse de s, est une application de R dans R définie par $h(x) = \ln(x + (1 + x^2)^{1/2})$

3 – Pour tout x réel, $1 + x^2$ est positif strictement et donc $(1 + x^2)^{1/2}$ est dérivable sur R, donc f également comme somme et composée de fonctions dérivables.

Il est facile d'établir que $h'(x) = 1 / (1 + x^2)^{1/2}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

EXERCICE n° 1

Question 1

Période	France	USA	Autres	Total
1960-1964	50,3%	29,4%	20,3%	100,0%
1965-1969	50,6%	27,0%	22,4%	100,0%
1970-1974	53,5%	23,3%	23,2%	100,0%
1975-1979	48,8%	29,3%	21,9%	100,0%
1980-1984	49,4%	33,6%	17,0%	100,0%
1985-1989	35,7%	44,9%	19,4%	100,0%

Graphique : histogramme ou camembert par exemple

Commentaires : part de la France diminue au profit des USA. En plus, le nombre d'entrées chute…

EXERCICE n° 2

Question 1

Courbe non tracée ici

Période 1 : 1960-1968
Période 2 : 1968-1982
Période 3 : 1982-1990

La pente correspond à l'évolution (diminution pour les périodes 1 et 3, stabilité pour la période 2) annuelle du nombre d'entrées (exprimé en millions). Pour la dernière période, la lecture graphique donne une diminution annuelle de l'ordre de 10 millions d'entrées (environ -7%/an), ce qui donne un chiffre pour 1991 de l'ordre de 100 millions d'entrées si on prend en compte le tracé de la droite.

Question 2

Année	E (indice)	Prix (indice)	IGP	Prix relatif
1960	100	100	100	100
1966	66	180	123,9	145
1972	52	315	171,2	184
1978	50	637	307,9	207
1984	54	1117	569,9	196
1990	34	1498	695,7	215

Question 3

Courbe non tracée ici

Le nombre d'entrées en 1991 est d'environ 130 millions selon cette méthode, soit plus élevé qu'avec la méthode précédente

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

La fonction f est définie pour $x \notin [-1, 1]$
On remarque que f est paire : il suffit donc de l'étudier sur $]1, +\infty[$ puis de faire une symétrie axiale par rapport à l'axe Oy pour avoir l'ensemble de la courbe.

f est continue, dérivable, et $f'(x) = 1 / x\ln x$ pour x supérieur à 1

Quand x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $+\infty$; en outre, comme $\ln x < x$, f(x)/x est majoré par $\ln x/x$ et tend donc vers 0 quand x tend vers l'infini : branche parabolique 0x.
Quand x tend vers 1, f(x) tend vers $-\infty$.

La fonction f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e, et sa tangente en ce point a pour pente 1/e.

Tangentes :

En A (e, 0), l'équation de la tangente D(A) est $y = -1 + x/e$

En B (-e, 0) , l'équation de la tangente D(B) est $y = -1 – x/e$

D(A) et D(B) se coupent au point C d'abscisse 0 et d'ordonnée –1.

Normales :

En A (e, 0), l'équation de la normale $\Delta(A)$ est $y = 1 - x/e$

En B (-e, 0) , l'équation de la tangente $\Delta(B)$ est $y = 1 + x/e$

$\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ se coupent au point D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1.

Le quadrilatère ADBC est un losange, de surface 2e.

Problème n° 2

1) La fonction $f(x) = (4 + x^4)^{-1/2}$ est définie pour tout x réel. Elle est paire, ce qui permet de l'étudier sur R^+
Sa dérivée f', qui existe en tout point, est donnée par :

$f'(x) = -2x^3(4 + x^4)^{-7/2}$ est donc négative sur R^+ ; f est donc décroissante de f(0) = ½ à 0.

Sa tangente en x = 0 a une pente nulle, et est parallèle à l'axe horizontal.

2) Considérons la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

2.1) La fonction f étant continue sur R, F(x) existe pour tout réel x.
Concernant la parité de F, calculons F(-x) :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\, dt$$

Faisons le changement de variable u = -t ; comme f est paire, on en déduit immédiatement que F est impaire, F(-x) = - F(x).

2.2) Puisque f est continue, elle admet une primitive notée H. Et F(x) = H(2x) – H(x).
La dérivée de F est donc :

$F'(x) = 2f(2x) – f(x) = 2(4 + 16x^4)^{-1/2} - (4 + x^4)^{-1/2} = (1 + 4x^4)^{-1/2} - (4 + x^4)^{-1/2}$

2.3) D'après la question 1, on sait que f est décroissante sur R^+ ; et donc on a les inégalités $f(2x) \le f(t) \le f(x)$ pour tout t entre x et 2x.

Par définition de F, en intégrant entre x et 2x la double inégalité précédente, on obtient :

$x\, f(2x) \le F(x) \le x\, f(x)$

ou encore :

$$x.(4 + 16x^4)^{-1/2} \le F(x) \le x.(4 + x^4)^{-1/2}$$

Il est évident (comparer les puissances des termes de plus haut degré) que les quantités qui encadrent F(x), respectivement $x.(4 + 16x^4)^{-1/2}$ et $x.(4 + x^4)^{-1/2}$, ont pour limite 0 quand $x \to +\infty$.
Il s'en suit que F(x) tend également vers 0 quand $x \to +\infty$.

3) Puisque F est impaire, étudions-la sur R^+.
D'après l'expression de F' donnée à la question 2.2, en réduisant au même dénominateur et en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée du numérateur, on obtient :

$F'(x) = (3 - 3x^4)\,(1 + 4x^4)^{-1/2}\,(4 + x^4)^{-1/2}\,[(4 + x^4)^{-1/2} + (1 + 4x^4)^{-1/2}]$

Cela revient à dire que le signe de F' est celui de $(3 - 3x^4) = 3\,(1 - x^2)\,(1 + x^2)$

Comme F' est positive sur [0, 1[, nulle en 1, négative sur]1, + ∞[, F est donc croissante de 0 (F(0) = 0) à 1 puis décroissante de 1 à + ∞ (avec lim F(x) = 0 en + ∞).

En x = 0, la pente de la tangente est F'(0) = ½.

4) Considérons la valeur absolue de E(x) ; on a l'inégalité suivante pour tout x strictement positif :

$$|E(x)| \le x \int_x^{2x} |f(t) - u(t)|\,dt$$

Calculons $|f(t) - u(t)|$; après mise au même dénominateur et simplification, on trouve :

$|f(t) - u(t)| = |\,-4\,t^{-2}\,(4 + t^4)^{-1/2}\,[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}]^{-1}|$

Or on a les inégalités suivantes :

$(4 + t^4)^{1/2} \ge t^2$

$[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}] \ge 2\,t^2$

Et donc $t^2\,(4 + t^4)^{1/2}\,[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}] \ge 2\,t^6$

La quantité $|f(t) - u(t)|$ est majorée par $2\,t^{-6}$, et on en déduit :

$$|E(x)| \le x \int_x^{2x} 2\,t^{-6}\,dt$$

ou encore, après intégration :

$|E(x)| \le 31\,x^{-4} / 80$

Comme le majorant de $|E(x)|$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, on en déduit que lim E(x) = 0 pour $x \to +\infty$.

Problème n° 3

1) La fonction f (impaire) peut être étudiée uniquement sur R^+. Sa dérivée f' est donnée par $f'(x) = 1 + 3x^2$, donc strictement positive, ce qui entraîne que f est une application monotone strictement croissante sur R^+. Plus généralement, par symétrie, f est une bijection de R dans R.

La fonction f admet donc une fonction inverse, ou réciproque, elle aussi monotone strictement croissante de R dans R et impaire, traditionnellement notée f^{-1}, et qui sera notée par la suite g.

2) Soit x un réel tel que $f(x) = x + x^3$; puisque g est une bijection, on peut écrire $x = g(y)$, $y \in R$; la relation déninissant f devient alors :

$f(g(y)) = g(y) + g^3(y) = y$ car f o g = identité

3) Par construction de la fonction réciproque, le graphe de g est le symétrique de f par rapport à la première bissectrice.

4) On sait que f est dérivable sur R, que f' ne s'annule pas sur R ; donc il s'en suit que g est dérivable sur R et d'après les résultats classiques, on a :

$g'(x) = 1 / f'(g(x))$

La dérivée de g est donc égale à :

$g'(x) = 1 / [1 + 3\, g^2(x)]$

A propos des variations de g', on peut avoir les éléments suivants :

- g' est strictement positive
- comme g est une fonction impaire, g' est une fonction paire
- g est strictement croissante et positive sur R^+, $1 + 3\, g^2(x)$ est également strictement croissante et positive sur R^+, et par conséquent g' est strictement décroissante (et positive)
- comme g' est paire, g' est croissante sur R^-.

Donc, de $-\infty$ à 0, g' est croissante de $\lim_{x\to-\infty} g'(x) = 0$ à $g'(0) = 1$, puis g' décroît sur $[0, +\infty[$ de $g'(0) = 1$ à $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

5) Soit la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

Effectuons le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale. Les bornes de l'intégrale deviennent 0 et $g(x)$.

On a $dt = f'(u)\, du = (1 + 3u^2)\, du$ et $g(f(u)) = u$; d'où :

$$G(x) = \int_0^{g(x)} u\,(1 + 3u^2)\, du = [2\, g^2(x) + 3\, g^4(x)] / 4$$

Comme g est impaire, on voit immédiatement que G est paire (on va donc l'étudier sur R^+), et, en outre, comme G est la primitive de g s'annulant en 0, on a $G' = g$.

On sait que g est croissante sur R et que $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

On en déduit que G est une fonction croissante sur R^+, allant de $G(0) = 0$ à $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB dans le triangle ABC ; $\sin\alpha$ = CH/AC et donc il est évident que la longueur de AD est égale au produit AB.CH, soit 2S où S est la surface du triangle ABC.

2) D'après le résultat de la question 1, écrire que le produit vectoriel de MA et MB est une constante positive a revient à écrire que :

AB.MH = a

Où H est le pied de la projection orthogonale de M sur AB.
C'est-à-dire que la distance MH est égale à la constante a/AB.

L'ensemble des points M recherché est donc l'ensemble des points dont la distance orthogonale à AB est une constante, c'est-à-dire les deux droites parallèles à AB et situées à la distance a/AB de la droite AB.

Problème n° 2

Partie A :

1) Soient P et Q deux polynômes de E(n), a une constante réelle ; il est trivial d'établir que $g(aP + Q) = ag(P) + g(Q)$

2) Ecrivons le polynôme $P(x) = \Sigma_k a_k x^k$, avec k = 0 à n.

Remarque préliminaire : il est évident que pour n=0 (ensemble des polynômes constants), g(P) = 0.

Considérons donc le cas non trivial (n non nul).

$P' = \Sigma_k ka_k x^{k-1}$ avec k = 1 à n

$P'' = \Sigma_k k(k-1)a_k x^{k-2}$ avec k = 2 à n.

Le coefficient du terme x^n est $n(n-1) a_n + 2n a_n = n(n+1) a_n$ qui est différent de zéro puisque a_n est non nul.

Donc, si degré P = n, alors degré g(P) = n.

3) Soit à déterminer l'ensemble des polynômes P tels que g(P) = O.

D'après la question précédente, pour tout polynôme de degré n ($n \geq 1$), g(P) est aussi de degré n ; il ne peut donc être nul.

D'où le noyau de g se réduit à l'ensemble des constantes.

4) La matrice de g dans B est donnée par les coefficients dans B de g(1), g(x), …., $g(x^n)$.

$g(1) = 0$
$g(x) = 1 + 2x$
…..
$g(x^k) = k(1-k) x^{k-2} + k x^{k-1} + k(k+1)x^k$

La matrice G est donc :

0 1 -2 0 0 …………………0
0 2   2 0 0 …………………0
0 0   6 0 0 …………………0

…………………k(1-k)….
……………………k…….
…………………k(k+1)

……………………………….n(n+1)

G est une matrice dont le triangle inférieur est nul. Le polynôme caractéristique conduisant aux valeurs propres est donné par :

$D(\lambda) = \Pi_k\ [k(k+1) - \lambda]$ où k varie de 0 à n.
Les n+1 valeurs propres sont donc $\lambda = k(k+1)$, k = 0 à n.

Partie B :

1) Trivial : h(aP + Q) = ah(P) + h(Q)

2) Degré de h(P) : examinons quelques cas particuliers.
Soit P polynôme constant (degré nul) : h(P) est nul.
Soit P de degré 1 : P(x) = a + bx
Alors h(P) = a + b(x+2) – 2a –2b(x+1) + a + bx = 0
Soit P de degré 2 : $P(x) = a + bx + cx^2$; h(P) = 2c, polynôme constant de degré nul.

Cas général :
$P(x) = \Sigma_k\ a_k\ x^k$, avec k = 0 à n

En développant h(P) et en écrivant les coefficients des termes de puissance n, n-1 et n-2, on constate que le coefficient de x^n est nul, ainsi que celui de x^{n-1}, alors que le coefficient de x^{n-2} est non nul, égal à $n(n-1)\ a_n$.

Conclusion : pour P de degré $n \geq 2$, le degré de h(P) est de degré n-2 ; pour n = 1 ou n = 0, h(P) est nul.

3) Compte tenu des résultats de la question précédente, le noyau de h est constitué des polynômes de E(1), c'est-à-dire les polynômes de degré 0 ou 1.

Problème n° 3

Partie A :

Le polynôme $D(\lambda)$ des valeurs propres s'obtient en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$, où I est la matrice unité de dimension 4.

Le calcul conduit à :

$D(\lambda) = (\lambda^2-4)(\lambda^2-6)$

Les valeurs propres sont donc 2, -2, $-\sqrt{6}$, $+\sqrt{6}$

Le système vérifié par le vecteur propre (x, y, z, t) associé à la valeur propre λ est :

$4t = \lambda x$; $3z = \lambda t$; $2y = \lambda z$; $x = \lambda t$

$\lambda=2$
Un vecteur propre est (2, 0, 0, 1), ou, normé, $(2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})$

$\lambda=-2$
Un vecteur propre est (-2, 0, 0, 1), ou, normé, $(-2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})$

$\lambda=\sqrt{6}$
Un vecteur propre est $(0, \sqrt{6}/2, 1, 0)$, ou, normé, $(0, \sqrt{3}/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{5}, 0)$

$\lambda=-\sqrt{6}$
Un vecteur propre est $(0, -\sqrt{6}/2, 1, 0)$, ou, normé, $(0, -\sqrt{3}/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{5}, 0)$

Partie B :

Le polynôme caractéristique est $D(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-k)$

Cela conduit à quatre situations :

Cas n°1 : $k = 0$
$\lambda = 2$, $\lambda = 0$ (racine double)

Cas n°2 : $k = 4$
$\lambda = 2$ (double), $\lambda = -2$

Cas n°3 : $k < 0$
$\lambda = 2$

Cas n°4 : $k > 0$
$\lambda = 2$, $\lambda = -\sqrt{k}$, $\lambda = \sqrt{k}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Soit X la variable aléatoire « nombre de pannes survenant au cours d'une période de 40 jours sur un photocopieur donné », on recherche P(X>0). On sait que P(X>0)=1-P(X=0) car X prend les valeurs comprises entre 0 et 40 incluses. P(X=0) correspond à aucune panne recensée au cours de la période des 40 jours. La probabilité qu'un photocopieur ne tombe pas en panne un jour donné est connue et est égale à 1-p. De plus, les évènements « pas de panne le premier jour », « pas de panne le second jour »,…, « pas de panne le 40ème jour », sont indépendants ; ce qui permet d'utiliser le théorème des probabilités composées dans le cas de l'indépendance.

$P(X=0)=(1-p)^{40}$

Donc P(X>0) est égale à $1-0,998^{40}=0,077$

2) La variable X suit une loi binomiale de paramètres n=40 et p=0,002. En effet,

- au cours de chaque épreuve (journée), l'événement « panne » ou « non panne » se produit ;
- ces épreuves sont indépendantes car on suppose que les réparations sont effectuées de telle façon que la probabilité qu'une machine retombe en panne après réparation le lendemain d'un jour avec panne est identique à celle de tomber en panne le lendemain d'un jour sans panne ;
- les conditions d'utilisation ne varient pas d'un jour à l'autre.

3) P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)

P(X=0) est connue (voir question 1), c'est $(1\text{-}p)^{40}$=0,92304

Pour calculer P(X=1), on va utiliser les propriétés de la loi binomiale, à savoir

$$P(X=k)=C_{40}^{k}(0,002)^{k}(1-0,002)^{40-k}$$

Pour k=1, on trouve 0,07399. Donc la probabilité cherchée vaut 0,00297

4) Sans préciser ici les règles d'application, on peut dire que la variable Y suit également une loi binomiale de paramètres n=52 et de p'=0,077.

L'espérance mathématique E(Y) vaut np' soit 4 photocopieurs.
La variance V(Y) vaut np'(1-p') soit 3,7. Son écart-type est égal à 1,9 photocopieurs.

Exercice n° 2

1) La probabilité pour qu'une machine soit disponible à la clientèle un jour donné est de 1-0,1=0,9. La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n=2 et p=0,9

Donc P(Y=0)=0,01 ; P(Y=1)=0,18 ; P(Y=2)=0,81

2) La variable Y définie à la question 1 correspond à l'Offre, la variable X à la Demande et la variable Z exprime la confrontation entre l'Offre et la Demande. Le nombre de machines louées est égal à :

- la demande exprimée X si celle-ci n'excède pas l'offre disponible Y ;
- l'offre disponible Y si la demande X est supérieure à cette offre disponible.

Les lois d'Offre et de Demande sont indépendantes, on peut donc écrire que P(X demandé et Y offert)=P(X demandé).P(Y offert)

Le tableau ci-dessous confronte l'Offre et la Demande

	P(Y=0)=0,01	P(Y=1)=0,18	P(Y=2)=0,81
P(X=0)=0,05	P(Z=0)=0,0005	P(Z=0)=0,0090	P(Z=0)=0,0405
P(X=1)=0,20	P(Z=0)=0,0020	P(Z=1)=0,0360	P(Z=1)=0,1620
P(X=2)=0,45	P(Z=0)=0,0045	P(Z=1)=0,0810	P(Z=2)=0,3645
P(X=3)=0,30	P(Z=0)=0,0030	P(Z=1)=0,0540	P(Z=2)=0,2430

On tire de ce tableau que la loi de probabilité de la variable Z est la suivante :

P(Z=0)=0,0595
P(Z=1)=0,3330
P(Z=2)=0,6075

1) E(Z)=(0 x0,0595) + (1x0,3330) + (2x0,6075) = 1,548 machines louées

La marge brute moyenne est donc de 1.548 francs

2) La loi de probabilité de Y change dans le cas d'acquisition d'une troisième machine. Ce qui donne le tableau de synthèse ci-dessous :

	P(Y=0)=0,001	P(Y=1)=0,027	P(Y=2)=0,243	P(Y=3)=0,729
P(X=0)=0,05	P(Z=0)=0,00005	P(Z=0)=0,00135	P(Z=0)=0,01215	P(Z=0)=0,03645
P(X=1)=0,20	P(Z=0)=0,00020	P(Z=1)=0,00540	P(Z=1)=0,04860	P(Z=1)=0,14580
P(X=2)=0,45	P(Z=0)=0,00045	P(Z=1)=0,01215	P(Z=2)=0,10935	P(Z=2)=0,32805
P(X=3)=0,30	P(Z=0)=0,00030	P(Z=1)=0,00810	P(Z=2)=0,07290	P(Z=3)=0,21870

P(Z=0)=0,05095
P(Z=1)=0,22005
P(Z=2)=0,51030
P(Z=3)=0,21870

E(Z)=1,89675 machines louées. La marge brute moyenne quotidienne passe alors à 1.707,08 francs. L'achat de la troisième machine est donc intéressant.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Préliminaires :

$a = (z + \overline{z})/2$

$b = (z - \overline{z})/2i = i(\overline{z} - z)/2$

$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$

$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})/2$

Première partie :

1) $f_n(0) = n$ et $g_n(0) = 0$

2) On a :

$S(x) = f_n(x) + i\, g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}$

En posant $e^{i2x} = a$, $S(x) = a + a^2 + \dots + a^n = a(1 - a^n)/(1 - a)$

$S(x) = e^{i2x}(1 - e^{i2xn})/(1 - e^{i2x})$

$= e^{i(n+1)x}(e^{inx} - e^{-inx})/(e^{ix} - e^{-ix}) = [\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x]\sin nx / \sin x$

$f_n(x)$ est la partie réelle de $S(x)$, égale à $\cos(n+1)x.\sin nx / \sin x$

D'après les formules élémentaires de trigonométrie,
$\cos a \sin b = [\sin(a + b) - \sin(a - b)]/2$

d'où le résultat :

$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$

De même, $g_n(x)$ est la partie imaginaire de $S(x)$, d'où :

$g_n(x) = \sin(n+1)x \sin nx / \sin x = [\cos x - \cos(2n +1)x] / 2 \sin x$

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction $h(x)$ définie sur $[0 , \pi/2]$ par :

$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x$ pour $0 < x \leq \pi/2$

$h(0) = \alpha$

h est le rapport de deux fonctions dérivables sur $]0 , \pi/2]$, donc est dérivable sur ce même intervalle.

En outre, on sait que sinx est équivalent à x quand x tend vers 0, et donc :
$\lim_{x\to 0} [h(x) - h(0)]/x = \beta$
La fonction h est dérivable à droite en 0, $h'(0) = \beta$.

Par suite, h est dérivable sur l'intervalle fermé $[0 , \pi/2]$.

Calcul de h'(x) pour $x \in [0 , \pi/2]$ *:*

$h'(0) = \beta$

Sur $]0 , \pi/2]$, $h'(x) = [(\alpha + 2\beta x)\sin x - (\alpha x + \beta x^2)\cos x]/\sin^2 x$

h' est le rapport de deux fonctions continues sur $]0 , \pi/2]$; elle est donc continue sur $]0 , \pi/2]$.
En outre, quand x tend vers 0, $h'(x) \approx [(\alpha + 2\beta x)x - (\alpha x + \beta x^2)1]/x^2 = \beta = h'(0)$

$\Rightarrow$ h' est continue sur $[0 , \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$

a – h est continue sur $[0, \pi/2]$ car elle y est dérivable ; la fonction sin nx est également continue sur $[0, \pi/2]$, et donc h(x) sin nx est continue sur $[0, \pi/2]$.
Par conséquent, l'intégrale H(n) existe.

b – Intégrons par parties en posant u(x) = h(x) et v'(x) = sin nx
u'(x) = h'(x) et v(x) = – cos nx/n

On obtient :

$H(n) = [-h(x)\cos nx/n]_{[0,\pi/2]} + \int_{[0,\ \pi/2]} h'(x) \cos nx/n\ dx$

D'où $nH(n) = h(0) - h(\pi/2)\cos n\pi/2 + \int_{[0,\ \pi/2]} h'(x) \cos nx\ dx$

En passant aux valeurs absolues et en majorant les cosinus par 1 :

$|H(n)| \leq [|h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0,\ \pi/2]} |h'(x)| dx] / n$

On pose $K = |h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0,\ \pi/2]} |h'(x)| dx$

K est bien indépendant de n et vérifie $|H(n)| \leq K/n$.

On en déduit que la limite de H(n) est 0 quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie :

5) On note par $J(k ; \alpha, \beta)$ l'intégrale suivante :

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx\ dx$

Procédons à une première intégration par parties :

$u'(x) = \cos 2kx$

$u(x) = \sin 2kx / 2k$

$v(x) = \alpha x + \beta x^2$

$v'(x) = \alpha + 2\beta x$

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx\ dx$
$= [(\alpha x + \beta x^2) \sin 2kx / 2k]_{[0,\ \pi/2]} - \int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx/2k\ dx$

d'où :

$J(k\ ;\ \alpha, \beta) = -\left(\int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha + 2\beta x)\ \sin 2kx\ dx\right)/\ 2k$

Procédons à une deuxième intégration par parties :

$u'(x) = \sin 2kx$

$u(x) = -\cos 2kx\ /\ 2k$

$v(x) = \alpha + 2\beta x$

$v'(x) = 2\beta$

Il s'en suit :

$J(k\ ;\ \alpha, \beta) = -\left(\int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha + 2\beta x)\ \sin 2kx\ dx\right)/\ 2k$

$= -\left[-\ (\alpha + 2\beta x)\ \cos 2kx\ /\ 2k\right]_{[0,\ \pi/2]} + \int_{[0,\ \pi/2]} 2\beta\ \cos 2kx/2k\ dx]/2k$

$= [(-1)^k(\alpha + \beta\pi) - \alpha]/4k^2$

6) On choisit α et β pour que $(\alpha + \beta\pi) = 0$ et $-\alpha = 1$, ce qui conduit à prendre $\alpha^* = -1$ et $\beta^* = 1/\pi$.

On a alors : $J(k\ ;\ \alpha^*, \beta^*)) = 1/\ 4k^2$

7) $u_n = \Sigma_k\ 4\ J(k\ ;\ \alpha^*, \beta^*) = 4\ \Sigma_k \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ \cos 2kx\ dx$

$= 4 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ \Sigma_k \cos 2kx\ dx$

$= 4 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ f_n(x)\ dx$

8) On remplace $f_n(x)$ par l'expression établie à la question 2 de la première partie.

$u_n = 4 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ [\sin (2n+1)x - \sin x]\ /\ 2 \sin x\ dx$

On en déduit :

$u_n = 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ [\sin (2n+1)x/\sin x]\ dx\ - 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ dx$

$u_n = 2 \int_{[0,\ \pi/2]} h^*(x)\ \sin (2n+1)x\ dx\ - 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ dx$

où h* désigne la fonction h introduite à la première partie avec les valeurs (α^*, β^*) pour (α, β).

On a donc, compte tenu de la définition de H (question 4, première partie) :

$u_n = 2\,H(2n+1) - 2 \int_{[0,\, \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\,dx$

Un calcul élémentaire permet d'établir que $-2 \int_{[0,\, \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\,dx = \pi^2/6$

9) Comme on sait (question 4, première partie) que $\lim\limits_{n \to +\infty} H(2n+1) = 0$, il s'en suit :

$U = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe et est égale à $\pi^2/6$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Il suffit d'étudier la fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x$

Sa dérivée est $f'(x) = - x / (1 + x)$, est positive entre $- 1$ et 0, négative ensuite. La fonction f est donc croissante sur $] - 1, 0]$ et décroissante pour $x \geq 0$, passant par un maximum en $x = 0$.
Or $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0 \ \forall\, x > -1$.

2) $\ln (1 - x^2/n)^n = n \ln(1 - x^2/n)$
$\forall\, x \in [- (n)^{1/2}, n^{1/2}]$, $x^2/n \in [- 1, 1]$

On applique le résultat de la question 1 avec $x \to - x^2/n$:
$n \ln(1 - x^2/n) \leq - x^2$

D'où : $(1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$

3) Toujours avec le résultat de la question 1, $\ln(1 + x^2/n) \leq x^2/n$

$- n \ln(1 + x^2/n) \geq - x^2$

D'où : $e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$

Problème n° 2

1) Le calcul direct permet d'établir :

$A^2 = 4A$
$B^2 = 2B$
$AB = BA = 0$

Et $A^n = 4^{n-1}A$, $B^n = 2^{n-1}B$

2) $S = A + B$. Par le développement du binôme, en remarquant que tous les produits de la forme $A^i B^j$, i et j entre 1 et n, sont nuls, on obtient :

$S^n = a^n A^n + b^n B^n = 4^{n-1}a^n A + 2^{n-1}b^n B$ pour tout entier n strictement positif.

Problème n° 3

Les coordonnées (x, y, z) du vecteur propre associé à la valeur propre λ vérifient les équations :

$(2\cos^2 t - \lambda)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$

$(1 - \lambda)y = 0$

$- x/2 + (2\sin^2 t - \lambda)z = 0$

Premier cas : $\lambda = 1$

Le système devient :

$(2\cos^2 t - 1)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$

$- x/2 + (2\sin^2 t - 1)z = 0$

ou encore :

$x \cos 2t + y + 2z \cos^2 2t = 0$

$x + 2z \cos 2t = 0$

On en déduit :

$y = 0$ et $x = - 2z \cos 2t$

$\lambda = 1$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est engendré par le vecteur $(- 2\cos 2t, 0, 1)$, c'est-à-dire une droite (dimension 1).

Deuxième cas : $\lambda \neq 1$

Le système devient :

$x = -2 (\lambda - 2\sin^2 t)z$

$y = 0$

$z[2 \cos^2 2t - 2(2\cos^2 t - \lambda)(\lambda - 2\sin^2 t)] = 0$

ou encore :

$x = -2 (\lambda - 2\sin^2 t)z$

$y = 0$

$(\lambda - 1)^2 z = 0$

ce qui entraîne $x = y = z = 0$

Par suite, la seule valeur propre de T est $\lambda = 1$, la dimension du sous-espace associé est 1 (et non 3) et la matrice T n'est pas diagonalisable.

Problème n° 4

1) On a de façon triviale $U(0) = 1$

$U(1) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{1/2}\, dt$

On fait le changement de variable $t = \sin u$

$U(1) = \int_{[0,\pi/2]} \cos^2 u\, du = \int_{[0,\pi/2]} (1 + \cos 2u)/2\, du = ½[u + \sin 2u/2]$ à prendre entre 0 et $\pi/2$, d'où :

$U(1) = \pi/4$

2) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a la majoration $(1 - t^2)^{1/2} \leq 1$

Or $(1 - t^2)^{(n+1)/2} = (1 - t^2)^{1/2} (1 - t^2)^{n/2}$, donc $(1 - t^2)^{(n+1)/2} \leq (1 - t^2)^{n/2}$

D'où $U(n+1) \leq U(n)$

3) Faisons une intégration par parties avec : $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = (1 - t^2)^{n/2}$, et donc $v'(t) = - nt(1 - t^2)^{(n-2)/2}$

$U(n) = [t(1 - t^2)^{n/2}]_{[0,1]} + n \int_{[0,1]} t^2(1 - t^2)^{(n-2)/2}\, dt$

$U(n) = n \int_{[0,1]} (t^2 - 1 + 1)(1 - t^2)^{(n-2)/2}\, dt = n (- U(n) + U(n-2))$

On obtient le résultat suivant :

$(n + 1) U(n) = n U(n - 2)$

On a donc $U(n) = U(n - 2) n/(n + 1)$ pour tout n supérieur ou égal à 2.

Cas n = 2p

$U(2p) = [2p\times 2(p - 1)\times \ldots \times 2 / (2p + 1)\times(2p - 1)\times\ldots\times 5\times 3]\, U(0)$

$U(2p) = [2^p\, p!]^2 / (2p + 1)!$

Cas n = 2p – 1

$U(2p - 1) = [(2p - 1)\times(2p - 3)\times\ldots \times 3 / 2p\times 2(p - 1)\times \ldots \times 4]\, U(1)$

$U(2p - 1) = \{(2p)! / [2^p\, p!]^2\} \times \pi/2$

Problème n° 5

Considérons la suite u_n : $\alpha\, u_{n+1} - u_n + (1 - \alpha)\, u_{n-1} = 0$.
C'est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :

(C) $\alpha\, x^2 - x + (1 - \alpha) = 0$.

$\Delta = (1 - 2\alpha)^2$

Premier cas : $\alpha = 1/2$

(C) admet une racine double $1/2\alpha = 1$

On sait que dans ce cas la solution générale est donnée par $u_n = a + bn$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$a = 0$

$a + bK = 1 \Rightarrow b = 1/K$

$\mathbf{u_n = n/K}$

Deuxième cas : $\alpha \neq 1/2$

L'équation (C) admet deux racines distinctes :

$x' = (1 - (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = 1$

$x'' = (1 + (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = (1 - \alpha)/\alpha$

La solution générale est de la forme $u_n = a(x')^n + b(x'')^n = a + b((1 - \alpha)/\alpha)^n$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$a = 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$b = - 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

D'où : $\mathbf{u_n = [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^n] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]}$

En ce qui concerne la suite v_n, la seule différence concerne les conditions initiales. On trouve ainsi les résultats suivants :

Pour $\alpha = ½$, $\mathbf{v_n = 1 – n/K}$

Pour $\alpha \neq ½$, les équations vérifiées par les constantes a et b sont :

$a + b = 1$

$a + b((1 – \alpha)/\alpha)^K = 0$

où encore :

$a = – ((1 – \alpha)/\alpha)^K /[1 – ((1 – \alpha)/\alpha)^K]$

$b = 1/[1 – ((1 – \alpha)/\alpha)^K]$

$\mathbf{v_n = [((1 – \alpha)/\alpha)^n – ((1 – \alpha)/\alpha)^K] / [1 – ((1 – \alpha)/\alpha)^K]}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Soit X la v.a. nombre de ventes, alors la loi de X est un loi binomiale de paramètres n=824 et p=0,9. Les valeurs de n et de p vérifient la formule donnée qui permet d'approximer la loi binomiale par une loi normale, donc on fait comme si X suit une loi normale de moyenne 741,6 et d'écart type 8,6. En utilisant la table donnée, on trouve, par interpolation linéaire, une valeur de 738 machines à acheter.

2) Avec la somme récupérée au titre de l'assurance, le BdE peut financer 40,7 pannes. Soit Z la v.a. nombre de réparations, on sait que Z suit une loi binomiale de paramètres n=740 et p=0,04. Les valeurs de n et de p vérifient la formule donnée, donc on considère que Z peut suivre une loi normale de moyenne 29,6 et d'écart type 5,3. En utilisant la loi normale centrée réduite, on est conduit à calculer P(T>2,09) et on obtient environ 1,8% par interpolation linéaire.

Exercice n° 2

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice mais on pouvait évoquer :

- que l'Ile-de-France est la région disposant du RDB par habitant le plus élevé ;
- qu'à l'inverse, la région Nord-Pas-de-Calais est la région disposant du RDB par habitant le plus faible ;
- que chaque habitant dispose en moyenne de 94.000 francs ;
- que 5 régions (Ile-de-France, Rhône-Alpes, Provence-Alpes-Côte d'Azur, Nord-Pas-de-Calais, Pays de la Loire), les plus peuplées de France, concentrent à elles seules 50% du revenu ;
- que les revenus du travail caractérisent plutôt les régions du nord de la France ;
- que les prestations sociales bénéficient plutôt à la province ;
- ….

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME n° 1

1) La fonction $f(t)\cos t$ (resp. $f(t)\sin t$) est continue sur R comme produit de deux fonctions continues.
La fonction u est la primitive de cette fonction s'annulant en 0.
u est donc dérivable sur R et pour tout x réel, $u'(x) = f(x)\cos x$.
De même $v'(x) = f(x)\sin x$.

2) En développant $\sin(x - t) = \sin x.\cos t - \cos x.\sin t$, et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$

T_f est donc dérivable (différence de produits de fonctions dérivables sur R).
Et on a, pour tout x réel :
$T_f'(x) = u(x)\cos x + u'(x)\sin x - v'(x)\cos x + v(x)\sin x$

En remplaçant u' et v' par leurs expressions (question 1), on obtient :

$T_f'(x) = u(x)\cos x + v(x)\sin x$

On montre aisément que T_f' est dérivable également, et que T_f'' est continue :
$T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$

T_f appartient donc à F.
T est une application de E dans F.

La linéarité $T_{f+g} = T_f + T_g$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

3) Puisque, d'après les questions 1 et 2, $T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$ et $T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$, on a bien $T_f + T_f'' = f$

Soit $f \in N(T)$: $T_f = 0$ et donc $T_f'' = 0$ d'où $f = T_f + T_f'' = 0$
Donc le noyau de T se réduit à l'application nulle de R dans R.

4) Soit $g \in Im(T)$: cela signifie qu'il existe (au moins) une fonction f de E telle que $g = T_f$. Donc $g \in F$ et comme $g(x) = \int_{[0,x]} f(t)\sin(x-t)\,dt$, on a de façon évidente $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$
$\Rightarrow g \in G$

D'où : $Im(T) \subset G$

Calcul de $T_{g+g''}$.

$T_{g+g''}(x) = \int_{[0,x]} g(t)\sin(x-t)\,dt + \int_{[0,x]} g''(t)\sin(x-t)\,dt$

Intégrons par parties :

Posons, dans la première intégrale, $u'(t) = \sin(x-t)$ et $v(t) = g(t) \Rightarrow u(t) = \cos(x-t)$ et $v'(t) = g'(t)$.
Dans la deuxième intégrale, on pose $u'(t) = g''(t)$ et $v(t) = \sin(x-t) \Rightarrow u(t) = g'(t)$ et $v'(t) = -\cos(x-t)$.

Remarque : aucune confusion entre ces notations u et v classiques en intégration par parties et les fonctions u et v de la question 1.

On obtient :

$T_{g+g''}(x) = [g(t)\cos(x-t)]_{[0,x]} - \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x-t)\,dt + [g'(t)\sin(x-t)\,)]_{[0,x]}$
$+ \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x-t)\,dt$
$= g(x) - g(0)\cos x - g'(0)\sin x = g(x)$ car $g(0) = g'(0) = 0$.

On déduit que si g appartient à G, alors $T_{g+g''} = g$, donc $g \in Im(T)$: $G \subset Im(T)$.

On en conclut $Im(T) = G$.

5) D'après les résultats précédents, T est une application linéaire de E dans G, injective ($N(T) = 0$) et telle que $Im(T) = G$ (surjective). T est donc une bijection, c'est-à-dire un isomorphisme de E dans G, elle admet donc une application réciproque ,notée T^{-1}.

On a, pour tout g de G, $T_{g+g''} = g$; en composant par l'inverse, on a $T_g^{-1} = g + g''$.

6) Effectuons le calcul intégral :

$T_f(x) = \int_0^x \text{sint sin}(x - t)\, dt = \int_0^x [\cos(2t - x) - \cos x]/2\, dt = (\sin x - x\cos x)/2$

Posons $h(x) = (\sin x - x\cos x)/2$, $h \in F$, et donc $s = T_h^{-1}$ et $h + h'' = s$

PROBLEME n° 2

1) f est continue sur l'intervalle U = [0, + ∞ [; elle admet donc une primitive F sur U, et on peut ainsi écrire h(x) = [F(x) – F(0)]/x.
F est dérivable et donc continue sur]0, + ∞ [; comme rapport de deux fonctions continues sur]0, + ∞ [, h est donc continue sur]0, + ∞ [.

Quand x $\rightarrow$ 0, puisque F est dérivable en 0, [F(x) – F(0)]/x tend vers F'(0) = f(0) = h(0) ; d'où $\lim\limits_{x \to 0}$ h(x) = h(0).

2) On a établi dans la question 1 que h était continue sur U = [0, + ∞ [, c'est-à-dire que h $\in$ E. H est donc une application de E dans E.

La linéarité de H est évidente : a et b étant deux réels, f et u deux fonctions de E :

- Pour x > 0, H(af + bu) = aH(f) + bH(u), d'après la linéarité de l'intégrale
- Ne pas oublier le cas x = 0 : H(af + bu)(0) = (af + bu)(0) = af(0) + bu(0) = aH(f)(0) + bH(u)(0)

3) F est dérivable sur]0, + ∞ [donc h est dérivable sur]0, + ∞ [comme rapport de deux fonctions dérivables.

4) Supposons que 0 soit valeur propre de H : il existe donc une fonction f non nulle de E telle que H(f) = 0.
On a donc f(0) = 0 et, pour tout x > 0, F(x) – F(0) = 0, c'est-à-dire F(x) = F(0) = constante.
F étant constante, F'(x) = f(x) = 0 $\forall$ x $\in$]0, + ∞ [.
Or f est non nulle et donc 0 ne peut être valeur propre de H.

5) $H(f) = \alpha f = h \Rightarrow f = h / \alpha$
D'après la question 3, h est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc f l'est aussi.

Plaçons-nous sur $]0, +\infty[$; pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = f(x) = h(x)/\alpha = [F(x) - F(0)]/ \alpha x$, ou encore :

$\alpha x\varphi(x) = F(x) - F(0)$

En dérivant :

$\alpha[x\varphi'(x) + \varphi(x)] = f(x) = \varphi(x)$

D'où la relation demandée : $\forall\ x > 0 \quad \alpha\ x\ \varphi'(x) = (1 - \alpha)\ \varphi(x)$

6) Soit $x > 0$.
On a :
$g'(x) = (1 - 1/\alpha)x^{-1/\alpha}\varphi(x) + x^{(\alpha-1)/\alpha}\ \varphi'(x)$.

$g'(x) = x^{-1/\alpha}[\alpha\ x\ \varphi'(x) + (\alpha - 1)\ \varphi(x)]/\ \alpha = 0$ d'après la relation trouvée à la question 5.

La fonction g est donc constante sur $]0, +\infty[$.

7) On déduit de ce qui précède que si φ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une fonction f non nulle et continue telle que $H(f) = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$, il existe une constante réelle k telle que $g(x) = k$, ou encore :

$\varphi(x) = k\ x^{(1-\alpha)/\alpha}$

Comme f est continue en 0, f admet une limite finie à droite en 0 égale à f(0) ; une condition nécessaire pour que ceci soit réalisé est que $(1 - \alpha)/\alpha \geq 0$, c'est-à-dire :

$0 < \alpha \leq 1$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ si $0 < \alpha < 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = k$ si $\alpha = 1$.

8) Il résulte de tout ce qui précède que l'ensemble des valeurs propres α de H est l'intervalle $]0, 1]$.

Si $\alpha \in\ ]0, 1[$, $f(x) = k\ x^{(1-\alpha)/\alpha}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

Si $\alpha = 1$, $f(x) = k$

Remarque : en revenant à la définition initiale, on vérifie facilement par le calcul que les fonctions f précédentes sont bien les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\alpha \in\ ]0, 1[$ et $\alpha = 1$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On définit la suite récurrente (u_n), $n \geq 1$, par :

$u_1 = 0$

$\forall\, n \geq 2 \quad (n + 1)^2 u_n = (n - 1)\, u_{n-1} - n$

1) Calculer u_2 et u_3.

Pour $n = 2$, $9\, u_2 = u_1 - 2 \Rightarrow u_2 = -2/9$

$u_3 = -31/144$

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 0]$.

Raisonnons par récurrence.
La propriété est vraie au rang 1. Supposons-la vraie au rang n.

- $u_{n+1} = [nu_n - (n + 1)]/(n + 2)^2$

$u_n \leq 0 \Rightarrow nu_n - (n + 1) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq 0$

- $u_n - (-1) = [nu_n - (n+1) + (n+2)^2]/(n+2)^2$

$= [n^2 + n(u_n + 3) + 3]/(n+2)^2$

$u_n \geq -1 \Rightarrow u_n + 3 \geq 2 \Rightarrow n^2 + n(u_n + 3) + 3 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq -1$

Donc la propriété est vraie au rang n+1.

3) Montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on déterminera.

$u_n = [(n-1)\, u_{n-1} - n]/(n+1)^2 = A(n)\, u_{n-1} + B(n)$

avec $A(n) = (n-1)/(n+1)^2$ et $B(n) = -n/(n+1)^2$

A(n) et B(n) tendent vers 0 quand n tend vers l'infini

Comme $u_{n-1} \in [-1, 0]$, $-A(n) \leq A(n)\, u_{n-1} \leq 0$, et donc $A(n)\, u_{n-1} \to 0$ quand $n \to \infty$

Donc $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

4) Montrer que, $\forall\, n \geq 2$, $u_n \leq -n/(n+1)^2$; établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang n = 2.

En reprenant l'expression $u_n = A(n)\, u_{n-1} + B(n)$, on a $A(n)\, u_{n-1} \leq 0$ et donc :

$u_n - B(n) = A(n)\, u_{n-1} \leq 0 \Rightarrow u_n - B(n) \leq 0$

$u_n \leq -n/(n+1)^2$

- $\forall\, n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = [nu_n - (n+1)]/(n+2)^2 - u_n$

$= -[u_n(n^2 + 3n + 4) + (n+1)]/(n+2)^2$

On a :

$n^2 + 3n + 4 \geq 0$

$u_n \leq -n/(n+1)^2$

$\Rightarrow u_n(n^2 + 3n + 4) + (n+1) \leq -n(n^2 + 3n + 4)/(n+1)^2 + (n+1) = (1-n)/(n+1)^2 < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire que la suite est croissante à partir du rang 2.

Exercice n° 2

1) Démontrons le résultat par récurrence :

- La propriété est vraie pour n = 0 : $P_0 = 1$
- Supposons-la vraie au rang n

$f^{(n+1)}(x) = [P_n'(x)\ (1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)]\ (1 + x^2)^{-(n+2)}$

Posons $P_{n+1}(x) = P_n'(x)\ (1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)$

Soit P_n de degré n, de premier terme a_nx^n ; le terme de plus haut degré de P_{n+1} est donc $n\ a_nx^{n+1} - 2(n+1)\ a_nx^{n+1} = -(n+2)\ a_nx^{n+1} \Rightarrow$ degré $P_{n+1} = n + 1$.

Tous les monômes de P_n ont la même parité que n : tous ceux de $x\ P_n(x)$ ont donc celle de n + 1, ceux de $P_n'(x)$ ont celle de n – 1, ceux de $P_n'(x)\ (1 + x^2)$ ont donc la parité de n + 1.

La propriété générale est donc vraie au rang n + 1.

2) Calcul de f'(x) :

$f'(x) = -2x / (1 + x^2)^2$

Donc : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0 \quad \forall x \in R$

3) Partons de la relation établie à la question 2 : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$

Dérivons-la n fois :

$\Sigma_{k=0 à n} C_n^k\ (1 + x^2)^{(k)}(f'(x))^{(n-k)} + 2\Sigma_{k=0 à n} C_n^k\ x^{(k)}(f(x))^{(n-k)} = 0$

Or on remarque que $(1 + x^2)^{(k)} = 0$ dès que k > 2 et $x^{(k)} = 0$ dès que k > 1.

L'équation générale se simplifie grandement et devient :

$(1 + x^2)(f'(x))^{(n)} + 2nx(f'(x))^{(n-1)} + n(n-1)(f'(x))^{(n-2)} + 2x(f(x))^{(n)} + 2n(f(x))^{(n-1)} = 0$

d'où :

$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) + 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) = 0$

et : $(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2(n + 1)xf^{(n)}(x) + n(n + 1)f^{(n-1)}(x) = 0$

En multipliant le tout par $(1 + x^2)^{n+1}$, on a :

$P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$

4) D'après la relation définissant P_{n+1}, $P_{n+1}(x) = P_n'(x)\,(1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)$, vue à la question 1, en remplaçant $P_{n+1}(x)$ par cette expression dans la relation de la question 3, on obtient :

$P_n'(x) + n(n+1)P_{n-1}(x) = 0$

5) Dérivons la relation établie à la question 4.
Il vient :

$P_n''(x) + n(n+1)P_{n-1}'(x) = 0$

Or, en utilisant le résultat de la question 4 au rang n – 1, on a :

$P_{n-1}'(x) = -\,n(n-1)P_{n-2}(x)$, et donc $P_n''(x) = n^2(n-1)(n + 1)P_{n-2}(x)$

La quantité à étudier $A = (1 + x^2)\,P_n''(x) - 2nxP_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$ peut être écrite :

$A = n^2(n-1)(n + 1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2n^2(n + 1)xP_{n-1}(x) + n(n+1)P_n(x)$

$= n(n + 1)[\, n(n-1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2nxP_{n-1}(x) + P_n(x)]$

Or la quantité entre crochets n'est autre que, écrite au rang n – 1, celle qui est considérée dans la relation E, donc égale à 0.

Exercice n° 3

1) $\text{Ln}(1 + x) \approx x - x^2/2 + x^3/6$

2) Pour $x \neq 0$, $\text{Lnf}(x) = -1 + (x + 2)/2x\ \text{Ln}(1 + x) \approx -x^2/12$

$f(x) \approx e^{-x^2/12} \approx 1 - x^2/12$

Donc $\text{Lnf}(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et donc $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$; or $1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Dérivée en 0 :

$[f(x) - f(0)]/x \approx - x/12 \to 0$ quand $x \to 0$

$f'(0) = 0$

3) Soit $x \neq 0$; en passant par le Ln :

$f'(x)/f(x) = [- x^{-2}\text{Ln}(1 + x) + (x + 2)/2x(1 + x)]$

$f'(x) = f(x)\, x^{-2}\, [- \text{Ln}(1 + x) + ½\, (1 + x - (1 + x)^{-1}]$

D'où :

$f'(x) = x^{-2}\, \varphi(x)\, f(x),\ x \neq 0$

f est continue sur $]- 1, + \infty[$, φ est continue sur $]- 1, 0[$ et $]0, + \infty[$, et l'application $x \to x^2$ est continue sur $]- 1, + \infty[$, nulle en 0.
Donc f' est continue sur $]- 1, 0[$ et $]0, + \infty[$.

Au voisinage de $x = 0$:

$\varphi(x) = ½\, [1 + x - (1 + x)^{-1}] - \text{Ln}(1 + x) \approx ½\, [1 + x - (1 - x + x^2 - x^3)] - (x - x^2/2 + x^3/6) = - x^3/6$

$f'(x) \approx (1 - x^2/12)\, (- x^3/6)/x^2$

Donc $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc f' est continue en 0 (puisqu'on a démontré en question 2 que $f'(0) = 0$).

4) On établit facilement que $\varphi'(x) = x^2/2(1 + x)^2$, donc positive.

φ est donc croissante, nulle en $x = 0$, et donc négative sur $]- 1, 0[$, positive pour $x > 0$.

5) Comme f' a le même signe que φ, f' est négative sur $]- 1, 0[$, nulle en 0, positive pour $x > 0$; f est donc décroissante sur $]- 1, 0[$, croissante pour $x > 0$, et passe par un minimum en $x = 0$ tel que $f(0) = 1$.

On en déduit que, $\forall\ x > - 1,\ f(x) \geq 1$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Soit X la variable aléatoire : nombre de postes informatiques défectueux parmi les 3 retenus

$$P(X=0) = \frac{C_{18}^{3} C_{2}^{0}}{C_{20}^{3}} = 0{,}716$$

$$P(X=1) = \frac{C_{18}^{2} C_{2}^{1}}{C_{20}^{3}} = 0{,}268$$

$$P(X=2) = \frac{C_{18}^{1} C_{2}^{2}}{C_{20}^{3}} = 0{,}016$$

2) Si m est le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 20 pièces, on a :

$$P(X=0) = \frac{C_{m}^{0} C_{20-m}^{3}}{C_{20}^{3}} = \frac{(20-m)(19-m)(18-m)}{20x19x18}$$

m=0	P=100%	m=4	P=49,1%	m=8	P=19,3%	m=12	P=4,9%	m=16	P=0,4%
m=1	P=85%	m=5	P=39,9%	m=9	P=14,5%	m=13	P=3,1%	m=17	P=0,1%
m=2	P=71,6%	m=6	P=31,9%	m=10	P=10,5%	m=14	P=1,8%	m=18	P=0%
m=3	P=59,6%	m=7	P=25,1%	m=11	P=7,4%	m=15	P=0,9%	m>18	P=0%

3) Si on teste une machine supplémentaire (soit 4), alors P(X=0) est égal à 0,632 (au lieu de 0,716 pour 3 machines testées). L'espérance de perte financière moyenne lié à l'acceptation du lot des 20 machines à tort diminue alors de 1432 euros à 1264 euros, soit une diminution de 168 euros. Comme le coût d'un test est de 200 euros, le conseil est de ne pas envisager l'augmentation de l'échantillon.

Exercice n° 2

Calcul des ventes des cigarettes LAFUME
aux conditions économiques du 1er janvier 1996

(en millions d'euros)

1er janvier	Taux d'inflation annuel	Indice des prix (base 100 au 1/1/96)	Ventes en millions d'euros courants	Ventes en millions d'euros constants
1996	-	100	1000	1000
1997	5%	105	1197	1140
1998	8%	113,4	1508	1330
1999	3%	116,8	1864	1596
2000	6%	123,8	2538	2050

Exercice n° 3

Pas de corrigé type.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soient les deux relations vérifiées par x, y et z, réels strictement positifs :

$xyz > 1$

$x + y + z < (1/x) + (1/y) + (1/z)$

1) Supposons que $x = 1$
Alors $yz > 1$ et $1 + y + z < 1 + (1/y) + (1/z)$

D'où : $y + z < (1/y) + (1/z) \Leftrightarrow y + z < (y + z) / yz \Leftrightarrow yz < 1$, ce qui est impossible.

2) Supposons x, y et z tous ≤ 1 ; alors le produit $xyz \leq 1$, ce qui est impossible. L'un au moins des réels x, y ou z est donc > 1.

3) Supposons x, y et z tous ≥ 1. Il est évident que $x \geq 1/x$, $y \geq 1/y$, $z \geq 1/z$, et donc que la somme $x + y + z \geq (1/x) + (1/y) + (1/z)$. ceci est impossible. L'un au moins des réels x, y ou z est donc < 1.

Exercice n° 2

1) Faisons une intégration par parties :

$I = [-\mathrm{Ln}x/2(x^2 - 1)] + \int [1/2x(x^2 - 1)]dx$ $I = [-\mathrm{Ln}x/2(x^2 - 1)] + 1/2\int [1/x(x^2 - 1)]dx$

Notons par J la deuxième intégrale :

$J = \int [1/x(x^2 - 1)]dx$

$1/x(x^2 - 1) = a/x + b/(x - 1) + c/(x + 1)$

On en déduit : $a = -1$, $b = 1/2$, $c = 1/2$

$2J = -2\int dx/x + \int dx/(x+1) + \int dx/(x-1)$

$J = -\text{Ln } x + \text{Ln}(x^2-1)^{1/2} = \text{Ln}[(x^2-1)^{1/2}/x]$

D'où :

$I = [-\text{Ln}x/2(x^2-1)] + \text{Ln}[(x^2-1)^{1/2}/x]$

2) $I(u) = -(\text{Ln } u)/2(u^2-1) + (\text{Ln } 2)/6 + \{\text{Ln } [(u^2-1)^{1/2}/u] - \text{Ln } (3^{1/2}/2)\}$

3) Quand $u \to +\infty$, $I(u) \to (\text{Ln } 2)/6 - \text{Ln } (3^{1/2}/2) \approx 0{,}26$.

Problème

Partie I :

1) $f(x) = \text{Ln } (1 + e^x)$.

Dérivées :
$f'(x) = e^x/(1+e^x) > 0 \ \forall x$
$f''(x) = e^x/(1+e^x)^2 > 0 \ \forall x$
Puisque f' est positive, f est croissante.
Asymptotes :
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$f(x)/x \to 1$
$y - x = \text{Ln}(1 + e^{-x}) \to 0$

La droite $y = x$ est asymptote quand $x \to +\infty$; on en déduit également que la courbe est au-dessus de son asymptote.
Tangente en x=0 :
$f'(0) = 1/2$
Intersection avec l'axe vertical :
$x = 0 \Rightarrow y = \text{Ln}2 = 0{,}693$

2) Soit l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

2a) $d(x) = (x^2 + 4x + 8 \text{ Ln}2)/8 - \text{Ln}(1 + e^x)$.

$d'(x) = x/4 + 1/2 - e^x/(1 + e^x)$; $d'(0) = 0$; $d'(1) = 3/4 - e/(e+1)$

$d''(x) = 1/4 - e^x/(1 + e^x)^2$; $d''(0) = 0$; $d''(1) = 1/4 - e/(e+1)^2$

$d'''(x) = e^x(1 + e^x)(e^x - 1)/(1 + e^x)^4 > 0$

d est donc croissante de $d(0) = 0$ à $d(1) = 1/8 + 1/2 + \text{Ln}2 - \text{Ln}(1+e) = 0{,}005$

Donc $0 \leq d(x) \leq M$, où $M = 0{,}005$.

On en déduit : $0 \leq g(x) - f(x) \leq M$, c'est-à-dire $g(x) - M \leq f(x) \leq g(x)$.

D'où : $A - M \leq I \leq A$

où A est l'intégrale $\int_{[0,1]} (x^2 + 4x + 8 \text{ Ln}2)/8\,dx = 0{,}985$.

$0{,}98 \leq I \leq 0{,}985$

3) $k \neq 0$.

$D(k) = \{x \,/\, e^x + k > 0\}$

1er cas : $k > 0$

$D(k) = R$

2ème cas : $k < 0$

$e^x > -k \Leftrightarrow x > \text{Ln}(-k)$

4) A tout réel k, on associe la fonction f_k définie, pour $x \in D(k)$, par $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$.

$f'(x) = e^x/(e^x + k)$

1er cas : $k > 0$

$f'(x) > 0$

Sur R, f croît de Ln k à $+\infty$.

Remarque : si $k < 1$, la courbe associée à f_k coupe l'axe des abscisses en un point x tel que $e^x = 1 - k$, soit $x = \text{Ln}(1 - k)$.
Par contre, si $k \geq 1$, la courbe associée à f_k est au-dessus de l'axe des abscisses.

Asymptote :

$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \text{Ln } k$

$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$

$f(x)/x \to 1$

$y - x = \text{Ln}(1 + ke^{-x}) \to 0$ quand $x \to +\infty$

La droite $y = x$ est asymptote.

Position de la courbe par rapport à l'asymptote :

$y - x = \text{Ln}(1 + ke^{-x}) \approx ke^{-x} > 0$ si $k > 0$, < 0 si $k < 0$.

Tangente :
La pente en $x = 0$ est $y'(0) = 1/(1 + k)$

$2^{ème}$ cas : $k < 0$
$x > \text{Ln}(-k)$
La fonction f_k croît de $-\infty$ à $+\infty$, coupant l'axe des abscisses en $\text{Ln}(1 - k)$, avec une pente en ce point égale à $(1 - k)$.

5) Soit à montrer que, pour $k > 0$, $f_k(x + \text{Ln}k) = f(x) + \text{Ln}\, k$

$f_k(x + \text{Ln}k) = \text{Ln}(e^{x+\text{Ln}k} + k) = \text{Ln}(ke^x + k) = \text{Ln}k + \text{Ln}(e^x + 1) = f(x) + \text{Ln}\, k$

Pour construire la courbe C(k) représentative de f_k, on remarque que $f_k(u) = f(u - \text{Ln}\, k) + \text{Ln}k$. Donc pour passer d'un point de C au point correspondant de C(k), on fait d'abord une translation de $-\text{Ln}\, k$ parallèlement à l'axe des abscisses, puis une translation de $\text{Ln}\, k$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

6) Soit Δ la première bissectrice, d'équation $y = x$.

Soit M de coordonnées (a, b) ; M', symétrique de M par rapport à Δ a pour coordonnées (b, a).

On suppose que $M \in C(k)$ associée à f_k, c'est-à-dire que $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$.
Soient X et Y les coordonnées de M' : $X = y$, $Y = x$.
$X = \text{Ln}(e^Y + k) \Leftrightarrow e^X = e^Y + k \Leftrightarrow e^Y = e^X - k \Leftrightarrow Y = \text{Ln}(e^X - k)$.

Partie II :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur R par :

$f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$

1) $f_0(x) = 1/(1 + e^x)$
$f'_0(x) = -e^x/(1 + e^x)^2 < 0$
f_0 est décroissante de 1 (en $-\infty$) à 0 (en $+\infty$).
En $x = 0$, $f_0(x) = 1/2$.
$f'_0(0) = -1/4$

Soit S le point de coordonnées $(0, 1/2)$.

Faisons le changement d'origine pour un point courant M (x, y) en prenant pour nouvelle origine S : $X = x$, $Y = y - 1/2$.
$y = 1/(1 + e^x) \Leftrightarrow Y + 1/2 = 1/(1 + e^X) \Leftrightarrow Y = 1/(1 + e^X) - 1/2 = (1 - e^X)/2(1 + e^X)$

Le symétrique de M par rapport à S donne le point $M'(-X, -Y)$.
$(1 - e^{-X})/2(1 + e^{-X}) = (e^X - 1)/2(1 + e^X) = -Y$.

2) On se place dans le cas général : $n \geq 1$.
$f_n'(x) = -e^{-nx}[n + (n+1)e^x]/(1 + e^x)^2 < 0$

La fonction $f_n(x)$ décroît donc de $+\infty$ (pour $x \to -\infty$) à 0 (pour $x \to +\infty$).
En $x = 0$, $f_n(0) = 1/2$ et $f_n'(0) = -(2n + 1)/4$

On remarque que pour $x = 0$, $y = 1/2$ pour tout n ; le point S appartient à toutes les courbes $\Gamma(n)$ associées aux fonctions f_n.

3) Pour tout n, on définit la suite v(n) par :

$$v(n) = \int_0^1 e^{-nx}\, dx$$

On peut faire le calcul explicite de v(n) ; en faisant le changement de variable $u = e^{-x}$, on obtient $v(n) = \int_{[1/e,\, 1]} u^{n-1} du = (1 - e^{-n})/n$.

Pour montrer que v(n) est décroissante, il suffit de remarquer que $e^{-(n+1)x} = e^{-nx} \cdot e^{-x}$
Comme $x \in [0, 1]$, $e^{-x} \leq 1$ et donc $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$
En intégrant, on a donc de façon évidente : $v(n + 1) \leq v(n)$

A partir de la forme explicite de $v(n) = -(e^{-n} - 1)/n$, on a $v(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

De même, $nv(n) = (1 - e^{-n}) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

4) Pour tout n, on définit la suite u(n) par :

$$u(n) = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

4a) Pour $x \in [0, 1]$, il est évident que $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$
On en déduit : $1/2e^x \leq 1/(e^x + 1) \leq 1/2$

Et donc $f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$ est entre $e^{-nx}/2e^x = e^{-(n+1)x}/2$ et $e^{-nx}/2$.

En intégrant f_n entre 0 et 1, on obtient : $v(n+1)/2 \leq u(n) \leq v(n)/2$, c'est-à-dire la double inégalité recherchée.

4b) Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n)$, l'encadrement précédent et la question (3) permettent d'établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = 0$.
De même, en multipliant par n, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nu(n) = 1/2$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

1) Déterminons les coordonnées de Q_i.
   Il est à l'intersection de la droite y = ax et de la droite perpendiculaire à D_a et passant par le point M_i, d'équation :

   $(y - y_i)/(x - x_i) = - 1/a$

   ou encore : $y = - (x - x_i)/a + y_i$

Les coordonnées du point Q_i sont solutions du système :

$y = ax$
$y = - (x - x_i)/a + y_i$

On obtient :

$x(Q_i) = (x_i + ay_i)/(a^2 + 1)$

$y(Q_i) = a(x_i + ay_i)/(a^2 + 1)$

$(M_iQ_i)^2 = (x(Q_i) - x_i)^2 + (y(Q_i) - y_i)^2$

En développant, on obtient $(M_iQ_i)^2 = [(ay_i - a^2x_i)^2 + (ax_i - y_i)^2]/(a^2 + 1)^2$

D'où $Q(a) = [(a^2 + 1)B + a^2(a^2 + 1)A - 2a(a^2 + 1)C]/(a^2 + 1)^2$

$= a^2A/(a^2 + 1) + B/(a^2 + 1) - 2aC/(a^2 + 1)$

Dérivons par rapport à a.

$Q'(a) = 2\,[Ca^2 + a(A - B) - C]/(a^2 + 1)^2$

$Q'(a) = 0 \Leftrightarrow Ca^2 + a(A - B) - C = 0$

$\Delta = (A - B)^2 + 4C^2 > 0$; il existe donc deux solutions a_1 et a_2 :

$a_1 = (B - A + [(A - B)^2 + 4C^2]^{1/2})/2C$

$a_2 = (B - A - [(A - B)^2 + 4C^2]^{1/2})/2C$

Par ailleurs, on remarque dans l'équation $Ca^2 + a(A - B) - C = 0$ que le produit des racines est égal à – 1.

Les deux droites D_{a1} et D_{a2}, de pentes respectives a_1 et a_2, sont donc perpendiculaires.

2) Soit à calculer $H(a) = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (M_iH_i)^2$.

Le point H_i a pour coordonnées (x_i, ax_i).

$(M_iH_i)^2 = (ax_i - y_i)^2$

$H(a) = \Sigma_i(ax_i - y_i)^2 = a^2A - 2aC + B$

$H'(a) = 2aA - 2C = 0$ et $a^* = C/A$

Problème 2

1) On montre que S(E) est un sous-espace vectoriel de R[X] car S(E) $\subset$ R[X] et S(E) est non vide car le polynôme nul vérifie E.

Il est simple d'établir que si P et Q sont solutions de E, aP + bQ appartient à S(E).

2) Soit a_nx^n le terme du plus haut degré de P_n, solution de E.

En égalant les termes de degré n, on a :

$n(n - 1) + 4n = a$

$\Rightarrow a = n(n + 3)$

3) $Q_n'(x) = -(-1)^n P_n'(-x)$

$Q_n''(x) = (-1)^n P_n''(-x)$

On omet l'indice n pour simplifier les notations.
Donc : $(x^2-1)Q''(x) + 4xQ'(x) = (-1)^n [(x^2-1)P''(-x) - 4xP'(-x)] = a\,P(-x)$
On en déduit : $(x^2-1)Q''(x) + 4xQ'(x) = (-1)^n aP(-x) = a\,Q(x)$
Q est donc solution de E.

Supposons que P – Q ne soit pas le polynôme nul.
Alors, le degré de P – Q est inférieur ou égal à n.

Soit $a_n x^n$ le terme du plus haut degré de P, $(-1)^n a_n(-x)^n$ est le terme de plus haut degré de Q. Donc dans P – Q il n'y a pas de terme de degré n ; notons r le degré de P – Q, $r \leq n-1$.
Or P – Q est solution de E, puisque P et Q sont solutions de E et S(E) est un espace vectoriel.
D'après la première question, $a = r(r+3)$, ce qui est impossible car, P étant solution, on a aussi $a = n(n+3)$ et $r < n$.
Donc P – Q est le polynôme nul, P = Q.

On a alors $\forall\, x \in R$, $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, ce qui prouve que P_n a la même parité que n.

4) $P_0 = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = x^2 - 1/5$
$P_3(x) = x^3 + 5x^2/9 + 3x/7 - 1/9$

Problème 3

1a) Il est évident que si f_1 et f_2 sont solutions de (E_1), alors pour tous λ et μ réels, on a :

$(\lambda f_1 + \mu f_2)'' - 3(\lambda f_1 + \mu f_2)' + 2(\lambda f_1 + \mu f_2) = 0$

$(\lambda f_1 + \mu f_2)$ vérifie aussi la relation (E_1).

1b) Ecrivons que $y = e^{ax}$ vérifie la relation (E_1).

$(a^2 - 3a + 2)\, e^{ax} = 0,\ \forall x$

$a^2 - 3a + 2 = 0$

D'où deux valeurs pour a : $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

Les fonctions e^x et e^{2x} sont solutions de (E_1).

1c) La forme générale des solutions de (E_1), d'après (1a), est donc ($\lambda e^x + \mu\, e^{2x}$).

2) La courbe représentant $y = e^{3x}$ passe par le point (0, 1) et a pour dérivée en : $y'(0) = 3$.
La courbe représentant $u = \lambda e^x + \mu\, e^{2x}$ est telle que $u(0) = \lambda + \mu$ et $u'(0) = \lambda + 2\mu$

Les valeurs particulières de λ et μ correspondant sont donc telles que :

$$\lambda + \mu = 1$$
$$\lambda + 2\mu = 3$$

D'où : $\lambda = -1$ et $\mu = 2$

$\Rightarrow u(x) = -e^x + 2e^{2x}$

3) k étant un réel strictement positif, montrons que les fonctions $h_k(x)= - k^2 e^x + 2k\, e^{2x}$ vérifient la relation (E_1).

$h_k'(x) = -k^2 e^x + 4k\, e^{2x}$
$h_k''(x) = -k^2 e^x + 8k\, e^{2x}$

On vérifie facilement que $h_k''(x) - 3\, h_k'(x) + 2\, h_k(x) = 0$

4a) Soit maintenant l'équation : (E_2) $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

Cherchons un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ solution de (E_2).

$P'' - 3P' + 2P = 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = -x^2 + x + 2$

ou encore : $2ax^2 + 2x(b - 3a) + 2a - 3b + 2c = -x^2 + x + 2$

Par identification : $a = -1/2$, $b = -1$, $c = 0$

4b) $f(x) = g(x) - x^2/2 - x \Rightarrow f'(x) = g'(x) - x - 1$ et $f''(x) = g''(x) - 1$

On en déduit que :

$f''(x) - 3\, f'(x) + 2f(x) = g''(x) - 3\, g'(x) + 2g(x) - x^2 + x + 2$

Donc g solution de (E_1) $\Leftrightarrow g''(x) - 3\, g'(x) + 2g(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 3\, f'(x) + 2f(x) = -\ x^2 + x +2$
$\Leftrightarrow$ f solution de (E_2)

Compte tenu des résultats de la question (1c), les fonctions f solutions de (E_2) sont de la forme : $\lambda e^x + \mu\, e^{2x} - x^2/2 - x$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

a) Première méthode : il y a 1040 dossiers pendant 104 semaines, cela donne 1040/104 = 10 accidents par semaine.
Deuxième méthode : il faut utiliser le tableau de distribution et la définition de l'espérance mathématique. En prenant comme centre de classe la valeur 3 pour la première classe, on trouve 9,99 accidents par semaine.

b) La variance du nombre hebdomadaire d'accidents en prenant le centre des classes est égale à 10,85. L'écart-type est la racine carrée de la variance et vaut 3,29 accidents.

c) Par interpolation linéaire, la médiane de la distribution (valeur de la variable qui sépare la population en deux parties égales) est égale à 9,32 accidents.

$$9+\frac{11-9}{73-48}(52-48)=9{,}32$$

Question 2

a) La population est constituée des semaines. On dispose de 104 semaines (échantillon). Ce que l'on observe, c'est le nombre x d'accidents hebdomadaires qui surviennent aux C clients.

b) On obtient une estimation ponctuelle de la moyenne à 10 (cf. question précédente).

Question 3

a) 10/7 = 1,43 accidents par jour.

b) 10/14 = 0,71 accidents par demi journée.

c) le nombre d'accidents qui se produisent au cours d'une demi-journée suit une loi binomiale. L'espérance mathématique est donc égale à p. Sa variance est p(1-p). La valeur estimée pour p est 0,71.

Question 4

a) En une semaine, il y a 7 fois 24 tranches de temps, soit 148. Le nombre d'accidents qui se produisent en une semaine est une loi binomiale. Donc, l'espérance mathématique est 148 p' et la variance est 148 p'(1-p') avec comme valeur estimée pour p' : 10/148.

b) E = 7np' et V = 7np'(1-p')
On veut que E-V soit inférieur à 0,1. On trouve alors n supérieur à 142,9.

Exercice n° 2

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice. Toutefois, on pouvait observer que :

- l'expérience professionnelle et la réputation de l'école expliquent en grande partie les disparités constatées ;
- les spécialisations sont rentables lorsqu'elles ont une orientation appliquée ou lorsqu'elles sont effectuées à l'étranger ;
- les inégalités homme/femme persistent ;
- …

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème n° 1

1. $u_1 = 1/4 = 0,25$; $u_2 = 7/16 = 0,44$; $u_3 = 37/64 = 0,59$
$v_1 = 7/4 = 1, 75$; $v_2 = 25/16 = 1,56$; $v_3 = 91/64 = 1,42$

2. $u_{n+1} - u_n = (1 - u_n)/4$
Récurrence : $u_0 < 1$; supposons $u_n < 1$; alors $u_{n+1} < 1$
D'où $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est croissante.

De même, $v_{n+1} - v_n = (1 - v_n)/4$
Récurrence : $v_0 > 1$; supposons $v_n > 1$; alors $v_{n+1} > 1$
D'où $v_{n+1} - v_n < 0$.
La suite (v_n) est décroissante.

$v_{n+1} - u_{n+1} = 3(v_n - u_n)/4$
Par récurrence : $v_0 > u_0$; supposons $v_n > u_n \Rightarrow v_{n+1} > u_{n+1}$

3. $s_{n+1} = (3s_n +2)/4$
$s_0 = s_1 = s_2 = 2$
On démontre facilement par récurrence que la suite (s_n) est constante, égale à 2.

4. $t_{n+1} = 3t_n/4$
Suite géométrique de raison 3/4 et de premier terme $t_n = 2$
D'où : $t_n = 2.(3/4)^n$

5. On a donc :
$u_n + v_n = 2$
$v_n - u_n = 2.(3/4)^n$
D'où : $v_n = 1 + (3/4)^n$ et $u_n = 1 - (3/4)^n$

6. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1

Problème n° 2

Partie I

1. $f_n'(x)$ est de la forme $v(x)/x^3$, avec $v(x) = n - 2 - 2n.Lnx$
$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp((n-2)/2n)$

On pose $u(n) = e^{(n-2)/2n}$

Si $x < u(n)$, $f_n'(x) > 0$
Si $x > u(n)$, $f_n'(x) < 0$
Si $x = u(n)$, $f_n'(x) = 0$

La fonction f_n est donc croissante de 0 à u(n) et décroissante ensuite.

2. $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + n.Lnx = 0 \Leftrightarrow Lnx = -1/n$
D'où :
$a(n) = e^{-1/n} = 1/e^{1/n} < 1$
a(n) est une suite positive, $a(n+1)/a(n) = e^{1/n(n+1)} > 1$
a(n) est croissante, majorée par 1.
Quand $n \to +\infty$, $\lim e^{1/n} = 1$ et donc $\lim a(n) = 1$

3. Quand $x \to 0^+$, $f_n(x)$ tend vers $-\infty$ (x = 0 asymptote verticale)
Quand $n \to +\infty$, $f_n(x)$ tend vers 0 (y = 0 asymptote horizontale).
Le max M(n) de f_n est atteint pour x = u(n) : $M(n) = f_n(u(n))$.

$M(n) = n/(2\ e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

	0		u(n)			$+\infty$
f_n'		+	0	-		
f_n	$-\infty$	$\uparrow$	M(n)	$\downarrow$		0

Par ailleurs, on remarque que $f_n(1) = 1$ pour tout n ; la famille des courbes représentant f_n passe donc par un point fixe (1, 1).

4. n = 2, u(2) = 1 ; M(2) = 1 ; a(2) = 0,61

n = 3, u(3) = 1,18 ; M(3) = 1,07 ; a(3) = 0,72

5. $D_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = Lnx/x^2$, indépendante de n.
On a donc la relation de récurrence $f_{n+1}(x) = f_n(x) + Lnx/x^2$.
On construit donc point par point la courbe représentant $f_{n+1}(x)$ en ajoutant à $f_n(x)$ la quantité Lnx/x^2.

Partie II

6. En intégrant par parties avec $u = \text{Ln}x$, $du = 1/x$, $dv = dx/x^2$, $v = -1/x$:
$I = -(1 + \text{Ln}x)/x$
L'aire A(n) est donnée par l'intégrale :

$A(n) = \int_1^e D_n(x)dx = \int_1^e g(x)dx$

$A(n) = (1 + \text{Ln}1)/1 – (1 + \text{Ln}e)/e = (e – 2)/e = 0{,}26$

7. $B(n) = \int_{[1,e]} f_n(x)dx = \int_{[1,e]} 1/x^2\, dx + n \int_{[1,e]} \text{Ln}x/x^2\, dx = [-1/x]_{[1,e]} – n\, [(1 + \text{Ln}x)/x]_{[1,e]}$

$B(n) = 1 – 1/e + n(e – 2)/e = [(e – 1) + n(e – 2)]/e \approx 0{,}63 + 0{,}26n$

8. C'est une suite arithmétique : $B(n+1) – B(n) = (e – 2)/e$
On sait que $B(n) = [(e – 1) + n(e – 2)]/e$
$\text{Lim } B(n) = +\infty$

Partie III

9. On suppose maintenant $n \geq 3$.
$u(n) = e^{(n-2)/2n}$; $u(n) > 1$?
$u(n) > 1 \Leftrightarrow \text{Ln } u(n) > 0 \Leftrightarrow (n – 2)/2n > 0$, ce qui est vrai puisque $n \geq 3$.

Remarque : $u(n) = e^{1/2}.e^{-1/n} = e^{1/2}.a(n)$ où a(n) a été introduit à la question 2. On en déduit que quand $n \to +\infty$, u(n) tend vers $e^{1/2}$.

Soit $M(n) = f_n(u(n)) = n/(2\, e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

Considérons la fonction $h(x) = xe^{2/x}/2e$ pour $x \geq 3$.

$h'(x) = (x – 2)e^{2/x}/2ex > 0$ pour $x \geq 2$.
h(x) est donc strictement croissante ; $h(2) = M(2) = 1$
D'où $M(n) > 1$.

10. On a vu à la question 3 que f_n était croissante de $-\infty$ à M(n) sur l'intervalle]0, u(n)], telle que $f_n(1) = 1$, puis décroissante de M(n) à 0 sur [u(n), + ∞[.
Comme $f_n(1) = 1$, $f_n(x) > 1$ sur le sous-intervalle]1, u(n)[.
L'équation E n'admet donc pas de solution sur]1, u(n)[.

11. f_n étant strictement décroissante de M(n) à 0 sur [u(n), + ∞[, avec $u(n) > 1$ et $M(n) > 1$ (question 9).
On en déduit que l'équation (E) $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule sur l'intervalle D = [u(n), +∞ [.

12. Soit $\alpha(n)$ la solution de (E).

$f_n(n^{1/2}) = (2 + n.\text{Ln } n)/2n = 1/n + (\text{Ln } n)/2$
Or pour $n \geq e^2$, $\text{Ln } n \geq 2$, donc $f_n(n^{1/2}) \geq 1 + 1/n > 1$

Comme $f_n(\alpha(n)) = 1$ par définition, on en déduit que $f_n(n^{1/2}) \geq f_n(\alpha(n))$; f_n étant décroissante sur [u(n), + ∞ [, on a bien $\alpha(n) \geq n^{1/2}$: cette inégalité reposant sur $n \geq e^2$ voisin de 7,4, et n étant entier, $n \geq 8$.

Comme $\alpha(n) \geq n^{1/2}$, on a : $\lim \alpha(n) = +\infty$.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

1. Plaçons-nous dans le plan complexe : l'affixe de M est $z(M) = \rho e^{i\theta}$
Son image par la rotation a pour affixe $\rho e^{i(\theta+\pi/3)}$
D'où :
$X = x_M/2 - y_M(3)^{1/2}/2$

$Y = y_M/2 + x_M(3)^{1/2}/2$

2. Considérons le point I(0, -1) ; son image par R a pour coordonnées $(3)^{1/2}/2, - 1/2$.
La droite D' a pour équation :
$(Y + 1/2)/(X - (3)^{1/2}/2) = (3)^{1/2}$
$Y = (3)^{1/2} X – 2$

Le point A, intersection de D' et Δ, a pour coordonnées : ($X_A = 4/(3)^{1/2}$, $Y_A = 2$)

3. En procédant comme pour la question 1, le point B image de A par rotation de centre 0 et d'angle $– \pi/3$ a pour coordonnées :
$X_B = 5/(3)^{1/2}$, $Y_B = - 1$
Le point B appartient donc à la droite D.

4. On montre facilement $OA^2 = OB^2 = AB^2 = 28/3$
Le triangle OAB est équilatéral.
Sa surface est $OA.OB.\sin(\pi/3) = 14/(3)^{1/2}$

Problème 2

1. $J(1) = [x \,\mathrm{Ln}x – x]_1^e$
$J(1) = 1$

2. Faisons une intégration par parties.
On pose $u = (Lnx)^n$, $du = n. (Lnx)^{n-1}/x$, $dv = dx$, $v = x$

$J(n) = [x(Lnx)^n]_1^e - n\, J(n-1) = e - n.J(n-1)$

On a bien $J(n+1) = e - (n+1).J(n)$, soit $J(n+1) = a + bJ(n)$ avec $a = e$ et $b = n+1$.

$J(2) = e - 2$
$J(3) = e - 3J(2) = 6 - 2e$
$J(4) = e - 4J(3) = 9e - 24$

3. Sur $[1, e]$, $Lnx \geq 0 \Rightarrow J(n) \geq 0$
De même, $Lnx \leq 1$; donc $(Lnx)^n - (Lnx)^{n+1} \geq 0$, et $J(n) \geq J(n+1)$
La suite J(n) est décroissante.
Décroissante et minorée, elle admet donc une limite.
Comme, pour tout n, $J(n) \geq 0$, $J(n+1) = e - (n+1).J(n) \geq 0 \Rightarrow (n+1).J(n) \leq e$
$J(n) \leq e/(n+1)$

$\Rightarrow 0 \leq J(n) \leq e/(n+1)$ et donc $\lim J(n) = 0$

On a : $J(n+1) + nJ(n) + J(n) = e$
Quand $n \to +\infty$, $J(n)$ et $J(n+1) \to 0$ et donc $nJ(n) \to e$.

Problème 3

1.a Il y a $C_n^2 = n(n-1)/2$ couples possibles ; un seul est composé des deux tickets gagnants.

Le nombre de couples de tickets composés d'un gagnant et d'un seul est $C_2^1\, C_{n-2}^1$,

soit $2(n-2)$.

Ceci permet d'écrire la loi de probabilité de X.

$P(X = 2) = 2/n(n-1)$

$P(X = 1) = 4(n-2)/n(n-1)$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = (n^2 - 5n + 6)/n(n-1)$

1.b $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) = 4/n$

$E(X^2) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 4.P(X = 2) = 4/(n-1)$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4(n-2)^2/n^2(n-1)$

1.c
$P(X = 2) = 2,2$ % ; $P(X = 1) = 35,6$ % ; $P(X = 0) = 62,2$ %

$E(X) = 0,4$; $V(X) = 0,284$

2.a Y suit une loi binômiale B(2, 2/n)

$P(Y = y) = C_2^y \, (2/n)^y \, ((n-2)/n))^y$ pour y = 0, 1 , 2

$P(Y = 2) = 4/n^2$

$P(Y = 1) = 4(n-2)/n^2$

$P(Y = 0) = (n-2)^2/n^2$

2.b $E(Y) = 4/n$; $V(Y) = 4(n-2)/n^2$

2.c $P(Y = 2) = 4$ % ; $P(Y = 1) = 32$ % ; $P(Y = 0) = 64$ %
$E(Y) = 0,4$; $V(Y) = 0,32$

3. a On a : $a(n) – b(n) = 4(n-2)/n(n-1) - 4(n-2)/n^2 = 4(n – 2) / n^2(n – 1)$

3.b Pour n = 50, a(n) – b(n) = 0,001567
Pour n = 64, a(n) – b(n) = 0,000961
Pour n = 63, a(n) – b(n) = 0,009915
Pour = 62, a(n) – b(n) = 0,0010235
n* = 63

4. La probabilité de gagner est P(G) = P(avoir au moins un ticket gagnant)
$P_1(G) = P(X = 1) + P(X = 2) = (4n-6)/n(n-1)$
$P_2(G) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = 4(n-1)/n^2$
$P_2(G) - P_1(G) = (4 – 2n)/n^2(n-1) < 0$

La meilleure stratégie est la 1.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Le coefficient de corrélation entre les deux variables X et Y est égal à 0,884

Question 2

Y estimé = 15,11 X – 29914,54

Question 3

Y estimé 2003 = 350,8
Y estimé 2004 = 365,9

Question 4

A partir de la droite trouvée à la question 2, on peut calculer des valeurs estimés de Y pour les années étudiées. Les résultats vous sont donnés dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau :

X	Y	Y estimé	E = Y – Y estimé
1998	271,0	275,2	-4,2
1999	281,5	290,4	-8,9
2000	323,2	305,5	17,7
2001	328,6	320,6	8,0
2002	323,0	335,7	-12,7
Moyenne	305,5	305,5	0
Variance	583,9	456,6	127,3

Voir la démonstration dans un livre de cours : la variance de Y est la somme de la variance de Y estimé et de la variance de l'écart entre Y et Y estimé.

Question 5

Le coefficient de détermination est égal à 0,782

Question 6

Le coefficient de détermination entre X et Z est égal à 0,66 et celui entre X et S vaut 0,23. Il est évident que le modèle linéaire n'est pas bien adapté pour la recherche des valeurs de S manquantes. D'ailleurs, un graphique du nuage du point entre X et S montre qu'une droite a peu de chances de relier les différents points. Cela montre les limites de l'exercice : la différence de deux valeurs « assez bien » estimées est loin d'être correctement estimée.

Question 7

Il n'y a pas de corrigé type mais on peut remarquer :

- pour la troisième année consécutive, les échanges avec l'étranger se soldent par un déficit commercial.
- celui-ci s'élève à 256 millions d'euros en 2003. Il est en diminution par rapport à celui constaté l'année précédente
- les exportations ont représenté un montant cumulé de 3.384 millions d'euros en 2003, en baisse de 5% par rapport à 2002 et de 23% par rapport à l'année 2000 qui fut certes une année exceptionnelle en matière d'exportations
- du côté des importations, la région retrouve son niveau de 1998. Les achats de la région à l'étranger sont en recul de 7% par rapport à 2002
- le secteur agroalimentaire, grâce à la bonne santé de ses exportations, contribue positivement au solde commercial (272millions d'euros)
- l'industrie automobile reste cependant de loin le plus gros secteur à l'exportation en 2003 avec un chiffre d'affaires de 739 millions d'euros
- l'Allemagne reste le premier partenaire de la région. L'Espagne confirme sa place de second client
- dans la liste des 15 premiers clients de la région, il faut remarquer la présence de l'Iran à la 13ème place avec un volume de 41 millions d'euros et de la Tunisie
- …

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

On appelle nombre parfait un nombre entier naturel a dont la somme des diviseurs est égale à 2a.

1) Parmi les entiers suivants, y en a-t-il de parfaits : 3, 6, 10, 14, 20, 28 ?

3 est divisible par 1 et 3 : 1 + 3 = 4 non parfait
6 est divisible par 1, 2, 3, 6 : 1 + 2 + 3 + 6 = 12 parfait
10 est divisible par 1, 2, 5, 10 / somme = 18 non parfait
14 est divisible par 1, 2, 7, 14 : somme = 24 non parfait
20 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 20 : somme = 42 non parfait
28 est divisible par 1, 2, 4, 7, 14, 28 : somme = 56 parfait

2) Soit $a = 2^n (2^{n+1} – 1)$, $n \in N$. On suppose que $(2^{n+1} – 1)$ est premier. Montrer que a est un nombre parfait.

Notons $u = (2^{n+1} – 1)$.
a est divisible par $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, u, 2u, 2^2u, \ldots, 2^nu$.

La somme des diviseurs de a est donc : $S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + u + 2u + 2^2u + \ldots + 2^nu$.
Soit $A = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$, et $B = u + 2u + 2^2u + \ldots + 2^nu$.

$A = (1 – 2^{n+1})/(1 – 2) = 2^{n+1} – 1$

$B = uA = u(2^{n+1} – 1)$
$S = A + B = A(1 + u) = (2^{n+1} – 1)(1 + u) = (2^{n+1} – 1)2^{n+1} = 2.(2^{n+1} – 1)2^n = 2a$

Exercice 2 :

On appelle nombre polymonadique tout nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 : 1, 11, 111, etc. On note P(n) le nombre polymonadique s'écrivant avec n chiffres 1.

1) Montrer que $P(n) = (10^n – 1)/9$

$P(n) = 10^{n-1} + 10^{n-2} + …. + 10 + 1 = (1 – 10^n)/(1 – 10) = (10^n – 1)/9$

2) Montrer que, pour n pair, P(n) est divisible par 11

On sait que $(a^n – b^n) = (a – b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + ……+ b^{n-2}a + b^{n-1}) = (a – b)Q_n$ (a, b)
Soit n = 2p
$P(2p) = (10^{2p} – 1)/9 = (10^{2p} – 1^{2p})/9 = (100^p – 1^p)/9 = (100 – 1)Q(100, 1)/9 = 11Q_p(100,1)$ est donc divisible par 11.

3) Montrer que pour m entier, si m divise n, P(m) divise P(n).

Soit n = qm.
$P(n) = (10^{qm} – 1)/9 = ((10^m)^q – 1^q)/9 =(10^m – 1)Q(10^m, 1)/9 = P(m)Q_q(10^m, 1)$

4) En déduire que si P(n) est un nombre premier, alors n est premier.

P(n) divisible par lui-même ou 1 : P(n) = 1.P(n)
Soit P(m) = 1, et donc m = 1 et q = n
Soit P(m) = P(n), et donc m = n et q = 1
P(n) premier $\Rightarrow$ n premier

5) Etudier P(5). Qu'en est-il de la réciproque du résultat de la question (4) ?

$P(5) = (10^5 – 1)/9 = 11\,111 = 41 \times 271$, non premier. Or 5 est premier.
n premier n'implique pas P(n) premier.

Problème :

Préambule :

Soit u_n, $n \in N^*$, la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
Il est évident par récurrence que la suite u_n est positive et croissante.

Partie A :

1) On définit la suite v_n, $n > 0$, par : $v_n = u_n + 1$.
Ecrire la relation existant entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Montrer que la suite v_n est positive et croissante.

$u_n = v_n - 1$ d'où un reportant dans l'équation de définition de u_n :
$v_{n+2} - 1 = v_{n+1} - 1 + v_n - 1 + 1$
$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ avec $v_1 = 2$ et $v_2 = 3$.
On reconnaît la suite de léonard de Pise, dit Fibonacci (XIIIème xiècle).

Remarque : il est évident que les suites u_n et v_n sont positives et croissantes (sommes de termes positifs).

2) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$.
Ses racines sont :
$r_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ et $r_2 = (1 + \sqrt{5})/2$

La forme générale de v_n est : $v_n = a (r_1)^n + b(r_2)^n$
$v_1 = 2 = ar_1 + br_2 \Rightarrow a(1 - \sqrt{5}) + b(1 + \sqrt{5}) = 4$

$v_2 = 3 = a (r_1)^2 + b(r_2)^2 \Rightarrow a(3 - \sqrt{5}) + b(3 + \sqrt{5}) = 6$

D'où $a = (5 - 3\sqrt{5})/10$ et $b = (5 + 3\sqrt{5})/10$

3) En raisonnant par récurrence, démontrer les relations suivantes :

(R1) $(v_{2n})^2 = v_{2n-1}.v_{2n+1} - 1$

(R2) $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

On sait que $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$, et $v_4 = 8$.
$3^2 = 2 \times 5 - 1$; R1 est vérifiée pour n = 1.
De même pour R2, $5^2 = 3x8 + 1$.
Supposons R1 et R2 vraies au rang n.

$(v_{2n+2})^2 = v_{2n+2} (v_{2n+1} + v_{2n}) = v_{2n+2}.v_{2n+1} + v_{2n+2}.v_{2n} = v_{2n+2}.v_{2n+1} + (v_{2n+1})^2 - 1$
$= v_{2n+1} (v_{2n+2} + v_{2n+1}) - 1$
$= v_{2n+1}.v_{2n+3} - 1$
$\Rightarrow$ R1 est vraie au rang n+1

De même, $(v_{2n+3})^2 = v_{2n+3}\,(v_{2n+2} + v_{2n+1}) = v_{2n+3}.v_{2n+2} + v_{2n+3}.v_{2n+1}$
$= v_{2n+3}.v_{2n+2} + (v_{2n+2})^2 + 1$
$= v_{2n+2}.(v_{2n+3} + v_{2n+2}) + 1$
$= v_{2n+2}.v_{2n+4} + 1$
$\Rightarrow$ R2 est vraie au rang n+1

4) Déduire de la question (3) la relation :

$$\text{(R3)} \quad (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

On a : $v_{2n} = (v_{2n+1} - v_{2n-1}) = (u_{2n+1} - u_{2n-1})$
D'après (R1) : $(v_{2n})^2 = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = (u_{2n+1} + 1)(u_{2n-1} + 1) - 1 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$.

5) Montrer la relation (R4) et en déduire (R5):

$$\text{(R4)} \quad (u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

$$\text{(R5)} \quad 5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$$

De façon évidente, on a :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 + 4u_{2n-1}.u_{2n+1}$
D'après le résultat de la question 4, on a donc :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1} + 4u_{2n-1}.u_{2n+1}$
D'où (R4) : $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

La relation R5 est évidente :
$5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n-1} + u_{2n+1})^2 - (u_{2n+1} + u_{2n-1}) = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$

Partie B :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n, ayant un rang impair.

6) A partir de la relation (R5), démontrer que si u_{2n-1} est premier, il divise soit u_{2n+1}, soit $u_{2n+1} - 1$.

Soit donc la relation (R5) : $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
Si u_{2n-1} est premier, il divise soit $(u_{2n+1} + u_{2n-1})$, soit $(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
On a donc :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1}) = a.\, u_{2n-1}$
ou : $u_{2n+1} = (a - 1)\, u_{2n-1}$
De même : $(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1) = b.\, u_{2n-1}$
ou encore : $(u_{2n+1} - 1) = (b - 1).\, u_{2n-1}$

7) On considère le premier cas : u_{2n-1} divise u_{2n+1}, c'est-à-dire $u_{2n+1} = q.\ u_{2n-1}$, q entier.

7a) Montrer que $q > 1$.

Evident : la suite (u_n) est croissante.

7b) A partir de (R4), en déduire : (R6) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

Rappelons la relation (R4) : $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$
Remplaçons u_{2n+1} par $q.\ u_{2n-1}$: $(1 + q)^2(u_{2n-1})^2 = 5q(u_{2n-1})^2 + u_{2n-1} + q.\ u_{2n-1}$
Il s'en suit, en simplifiant : $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

7c) Montrer que les seules valeurs possibles pour q dans la relation (R6) sont $q = 3$ ou 4. Le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

Le trinôme $(q^2 - 3q + 1)$ est positif si $q < (3 - \sqrt{5})/2 = 0{,}38$ ou $q > (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}62$, c'est-à-dire comme q est entier si $q = 0$ ou $q \geq 3$.
Donc $q = 1$ ou 2 conduit à u_{2n-1} négatif, ce qui est impossible.
On remarque ensuite que pour $q > 4$, le rapport $u_{2n-1} = (1 + q)/(q^2 - 3q + 1)$ est inférieur à 1 ; impossible encore.
Les seules valeurs possibles pour q sont donc $q = 3$ ou $q = 4$.

Pour $q = 3$, $u_{2n-1} = 4$: non premier
Pour $q = 4$, $u_{2n-1} = 1$: non premier (par convention)

8) Dans cette question, on considère le deuxième cas : u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$, c'est à dire que l'on a $(u_{2n+1} - 1) = q'.\ u_{2n-1}$, q' entier.

8a) Montrer que $q' > 1$.

Evident.

8b) Démontrer (R7) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q'$

Partons de la relation (R5) : $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
Il suffit de remplacer u_{2n+1} par $1 + q'.\ u_{2n-1}$ pour établir la relation (R7).

8c) Montrer que la seule valeur possible pour q' dans la relation (R7) est $q' = 3$? Dans ce cas, le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

Soit donc $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q$.
Comme pour la question 7c, le trinôme $(q'^2 - 3q' + 1)$ est positif si $q' = 0$ (impossible) ou $q' \geq 3$.
Or pour $q' \geq 4$, $4 - q' \leq 0$, donc $u_{2n-1} \leq 0$, ce qui est impossible.
Seule valeur possible : $q' = 3 \Rightarrow u_{2n-1} = 1$, non premier par convention.

9) Un terme de rang impair de la suite u_n peut-il être un nombre premier ?

On déduit des questions 7 et 8 qu'aucun terme de rang impair de la suite u_n ne peut être premier.

Partie C :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n ayant un rang pair.

10) En utilisant la relation (R2), démontrer :

$$(R8)\quad [(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$$

En déduire :

$$(R9)\quad 5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$$

Considérons (R2) : $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

$v_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n}$
D'où : $(v_{2n+1})^2 = (v_{2n+2} - v_{2n})^2 = (v_{2n+2} + v_{2n})^2 - 4v_{2n+2}.v_{2n} = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$
$\Rightarrow (v_{2n+2} + v_{2n})^2 = [(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5v_{2n+2}.v_{2n} + 1 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

Pour démontrer (R9), on part de (R8) :
$[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1 \Leftrightarrow (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1) = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1)$
$\Leftrightarrow (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1) = 5u_{2n}.u_{2n+2} + 5 + 5(u_{2n} + u_{2n+2})$

$\Leftrightarrow 5u_{2n}.u_{2n+2} = - 5(1 + u_{2n} + u_{2n+2}) + (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1)$

$\Leftrightarrow 5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

11) Démontrer alors que si u_{2n} est premier, il divise $u_{2n+2} - 2$ ou $u_{2n+2} + 1$.

D'après (R9), u_{2n} divise soit $(u_{2n} + u_{2n+2} - 2)$, soit $(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$.
Ecrivons que u_{2n} divise $(u_{2n} + u_{2n+2} - 2)$: alors il existe un nombre entier a tel que :
$(u_{2n} + u_{2n+2} - 2) = a.\ u_{2n} \Leftrightarrow (u_{2n+2} - 2) = (a - 1).u_{2n}$
De même, il existe b tel que $(u_{2n+2} + 1) = (b - 1).u_{2n}$

12) On considère le premier cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} - 2$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} - 2) = q.\ u_{2n}$, q entier.

12a) Montrer que $q > 1$.

Suite croissante et telle que $u_{2n+2} - u_{2n} > 2$.

12b) Démontrer : (R10) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n} = 7 - 3q$

En remplaçant u_{2n+2} par $2 + q.\ u_{2n}$ dans l'expression (R9), on obtient (R10) sans difficulté.

12c) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R10) ?

On sait que le trinôme $(q^2 - 3q + 1)$ est positif si $q = 0$ (impossible) ou $q \geq 3$. Or pour $q \geq 3$, $7 - 3q < 0$, donc u_{2n} serait < 0, ce qui est impossible.
Si $q = 1$ ou $q = 2$, on a aussi $u_{2n} < 0$.

13) On considère le deuxième cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} + 1$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} + 1) = q'\ u_{2n}$, q' entier.

13a) Montrer que $q' > 1$.

Suite croissante.

13b) Démontrer : (R11) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n} = 3q' - 2$

Comme en (12b), en remplaçant u_{2n+2} par $q'.\ u_{2n} - 1$ dans l'expression (R9), on obtient aisément (R11).

13c) Montrer que les seuls cas possibles sont q' = 3, 4 ou 5. Déterminer alors le(s) seul(s) termes nombre(s) premier(s) de la suite u_n.

$q' = 1$ ou $2 \Rightarrow u_{2n} < 0$
Dès que $q' > 5$, $u_{2n} < 1$
Donc seuls cas possibles : q' = 3, 4 ou 5
Si $q' = 3$, $u_{2n} = 7$, premier
Si $q' = 4$, $u_{2n} = 2$, premier
Si $q' = 5$, $u_{2n} = 13/11 \Rightarrow$ impossible

Les seuls nombres premiers de la suite de Fibonacci sont donc 2 et 7.

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

Soit le nombre entier a = $3^{2n} – 2^n$. Montrer que a est divisible par 7.

On sait que $a^n – b^n = (a – b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + ... + b^{n-1}) = (a – b)\,Q(a, b)$
Donc $3^{2n} – 2^n = 9^n – 2^n = (9 – 2)Q(2, 3) = 7Q(2, 3)$
CQFD

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n, $n \in N$, on définit le nombre $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

1) Calculer f(0), f(1), f(2), f(3)

n = 0, $2^0 = 1$, f(0) = 3

n = 1, $2^1 = 2$, f(1) = 5

n = 2, $2^2 = 4$, f(2) = 17

n = 3, $2^3 = 8$, f(3) = 257

2) Montrer que : $f(n+1) = (f(n) – 1)^2 + 1$

$f(n+1) = 2^{(2^{n+1})} + 1 = 2^{(2.2^n)} + 1 = 2^{(2^n)}.2^{(2^n)} + 1 =$

Or $2^{(2^n)} = f(n) – 1$, d'où le résultat cherché.

3) Montrer que $f(n) = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$

Raisonnons par récurrence :
a) n = 1, f(1) = 5 = 2 + f(0)

b) Supposons la formule vraie au rang n.
D'après la question 2, on a $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1 = f^2(n) - 2f(n) + 2$

$= f(n).[\,2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)] - 2f(n) + 2$

$= 2f(n) + \prod_{k=0}^{n} f(k) - 2f(n) + 2$

$= \prod_{k=0}^{n} f(k) + 2$

Donc vrai au rang n+1

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ par :

$f_n(x) = 1 / \cos^{2n+1}x$

et l'intégrale J(n) par :

$J(n) = \int_0^{\pi/4} f_n(x)\,dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre J(n) et J(n+1) de la forme $J(n+1) = a_n + b_nJ(n)$ où a_n et b_n sont des fonctions de n que l'on explicitera.

Ecrivons $\cos^{-(2n+1)}x = \cos^{-2}x.\cos^{-(2n-1)}x$

$u = \cos^{-(2n-1)}x$
$du = (2n-1)\cos^{(2n-2)}x\,.\,\sin x/\cos^{(4n-2)}x = (2n-1)\sin x/\cos^{2n}x$
$dv = \cos^{-2}x$
$v = \text{tg}\,x$

$J(n) = [\text{tg}\,x.\cos^{-(2n-1)}x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (2n-1).\sin x.\text{tg}\,x/\cos^{2n}x\,dx$

$= [\sin x/\cos^{2n}x]_0^{\pi/4} - (2n-1)\int_0^{\pi/4} \sin^2 x/\cos^{2n+1}x\,dx$

$= [\sin x/\cos^{2n}x]_0^{\pi/4} - (2n-1)\int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 x)/\cos^{2n+1}x\,dx$

$= [\sin x/\cos^{2n}x]_0^{\pi/4} - (2n-1)\int_0^{\pi/4} 1/\cos^{2n+1}x\,dx + (2n-1)\int_0^{\pi/4} 1/\cos^{2n-1}x\,dx$

$J(n) = 2^{n-0,5} – (2n – 1)J(n) + (2n – 1)J(n – 1)$

$2n\ J(n) = 2^{n-0,5} + (2n – 1)J(n – 1)$

$J(n) = 2^{n-0,5}/2n + (2n – 1)J(n – 1)/2n$

On trouve bien une expression de la forme recherchée qui, transposée au rang n+1, donne $a_n = 2^{n+0,5}/2(n+1) = 2^{n-1/2}/(n+1)$ et $b_n = (2n + 1)/2(n+1)$.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on peut trouver deux réels u et v tels que :

$$1/\cos x = u \cos x/(1 – \sin x) + v \cos x/(1 + \sin x)$$

En réduisant au même dénominateur, on a :

$(1 – \sin x)(1 + \sin x) = u \cos^2 x(1 + \sin x) + v \cos^2 x(1 – \sin x)$

$1 = u + v + (u – v)\sin x$

$u + v = 1$
$u – v = 0$

$\Rightarrow u = v = 1/2$

3) Calculer J(0)

$J(0) = \int_0^{\pi/4} (1/\cos x)\, dx$

En utilisant le résultat de la question 2, et en posant $v = 1 – \sin x$ et $w = 1 + \sin x$; quand $x = 0$, $v = 1$, quand $x = \pi/4$, $v = 1 – 2^{-1/2}$; de même, quand $x = 0$, $w = 1$, quand $x = \pi/4$,
$w = 1 + 2^{-1/2}$; on a :

$2J(0) = –\int dv/v + \int dw/w = \text{Ln}(1 + 2^{-1/2}) - \text{Ln}(1 - 2^{-1/2}) = \text{Ln}[(2^{1/2} + 1)/(2^{1/2} – 1)] = \text{Ln}5,83 = 1,76$
$J(0) = \text{Ln}(1 + 2^{1/2}) = 0,88$

4) Calculer J(2)

On a établi à la question 1 : $J(n) = 2^{n-0,5}/2n + (2n – 1)J(n – 1)/2n$

$J(1) = 2^{1-0,5}/2 + (2 – 1)J(0)/2 = 1,15$

$J(2) = 2^{2-0,5}/4 + (4 – 1)J(1)/4 = 1,57$

Exercice 4 :

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$\forall x \geq 1,\ f_n(x) = (\text{Ln } x)^n/(n!.x^2)$

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Posons $u = x^2$
$(\text{Ln } x)^n/(n!.x^2) = (\text{Ln } u)^n/(2^n\ n!u)$

Or on sait que $\lim_{u\to+\infty} (\text{Ln } u)^a/u^b = 0$ pour a et b > 0.
Donc $\lim_{u\to+\infty} f_n(x) = 0$

2) Etablir précisément le tableau de variations de f_n.

Dérivée :
$f_n'(x) = (\text{Ln } x)^{n-1}(n - 2\text{Ln } x)/(n!.x^3)$

Comme $x \geq 1$, $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (n - 2\text{Ln } x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{n/2}$

	1		$e^{n/2}$		$+\infty$
f_n'		+	0	-	
f_n	0	↗	M(n)	↘	0

3) On note M(n) la valeur maximale de $f_n(x)$ sur $[1, +\infty[$.
Montrer que $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2)})/2$.
En déduire que $M(n+1) \leq M(n)/2$.
Quelle est la limite de M(n) quand n tend vers $+\infty$?

Calculons M(n) :

$M(n) = (\text{Ln } e^{n/2})^n/(n!.\ e^n) = (n/2e)^n\ .\ 1/n!$

$M(n+1) = [(n+1)/2e]^n\ .\ 1/(n+1)!$

$f_n(e^{(n+1)/2)}) = (1/n!)\ .\ [(n+1)/2]^n/(e^{n+1}) = (1/n!)\ .\ [(n+1)/2e]^{n+1}\ .\ 2/(n+1)$

$= 2\ .\ [1/(n+1)!]\ .\ [(n+1)/2e]^{n+1} = 2\ M(n+1)$

On en déduit $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2)})/2$.

Comme M(n) est le maximum de $f_n(x)$, $f_n(e^{(n+1)/2)}) \leq M(n)$

On en déduit : $0 \leq M(n+1) \leq M(n)/2 \leq M(1)/2^n$

$M(1) = 1/2e$

$M(n+1) \leq \dfrac{1}{2^{n+1}e}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} M(n) = 0$

4) On considère maintenant l'intégrale

$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\ dt$

4a) Calculer $I_1(x)$.

$f_1(t) = \text{Ln } t / t^2$

En faisant une intégration par parties, avec u = Ln t, du = dt / t, et dv = dt/t² , v = -1 / t

$I_1(x) = [-\text{ Ln } t / t]_1^x + \int_1^x dt / t^2 = -\text{ Ln } x/ x + 1 - 1/x = 1 - (1 + \text{Ln } x)/x$

4b) Montrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - h_{n+1}(x)$, où $h_n(x)$ est une fonction de n et x dont on donnera l'expression.
En déduire que, $\forall n \geq 1$:

$I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k /k!.x]$

Soit donc à calculer :

$I_n(x) = \int_1^x (\text{Ln } t)^n/(n!.t^2)dt$

En faisant une intégration par parties, avec $u = (\text{Ln } t)^{n+1}$ et $dv = dt/t^2$:

$$(n+1)!.I_{n+1}(x) = \int_1^x (\text{Ln } t)^{n+1}/t^2 dt = [- (\text{Ln } t)^{n+1}/t]_1^x + \int_1^x (n+1) (\text{Ln } t)^n/t^2\, dt$$

$$I_{n+1}(x) = - (\text{Ln } x)^{n+1}/(n+1)!x + I_n(x)$$

$$h_n(x) = - (\text{Ln } x)^n/n!x$$

Partant de $I_k(x) = I_{k-1}(x) - h_k(x)$, et en sommant pour k allant de 2 à n, on en déduit facilement que :

$$I_n(x) = I_1(x) - \sum_{k=2}^{n} h_k(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k /k!.x]$$

5) Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel.
Montrer que : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\, M(n)$
En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers + ∞.

D'une part, comme $f_n(x)$ est positif ou nul, $0 \leq I_n(x)$
D'autre part, par définition, il est évident que $\forall\, x \geq 1$, $f_n(x) \leq M(n)$.
Donc en majorant $f_n(x)$ par $M(n)$ dans l'intégrale $I_n(\alpha)$, on a $I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\, M(n)$

On a vu à la question 3 que $\lim_{n\to+\infty} M(n) = 0$; il s'en suit que $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$.

6) Pour n entier, $n \geq 1$, et x réel $x \geq 1$, on pose :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\text{Ln } x)^k /k!$$

Exprimer $L_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
Déterminer la limite de $L_n(\alpha)$ quand n tend vers + ∞, α étant un nombre réel.
En déduire la limite γ de la suite v_n dont le terme général de rang n est :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

D'après l'expression trouvée à la question 4, $I_n(x) = 1 - L_n(x)/x$, et donc :

$$L_n(x) = x - x\, I_n(x).$$

α étant un nombre réel, $1 \leq \alpha < +\infty$, $L_n(\alpha) = \alpha - \alpha.I_n(\alpha)$; comme $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} L_n(\alpha) = \alpha$.
On remarque que $v_n = L_n(e)$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma = \lim_{n\to+\infty} L_n(e) = e$.

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

Question 1

Il y a C_6^3 tirages sans remise de taille 3, soit 20 échantillons possibles.

Question 2

La moyenne est égale à 1025 euros et l'écart type est égal à 38,28 euros
(variance de 1465).

Question 3

Pour obtenir un tirage stratifié représentatif des strates Homme/Femme, toujours avec n = 3, il faut prendre 2 hommes et 1 femme. Les échantillons possibles sont dans le tableau ci-dessous, ainsi que les salaires moyens obtenus sur ces échantillons.

ABE	960	ABF	980	ACE	1000	ACF	1020
ADE	1020	ADF	1040	BCE	1010	BCF	1030
BDE	1030	BDF	1050	CDE	1070	CDF	1090

Question 4

La moyenne est toujours égale à 1025 euros et l'écart type a diminué et est égal à 34,55 euros (variance de 1193,75).

Exercice 2

Question 1

Situation au 1er janvier 2004 des salariés déjà présents au 1er janvier 2000
Distributions conditionnelles

1/1/00 \ 1/1/04	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	0,740	0,000	0,000	0,260	1,000
Agent de maîtrise	0,040	0,820	0,000	0,140	1,000
Agent d'exécution	0,000	0,025	0,825	0,150	1,000
Total	0,043	0,143	0,660	0,154	1,000

Question 2

Le niveau de classification influe sur les départs. En effet, on constate que :

- Les probabilités conditionnelles de l'événement « départ sachant que le salarié avait initialement le niveau i » diffèrent sensiblement selon le niveau.
- Les probabilités de l'événement « départ et niveau i » diffèrent, quelle que soit la catégorie i, du produit des probabilités marginales. Par exemple, on a :
  P(départ et agent d'exécution) = 0,150 alors que P(départ)xP(agent d'exécution) = 0,154x0,80 = 0,1232

Question 3

Il faut observer 423 départs. Sachant que l'on observe par période de 4 ans 154 départs, le nombre n de périodes recherché est solution de l'équation :

$$423=846(1-0,154)^n$$

On trouve n = 5 périodes, soit 20 ans.

Question 4

La répartition trouvée est la suivante

Tableau prévisionnel des effectifs sans embauche

	1/1/04	1/1/08	1/1/12
Cadre	43	38	33
Agent de maîtrise	143	133	123
Agent d'exécution	660	545	450
Total	846	716	606

Question 5

Il faut 7 cadres de plus au 1er janvier 2012 par rapport au résultat trouvé à la question précédente, donc il faut recruter $7 / (0,74)^2 = 13$ cadres au 1er janvier 2004.

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.-

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Exercice :

On considère la suite u(n) définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels par la relation :
$u(n+1) = u(n)\ e^{-u(n)}$
avec comme valeur initiale u(0) = 1.

Pour tout n entier, la suite v(n) est définie par la relation :

$$v(n) = \sum_{p=0}^{n} u(p)$$

1) Etudier le signe et le sens de variation de u(n).

Montrons par récurrence la positivité de u(n) :

- Vraie au niveau 0 : u(0) = 1

- Soit la propriété vraie au rang n : u(n) > 0

Comme $u(n+1) = u(n)\ e^{-u(n)}$ et que $e^{-u(n)} > 0$, on a donc u(n+1) > 0.

Par ailleurs : $u(n+1)/u(n) = e^{-u(n)} < 1$

La suite u(n) est donc décroissante.

2) Trouver la limite de u(n) quand $n \to +\infty$.

Comme u(n) est décroissante et minorée, elle converge.

Soit a la limite de u(n).
a vérifie l'équation $a = a.e^{-a}$ ou encore $a.(1 - e^{-a}) = 0$.
Or $(1 - e^{-a}) \neq 0 \Rightarrow a = 0$

3) Montrer que u(n+1) = f(v(n)), où f est une fonction que l'on explicitera.
En déduire la limite de v(n) quand $n \to +\infty$.

Partant de $u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$, …., $u(1) = u(0)\, e^{-u(0)}$ et en multipliant toutes ces égalités membre à membre, on obtient :

$u(n+1) = u(0)\, e^{-v(n)} = e^{-v(n)}$

$v(n) = -\,\mathrm{Ln}\, u(n+1)$

Quand $n \to +\infty$, u(n) tend vers 0 et donc v(n) tend vers $+\infty$.

Problème 1 :

On donne : Ln3 = 1,099.

Partie I :

Soit φ la fonction définie sur $]\,0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \mathrm{Ln}x / x$$

Etudier les variations de φ et donner très précisément son tableau de variation.
Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
Tracer le graphe de φ.

Dérivée première :
$\varphi'(x) = (1 - \mathrm{Ln}x)/x^2$

$\varphi'(x) = 0$ pour $x = e$; $\varphi'(x) > 0$ pour $x < e$ et <0 pour $x > e$.
φ est donc croissante pour $x < e$ et décroissante pour $x > e$.
Le maximum M de φ est atteint en $x = e$ et vaut $\varphi(e) = M = 1/e \approx 0{,}368$

Dérivée seconde :
$\varphi''(x) = (2\mathrm{Ln}x - 3)/x^3$

Le point d'inflexion est atteint en $\varphi''(x) = 0$, soit pour $x = e^{3/2} \approx 4{,}481$, et $\varphi(e^{3/2}) \approx 0{,}335$.

Limites :
Quand $x \to +\infty$, $\varphi(x)$ tend vers 0 (y = 0 est asymptote horizontale).
Quand $x \to 0$ par valeurs supérieures, $\varphi(x) \to -\infty$.

Points caractéristiques :

Outre le maximum et le point d'inflexion, on remarque que $\varphi(1) = 0$.
La courbe représentant φ coupe l'axe des abscisses au point A (1, 0) ; en ce point, la pente est $\varphi'(1) = 1$.
L'équation de la tangente en A est $y = x - 1$.

Partie II :

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

1) Calculer a^b et b^a pour a = 2 et b = 3, pour a = 4 et b = 2, et pour a = Ln3 et b = 3.

Pour a = 2 et b = 3 : $a^b = 8$, $b^a = 9$.
Pour a = 4 et b = 2, $a^b = 16$, $b^a = 16$.
Pour a = Ln3 et b = 3, $a^b = 1{,}327$, $b^a = 3{,}345$.

2) Montrer que comparer a^b et b^a revient à rechercher le signe de $ab(\varphi(a) - \varphi(b))$.

Comparer a^b et b^a revient à comparer à 1 le rapport $R = a^b / b^a$.

$R > 1 \Leftrightarrow LnR > 0 \Leftrightarrow b.Lna - a.Lnb > 0 \Leftrightarrow ab(Lna/a - Lnb/b) > 0 \Leftrightarrow ab(\varphi(a) - \varphi(b)) > 0$.

Comme a et b > 0, $R > 1 \Leftrightarrow a^b > b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) > 0$.
Inversement, $R < 1 \Leftrightarrow a^b < b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) < 0$.
Et $R = 1 \Leftrightarrow a^b = b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = 0$.

3) En déduire la comparaison de a^b et b^a dans les cas suivants :

3a) $0 < a < b \leq e$
3b) $e \leq a < b$

Compte tenu des variations de la fonction φ vues à la question 1, pour $0 < a < b \leq e$, comme on sait que φ est croissante pour x < e, on a $\varphi(a) < \varphi(b)$ et donc $a^b < b^a$ d'après les résultats de la question 2.

De même, pour $e \leq a < b$, comme φ est décroissante pour x > e, on a $\varphi(a) > \varphi(b)$ et donc $a^b > b^a$.

4) Sans faire le moindre calcul, comparer π^e et e^π.

Comme $e < \pi$, on est dans les conditions de la question (3b) et donc $e^\pi > \pi^e$.

5) Montrer que pour tout a > e, il existe un réel b appartenant à l'intervalle]1, e [tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$. En déduire que $a^b = b^a$.

Soit a > e. On sait que φ est croissante de $-\infty$ à M = 0,368 pour x < e, passe par un maximum M = 0,368 en x = e et décroît ensuite de 0,368 vers 0.
Pour a > 0, $0 < \varphi(a) < M$; compte tenu de la croissance stricte et de la continuité de φ pour x < e, et de sa positivité pour 1 < x < e, on en déduit qu'il existe donc un et un seul nombre $b \in]1, e[$ tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$.
Au vu des résultats de la question 2, on a bien $a^b = b^a$ pour ce couple (a, b).

Partie III :

On prend maintenant a = 3, et on cherche à résoudre l'équation $3^x = x^3$.

1) Soit g la fonction définie sur] 0, $+\infty$[par :

$$g(x) = 3Lnx - xLn3$$

Etudier les variations de g.

On remarque a = 3 > e. On est ainsi dans les conditions de la question 4 de la partie II.

$3^x = x^3 \Leftrightarrow 3Lnx - xLn3 = g(x) = 0$.

$g'(x) = (3 - xLn3)/3$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/Ln3 \approx 2{,}730$.

g est croissante pour $0 < x < 3/Ln3$, passe par un maximum $\approx 0{,}012$, puis décroît.

En outre : $g(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$, et $g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

2) Etablir l'existence de deux réels x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
Donner la valeur (évidente) de x_2.
En déduire une valeur approchée de la solution de l'équation $3^x = x^3$.

D'après les résultats de la question précédente, la courbe représentative de g continue coupe donc l'axe des abscisses en deux points x_1 et x_2, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$, avec $x_1 < 3/Ln3 = 2{,}730 < x_2$.

Une solution évidente aux équations $3^x = x^3 \Leftrightarrow 3Lnx - xLn3 = g(x) = 0$ est $x = 3 = x_2$.

Pour trouver x_1, on procède par itération :

$g(2{,}5) = 0{,}0005 > 0$

$g(2{,}45) = -0{,}0045 < 0$

$g(2{,}49) = -0{,}0005 < 0$

$2{,}49 < x_1 < 2{,}50$

On peut approximer x_1 par 2,495, ou bien poursuivre l'itération avec 3 décimales, ce qui conduit à 2,498.

Problème 2 :

N est l'ensemble des entiers naturels, N* = N – {0} ; Z est l'ensemble des entiers relatifs ; R est l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
On suppose que, pour tout $(x,y) \in R^2$, f vérifie la relation (E) :

$$(E) \quad f(x+y) = [f(x) + f(y)] / [1 + f(x)f(y)]$$

1) Montrer que s'il existe un nombre réel a tel que f(a) = 1 ou f(a) = – 1, la fonction f est constante sur R.
Dans toute la suite, on supposera f non constante.

Soit a tel que f(a) = 1.
Alors $f(x+a) = [f(x) + 1] / [1 + f(x)] = 1 \ \forall x$, donc la fonction f est constante et égale à 1.

De même, s'il existe a tel que f(a) = – 1, il est facile de montrer que f est constante et égale à – 1.

2) On écrit x = (x/2) + (x/2).

2a) Montrer que $-1 < f(x) < 1, \ \forall x \in R$

2b) Montrer que f(0) = 0

2c) Montrer que f est impaire

2a) $f(x) = f((x/2) + (x/2)) = 2f(x/2) / (1 + f^2(x/2))$

Or $(1 - u)^2 = 1 + u^2 - 2u > 0 \Leftrightarrow 2u < 1 + u^2$ et $(1 + u)^2 = 1 + u^2 + 2u > 0 \Leftrightarrow 2u > -(1 + u^2)$, soit : $-(1 + u^2) < 2u < (1 + u^2)$
D'où : $-1 < 2u/(1 + u^2) < 1$.
En posant u = f(x/2), on obtient donc $-1 < f(x) < 1$.

2b) Faisons x = 0 dans la relation précédente :
$f(0) = 2f(0)/(1 + f^2(0)) \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) - 1) = 0$.
Comme $-1 < f(x) < 1$, $\forall x \in R$, $f^2(0) - 1 \neq 0$ d'où f(0) = 0.

2c) $f(x - x) = f(0) = 0 = (f(x) + f(-x))/(1 + f(x).f(-x)) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(-x)$.
f est donc comprise strictement entre – 1 et 1, s'annule en 0 et est impaire.

3) On pose $g(x) = [1 + f(x)]/[1 – f(x)]$.

3a) Démontrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif :

$g(nx) = g^n(x)$

- Propriété vraie par construction pour n = 1

- Supposons $g(nx) = g^n(x)$ et montrons que $g((n+1)x) = g^{n+1}(x)$

Par définition, $g((n+1)x) = [1 + f((n+1)x)]/ [1 – f((n+1)x)]$
Or $f((n+1)x) = [f(nx) + f(x)] / [1 + f(nx)f(x)]$.
Reportons cette expression de $f((n+1)x)$ dans la définition de $g((n+1)x)$:

$$g((n+1)x) = [1 + f(nx)f(x) + f(nx) + f(x)]/ [1 + f(nx)f(x) – f(nx) – f(x)]$$

$$g((n+1)x) = (1 + f(nx))(1 + f(x))//(1 – f(nx))(1 – f(x)) = g(nx).g(x) = g^{n+1}(x)$$

3b) On note $\lambda = g(1)$. Pour tout entier n naturel, donner la valeur de f(n) en fonction de λ.

On a : $g(nx) = g^n(x)$. Posons x = 1: $g(n) = g^n(1) = \lambda^n$.

Comme $g(n) = [1 + f(n)]/[1 – f(n)] = \lambda^n$, on en déduit :

$$1 + f(n) = \lambda^n(1 – f(n))$$
$$\Rightarrow f(n) = (\lambda^n – 1) / (\lambda^n + 1)$$

3c) En déduire f(n) pour tout n appartenant à Z, ensemble des nombres entiers relatifs.

On a démontré que f est impaire.
Soit $p \in Z$.

Si p > 0, la formule de la question (3b) s'applique.
Si p < 0, $f(p) = – f(–p) = – (\lambda^{-p} – 1) / (\lambda^{-p} + 1) = (\lambda^p – 1) / (\lambda^p + 1)$

Donc $\forall\ p \in Z$, $f(p) = (\lambda^p – 1) / (\lambda^p + 1)$

4) On suppose maintenant, et pour toute la suite de l'énoncé, que f, en plus de vérifier la relation (E), est dérivable au point 0. On note d la dérivée de f en 0.

4a) Montrer que f est dérivable en tout point réel x et que $f'(x) = d(1 – f^2(x))$.

Par définition, la dérivée de f en un point x est $\lim_{h\to 0}(f(x+h) – f(x))/h$.

$\forall x \quad f(x+h) = (f(x) + f(h)) / (1 + f(x)f(h))$

D'où $(f(x+h) – f(x))/h = f(h)[1 – f^2(x)]/h(1 + f(x)f(h))$

Quand h tend vers 0, f(h)/h tend vers d, et f(h) tend vers 0.

Donc $\forall x \lim_{h\to 0}(f(x+h) – f(x))/h = f'(x) = d(1 – f^2(x))$

4b) Le nombre d peut-il être nul ?

Si d = 0, f'(x) = 0 $\forall$x, donc f(x) est une constante, ce qui est contraire à la convention prise à la question 1.

4c) Montrer que f est monotone sur R.

Puisque que – 1 < f(x) < 1, $\forall$ x $\in$ R (question 2a), 1 – f²(x) > 0. le signe de f' est donc celui de la constante d, dérivée de f au point 0.
La fonction f est monotone (croissante si d > 0, décroissante si d < 0).

5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f. On admet que f^{-1} est dérivable sur] –1, 1 [.

5a) Donner l'expression de la dérivée de f^{-1} en tout point de] – 1, 1 [.

f^{-1}, fonction réciproque de f, existe car f est continue, dérivable, et strictement monotone ; c'est donc une bijection de R^{*+} dans] – 1, 1 [.

Soit y = f(x), – 1 < y < 1, et x = $f^{-1}(y)$.

On sait que $(f^{-1})'(y) = 1 / f'(y)$, ce qui conduit à :

$(f^{-1})'(y) = 1/d(1 - y^2)$

5b) En déduire f^{-1}.

Connaissant $(f^{-1})'$, on a f^{-1} en cherchant une primitive H :

$1/(1 - y^2) = 1/2(1 - y) + 1/2(1 + y)$

Soit H(y) = [Ln(1+y)/(1–y)]/2 + K

Or on sait que f(0) = 0 et donc $f^{-1}(0) = 0$.
La constante K est telle que H(y) = 0, soit K = 0.

$f^{-1}(y) = [\mathrm{Ln}(1+y)/(1-y)]/2$

5c) En déduire alors l'expression de f.

On déduit de ce qui précède : $x = f^{-1}(y) = [\mathrm{Ln}(1+y)/(1-y)]/2$

[Ln(1+y)/(1–y)] = 2x

$(1+y)/(1-y) = e^{2x}$

$\Rightarrow y = f(x) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1 :

E est un espace vectoriel sur R, de dimension 3, de base B = (e_1, e_2, e_3) ; T est l'espace vectoriel sur R des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. O est la matrice nulle, I la matrice identité de T.

Soit U un élément de T, $U \neq O$ et $U \neq I$.

On définit l'application φ_U de T dans T par : $\varphi_U(X) = UX - XU$.

1) Montrer que φ_U est linéaire.

Soient a et b deux réels, X et Y deux éléments de T.
$\varphi_U(aX+bY) = U(aX+bY) - (aX+bY)U = aUX + bUY - aXU - bYU$
$= a(UX - XU) + b(UY - YU)$
$= a\varphi_U(X) + b\varphi_U(Y)$

2) L'application φ_U est-elle une bijection ?

I étant la matrice identité de T, $\varphi_U(I) = UI - IU = U - U = O$
I appartient donc au noyau de φ_U.
Ker $\varphi_U \neq \{0\} \Rightarrow \varphi$ n'est pas injective et donc non bijective.

Problème 2 :

On considère le système (S) suivant, composé de deux équations à deux inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} ax - by = c \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Les paramètres a, b et c sont obtenus en lançant trois fois consécutives, de façon indépendante, un dé supposé parfait, à six faces numérotées de 1 à 6. Le premier lancer donne la valeur de a, le deuxième celle de b et le troisième celle de c.

1) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le triplet (a, b, c) ?

Il y a $6^3 = 216$ possibilités pour le triplet (a, b, c)

Dans toute la suite du problème, on donnera les probabilités demandées sous forme de fraction de dénominateur 108.

2) Calculer la probabilité P_1 pour que (S) ait une infinité de solutions.

Pour que (S) ait une infinité de solution, les deux équations doivent être proportionnelles, soit :

> a = 1, b = 2 et c = 3
> ou
> a = 2, b = 4 et c = 6

Aucune autre configuration de tirages ne conduit à la même équation x – 2y = 3.
La probabilité P_1 pour que (S) ait une infinité de solutions est donc 2/216 = 1/108.

3) Calculer la probabilité P_2 pour que (S) n'admette aucune solution.

Pour qu'il n'y ait pas de solution, il faut que b – 2a = 0.
Cela conduit à :

> a = 1, b = 2, et c ≠ 3 (car si c = 3, on est dans le cas précédent)
> a = 2, b = 4, et c ≠ 6
> a = 3, b = 6, et c prend n'importe quelle valeur

Soit au total 5 + 5 + 6 = 16 cas possibles.
La probabilité P_2 pour que (S) n'admette aucune solution est 16/216 = 8/108.

4) Calculer la probabilité P_3 pour que (S) admette une solution unique.

Il existe une et une seule solution si b – 2a ≠ 0.
Soit :

> a = 1, b = 1, 3, 4, 5, 6 , ∀ c
> a = 2, b = 1, 2, 3, 5, 6 , ∀ c
> a = 2, b = 1, 2, 3, 4, 5 , ∀ c
> a = 4, ∀ b, ∀ c
> a = 5, ∀ b, ∀ c
> a = 6, ∀ b, ∀ c

Cela représente 3 x 6 x 5 + 3 x 36 = 198 cas possibles.
La probabilité P_3 pour que (S) admette une solution unique est 198/218 = 99/108.

On vérifie $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

5) Calculer la probabilité P_4 pour que (S) admette le couple (x = 3, y = 0) comme unique solution.

Si (3, 0) est solution : 3a – 0 = c
⇒ a = 1 et c = 3, ou a = 2 et c = 6, et b est quelconque.
P_4 = 12/216 = 6/108

Problème 3 :

Partie I :

Soit k un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur] 0, $+\infty$[par :

$f_k(x) = k^2x^2 – (Lnx)/2 – 1/4$

1) Etudier les variations de f_k.

$f_k'(x) = 2k^2x – 1/2x = (2kx – 1)(2kx + 1)/2x$
$f_k(1/2k) = (Ln(2k))/2$

f_k est décroissante de 0 à 1/2k, passe par le minimum (1/2k, (Ln2k)/2), puis croît ensuite, avec une branche parabolique.
Lim $_{x\to 0}$ $f_k(x) = + \infty$, lim $_{x\to +\infty}$ $f_k(x) = + \infty$.

2) Soit M(k) le point correspondant au minimum de f_k.
Donner l'équation de l'ensemble des points M(k) quand k décrit] 0, $+\infty$[.

Les coordonnées de M(k) sont (1/2k, (Ln(2k))/2).
L'équation de la courbe représentant les points M(k) est y = – (Lnx)/2.

Partie II :

On prend dans cette partie k = 1/2. On notera f la fonction $f_{1/2}$.

1) Donner précisément le tableau de variations de f.

$f(x) = x^2/4 – (Lnx)/2 – 1/4$
Le point minimum M a pour coordonnées (1, 0).
f est décroissante de 0 à 1, passe par le minimum (1, 0), puis croît ensuite.

2) Soit a un réel strictement positif.

Calculer $I(a) = \int_a^1 f(x)dx$.

La primitive de f(x) est $x^3/12 – (xLnx)/2 + x/4$

$I(a) = 1/12 + 1/4 – a^3/12 + (aLna)/2 – a/4$
$= 1/3 – a^3/12 + (aLna)/2 – a/4$

3) Déterminer la limite de I(a) quand $a \to 0^+$.

Quand $a \to 0^+$, $I(a) \to 1/3$.

4) Soit n entier naturel, $n \geq 2$; on pose pour p entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$:

$S(n) = [\Sigma_{p=1 à n} f(p/n)]/n$

4a) Soit p tel que $1 \leq p \leq n - 1$; on note J(p, n) l'intervalle élémentaire $J(p, n) = [p/n, (p+1)/n]$.

Démontrer que : $f((p+1)/n) \leq n \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq f(p/n)$

$p/n \leq x \leq (p+1)/n$

$\Rightarrow f((p+1)/n) \leq f(x) \leq f(p/n)$, pour $p \leq n - 1$, car on est dans l'intervalle où f décroît.

En intégrant entre p/n et (p+1)/n :

$\int_{J(p,n)} f((p+1)/n)dx \leq \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq \int_{J(p,n)} f(p/n)dx \leq$

$\Rightarrow [f((p+1)/n)]/n \leq \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq [f(p/n)dx]/n$

4b) En déduire l'encadrement :

$S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$

En sommant pour p = 1 à n l'inégalité obtenue à la question 4a, on obtient :

$[\Sigma_{p=1 à n} f((p+1)/n)]/n \leq I(1/n) \leq [\Sigma_{p=1 à n} f(p/n)]/n$

$\Leftrightarrow S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$

$\Leftrightarrow I(1/n) \leq S(n) \leq I(1/n) + f(1/n)/n$

4c) En déduire la limite de S(n) quand $n \to +\infty$.

Quand $n \to +\infty$, $I(1/n) \to 1/3$, $f(1/n)/n$ tend vers 0 $\Rightarrow S(n) \to 1/3$.

Problème 4 :

C désigne le corps des nombres complexes.

Soit f la fonction de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par :

$f(z) = (z - 1)/(z - 2i)$

M, A et B sont les points d'affixes respectives z, 1, 2i.

1) Donner les formes cartésienne et trigonométrique de f(i).

$f(i) = (i - 1)/(- i) = - 1 - i$
$f(i) = 2^{1/2} (\cos(-3\pi/4) + i.\sin(-3\pi/4))$

2) Résoudre l'équation f(z) = 2i

$f(z) = (z - 1)/(z - 2i) = 2i \Leftrightarrow z - 1 = 2i(z - 2i) \Leftrightarrow z - 1 = 2iz + 4 \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 5$
$\Leftrightarrow z = 5/(1 - 2i) = 1 + 2i.$

3) Déterminer l'ensemble D des points M tels que /f(z) /= 2.

$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |z - 1| = 2.|z - 2i| \Leftrightarrow |x + iy - 1| = 2.|x + iy - 2i|$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y - 2)^2)$

$\Leftrightarrow (x + 1/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 20/9$

D est le cercle de centre (- 1/3, 8/3) et de rayon $R = 2.5^{1/2}/3$.

Problème 5 :

B est la base canonique de l'espace vectoriel C^4, C étant l'ensemble des nombres complexes. M est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients complexes.
Id est l'application identité de C^4 dans C^4, I est sa matrice identité associée.
0 est le symbole de la composition des applications.

Soit g l'application de C^4 dans C^4 dont la matrice associée est J :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g. La matrice J est-elle diagonalisable ?

L'équation conduisant aux valeurs propres est $\lambda^4 - 1 = 0$, soit 4 solutions distinctes :
$\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = i$, $\lambda = -i$.
La forme générique des vecteurs propres associés à la v.p. λ est donc $(x, \lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x)$.
Chaque sous-espace propre est de dimension 1, la somme de dimensions vaut 4, la matrice J est diagonalisable.

2) A tout quadruplet (a, b, c, d) de C^4, on associe la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

On note φ l'application dont A est la matrice relativement à la base B.

Montrer que φ est une combinaison linéaire de Id, g, g^2 (= g o g), g^3 (= g o g o g).

La matrice associée à g^2 est J^2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, la matrice associée à g^3 est J^3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve aisément que $A = aI + bJ + cJ^2 + d\,J^3$, ou encore :
$\varphi = a.Id + b.g + c.g^2 + d.g^3$.

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

1) Pas de corrigé

2) Le mode d'une distribution statistique est la valeur de la variable pour laquelle l'effectif est le plus élevé. La classe modale est ici la classe 400 euros - 500 euros.

La médiane Me de la distribution statistique est la valeur de la variable qui partage l'effectif total de la distribution en deux parties égales, telle que la moitié des observations soient inférieures ou égales à Me. La classe médiane est ici la classe 500 euros - 600 euros. On effectue une interpolation linéaire pour obtenir une approximation de cette valeur et on trouve 533,3 euros.

On constate que la mode et la médiane sont assez éloignés, ceci se justifie par la répartition des effectifs. En effet, on observe qu'il y a deux classes contenant des effectifs importants : la classe 400 euros - 500 euros, et la classe 600 euros - 700 euros. La visualisation de l'histogramme montre bien que la distribution est très asymétrique.

3) La moyenne arithmétique de la distribution est de 561,7 euros. On constate que la moyenne et la médiane ne sont pas proches. La médiane est inférieure à la moyenne, ceci étant dû au fait qu'un certain nombre d'étudiants ont des dépenses élevées (forte dispersion vers une extrémité de la variable).

4) L'écart-type de la variable est égal à 136,4 euros.

5) Le cumul des dépenses est de 84.250 euros. La médiale se trouve donc dans la classe 600 euros- 700 euros. En effectuant une interpolation linéaire, on obtient une estimation de la médiale à 613,0 euros. Cela signifie que les 5 étudiants de la classe [800,1000[+ les 20 étudiants de la classe [700,800[+ 87% des étudiants de la classe [600,700[, soit 60 étudiants effectuent la moitié des dépenses totales. 40% des étudiants occasionnent 50% des dépenses. Ce qui démontre une certaine concentration.

Le calcul de la valeur C demandée, indicateur de concentration, vaut $\frac{613{,}0 - 533{,}3}{1000 - 300} = 0{,}1138$.

Exercice 2

1) La distribution marginale de la variable « mois » est la suivante :

Mois 1	Mois 2	Mois 3	Total
370	370	317	1057

La distribution marginale de la variable « activités » est la suivante :

Sortie au cinéma	Sortie au bowling	Sortie au restaurant	Sortie en discothèque	Total
375	105	279	298	1057

2)

	Mois 1	Mois 2	Mois 3	Total
Sortie au cinéma	370*375/1057 =131,3	370*375/1057 =131,3	317*375/1057 =112,4	375
Sortie au bowling	370*105/1057 =36,7	370*105/1057 =36,7	317*105/1057 =31,6	105
Sortie au restaurant	370*279/1057 =97,7	370*279/1057 =97,7	317*279/1057 =83,6	279
Sortie en discothèque	370*298/1057 =104,3	370*298/1057 =104,3	317*298/1057 =89.4	298
Total	370	370	317	1057

Commentaire : Au vu du tableau précédent, il semble qu'il n'y ait pas indépendance entre la variable « mois » et la variable « activités ». En effet, il y a autant de sorties au cours des 2 premiers mois. Or, les sorties au cours du premier mois s'effectuent essentiellement au cinéma alors qu'au cours du deuxième mois, ce sont les sorties en discothèque qui arrivent largement en tête.

Exercice 3

On a ln y = t x ln k + ln y_0. On se ramène donc à un modèle linéaire avec les variables t et z = ln y, avec z = at + b.

On sait que a est égal au rapport entre Cov(z,t) et V(t). On trouve a=0,0098, d'où k=1,0099.
De même, on sait que b=moy(z)-a x moy(t), d'où b=3,642. On trouve alors y_0=38,17.
Pour t=8, l'estimation du chiffre d'affaires est de 41,29 milliers d'euros.

Exercice 4

Pas de corrigé-type mais on peut remarquer que :

- l'indice des prix a augmenté de 14,9% dans l'ensemble des pays de l'Union Européenne entre janvier 2000 et juillet 2006 ;
- l'indice des prix a augmenté plus vite en Hongrie (+44,3%) ;
- à l'inverse, la Suède et l'Allemagne ont connu des inflations modérées (respectivement +11,9% et +11,5%) ;
- les pays de la zone euro ont eu une inflation de 15,6%, assez proche du résultat obtenu pour l'ensemble des pays de l'Union Européenne ;
- l'Espagne et la Grèce ont une évolution semblable ;
- …..

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in R$, $\forall\ x > 0$, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\, dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur R^+ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

1) En découpant l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [, montrer que f_0 est, en fait, définie sur R.

$$f_0(x) = \int_x^{1} e^{-t^2/2}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

La deuxième intégrale de l'expression précédente existe d'après le préambule (x = 1) et est une constante ; quant à la première intégrale, elle existe pour x réel quelconque car la fonction $e^{-t^2/2}$ est continue sur R.

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

$f_0(x) / (2\pi)^{1/2}$ n'est autre que le complément à 1 de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi normale centrée réduite N(0, 1).
$f_0(x) / (2\pi)^{1/2} = 1 - \Phi(x)$.

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers + ∞ et – ∞.

On en déduit, puisque $\Phi(x)$ tend vers 1 quand x tend vers + ∞ et vers 0 quand x tend vers – ∞ :

$$\lim_{n \to +\infty} f_0(x) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_0(x) = (2\pi)^{1/2}$$

<u>Partie B</u> : a > – 1, étude de l'intégrale g(a)

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale g(a) est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

1) Calculer g(1) et g(2).

$g(1) = f_1(0) = \int_{R+} t.e^{-t^2/2} dt = \int_{R+} e^{-u} du$ en faisant le changement de variable $u = t^2/2$.

D'où g(1) = 1.

$g(2) = f_2(0) = \int_{R+} t^2.e^{-t^2/2} dt = \int_{R+} t.te^{-t^2/2} dt$

En intégrant par parties avec u = t et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$g(2) = [- te^{-t^2/2}]_{R+} + \int_{R+} e^{-t^2/2} dt = 0 + f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation:

$$g(a + 2) = (a + 1)g(a)$$

$g(a + 2) = \int_{R+} t^{a+2} e^{-t^2/2} dt = \int_{R+} t^{a+1}. t . e^{-t^2/2} dt$

Par parties avec $u = t^{a+1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$g(a+2) = [- t^{a+1} e^{-t^2/2}]_{R+} + \int_{r+} (a+1) t^a e^{-t^2/2} dt = 0 + (a+1) g(a)$

3) Pour tout nombre entier n, écrire g(a + 2n) en fonction de g(a + 2(n – 1)).
En déduire l'expression de g(a + 2n) en fonction de g(a).

Il est évident que a + 2n = a + 2n – 2 + 2 = a + 2(n – 1) + 2
Donc, en appliquant la relation de la question 2, on a :

g(a + 2(n-1) + 2) = (a + 2(n-1) + 1)g(a + 2(n – 1)) = (a + 2n -1).g(a + 2(n – 1))

On en déduit, pour tout entier n > 0 :

$$g(a + 2n) = \prod_{k=1}^{n} (a + 2k - 1)\, g(a)$$

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de g(m) en fonction de m.

4a) Démontrer que $1\times3\times5\times \ldots\times(2n-1) = (2n)! / 2^n.n!$

Partons de $1\times3\times5\times \ldots\times(2n-1)$; multiplions et divisons pour ne rien changer cette quantité par le produit des n premiers nombres pairs $2\times4\times6\times\ldots\times n$, qui est aussi égal à $2^n.n!$.
On obtient au numérateur la quantité (2n)!, d'où le résultat recherché.

4b) Donner les expressions de g(m) en fonction de m pour m pair, m = 2p, puis pour m impair, m = 2p + 1.

Soit m = 2p.
On fait a = 0 dans l'expression trouvée à la question 3, et on a :

$$g(2p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\, g(0) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\, (\pi/2)^{1/2}$$

D'où le résultat :

$g(2p) = (\pi)^{1/2}\, (2p)! / 2^{p+1/2}.p!$

Soit m = 2p +1.
On fait a = 1 dans la relation de la question 3, ce qui conduit à :

$$g(1+2p) = \prod_{k=1}^{p}(2k)\, g(1) \text{ avec } g(1) = 1.$$

Il s'en suit : $g(1 + 2p) = (2p)! = 2^p.p!$

<u>Partie C</u> : a > – 1, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a, a > – 1, définie sur R^+ par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.
En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a.

$f_a(x) = \int_{[x,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt = \int_{[x,1[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt + \int_{[1,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$
$= \int_{[1,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt - \int_{[1,x[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$

La première intégrale est une constante, la deuxième est dérivable pour x >0, de dérivée $x^a\, e^{-x^2/2}$.

f_a est donc dérivable pour x > 0, de dérivée $f_a'(x) = -x^a\, e^{-x^2/2}$.

On trouve ensuite : $f_a''(x) = x^{a-1}\, e^{-x^2/2}\, (x^2 - a)$

2) Quel est le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$?

La dérivée $f_a'(x) = -x^a\, e^{-x^2/2}$ est strictement négative pour x > 0.

On en déduit que f_a est strictement décroissante sur R+.

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers + ∞.
(on pourra couper l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [)

D'après l'écriture $f_a(x) = \int_{[1,+\infty[} t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_{[1,x[} t^a e^{-t^2/2}\,dt$, et en vertu du préambule, on a $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0$.

4) *Dans toute cette question, on se restreint à a > 0.*

4a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \int_{R+} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ (cf préambule) $= f_a(0)$, donc la fonction f_a est continue en 0.

4b) En déduire que $\lim_{x\to 0} f_a'(x) = f_a'(0) = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis, $\lim_{x\to 0} f'_a(x) = f'_a(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est positif, f''_a s'annule en $a^{1/2}$, est négative avant, positive après.

$$\lim_{x\to\infty} f'_a(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f'_a(x) = 0$$

On en déduit que f'_a décroit de 0 à min = $f_a(a^{1/2})$ quand x varie de 0 à $a^{1/2}$, puis croît de ce minimum à 0 quand x varie de $a^{1/2}$ à + ∞.
f'_a étant toujours négative, f_a décroit de $f_a(0)$ à 0, avec point d'inflexion en $a^{1/2}$ (concave avant, convexe après).

5) *Dans toute cette question, on se restreint à – 1 < a < 0.*

5a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

Idem précédemment, en vertu du préambule.

5b) Calculer $\lim_{x\to 0} f_a'(x)$. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?

$\lim_{x\to 0} f_a'(x) = -\infty$, donc f_a n'est pas dérivable en 0

5c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est entre – 1 et 0, f''_a est toujours positive pour x > 0, donc f_a est convexe, strictement décroissante de $f_a(0)$ à 0.

6) Pour toute la suite du problème, on revient au cas général a > – 1.
A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1)f_{a-2}(x)$$

Pas de difficulté dans cette intégration, avec $u = t^{a-1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$.

7) A partir de la relation établie à la question 6, étudier le signe de $f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}$.

On a donc : $f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} = (a-1)f_{a-2}(x)$

Le signe de cette différence est celui de a – 1, soit :

$f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} \geq 0$ si $a > 1$

$f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$

$f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} = 0$ si $a = 1$ et dans ce cas $f_a(x) = f_1(x) = e^{-x^2/2}$

8) Démontrer que, pour tout $a > -1$, on a la majoration suivante :

$$|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}| \leq |a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$$

$|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}| = |a-1| \int_{[x,+\infty[} t^{a-2}\, e^{-t^2/2}\, dt$

Or $t^{a-2} = t^a / t^2$.

Comme $t \in [x, +\infty[$, et $x > 0$, $t \geq x$ et donc $1/t \leq 1/x$, d'où $t^{a-2} \leq t^a / x^2$.

$\int_{[x,+\infty[} t^{a-2}\, e^{-t^2/2}\, dt \leq [\int_{[x,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt\,] / x^2 = f_a(x) / x^2$

En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent :

$$f_a(x) \sim x^{a-1}\, e^{-x^2/2}$$

Quand $x \to +\infty$, $|a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$ tend vers 0, d'où le résultat.

9) Dans le cas où $-1 < a \leq 1$, montrer que la majoration trouvée à la question 8 peut être améliorée en :

$$|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}| \leq 2\, x^{a-3}\, e^{-x^2/2}$$

Reprenons le majorant trouvé à la question 8 : $|a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$
Pour $-1 < a \leq 1$, $|a-1| \leq 2$.
D'autre part, on a montré à la question 6 que $f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$.
Il s'en suit :
$|a-1| \,.\, f_a(x) / x^2 \leq 2.\, x^{a-1}\, e^{-x^2/2}/x^2 = 2\, x^{a-3}\, e^{-x^2/2}$

<u>Partie D</u> : polynômes de Hermite

On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Etudier précisément les variations et donner la forme du graphe de h.

h est définie sur R, positive, paire, telle que lim h = 0 quand x tend vers l'infini (asymptote horizontale : y = 0), h(0) = 1.
$h'(x) = -x\, h(x) \Rightarrow$ h est décroissante de 1 à 0 sur R^+
$h'(0) = 0$
$h''(x) = (x^2 - 1)h(x)$ s'annule en x = 1 et -1 (points d'inflexion). La fonction est concave sur -1 et +1 et convexe sinon.

2) Donner l'expression de la dérivée h'(x) en fonction de h(x).

$h'(x) = - x\, h(x)$

3) Montrer que $h''(x) = P_2(x).h(x)$ et $h'''(x) = P_3(x).h(x)$, où P_2 et P_3 sont des polynômes respectivement de degré 2 et 3.

$h''(x) = - h(x) – xh'(x) = (x^2 - 1)h(x)$

$h'''(x) = (x^2 - 1)h'(x) + 2x.h(x) = (-x^3 + 3x).h(x)$

$P_2(x) = x^2 - 1$

$P_3(x) = -x^3 + 3x$

4) Montrer rigoureusement que la dérivée d'ordre n de h, $h^{(n)}(x)$ peut être écrite sous la forme $P_n(x).h(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ne comportant que des puissances paires de x si n est pair, ou uniquement des puissances impaires de x si n est impair.
Le polynôme $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est appelé polynôme de Hermite. Ecrire H_1, H_2, H_3.

Raisonnons par récurrence :

$P_1(x) = - x$

Soit n pair, n = 2p :

$$P_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k}x^{2k}$$

$h^{(2p)}(x) = P_{2p}(x).h(x)$

$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p}(x).h'(x) + P'_{2p}(x).h(x) = -x. P_{2p}(x).h(x) + P'_{2p}(x).h(x)$
$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p+1}(x).h(x)= [-x. P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)].h(x)$

$$P_{2p+1}(x) = [-x. P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)] = -a_{2p}x^{2p+1} + \sum_{k=1}^{p} (-a_{2k-2} + 2k.\, a_{2k})x^{2k-1}$$

$H_1= x$

$H_2 = x^2 - 1$

$H_3 = x^3 - 3x$

5) Etablir une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
On donne $P_4(x) = x^4 – 6x^2 + 3$. En déduire l'expression de P_5 et celle de H_5.

Comme à la question précédente, on a la relation $P_{n+1}(x) = -x. P_n(x) + P'_n(x)$.

D'où : $P_5(x) = -x. P_4(x) + P'_4(x) = – x^5 + 6x^3 – 3x + 4x^3 – 12x = – x^5 + 10x^3 – 15x$

Et $H_5(x) = x^5 – 10x^3 + 15x$

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

1) Soit A la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1a) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice A.
On notera par D la matrice diagonale formée par les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.

L'équation caractéristique est $-\lambda(5 - \lambda) + 6 = 0$, soit $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Elle admet deux racines : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:
$3x – 6y = 0$
On prend (par exemple) $x = 2$ et $y = 1$

Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$:
$2x – 6y = 0$
On prendra $x = 3$ et $y = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1b) Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $A = P D P^{-1}$

La matrice P est formée par les vecteurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément $A = P D P^{-1}$

1c) En déduire la matrice A^n, n entier strictement positif.

Par construction, on a :
$A^n = P D^n P^{-1}$

En effectuant les produits, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3.2^{n+1} - 2.3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3.2^n - 2.3^n \end{pmatrix}$$

2) On considère la suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

$$\text{avec } u_0 = u_1 = 1$$

On note V_{n+2} le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1}. \end{pmatrix}$

2a) Montrer que $V_{n+2} = A\, V_{n+1}$

Le résultat est évident.

2b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Partant de $V_{n+1} = A\, V_n$, et allant jusqu'à $V_2 = A\, V_1$, on en déduit :
$V_{n+1} = A^n\, V_1$, avec $(V_1)' = (1, 1)$
Or $V_{n+2} = (u_{n+1}, u_n)'$

Pour avoir l'expression de u_n, il suffit de prendre la somme des termes de la deuxième ligne de A^n.
Soit $u_n = -2^n + 3^n + 3.2^n - 2.3^n = 2^{n+1} - 3^n$

2c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
$u_n = 2^{n+1} - 3^n = 3^n\,(2(2/3)^n - 1)$ qui tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$.

<u>Problème 2</u> :

N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

Pour tout entier non nul n, on définit les sommes suivantes :

$$S_1(n) = 1 + 2 \,....\, + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Partie I :

1) Démontrer que $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

On peut faire la démonstration par récurrence (classique), ou tout simplement écrire que $2 S_1(n) = (1 + 2 + ... + n) + (n + n-1 + n-2 + ... + 2 + 1) = (1+n) + (2 +n-1) + (3 + n-2) + ... + (n-1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$

D'où $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

C'est ce calcul qui a été historiquement fait par Carl Gauss.

2) On désire établir une relation entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$ de la forme $S_3(n) = h(S_1(n))$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal usuel, d'origine O, on définit par leurs coordonnées les trois suites de points ci-après ($n \geq 1$) :

$A_n\ (S_1(n), 0)$

$C_n\ (0, S_1(n))$

$B_n\ (S_1(n), S_1(n))$

2a) Quelle est la forme du quadrilatère $Q_n = (O, A_n, B_n, C_n)$?

Le quadrilatère est un carré de côté $S_1(n)$.
La suite des quadrilatères Q_n est une suite croissante de carrés emboîtés, telle que $Q_n \subset Q_{n+1}$.

2b) Donner l'aire q_n de Q_n

L'aire q_n de Q_n n'est autre que $[S_1(n)]^2$.

2c) Pour $n \geq 2$, donner l'aire p_n du polygone $(A_{n-1}, A_n, B_n, C_n, C_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-1})$

L'aire p_n du polygone est égale à $n.S_1(n-1) + n.S_1(n)$.

Soit $p_n = n.S_1(n-1) + n.S_1(n).= n. (n-1)n/2 + n. n(n+1)/2 = n^3$

2d) En déduire la relation $S_3(n) = h(S_1(n))$, et l'expression de $S_3(n)$ en fonction de n.

On passe du carré Q_{n-1} au carré Q_n en ajoutant le polygone.

Soit, en aires : $q_n = q_1 + p_2 + p_3 +.... + p_n$

Or $q_n = [S_1(n)]^2$; et $q_1 + p_2 + p_3 +.... + p_n = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

D'où : $S_3(n) = [S_1(n)]^2 = n^2 (n + 1)^2 / 4$

Partie II :

On considère le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(x) = ax + bx^2 + x^3/3$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in R, P(x + 1) – P(x) = x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(-1).

$P(0) = 0$
$P(1) - P(0) = 0$ d'où $P(1) = 0$
$P(2) = 1$
$P(3) = 4 + 1 = 5$
$P(x + 1) - x^2 = P(x)$ d'où $P(-1) = -1$

2) Calculer les coefficients a et b.
A partir de P(1) et P(-1) :

$0 = a + b + 1/3$

$-1 = - a + b - 1/3$

$\Rightarrow b = -1/2$ et $a = 1/6$

$P(x) = (x - 3x^2 + 2x^3)/6 = x(x - 1)(2x - 1)/6$

3) Montrer que la somme $S_2(n)$ est égale à la valeur du polynôme P en un point que l'on précisera.

$P(n+1) = P(n) + n^2$

$P(2) = P(1) + 1^2 = 1^2$

En additionnant membre à membre, on en déduit :

$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n + 1)$

4) Donner l'expression explicite de $S_2(n)$ en fonction de n.

$S_2(n) = P(n+1) = (n + 1)(n + 1 - 1)(2n + 2 - 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

Partie III :

On définit $I_3(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$, somme des cubes des n premiers nombres impairs.

1) A l'aide des expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ trouvées dans les deux premières parties, montrer que $I_3(n) = 2n^4 - n^2$.

$(2k - 1)^3 = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1$

On en déduit :

$I_3(n) = 8\, S_3(n) - 12\, S_2(n) + 6\, S_1(n) - n$

En remplaçant les sommes par les expressions trouvées, après simplification, il s'en suit :

$I_3(n) = 2n^4 - n^2$.

2) Déterminer l'entier n tel que la somme des cubes des n premiers nombres entiers impairs soit égale à 29 161.

Soit $X = n^2$ $(X > 0)$

$2X^2 - X - 29161 = 0$

$\Delta = 233289 = (483)^2$

Seule racine admissible en X : $X = 121$

D'où $n = 11$.

La somme des cubes de 11 premiers nombres impairs (de 1 à 21) vaut 29161.

3) Donner en fonction de n l'expression de $U_3(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k)^3$, somme des cubes des n premiers nombres pairs.

Première méthode :

$U_3(n) = 8S_3(n) \Rightarrow U_3(n) = 8\, n^2\, (n + 1)^2 / 4 = 2n^2(n + 1)^2$

Deuxième méthode:

$I_3(n) + U_3(n)$ n'est autre que la somme des cubes des 2n premiers nombres entiers.

$2n^4 - n^2 .+ U_3(n) = (2n)^2\, (2n + 1)^2 / 4$

$\Rightarrow U_3(n) = n^2(2n + 1)^2 - 2n^4 + n^2$

$= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 + 1) = 2n^2\, (n + 1)^2$

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) a) $E(X) = 12 \quad V(X) = 4$
   b) $E(Y) = 11 \quad V(Y) = 1{,}143$
   c) $E(Z) = 23 \quad V(Z) = 4{,}571$

2) a) On a $E(Z) = E(X) + E(Y)$

   Il ressort de cet exemple que la moyenne de la somme de deux variables est égale à la somme de leurs moyennes, ce qui était intuitivement évident.

   b) $V(Z) \neq V(X) + V(Y)$
   La variance de Z : somme des deux variables, est ici inférieure à la somme des variances de X et de Y. Cela signifie qu'une certaine compensation s'est opérée entre les fluctuations des dividendes distribués par ces deux sociétés. Les risques liés à la non régularité des produits financiers ont donc été diminués.

3) a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] - E(X)E(Y) = -0{,}286$

   b) $A = 4{,}571$

   c) On a $V(Z) = A$

   d) $E(Z) = 11\ 500$ et $V(Z) = 1\ 142\ 750$

4) $Z = 300\ X + 700\ Y$

   $E(Z) = 11\ 300$
   $V(Z) = 799\ 950$

5) a) $Z = 1\ 000\ \alpha\ X + 1000\ (1 - \alpha)\ Y$

   $V(Z) = (1000\ \alpha)^2\ V(X) + [1000\ (1- \alpha)]^2\ V(Y) + 2\ (1000)^2\ \alpha\ (1 - \alpha)\ \mathrm{Cov}\ (X,Y)$
   $= (1000\ \alpha)^2\ [V(X) + V(Y) - 2\ \mathrm{Cov}\ (X,Y)] + (1000)^2\ \alpha[- 2\ V(Y) + 2\ \mathrm{Cov}\ (X,Y)] + (1000)^2\ V(Y)$

La fonction V(Z) est une fonction de α polynôme de degré 2 continue dérivable, dont la dérivée s'annule pour la valeur $\alpha_0 = \dfrac{V(Y) - Cov(X,Y)}{V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y)}$. En faisant un tableau de variation, on voit que V(Z) est minimale pour α_0. Numériquement on trouve $\alpha_0 = 0{,}25$: soit 25 % d'actions A et 75 % d'actions B.

b) E(Z) = 11 250 euros V(Z))= 785 687,5

c) On peut se rendre compte que la plus grande régularité des revenus (variance minimale) donne une rentabilité moindre (moyenne).

Exercice n° 2

1) Le nombre de désistements suit une loi binomiale de paramètres n = 300 et p = 0,02

2) P(X = 3) = 0,0883
   $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = P(X > 4) = 0.7177$

3) a) Évident

   b) $\Delta = 800 \sum_{x=1}^{k} xP(X = x) - 500k + 800k\, P(X > k)$

   A partir du tableau fourni, on calcule Δ pour k donné

k	Δ
0	0
1	298
2	585
3	837
4	1018
5	1092
6	1037
7	852
8	556

On trouve que pour k = 5, la différence est maximale.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle J =] - π/2, + π/2 [.
On considère l'équation (E) de la variable complexe z :

(E) $z^2\cos^2\theta - 4z\cos\theta + 5 - \cos^2\theta = 0$

1 – Résoudre (E) dans l'ensemble des complexes. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de θ l'équation (E) admet une racine double et la valeur de cette racine.

2 – Le plan complexe étant rapporté à un repère orthogonal, on note par M_1 et M_2 les points du plan complexe dont les affixes respectives sont z_1 et z_2, solutions de (E).

Donner l'équation cartésienne de la courbe du plan, lieu géométrique de M_1 et M_2 lorsque θ varie sur l'intervalle J.

Correction :

1 – Le discriminant de (E) est $\Delta' = 4\cos^2\theta - \cos^2\theta\,(5 - \cos^2\theta) = -\cos^2\theta + \cos^4\theta$
$\Delta' = \cos^2\theta\,(\cos^2\theta - 1) = -\cos^2\theta\,\sin^2\theta = (i\sin\theta\cos\theta)^2$

Racine double si $\Delta' = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$ puisque θ appartient à l'intervalle ouvert J =] - π/2, + π/2 [.
Pour $\theta = 0$, (E) devient $z^2 - 4z + 4 = 0 = (z - 2)^2$
La racine double est $z^* = 2$.

Cas général :
Pour θ non nul, les solutions sont :
$z_1 = (2\cos\theta - i\sin\theta\cos\theta)/\cos^2\theta$
et $z_2 = (2\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta)/\cos^2\theta$

Après transformation, on obtient :

$z_1 = 2/\cos\theta - i\,\mathrm{tg}\theta$
$z_2 = 2/\cos\theta + i\,\mathrm{tg}\theta$

2 – Les coordonnées de M_1 et M_2 sont :

Pour M_1 : $x_1 = 2/\cos\theta$ et $y_1 = -\operatorname{tg}\theta$
Pour M_2 : $x_2 = 2/\cos\theta$ et $y_2 = \operatorname{tg}\theta$
On sait que $1 + \operatorname{tg}^2\theta = 1/\cos^2\theta$.

On en déduit que $1 + y^2 = x^2/4$.
Les points M_1 et M_2 appartiennent à la courbe d'équation $x^2/4 - y^2 - 1 = 0$, qui est une hyperbole de sommets A(2, 0) et A'(-2, 0), et d'asymptotes $y = x/2$ et $y = -x/2$.

Problème :

Dans tout le problème, on se place dans l'espace des polynômes, à coefficients réels, de la variable réelle.

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme P dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre, et sont donc égaux par paires.
L'objectif du problème est d'avancer dans la recherche des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Plus précisément, pour un polynôme symétrique P_{2n+1} de degré impair $2n+1$:

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$$

les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k+1}$ pour k = 0 à n.

De même, pour un polynôme symétrique P_{2n} de degré pair 2n :

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

Les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k}$ pour k = 0 à n-1, le coefficient médian a_n n'étant pas apparié.

<u>Partie 1</u>

On pose $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, et $u(k) = x^k + (1/x)^k$, pour k entier, $k \geq 0$ (et donc $u(1) = y$).

1 – Calculer u(0) et exprimer u(2) en fonction de y.

<u>Correction</u> :

$u(0) = 2$, $u(1) = y$, $u(2) = y^2 - 2$.

2 – Montrer que u(k+1) peut être exprimé en fonction de u(k), u(k-1) et y au moyen d'une relation R que l'on explicitera précisément.

Correction :

$(x^k + x^{-k})(x + x^{-1}) = (x^{k+1} + x^{-k-1}) + (x^{k-1} + x^{-k+1})$
D'où la relation (R) :
$u(k+1) = y.u(k) – u(k-1)$

3 – En utilisant la relation R établie à la question 2, discuter les conditions d'existence de la solution de R et donner la forme générale de u(k) en fonction de y et de k.

Correction :

L'équation caractéristique associée à la relation (R) est : $\lambda^2 - \lambda y + 1 = 0$.
$\Delta = (y^2 - 4)$
Si $\Delta>0$, il existe 2 racines $\lambda_1 = (y + \Delta^{1/2})/2$ et $\lambda_2 = (y – \Delta^{1/2})/2$.
La forme générale de u(k) est :
$u(k) = a[(y + \Delta^{1/2})/2]^k + b[(y – \Delta^{1/2})/2]^k$

Avec les conditions initiales u(0) = 2 et u(1) = y, on en déduit :

$a + b = 2$
$u(1) = y = (a + b)y /2 + (a – b) \Delta^{1/2}/2$

$\Rightarrow$ a + b = 2 et a – b = 0

D'où a = b = 1

$u(k) = [(y + \Delta^{1/2})/2]^k + [(y – \Delta^{1/2})/2]^k = 2^{-k}[\sum_{i=0}^{k} C_k^i\, y^i (y^2 - 4)^{(k-i)/2} (1 + (-1)^{k-i})$

4 – Montrer que u(k) est un polynôme de degré k en y.

Correction :

- soit k pair, k = 2p

Alors, pour i pair, k-i pair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 2$

Et, pour i impair, k-i impair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 0$.
Ainsi, pour k = 2p, $2^k u(k) = \sum_{i=0}^{2p} 2\, C^i_{2p}\, y^i (y^2 - 4)^{(2p-i)/2}$

- soit k impair, k = 2p +1
Alors, pour i pair, k-i impair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 0$

Et, pour i impair, k-i pair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 2$.

Ainsi, pour k = 2p + 1, $2^k u(k) = \sum_{i=0}^{2p+1} 2\, C^i_{2p+1}\, y^i (y^2 - 4)^{(2p+1-i)/2}$

Il est évident que u(k) est un polynôme, et en regardant les termes du plus haut degré, un polynôme de degré k.

5 – Calculer u(3), u(4), u(5) et u(6) en fonction de y.

Correction :

En utilisant la relation (R) de la question 2 :

$u(3) = y^3 – 3y$

$u(4) = y^4 – 4y^2 + 2$

$u(5) = y^5 – 5y^3 + 5y$

$u(6) = y^6 – 6y^4 + 9y^2 – 2$

Partie 2

1 – Donner un exemple de polynôme symétrique de degré 1.

Correction : $P_1(x) = x + 1$ est un polynôme symétrique de degré 1.

2 – On considère le polynôme P_2 de degré 2 tel que : $x \longmapsto ax^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$.
Dans le cas où P_2 admet deux racines distinctes, les comparer.

Correction :

$P_2(x) = ax^2 + bx + a$
$\Delta = (b^2 - 4a^2)$.
Condition d'existence de 2 racines distinctes : $b^2 - 4a^2 > 0$, ou $|b| > 2|a|$
Racine double : $|b| = 2|a|$
Si $\Delta > 0$, il existe deux racines distinctes $x_1 = (-b +\Delta^{1/2})/2a$ et $x_2 = (-b -\Delta^{1/2})/2a$.

On constate surtout que les deux racines sont inverses, le produit x_1x_2 étant égal à 1.

Si $\Delta = 0$, $b = +/-2a$, et l'équation devient $ax^2+/- 2ax + a = a(x+1)^2$ ou $a(x-1)^2$, c'est-à-dire que +1 ou -1 est racine double selon que $b = 2a$ ou $b = -2a$.

Partie 3

Considérons maintenant le polynôme P_3 du troisième degré tel que :

$x \longmapsto ax^3 + bx^2 +bx + a$, $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_3 et que si α est racine de P_3, alors 1/α l'est aussi.

Correction :

$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$

$P_3(0) = a \neq 0 \Rightarrow 0$ n'est pas racine de P_3.

$P_3(\alpha) = a\,\alpha^3 + b\,\alpha^2 + b\,\alpha + a = 0 = \alpha^3\,[a + b(1/\alpha) + b(1/\alpha)^2 + a(1/\alpha)^3]$
$1/\alpha$ est donc aussi racine de P_3 car $\alpha \neq 0$.

2 – Trouver une racine évidente x_0 de P_3 et en déduire une factorisation de P_3.

(-1) est racine évidente.
En factorisant : $P_3(x) = (x + 1)(ax^2 +(b-a)x + a)$.
On remarque que le polynôme $(ax^2 +(b-a)x + a)$ est encore un polynôme symétrique.

3 – Discuter le nombre de solutions de l'équation $P_3(x) = 0$.

<u>Correction</u> :

Soit à résoudre $ax^2 +(b-a)x + a = 0$.
$\Delta = (b-a)^2 - 4a^2 = (b – 3a)(b + a) \geq 0$ pour b n'appartenant pas à l'intervalle $]|a|, |3a|[$

On a alors 3 racines :
$x_1 = - 1$

$x_2 = (a – b + \Delta^{1/2})/2a$

$x_3 = (a – b – \Delta^{1/2})/2a = 1/ x_2$

4 – Soit $P_3(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$. Résoudre l'équation $P_3(x) = 0$

$7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = (x + 1)(7x^2 - 50x + 7)$

Racines : $x_1 = - 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1/7$

<u>Partie 4</u>

Soit le polynôme P_4 du quatrième degré tel que : $x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, où $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_4 et que si α est racine de P_4, alors 1/α l'est aussi.
<u>Correction</u> : cf partie 3

2 – Soit $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, introduite dans la partie 1.

Montrer que $P_4(x) = x^2 g(x)$, où g est une fonction de la variable réelle x que l'on explicitera.

Exprimer g en fonction de y et y^2, et des coefficients a, b, c.

<u>Correction</u> :

$P_4(x) = x^2g(x)$ avec $g(x) = a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x) + c$

La fonction g peut être exprimée en fonction de y comme étant $ay^2 + by +c – 2a$ puisque $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$ (d'après la partie 1).

3 – A quelle condition sur a, b et c l'équation $P_4(x) = 0$ admet-elle des solutions ? Montrer que résoudre l'équation $P_4(x) = 0$ revient à résoudre deux équations du second degré.

<u>Correction</u> :

Les solutions de $ay^2 + by + c – 2a = 0$ existent si $b^2 - 4a(c – 2a) = b^2 + 8a^2 - 4ac \geq 0$.

On note y_1 et y_2 les racines de $ay^2 + by + c – 2a$, $y_1 = [-b + [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$ et

$y_2 = [-b - [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$.

Comme 0 n'est pas racine de P_4 , il reste à résoudre les deux équations :

$x + 1/x = y_1$ et $x + 1/x = y_2$, ou encore $x^2 - xy_1 + 1 = 0$ et $x^2 - xy_2 + 1 = 0$

Soit $x^2 - xy_1 + 1 = 0$; $\Delta = (y_1^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} – b]^2 \geq 16a^2$.

De même, pour $x^2 - xy_2 + 1 = 0$, la condition d'existence de 2 racines en x sera :

$(y_2^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2 \geq 16a^2$.

En résumé, l'équation $P_4(x) = 0$ aura 4 racines distinctes si :

$b^2 + 8a^2 - 4ac > 0$

$[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} – b]^2 > 16a^2$.

$[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2 > 16a^2$.

Soit $b^2 + 8a^{2^2} - 4ac > 0$ et $\mathrm{Min}\{[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} – b]^2, [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2\} > 16a^2$.

4 – Résoudre l'équation : $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$.

<u>Correction</u> :

$P_4(x) = x^2g(x)$ avec $g(x) = 12(x^2 + 1/x^2) + 11(x + 1/x) – 146$

En notant par abus de langage $g(y) = 12(y^2 - 2) + 11y – 146 = 12 y^2 + 11y – 170$,
on a : $y_1 = - 17/4$ et $y_2 = 10/3$.

Cela conduit aux deux équations :

$x + 1/x + 17/4 = 0$ ou $4 x^2 + 17x + 4 = 0$.

$x + 1/x – 10/3 = 0$ ou $3 x^2 - 10x + 3 = 0$.

La première mène à $x_1 = - 8$ et $x_2 = – ½$; la seconde à $x_3 = 3$ et $x_4 = 1/3$.

Partie 5

On se place dans le cas général.

1 – Soit P_{2n+1} un polynôme symétrique. Trouver une racine évidente de P_{2n+1}.

Correction :

(-1) est racine évidente, compte tenu de la symétrie des coefficients.

2 – Montrer que $P_{2n+1}(x) = H(x)Q_{2n}(x)$ où H est un polynôme de degré 1 que l'on précisera et Q_{2n} un polynôme de degré 2n. On pose :

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

Exprimer les coefficients a_k, k = 0 à 2n+1, du polynôme P_{2n+1} en fonction des coefficients b_i, i = 0 à 2n, du polynôme Q_{2n}.
Montrer que le polynôme Q_{2n} est un polynôme symétrique.

Correction :

-1 étant racine, on peut factoriser (x + 1), soit : $P_{2n+1}(x) = (x + 1)Q_{2n}(x)$,
d'où H(x) = x + 1.

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i = (x+1) \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

En regardant les termes extrêmes, on a les égalités $a_{2n+1} = b_{2n}$, et $a_0 = b_0$.

En comparant les coefficients de x^k dans les deux écritures, on a :
$a_k = b_{k-1} + b_k$ pour k = 1 à 2n.

Soit à montrer $b_k = b_{2n-k}$ pour k = 0 à n – 1.

H1 : k = 0 ; $a_0 = a_{2n+1} \Rightarrow b_0 = b_{2n}$. La relation est vraie pour k = 0.

H2 : supposons l'hypothèse vérifiée au rang k-1 : $b_{k-1} = b_{2n-k+1}$.

Montrons que:

$b_k = b_{2n-k}$

$b_k = a_k - b_{k-1} = a_{2n+1-k} – b_{2n-k+1}$

$a_k = b_{k-1} + b_k = a_{2n+1-k} = b_k + b_{2n-k+1}$

Or $a_{2n+1-k} = b_{2n-k} + b_{2n-k+1} \Rightarrow b_k = b_{2n-k}$

3 – Montrer que $Q_{2n}(x)/x^n$ peut être mis sous la forme $R_n(y)$ où R_n est un polynôme de degré n de la variable y déjà définie dans la partie 1, et utilisée également dans la partie 4.

<u>Correction</u> :

$Q_{2n}(x)$ est un polynôme symétrique, donc $Q_{2n}(x) = x^n [b_n + \sum_{i=0}^{n} (x^i + x^{-i})]$.

Soit $D(x) = b_n + \sum_{i=0}^{n} (x^i + x^{-i})$.

En utilisant la relation (R) (partie 1, question 2), et les résultats de la question 4, partie 1, on montre que D(x) peut être mis sous la forme d'un polynôme de degré n en y $R_n(y)$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1 :

Soit f une application f de]0, 1 [dans R^+ définie par $x \to f(x) = x - 2x^{1/2} + 1$.
Le symbole o représente la composition des applications.

Montrer que f o f (x) = x.

Correction :

Il est évident que $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$

On a donc : $f \circ f(x) = (f^{1/2} - 1)^2 = f - 2f^{1/2} + 1$

Or $f^{1/2}(x) = 1 - x^{1/2}$ puisque x est compris entre 0 et 1.

D'où : $f \circ f(x) = f - 2f^{1/2} + 1 = x - 2x^{1/2} + 1 - 2(1 - x^{1/2}) + 1 = x$.

Exercice n° 2 :

Un individu vit dans un environnement où il est susceptible d'être contaminé par une maladie. Son état de santé est suivi mensuellement.
Pour un mois donné m, trois états sont possibles :

- il est immunisé (état I)
- il est malade (état M)
- il est non malade et non immunisé (état S)

D'un mois m au mois suivant m+1, son état peut évoluer selon les règles épidémiologiques suivantes :

- étant immunisé au mois m, il peut, au mois m+1, être encore immunisé avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1
- étant malade au mois m, il peut, au mois m+1, être encore malade avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état immunisé avec une probabilité 0,8
- étant en l'état S au mois m, il peut, au mois m+1, être encore en l'état S avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état malade M avec une probabilité 0,5.

1 – Ecrire la matrice A qui résume les probabilités de transition entre l'état du mois m et l'état du mois m+1.

Correction :

Soient e(m) l'état au mois m, e(m+1) l'état au mois m+1.

Par les probabilités conditionnelles, on a les relations suivantes :

P(I(m+1)) =
P(I(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(I(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(I(m+1)/S(m)).P(S(m))

De même :

P(M(m+1))=
P(M(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(M(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(M(m+1)/S(m)).P(S(m))

P(S(m+1))=
P(S(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(S(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(S(m+1)/S(m)).P(S(m))

Avec les valeurs des probabilités proposées :
P(I(m+1) = 0,9.P(I(m)) + 0,8.P(M(m))

De même :

P(M(m+1) = 0,2.P(M(m)) + 0,5.P(S(m))
P(S(m+1) = 0,1.P(I(m)) + 0,5.P(S(m))

Considérons A la matrice de transition (3, 3) donnant les probabilités de passage d'un état e(m) au mois m à un état e(m+1) au mois m+1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

En notant E(m) = (P(I(m)), P(M(m)), P(S(m))) le vecteur-ligne des probabilités décrivant l'état de l'individu au mois m, les relations issues des probabilités conditionnelles s'écrivent matriciellement :

E(m+1) = E(m).A

2 – Dans chacun des cas suivants, calculer les probabilités pour qu'un individu soit dans l'état e au mois m+2, e = I ou M ou S, sachant :

a) qu'il était immunisé au mois m
b) qu'il était non malade et non immunisé au mois m
c) qu'il était malade au mois m

E(m+2) = E(m+1).A = E(m).A²

Le calcul de la matrice A² conduit à $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}05 & 0{,}14 \\ 0{,}88 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Cas a : E(m) = (1, 0, 0)

P(I(m+2) = 0,81
P(M(m+2)) = 0,05
P(S(m+2)) = 0,14

Cas b : E(m) = (0, 0, 1)
P(I(m+2) = 0,4
P(M(m+2)) = 0,35
P(S(m+2)) = 0,25

Cas c : E(m) = (0, 1, 0)
P(I(m+2) = 0,88
P(M(m+2)) = 0,04
P(S(m+2)) = 0,08

Problème :

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

On considère la suite de fonctions f_n où, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n est définie sur l'intervalle]0, +∞ [par :

$$f_n(x) = (\text{Ln } x) / x^n$$

1 – Etudier précisément les variations de f_n, pour $n \geq 1$ (limites, points particuliers, …). Soient x_M et y_M les coordonnées du point M en lequel f_n passe par son maximum. Déterminer le lieu géométrique de M, courbe décrite par le point M, lorsque n varie sur l'ensemble des nombres entiers.

Correction :
Soit $y = (\text{Ln } x) / x^n$, $x > 0$.

Dérivée :
$y' = (1 - n \text{ Ln } x)/x^{n+1}$
Le signe de y' est celui du numérateur (1 – n Ln x) :

$y' = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/n}$
$y' > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/n}$
$y' < 0 \Leftrightarrow x > e^{1/n}$

Dérivée seconde :
Un calcul simple permet d'établir que :
$y'' = (n(n+1)\text{Ln } x - (2n+1))/ x^{n+2}$

Il existe donc un point d'inflexion d'abscisse x_I vérifiant $n(n+1)\text{Ln } x_I - (2n+1) = 0$, soit :
$x_I = \exp[(2n+1)/n(n+1)]$

Son ordonnée : $y_I = (1 + 2n) / (n(n+1)\exp[(2n+1)/(n+1)])$

Lieu géométrique du Maximum : $x_M = e^{1/n}$ et $y_M = 1/ne$
On en déduit, en éliminant n, que les points M appartiennent à la courbe d'équation $y_M = (\text{Ln } x_M)/e$
On remarque que $x_M = e$ pour n = 1, supérieur à 2, et que pour $n \geq 2$, la valeur de x_M est strictement comprise entre 1 et 2.

Point fixe : on remarque que, pour tout n, $f_n(1) = 0$.
Le point A (1, 0) est un point fixe du faisceau de courbes représentant les fonctions $f_n(x)$ lorsque n varie.

Limites :

$$\lim_{x \to +0} f_n(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$$

Tableau de variations :

X	0	1	x_M	$+\infty$
y'		+	0	–
Y	$-\infty$	0	$(ne)^{-1}$	0

2 – Pour tout réel u, $u \geq 1$, on définit l'intégrale $J_n(u)$ par :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

2a – Exprimer $J_n(u)$ en fonction de u et de n.
(Indication : on pourra être conduit à distinguer les cas n = 1 et $n \geq 2$).
Calculer $J_n(2)$.

<u>Correction</u> :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

Cas n ≥ 2 :

En intégrant par parties :

$J_n(u) = [x^{1-n}\mathrm{Ln}\, x/(1-n)]_1 + \int_1^u \frac{dx}{(1-n)x^n}$

$J_n(u) = -\mathrm{Ln}\, u/(n-1)\, u^{n-1} - 1/(n-1)^2u^{n-1} + 1/(n-1)^2$

Cas n = 1 :

$J_1(u) = \int_{[1,u]} (\mathrm{Ln}\, x)/x \; dx = \int_{[0,\mathrm{Ln}\, u]} v\, dv$ en faisant le changement de variable v = Ln x
$J_1(u) = v^2/2$ pris entre 0 et Ln u, soit $J_1(u) = (\mathrm{Ln}\, u)^2/2$.

Calcul de $J_n(2)$.
Pour $n \geq 2$, $J_n(2) = -\mathrm{Ln}\, 2/(n-1)2^{n-1} - 1/(n-1)^2 2^{n-1} + 1/(n-1)^2$
Pour n = 1, $J_1(2) = (\mathrm{Ln}\, 2)^2/2 = 0{,}24$.

2b – On pose $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$.
Exprimer $F_n(u)$ en fonction de u et de n.

<u>Correction</u> :

Pour n = 1, $F_1(u) = J_1(u) - J_1(2) = [(\mathrm{Ln}\, u)^2 - (\mathrm{Ln}\, 2)^2]/2$.

Pour $n \geq 2$, $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$
$= [(\mathrm{Ln}\, 2)/2^{n-1} - (\mathrm{Ln}\, u)/u^{n-1}]/(n-1) + [1/2^{n-1} - 1/u^{n-1}]/(n-1)^2$

Remarque : pour $n \geq 2$, on constate que $F_n(u)$ est bornée supérieurement par la quantité $(\mathrm{Ln}\, 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$.

2c – Déterminer $\underset{u\to+\infty}{Lim} J_n(u)$ et $\underset{u\to+\infty}{Lim} F_n(u)$

<u>Correction</u> :
Pour n = 1, $J_1(u) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$
et $F_1(u) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$

Pour $n \geq 2$, $J_n(u) \to 1/(n-1)^2$ quand $u \to +\infty$
et $F_n(u) \to (\mathrm{Ln}\, 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$ quand $u \to +\infty$

3 – Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la suite v définie par son terme général d'ordre p, p entier strictement supérieur à 2 :

$$v(p) = \sum_{k=2}^{p} f_n(k) = \sum_{k=2}^{p} (\mathrm{Ln}\, k)/k^n$$

3a – Montrer que la suite v(p) est croissante.

<u>Correction</u> :
$v(p+1) - v(p) = \mathrm{Ln}(p+1)/(p+1)^n > 0$.
La suite est donc croissante.

3b - Montrer que pour tous entiers n et k, $n \geq 2$, $k \geq 2$, on a :

$$f_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_n(x)dx \leq f_n(k)$$

Correction :
D'après la question 1, on sait que la fonction f_n est décroissante pour $x > x_M$. Or pour $n > 1$, $x_M < 2$.
Donc pour $k \geq 2$, la fonction f_n est décroissante sur tout intervalle [k, k+1] :
$k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow f_n(k+1) \leq f_n(x) \leq f_n(k)$

En intégrant entre k et k+1, on trouve bien la double inégalité recherchée pour l'intégrale.

3c – En déduire que $v(p) – (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) – (Ln\ p)/p^n$.

Correction :
Par construction, $J_n(p) = \int_{[2,p]} f_n(x)dx$
$F_n(p)$ est donc la somme des intégrales de f_n entre k et k+1 pour k allant de 2 à p –1.

On en déduit : $f_n(3) + ….. + f_n(p) \leq F_n(p) \leq f_n(2) + ….. + f_n(p – 1)$

Le terme de gauche est égal = $v(p) – Ln\ 2/2^n$.
Le terme de droite est égal à $v(p) – Ln\ p/p^n$.

On en déduit que $v(p) – (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) – (Ln\ p)/p^n$.

3d – Trouver un encadrement pour v(p).

Correction :
En appliquant la double inégalité précédente, on a directement :

$F_n(p) + (Ln\ p)/p^n \leq v(p) \leq F_n(p) + (Ln\ 2)/2^n$

3e – Montrer que v(p) est une suite majorée.
Justifier l'existence d'une limite de la suite v(p), que l'on notera V : $V = \underset{p \to +\infty}{Lim} v(p)$.

Déduire de ce qui précède un encadrement pour V.
Application numérique : n = 5 (on donne : Ln 2 = 0,693)

Correction :
On a remarqué, à la question 2, que pour $n \geq 2$, $F_n(u)$ était majorée par la quantité $(Ln\ 2)/2^{n-1}(n – 1) + 1/2^{n-1}(n – 1)^2$.
On en déduit immédiatement que le terme v(p) est majoré par la quantité :
$(Ln\ 2)/2^{n-1}(n – 1) + 1/2^{n-1}(n – 1)^2 + (Ln\ 2)/2^n$

La suite v(p) est donc croissante (question 3a) et majorée ; d'après un résultat connu, elle admet donc une limite V.

En faisant tendre p vers + ∞ dans la double inégalité d'encadrement de v(p) :

$F_n(p) + (\text{Ln } p)/p^n \leq v(p) \leq F_n(p) + (\text{Ln } 2)/2^n$

on en déduit : $\underset{p \to +\infty}{Lim} F_n(p) \leq V \leq \underset{p \to +\infty}{Lim} F_n(p) + (\text{Ln } 2)/2^n$

où la limite de $F_n(p)$ quand p tend vers l'infini est la quantité précédemment trouvée à la question (2c) : $(\text{Ln } 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$.

Application : n = 5, Ln 2 = 0,693, et $0{,}0147 \leq V \leq 0{,}03539$.

3f – A partir de quelle valeur de n la longueur de l'intervalle encadrant V est inférieure ou égale à 0,001 ?

<u>Correction</u> :
La longueur de l'intervalle d'encadrement de V est $(\text{Ln } 2)/2^n$.
Si on veut une longueur de l'intervalle inférieure à 0,001, cela signifie que :
$(\text{Ln } 2)/2^n \leq 0{,}001$
ou encore $2^n \geq 10^3 \text{ Ln } 2$ c'est-à-dire $n \geq \text{Ln}(10^3 \text{ Ln } 2)/\text{Ln } 2$
D'où $n \geq 10$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1 :

a) E(X) = 5.362 Keuros

V(X) = 399.488 Keuros^2 , Ecart-type(X) = 632 Keuros

b)

janv	84,55
févr	96,2
mars	102,78
avr	91,3
mai	109,7
juin	114,68
juil	114,68
août	102,98
sept	111,36
oct	104,4
nov	91,31
déc	76,06

Question 2

La série a tendance à croître au fil du temps de manière modérée. Toutefois, la facturation est bien supérieure au cours des mois de juin et septembre. A l'inverse, ce produit donne peu de facturations au mois de décembre.

Question 3 :

a) moyenne mobile de septembre 2005 : 112,12 (1345,43/12)

« « décembre 2005 : 111,85 (1342,185/12)

b) rapport saisonnier du mois de septembre 2005 : 1,1462 = (128,51/112,12)

« « « décembre 2005 : 0,7811 = (87,37/111,85)

c) 2004 : 6, 2005 : 12, 2006 : 12, 2007 : 12, 2008 : 3 donc 45 au total.

d) Déc 2004 : 0,7967 ; Déc 2005 : 0,7811 ; Déc 2006 : 0,7475 ; Déc 2007 : 0,7194
Soit un coefficient saisonnier de 0,7612

e) La moyenne des coefficients saisonniers est proche de 1

puisque $\left(\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} S_j\right) = 0{,}9973$. En conséquence, les chiffres du tableau 3 sont peu inchangés.

MM	CVS
janvier	0,9825
février	0,9591
mars	1,0256
Avril	0,9214
mai	0,9981
Juin	1,2140
juillet	1,0639
Août	1,0269
septembre	1,1185
octobre	1,0187
novembre	0,9104
décembre	0,7610

Question 4 :

a) juin 2006 : 115,26 = 139,93/1,214
décembre 2007 : 106,43 = 80,99/0,761

b) estimation difficile compte-tenu des évolutions du graphique avec la série corrigée.

Question 5 :

i se calcule par la formule : $(1+i)^{17} = \frac{114{,}28}{89{,}25} \Rightarrow i = 1{,}46\%$ /an.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

On considère la suite numérique $u(n)$ définie sur N par son origine $u(0) = 1$ et son terme général $u(n+1) = au(n) + bn + c$, a, b et c étant des nombres réels, $a \neq 0$.

A partir de $u(n)$ on définit la suite $v(n)$ par :

$v(n) = \alpha u(n) + \beta n + \gamma$, pour n entier ≥ 0, α, β et γ étant des nombres réels, $\alpha \neq 0$.

1) Quelles conditions doivent vérifier les paramètres a, b, c, α, β et γ pour que la suite $v(n)$ soit une suite géométrique.

2) On donne pour toute la suite de l'exercice : $a = 1/3$, $b = 1$, $c = - 1$, $\alpha = 4$, $\beta = - 6$, et $\gamma = 15$. Calculer $v(n)$ en fonction de n.

3) En déduire que $u(n)$ peut s'écrire sous la forme $u(n) = g(n) + h(n)$, où $g(n)$ est une suite géométrique et $h(n)$ une suite arithmétique dont on écrira les expressions en fonction de n.

4) Calculer explicitement, en fonction de n, la somme $U = \sum_{k=0}^{n} u(k)$.

Solution :

1) $u(n+1) = [v(n+1) - \beta(n+1) - \gamma]/\alpha = a[v(n) - \beta n - \gamma]/\alpha + bn + c$

Il s'en suit :

$v(n+1) = av(n) + n(-a\beta + \alpha b + \beta) + (\alpha c - a\gamma + \beta + \gamma)$

La suite v sera géométrique, $v(n+1) = av(n)$, sous les conditions suivantes :

$-a\beta + \alpha b + \beta = 0$

$\alpha c - a\gamma + \beta + \gamma = 0$

2) On vérifie que les conditions de la question 1 sont satisfaites par le jeu de coefficients numériques donné.

Comme $a = 1/3$, on a la suite géométrique $v(n) = v(n-1)/3$

$v(0) = 4u(0) + 15 = 19$

D'où la forme générale de $v(n)$: $v(n) = 19/3^n$

3) D'après la définition de $v(n)$, $v(\mathrm{n}) = 19/3^{\mathrm{n}} = 4u(n) - 6n + 15$, ou :

$u(n) = 19/4.3^{\mathrm{n}} + (6n - 15)/4$

On pose $g(n) = 19/4.3^{\mathrm{n}}$ et $h(n) = (6n - 15)/4$

4) $U = G + H$ avec $G = \sum_{k=0}^{n} 19/4.3^{\mathrm{k}}$ et $H = \sum_{k=0}^{n} (6k - 15)/4$

$G = 19/4 = \sum_{k=0}^{n} (1/3^{\mathrm{k}}) = 19/4\ [1 - 3^{-(\mathrm{n}+1)}]/(1 - 1/3) = 57(1 - 3^{-(\mathrm{n}+1)})/8$

$H = 3(n+1)(n - 5)/4$

$U = 57(1 - 3^{-(\mathrm{n}+1)})/8 + 3(n+1)(n - 5)/4$

Problème

1) Soit f l'application de R dans R^+ définie par $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$.

1a - Etudier précisément les variations de f (dérivées, tableau de variations, concavité, limites, asymptotes, graphe…)

1b - Montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) > |x|$

2) On considère l'application g définie sur R par $g(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$.
Etudier g et tracer son graphe dans le repère orthonormal usuel.

3) On donne maintenant l'application h définie sur R par $h(x) = (x^2 - 1)/2x$.
Etudier h. Donner, en fonction de x, des expressions simples pour $h(g(x))$ et $g(h(x))$.

4) Soit l'application u définie sur R par $u(x) = (x^2 + 1)/2x$.
Etudier précisément les variations de u.

5) n étant un entier naturel, on considère la suite d'applications v_{n} définie sur R par :

$$v_{\mathrm{n}}(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^{\mathrm{n}} + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^{\mathrm{n}}] / 2$$

5a – Calculer $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $v_3(x)$.

5b – Pour tout réel x, comparer $v_{\mathrm{n}}(x)$ et $v_{\mathrm{n}}(-x)$.

5c – Pour tout réel x, comparer $v_{\mathrm{n}}(x)$ et $v_{-\mathrm{n}}(x)$; en déduire directement les relations existant entre $v_{\mathrm{n}}(-x)$, $v_{-\mathrm{n}}(x)$, $v_{-\mathrm{n}}(-x)$ et $v_{\mathrm{n}}(x)$.

6) Montrer que v_n est un polynôme.

Préciser le degré de ce polynôme et le coefficient de son terme du plus haut degré.
Calculer le coefficient du terme du plus haut degré pour les polynômes v_4 et v_5.

7) On note par w l'application définie sur R par $w(x) = x^n$, où n est un entier naturel.

Le symbole o désignant la loi de composition des applications, montrer que, selon la parité de n, v_n peut s'écrire sous les formes ($u \ o \ w \ o \ g$) ou ($h \ o \ w \ o \ g$).

8) Déduire de la question précédente les tableaux de variations de v_n, selon la parité de n.

9) Dans cette question, on suppose que n est un entier non nul.

Soit k un nombre réel donné.

Discuter, selon la valeur de k, le nombre de racines réelles de l'équation $v_n = k$.

10) Soit le nombre réel θ tel que $0 < \theta < \pi/2$

10a - Résoudre, dans le corps C des nombres complexes, l'équation (E) :

(E) $\quad z^n + z^{-n} = 2 \cos\theta$

10b - z_s étant une racine de l'équation (E), calculer $h(z_s) = t_s$.

10c - En notant encore par v_n le prolongement à C de l'application définie à la question 5, calculer $v_n(t_s)$.

Solution :

1a) f est strictement positive, et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car $f(-x) = f(x)$. On peut donc restreindre l'étude à R^+

$f'(x) = x/(x^2 + 1)^{1/2}$
$f''(x) = (x^2 + 1)^{-3/2}$

lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers + ou - ∞.

$f(x)/x \to 1$ quand $x \to +\infty$
$f(x) - x = (x^2 + 1)^{1/2} - x \approx 1/2x \to 0$ quand $x \to +\infty$

$y = x$ est asymptote.

Le minimum est atteint pour $x = 0$, et $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1b) $(x^2 + 1)^{1/2} > (x^2)^{1/2} = |x|$

2) $g(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$.

D'après la question 1b, $g(x) > 0$.

$g'(x) = g(x)/ (x^2 + 1)^{1/2} > 0$.
$g(0) = 1$, $g'(0) = 1$

$g''(x) = (x^2 + 1)^{-3/2} > 0$.

Asymptotes :

$g(x)/x \to 2$ quand $x \to +\infty$
$g(x) - 2x \to 0$ quand $x \to +\infty$, $y = 2x$ est asymptote

$g(x)/x \to 0$ quand $x \to -\infty$

Limites :

$g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
$g(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$

g est donc croissante sur R, de 0 à $+\infty$, avec asymptote horizontale pour x au voisinage de $-\infty$ et $y = 2x$ asymptote au voisinage de $+\infty$.

3) $h(x) = (x^2 - 1)/2x$; $x \neq 0$. Fonction impaire.

$h'(x) = (x^2 + 1)/2x^2 > 0$
$h''(x) = - x^{-3}$ qui est < 0 pour $x > 0$ et inversement.

$h(-1) = h(1) = 0$; $h'(-1) = h'(1) = 1$

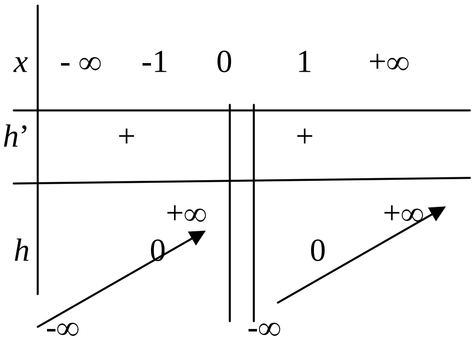
$h(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $h(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$.

Asymptotes :

$h(x)/x \to 1/2$ quand $x \to +\infty$
$h(x) - x/2 \to 0$ quand $x \to +\infty$, $y = x$/é est asymptote

Idem quand $x \to -\infty$.

Tableau de variation :



$h(g(x)) = (g^2(x) - 1)/2g(x) = x$

$g(h(x)) = h(x) + (h^2(x) + 1)^{1/2} = (x^2 - 1)\ /2x \;\; + \;\; (x^2 + 1)/2\,|\,x\,|$

Cas 1 : $x > 0$ alors $g(h(x)) = x$

Cas 2 : $x < 0$ alors $g(h(x)) = -1/x$

4) $u(x) = (x^2 + 1)/2x$; $x \neq 0$. Fonction impaire.

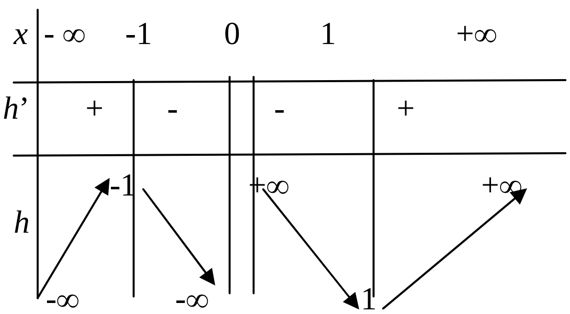
$u'(x) = (x^2 - 1)/2x^2$
$u''(x) = x^{-3}$
$u(-1) = -1$ (maximum)
$u(1) = 1$ (minimum)

Limites :

$u(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
$u(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$
$u(x) \to -\infty$ quand $x \to 0-$
$u(x) \to +\infty$ quand $x \to 0+$

Asymptote : $y = x/2$

Tableau de variations :



5a) $v_0(x) = 1$

$v_1(x) = x$
$v_2(x) = 2x^2 + 1$
$v_3(x) = 4x^3 + 3x$.

5b) $v_n(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x – (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

$v_n(-x) = [(-x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (-x – (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

Il s'en suit :

$v_n(-x) = [(-1)^n (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n + (-1)^n (x + (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2 = (-1)^n v_n(x)$
5c) $v_{-n}(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n} + (x – (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}] / 2$

En multipliant chaque élément de la somme par son terme conjugué, respectivement

$(x – (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}]$ et $(x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}$, on obtient $v_{-n}(x) = (-1)^n v_n(x)$
D'où : $v_{-n}(x) = v_n(- x)$ et $v_{-n}(- x) = v_n(x)$.

6) En développant par la formule du binôme de Newton, on a :

$$2 v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ x^k (1 + x^2)^{(n-k)/2} (1 + (-1)^{n-k})$$

Posons $a(k) = (1 + (-1)^k)$; si n-k est pair, $a(k) = 2$; si n-k est impair, $a(k) = 0$.

D'où les deux cas à distinguer :

Cas 1 : si n est pair (n = 2p)

$a(k) = 0$ pour k = 1, 3, 5, …, 2p-1
$a(k) = 2$ pour k = 0, 2, 4, …., 2p

Le terme du plus haut degré est x^n.

Le coefficient de x^n est $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^n$

Cas 2 : si n est impair (n = 2p+1)

$a(k) = 0$ pour k = 0, 2, 4, …, 2p
$a(k) = 2$ pour k = 1, 3, …., 2p+1

Le terme du plus haut degré est x^n.

Le coefficient de x^n est $C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^n$

Exemples :

$n = 2$, alors $C_2^0 + C_2^2 = 2$

$n = 3$, alors $C_3^1 + C_3^3 = 4$

Pour $n = 4$, le coefficient de x^4 sera 8 , et pour $n = 5$ le coefficient de x^5 sera 16.

7) $w(x) = x^n$, où n est un entier naturel.
$w'(x) = n\,x^{n-1}$, et w est décroissante de $-\infty$ à 0 sur R^- et croît de 0 à $+\infty$ sur R^+

$w(1) = 1$

Calculons maintenant $u(w(g(x)))$.

$w(g(x)) = (x + (x^2 + 1)^{1/2})^n$

$u(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}] / 2$

$= [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (-1)^n (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

Donc, si n est pair, $u(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2 = v_n(x)$

Si n est impair, on ne peut rien dire.

Calculons ensuite maintenant $h(w(g(x)))$.

$h(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n - (x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}] / 2$
$= [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n - (-1)^n (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

Si n est impair, $h(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2 = v_n(x)$

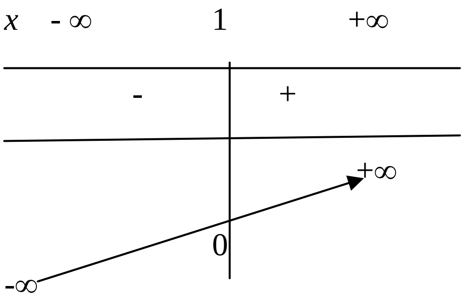
8) On déduit de la question 7 et des questions 2, 3 et 4 (variations des applications g, h et u) que :

- $w(g(x))$ est croissante sur R^+ et positive pour tout x.
- $w(g(x))$ est entre 0 et 1 si $x < 0$ (puisque $g(x) < 1$) et donc $g^n(x) < 1$
- $u(w(g(x)))$ est décroissante de $-\infty$ à 1 pour $w(g(x))$ entre 0 et 1, et croissante sur $(1, +\infty)$.

D'où le tableau pour $u \circ w \circ g$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$		$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

De même, pour $h \circ w \circ g$, $h(w(g(x)))$ est monotone croissante croît de $-\infty$ à $+\infty$.



9) Soit à résoudre $v_n(x) = k$.

Si n est pair, alors $v_n = u \circ w \circ g$ et donc :

- si $k > 1$, 2 racines
- si $k = 1$, une racine
- si $k < 1$, pas de racine

Si n est impair, alors $v_n = h \circ w \circ g$ et donc, pour tout k, il existe une et une seule racine.

10a) L'équation à résoudre est (E) $z^{2n} - 2 z^n \cos\theta + 1 = 0$

On pose $X = z^n$

(E) devient : $X^2 - 2 X \cos\theta + 1 = 0$

Deux solutions :

$X(1) = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

$X(2) = \cos\theta - i \sin\theta = e^{-i\theta}$

A partir de $X(1)$ et $X(2)$, en résolvant en z les équations $X(1) = z^n$ et $X(2) = z^n$, on obtient $2n$ racines.

A partir de $X(1)$: $z(1, s) = \exp[(i\theta + 2is\pi)/n]$, avec $s = 0$ à $n-1$

A partir de $X(2)$: $z(2, s) = \exp[(-i\theta + 2is\pi)/n]$, avec $s = 0$ à $n-1$

10b) Prenons la racine $z(1, s) = \exp[(i\theta + 2is\pi)/n]$.

$h(z(1, s)) = (\exp[(i\theta + 2is\pi)/n] - \exp[-(i\theta + 2is\pi)/n])/2$.

En développant : $h(z(1, s)) = t_s = i.\sin(\theta + 2s\pi)/n$

10c) Soit à calculer $v_n(t_s)$.

Supposons n pair; on sait que $v_n = u \circ w \circ g$.

$g(t_s) = e^{(i\theta + 2is\pi)/n}$

$w(g(t_s)) = e^{(i\theta + 2is\pi)}$

$u(w(g(t_s))) = [e^{(i\theta + 2is\pi)} + e^{-(i\theta + 2is\pi)}]/2 = \cos(\theta + 2s\pi)$

De même, si n pair; on sait que $v_n = h \circ w \circ g$.

$g(t_s) = e^{(i\theta + 2is\pi)/n}$

$w(g(t_s)) = e^{(i\theta + 2is\pi)}$

$h(w(g(t_s))) = [e^{(i\theta + 2is\pi)} - e^{-(i\theta + 2is\pi)}]/2 = i.\sin(\theta + 2s\pi)$

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère trois villes, A, B et C telles que A et C sont à égale distance de B :

d(A, B) = d(B, C).

Deux voitures se rendent de A à C en passant par B.

La première va à la vitesse v de A à B, puis deux fois plus vite ensuite de B à C.

La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse (v + 20) entre B et C.

Les deux voitures mettent le même temps pour aller de A à C.

Quelle est la valeur de v ?

Solution **:**

Pour la voiture V1, d étant la distance commune entre A et B, et B et C, on a :
$d = vt_1 = (2v)t_2$, où t_1 et t_2 sont les temps de parcours entre les villes A et B, et entre B et C.

De même, pour la voiture V2, $d = 48t^*_1 = (v+20)t^*_2$, où t^*_1 et t^*_2 sont les temps de parcours de V2.

Comme $t_1 + t_2 = t^*_1 + t^*_2$, on obtient l'équation $v^2 - 4v - 1440 = 0$, ce qui conduit à la solution $v = 40$.

Exercice n° 2

On se place dans le corps *C* des nombres complexes et dans le plan complexe *P*.

1) Le symbole ¯ désigne la conjugaison. Déterminer l'ensemble *D* des points *M* dont l'affixe *z* vérifie l'équation :

$$z - i\bar{z} = 0$$

2) Au point *M* d'affixe z on associe le point *M'* d'affixe *z'* tel que :

$$z' = h(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$$

Calculer $h(i)$.
Donner le module et un argument de $h(i)$.
Que peut-on dire de $(h(i))^8$?

3) Résoudre l'équation $h(z) = i$.

4) Déterminer R, I et U, respectivement ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel, ensemble des points M tels que z' soit un nombre imaginaire pur, ensemble des points M tels que le module de z' soit égal à 1.

Solution :

1) Soit $z = x + iy$.
$x + iy - i(x + iy) = x - y + i(y - x) = 0 \Rightarrow D$ est la première bissectrice $y = x$.

2) Remarquer d'abord que M ne peut appartenir à D.
$h(i) = (1 - i)/2$
Le carré du module de $h(i)$ est $\rho^2 = ½$, et un argument est $\theta = -\pi/4$ ou encore $7\pi/4$.

$(h(i))^8 = e^{56i\pi/4}/16 = e^{14i\pi}/16$ est un nombre réel (1/16).

3) $h(z) = i$ conduit à $z(1 - i) = i$ d'où $z = (i - 1)/2 = -(1 - i)/2$

4) En écrivant $z' = x' + iy'$, et en transformant la définition de $h(z)$, on obtient :

$x' = (2x + 1)/2(x - y)$

$y' = (2x - 1)/2(x - y)$

z' réel si et seulement si $2x - 1 = 0$, $x = 1/2$

z' imaginaire pur si et seulement si $2x + 1 = 0$, $x = -1/2$

U est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 = 4(x - y)^2$
Ou encore :

$4y^2 - 4x^2 - 8xy - 1 = 0$ (hyperbole)

Problème **:**

Soit f une application de R dans R^+ définie par $x \to f(x) = e^{-x^2/2}$.

NB: on fournit les données numériques suivantes, qui pourront être utiles dans le problème : $Ln50 = 3{,}91$; $e^{1/2} = 1{,}648$; $e^{-1/2} = 0{,}607$; $e^{1/8} = 1{,}133$; $e^{-1/8} = 0{,}882$.

1) Trouver une relation *R1* entre f et f', sa dérivée d'ordre 1.

2) Trouver une relation *R2* entre f et f'', et une relation *R3* entre f et $f^{(3)}$.

3) Etudier de façon précise et complète les variations de f' et de f

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution, que l'on notera α.

5) On note J l'intervalle fermé $J = [1/2, 1]$.

5a - Montrer que $\alpha \in J$.

5b - Montrer que pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$.

6) Montrer que, $\forall\, x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, où M est le meilleur majorant de $|f'(x)|$, que l'on calculera.

7) On définit la suite de terme général $u(n)$, n entier, par $u(0) = 1$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

Montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in N$, $1/2 \leq u(n) \leq 1$.

8) Démontrer que, $\forall\, n \in N$, on a l'inégalité suivante :

$$\text{(E)} \qquad |u(\mathrm{n}+1) - \alpha| \leq M.|u(n) - \alpha|$$

9) Montrer que : $|u(n) - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-n/2}/2$.

10) A partir de quelle valeur n^*, $|u(n) - \alpha|$ est –il inférieur ou égal à 10^{-2} ?

Proposer une méthode pour connaître la valeur de $u(n^*)$ à 10^{-2} près.

11) On appelle intégrale de Gauss l'expression $\int_{\mathrm{R}} f(x)\,dx$. Fin du 18ème siècle, Pierre Simon de Laplace a calculé cette intégrale, égale à $(2\pi)^{1/2}$.

On note $\varphi(x) = f(x) / (2\pi)^{1/2}$, et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$.

11a – Donner l'interprétation probabiliste de $\varphi(x)$ et de $\Phi(x)$.
Donner la valeur de la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

11b – Soit $K(x) = \int_{-\infty}^{x} t^2\, \varphi(t)\, dt$
Calculer la limite de $K(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

<u>Solution</u> **:**

1) $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = -x\,f(x)$ (relation *R1*)

2) $f''(x) = -f(x) - x\,f'(x) = (x^2 - 1)\,f(x)$
R2 $f''(x) = (x^2 - 1)\,f(x)$

$f^{(3)}(x) = (x^2 - 1)\,f'(x) + 2x\,f(x)$
R3 $f^{(3)}(x) = (3x - x^3)\,f(x)$

3) Etude de f' :

D'après *R2*, f'' est < 0 pour x entre -1 et 1, nulle pour x = + ou – 1, et positive hors de l'intervalle [-1, 1].
f' est donc croissante sur]- ∞, -1[, décroissante sur (-1, 1) et croissante sur]1, + ∞ [.
Elle passe par un maximum $f'(-1) = e^{-1/2} = 0{,}607$ et un minimum $f'(1) = - e^{-1/2} = - 0{,}607$.
En outre, $f'(0) = 0$; on remarque aussi que $f'(1/2) = - e^{-1/8} / 2 = - 0{,}441$.
Quand $x \to$ + ou -∞, $f'(x)$ tend vers 0.
Et, de façon évidente, f' est impaire.

Etude de f :
f est positive et paire.
Comme f' est > 0 pour $x < 0$, et < 0 pour $x > 0$, on en déduit que f est croissante sur R^- et décroissante sur R^+.
Elle passe par un maximum en 0, $f(0) = 1$.
Quand $x \to$ + ou - ∞, $f(x)$ tend vers 0.

4) Au vu de la forme de f (question 3), comme f est décroissante de 1 à 0 pour $x > 0$, il existe une et une seule intersection entre le graphe de f et la première bissectrice $y = x$.
Une autre méthode possible consiste à étudier les variations de la fonction définie par $u(x) = f(x) - x$.
En calculant les dérivées u' et u'' et en étudiant leurs signes, on voit aisément que u est monotone décroissante sur R, de + ∞ à - ∞.
Elle s'annule donc une et une seule fois, en α.

5a) $u(1/2) = e^{-1/8} - 1/2 = 0{,}882 - 0{,}5 = 0{,}382 > 0$

$u(1) = e^{-1/2} - 1 = 0{,}607 - 1 = 0{,}393 < 0$

Donc la solution α de $u(x) = 0$ est dans l'intervalle $J = [1/2, 1]$.

5b) Soit $x \in J : 1/2 \leq x \leq 1$

Comme f est décroissante sur R^+, d'après la question 3, $f(1) \leq f(x) \leq f(1/2)$, soit :
$0{,}607 \leq f(x) \leq 0{,}882$

Donc $f(x) \in J$.

6) On sait d'après la, question 1 que $f'(x) = - x\, f(x)$ et d'après la question 3 que f' est décroissante entre -1 et +1, donc sur J.

f' 1/2) = $- e^{-1/8} / 2 = - 0{,}441$

$f'(1) = - e^{-1/2} = - 0{,}607$

f' est donc négative sur J.

En passant aux valeurs absolues, on a, $\forall\ x \in J$: $e^{-1/8} / 2 \leq |f'(x)| \leq e^{-1/2}$

On en déduit donc que, sur J, $|f'(x)| \leq e^{-1/2} = 0{,}607$

Remarque : on aurait pu écrire aussi :

$|f'(x)| = |x|\ f(x)$ et, pour $x \in J$, on a $|x| \leq 1$ et $f(x) \leq f(1/2) = e^{-1/8} = 0{,}882$

D'où, $\forall\ x \in J$, on a : $|f'(x)| \leq e^{-1/8} = 0{,}882$

Cette méthode, basée sur f, fournit aussi un majorant de $|f'(x)|$ sur J, mais moins bon (0,882 > 0,607) que la méthode employée à partir de directement.

7) Raisonnons par récurrence.
$u(0) = 1$ et donc $\in J$.
Supposons $u(n) \in J$; d'après le résultat de la question 5b, $u(n+1) = f(u(n)) \in J$.

8) On sait que $f(u(n)) - f(\alpha) = (u(n)) - \alpha).\ f'(c)$, où c est compris entre $u(n)$ et α, d'après le théorème des accroissements finis.

En passant aux valeurs absolues, et en remarquant que $f(u(n)) = u(n+1)$ et $f(\alpha) = \alpha$ (question 4), on a :

$|u(n+1) - \alpha| = |u(n) - \alpha|\ |f'(c)|$

Comme c est compris entre $u(n)$ et α, $c \in J$, d'après la question 6, $|f'(c)| \leq M = e^{-1/2}$.

D'où : $|u(n+1) - \alpha| \leq e^{-1/2} |u(n) - \alpha|$ (relation E)

9) Il s'en suit que $|u(n) - \alpha| \leq e^{-n/2} |u(0) - \alpha| = e^{-n/2} (1 - \alpha)$

En outre, puisque $\alpha \in J = [1/2, 1]$, $(1 - \alpha) \leq 1/2$, et donc : $|u(n) - \alpha| \leq e^{-n/2}/2$

10) Soit n^* tel que $e^{-n^*/2}/2 = 10^{-2}$; $n^* = 2\,Ln50 \approx 8$.
A 1/100 près, $u(8)$ est bien approximé par la racine α de l'équation $h(x) - x = 0$.
On sait que α est compris entre 1/2 et 1.
Il reste à chercher une valeur plus précise de α.
Cela peut être fait soit, par exemple, en cherchant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par les points de coordonnées (1/2 ; 0,382) et (1 ; - 0,393), qui conduit à la valeur 0,746 (donc arrondie à 0,75 avec une précision de deux décimales), soit par approximations successives, qui mène aussi à 0,75.
La valeur du terme de rang 8 de la suite $u(n)$ est voisine de 0,75.

11a) $\varphi(x)$ est la densité de la loi de probabilité dite loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ (ou loi de Laplace – Gauss).
$\Phi(x)$ est sa fonction de répartition définie par $P(N(0, 1) < x)$.
Puisque Φ est une fonction de répartition, la limité de $\Phi(x)$ est 1 quand x tend vers l'infini.

11b) En faisant une intégration par parties de $\Phi(x)$, on a :
$\Phi(x) = - x^2\, e^{-x^2/2}/(2\pi)^{1/2} + K(x)$
Quand $x \to +\infty$, $- x^2\, e^{-x^2/2} \to 0$, $\Phi(x) \to 1$ et donc $K(x) \to 1$.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1 :

a) On calcule DT(e) et on obtient les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

E	DT(e)=DP x N x (2+e)
0	300000
1	390000
2	450000
3	480000

On estime ensuite a par la valeur 60.000 et b par la valeur 315.000

b)

E	DT(e) estimé
0	315000
1	375000
2	435000
3	495000

DPA s'obtient à partir du modèle estimé pour e = 0 et est égal à 1.575 euros (315000/100 x 2) et DPE s'obtient à partir de e = 1 et est égal à 600 euros ((375000-315000)/100)

c) La dépense par enfant est presque 3 fois plus faible que la dépense d'un adulte. Dans ce scénario, elle est fixe quelle que soit la taille du ménage, ce qui est semble faux par rapport à la réalité.

Question 2 :

a) DT(e) = DPA x nb d'adultes + DPE x nb d'enfants, soit :
DT(e) = $100ce^2$ + 100de + 200DPA + alea

b) DT(e) – DT(e-1) = 100 (2ce + d – c) donc on a le tableau

E	DT(e) – DT(e-1)
1	90000
2	60000
3	30000

En utilisant la méthode des moindres carrés,
on a c = -150 (-30000/200) et d = 1.350 (d-c = 120000/100)

DPE = -150 e + 1.350 + alea pour e>1

c)

Nb d'enfants par ménage e	Dépense totale des enfants	Dépense totale des adultes
0	0	300.000
1	120.000	270.000
2	210.000	240.000
3	270.000	210.000

Exercice n° 2

Question 1 :

a) La dépense annuelle de santé en 1990 est de 76.094 millions d'euros pour 58,171 millions d'habitants en France métropolitaine + DOM, soit environ 1.310 euros par personne.

b) La dépense annuelle de santé en 2000 est de 115.100 millions d'euros pour 60,751 millions d'habitants en France métropolitaine + DOM, soit environ 1.895 euros par personne.

c) Le taux annuel moyen d'évolution entre 1990 et 2000 de la dépense annuelle par personne est de 3,8%, résultat du calcul : $\left(\frac{1895}{1310}\right)^{1/10} - 1$

Question 2 : Au cours de la période 1990-2000, l'inflation a été de 1,186 (résultat du calcul du produit des indices des prix à la consommation des années 1991 à 2000), soit une hausse moyenne annuelle sur la période de 1,7 %. La dépense annuelle de santé par personne en euros constants de l'année 1990 est donc 1.895/1,186, soit 1.598 euros.

Question 3 : La part des soins hospitaliers en 2000 est de 52,7/115,1, soit 45,8 % et celle de 2007 est de 72,7/163,8 = 44,4 %. La part des soins hospitaliers dans les dépenses de santé diminue au fil du temps.

Question 4 : Pas de corrigé type.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Données :

Les valeurs numériques suivantes pourront servir dans le problème : e = 2,718 ; 1/e = 0,368 ; cos(51°8) = 0,618 ; $e^{0,618} = 1,86$.

On note par f la fonction numérique définie sur R par $f(x) = e^{-\cos x}$.

1 – Etudier la fonction f : parité, périodicité, dérivée.
Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Etudier l'existence d'un point d'inflexion.
Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

f est strictement positive.
En outre, f est paire, $f(-x) = f(x)$, car la fonction cos est paire.
$f(x + 2\pi) = f(x)$; f est périodique de période 2π
On remarque que $f(x + \pi) = e^{-\cos(x+\pi)} = e^{\cos x} = 1/f(x)$.

$f'(x) = \sin x\, e^{-\cos x} = f(x) \sin x$
Sur $[0, \pi]$, la fonction f' est positive, nulle en 0 et en π.
f est donc croissante, de $f(0) = 1/e = 0,368$ à $f(\pi) = e = 2,718$.

Point d'inflexion :
$f''(x) = (\sin^2 x + \cos x) f(x) = (-C^2 + C + 1) f(x)$ en notant $C = \cos x$

$f''(x) = 0$ si $C^2 - C - 1 = 0$, c'est-à-dire $C = (1 +- 5^{1/2})/2$; la seule valeur solution possible entre -1 et +1 est $C^* = (1 - 5^{1/2})/2 = -0,618$.
La valeur x^* de l'angle x correspondant à $\cos x^* = -0,618$ est 128°2, légèrement inférieur à $3\pi/4$.
f admet donc un point d'inflexion en $x^* = -0,618$, $f(x^*) = 1,86$.

2 – Dans cette question, on se propose de rechercher les tangentes à *C* issues de l'origine *O*.

2 a – Soit *A* un point de *C* d'abscisse *a*, $0 < a < \pi$.
Ecrire une équation d'une tangente en *A* à *C*.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que cette tangente passe par l'origine *O*.

L'équation générale de la tangente à C en A d'abscisse a est :

$$y - f(a) = (x - a)\ f'(a)$$

$$y = f(a) - a\ f'(a) + x\ f'(a)$$

$$y = (1 - a \sin a)\ f(a) + x \sin a\, f(a)$$

Pour que la tangente passe par O, il faut et il suffit que $(1 - a. \sin a) = 0$.
Comme a est non nul, cela revient à $\sin a = 1/a$.

2 b – On définit la fonction numérique φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

Etudier précisément les variations de φ.
Montrer que φ passe par un maximum *M* dont on cherchera le signe.
En déduire que φ s'annule en deux points x_1 et x_2 que l'on positionnera par rapport à $\pi/2$.
Conclure sur le nombre de tangentes à *C* que l'on peut mener depuis l'origine *O*.

$\varphi'(x) = \cos x + 1/x^2$

$\varphi''(x) = -\sin x - 2\, x^{-3}$

On remarque que φ'' est négative sur $]0, \pi]$.
Donc φ' décroît de $+\infty$ (pour $x \to 0$) à $(1 - \pi^2)/\pi^2$, valeur < 0. φ' s'annule donc en une valeur $x°$ de x, est > 0 avant, négative après.

φ est donc croissante de 0 à $x°$, puis décroissante de $x°$ à π.
$\varphi(0) = -\infty$, $\varphi(\pi) = -1/\pi$.

Soit M le maximum de φ, atteint en $x°$.
Calculons $\varphi(\pi/2)$ et $\varphi'(\pi/2)$.
$\varphi(\pi/2) = (\pi - 2)/\pi$, donc > 0.
$\varphi'(\pi/2) = 4/\pi^2$, valeur > 0.

On en déduit aisément que $x° > \pi/2$.
Donc M est > 0, et le graphe de φ coupe donc l'axe des abscisses en deux points x_1 et x_2 tels que $x_1 < \pi/2$.
Pour positionner x_2, on remarque que $\varphi(3\pi/4) = (6\pi\, 2^{1/2} - 8)/6\pi$, donc $x_2 > 3\pi/4$.

Puisque l'équation $\sin x - 1/x = 0$ admet deux solutions, on peut donc mener deux tangentes à C passant par l'origine.

3 a – Calculer l'intégrale indéfinie $\Phi(x) = \int \varphi(x)\, dx$.

$\Phi(x) = -\cos x - Ln\, x$
où Ln est le symbole du logarithme népérien.

3b – Calculer l'intégrale $F(a, b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

Etudier la limite de $F(a, b)$ quand a tend vers 0 et b tend vers π.

$F(a, b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \cos a - \cos b + Ln(a/b)$

Quand a tend vers 0 et b tend vers π, $\cos a - \cos b \to 2$ et $Ln(a/b) \to -\infty$, donc $F(a, b) \to -\infty$.

Problème 2

On note $M_4(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients réels, $U_4(R)$ le sous-ensemble de $M_4(R)$ formé des matrices inversibles, et I la matrice identité d'ordre 4.

1 – On donne la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.
Déterminer l'inverse A^{-1} de A.

Il suffit, par exemple, de calculer le déterminant de A : Det A = 1, non nul. Donc A est inversible (On peut soustraire la 4^e colonne à la $1^{ère}$ colonne, pour calculer Det A).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 7 & -5 & -16 \end{pmatrix}$$

2 – On note par L_i, $i = 1$ à 4, les lignes d'une matrice M de $M_4(R)$; Λ est l'ensemble des lignes de M.
On considère l'ensemble E formé par les trois opérations élémentaires que l'on peut définir sur l'espace Λ des lignes de M ; ces opérations sont :

a) homothétie : $h(L_i) = a\ L_i$, i = 1 à 4, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la ligne $a\ L_i$, a étant un nombre réel non nul.

b) mélange : $m(L_i) = L_i + bL_k$, i, k = 1 à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la combinaison de L_i et bL_k, b étant un nombre réel.

c) permutation : $p(L_i) = L_k$ et $p(L_k) = L_i$, i, k = 1 à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que les lignes L_i et L_k sont permutées.

On appellera de façon générique e une opération quelconque de E, e étant selon les cas h, m ou p.

Montrer que h, m et p, applications de Λ dans Λ, admettent des inverses notées h^{-1}, m^{-1} et p^{-1} que l'on exprimera.

Par rapport à la composition des applications, on trouve aisément :

$$h^{-1}(L_i) = a^{-1}\ L_i$$
$$m^{-1}(L_i) = L_i - bL_k,$$
$$p^{-1} = p$$

3 – Soit M une matrice de $U_4(R)$, et e une application de E.
Par convention, on notera e(M) la matrice de $M_4(R)$ obtenue en appliquant l'opération e à M.

Montrer que $e(M) = e(I)\ M$
Montrer que $e(I)$ est inversible.
En déduire que $(\boldsymbol{e}(M))^{-1} = M^{-1}\ e^{-1}(I)$

Prenons par exemple la permutation des lignes 1 et 2.
Si l'on permute les lignes 1 et 2 de I, par application du produit matriciel, les lignes 1 et 2 de M seront permutées.
On montre aisément que ce résultat est aussi vrai pour h et m.

Soit à montrer que e(I) est inversible.
Supposons e(I) inversible, et prenons le cas particulier où $M = e^{-1}(I)$.
Alors puisque $e(M) = e(I).M$, *on a* $e(e^{-1}(I)) = I = e(I).e^{-1}(I)$.

De même, puisque $e^{-1} \in E$, *on a aussi* $e^{-1}(I).e(I) = e^{-1}(e(I)) = I$.

Donc e(I) est inversible et $(e(I))^{-1} = e^{-1}(I)$.

e(M) est le produit e(I).M de deux matrices inversibles, donc est inversible, et
$(e(M))^{-1} = M^{-1}\ e^{-1}(I)$

4 – On considère la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B = e(A)$ où e est une application de E que l'on précisera.
Calculer l'inverse B^{-1} de B.

$B = m(A)$ avec $m(L_1) = L_1 + 2\,L_3$

D'après le résultat de la question 3, $B^{-1} = A^{-1}\, m^{-1}(I)$

Avec l'application m permettant de définir B, on a :

$$m^{-1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $A^{-1}.\ m^{-1}(I)$ donne :

$$A^{-1} m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 7 & -3 & -16 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

5 – Soit L le vecteur-ligne d'élément courant a_i, $i = 1$ à 4, et C le vecteur-colonne d'élément courant b_i, $i = 1$ à 4.
On suppose L et C non nuls.
Quelles sont les dimensions de LC et CL ?

Il est évident que LC est un nombre réel, et CL une matrice de $M_4(R)$.

6 – On suppose que $LC + 1 = 0$.
6a – Calculer $(I + CL)C$
6b – La matrice $I + CL$ est-elle inversible ?

$(I + CL)C = C + CLC = C – C = 0$ puisque $LC = - 1$.

Supposons la matrice I + CL inversible.
Il existe alors une matrice E telle que $E(I + CL) = (I + CL)E = I$
Soit $E(I + CL) = I$.
Multiplions à droite par C.
Alors $E(I + CL)C = C \Rightarrow C = 0$, vecteur nul, or C est non nul (question 4).
La matrice (I + CL) n'est donc pas inversible.

7 – On suppose que $LC + 1 \neq 0$.
Montrer que $I + CL$ admet une matrice inverse de la forme $I + k\ CL$, où k est un nombre réel : $(I + CL)^{-1} = I + k\ CL$

Supposons l'existence d'une matrice inverse à $(I + CL)$ de la forme $I + k\ CL$, où k est un réel.
Alors $(I + CL)(I + k\ CL) = I = I + k\ CL + CL + k\ CLCL = I + k\ CL + CL + k\ C(LC)L$

Posons $LC = u$, $u \neq 0$ et $1 + u \neq 0$
$I = I + k\ CL + CL + ku\ CL$
$(k(u+1) + 1)CL = 0$
$\Rightarrow (k(u+1) + 1) = 0$

Et donc $k = - 1 / (1 + u) = - 1 / (1 + LC)$

$(I + CL)^{-1} = I - CL/(1 + LC)$

8 – Soit une matrice M de $U_4(R)$.
On considère la matrice $N = M + CL$.

8a – Montrer que N est inversible si et seulement si : $LM^{-1}C + 1 \neq 0$.

Multiplions à gauche N par M^{-1}, ce qui est licite puisque M est inversible.
$M^{-1}N = I + M^{-1}CL$
Posons $C^* = M^{-1}C$, C^* est un vecteur-colonne de dimension 4.
On a donc $M^{-1}N = I + C^*L$
D'après la question 7, la matrice $I + C^*L$ est inversible sous la condition $LC^* + 1 \neq 0$.

$LC^* + 1 \neq 0 \Leftrightarrow L\ M^{-1}C + 1 \neq 0$

8b – En déduire que, sous cette condition : $N^{-1} = M^{-1} - (M^{-1}CLM^{-1}) / (1 + LM^{-1}C)$

Comme $M^{-1}N = I + M^{-1}CL = I + C^*L$, d'après la question 7, on a la forme de l'inverse de $M^{-1}N$.

$(M^{-1}N)^{-1} = I - C^*L/(1 + LC^*) = I - M^{-1}CL/(1 + L\ M^{-1}C)$

$N^{-1}M = I - M^{-1}CL/(1 + L\ M^{-1}C)$

En multipliant à droite par M^{-1}, on obtient :

$N^{-1} = M^{-1} - M^{-1}CL\ M^{-1}/(1 + L\ M^{-1}C)$

9 – On considère la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9a – Montrer que la matrice $D - A$ peut être écrite sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

$$D - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident que si l'on prend pour vecteur-ligne L = (0 0 -1 0) et pour vecteur-colonne C tel que sa transposée ${}^tC = (1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$, on a D – A = CL.
Remarque : le choix de C et L n'est bien sûr pas unique.

9b – Montrer que D est inversible.

D = A + CL, avec A inversible (question 1).
D est donc de la forme de la matrice N = M + CL de la question 8, avec M = A.
Pour savoir si D est inversible, il faut que la condition $LA^{-1}C + 1 \neq 0$ (question 8a) soit vérifiée.
Avec A^{-1} déterminée à la Q1, et les valeurs de C et L choisies en Q9a, on vérifie aisément que $LA^{-1}C = 0$ et donc que $LA^{-1}C + 1 = 1$.
D est donc inversible.

9c – Calculer D^{-1}

Puisque D= A + CL, avec L et C trouvés en (9a), d'après la question 8b, on a :
$D^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}CLA^{-1}) / (1 + LA^{-1}C)$
D'où puisque $LA^{-1}C + 1 = 1$
$D^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}CLA^{-1})$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 10 & 35 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 11 & -8 & -26 \end{pmatrix}$$

10 – On considère la matrice F définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & x & y & 1 \end{pmatrix}$$

où x et y sont deux réels.

10a – Montrer que $F = A + G$, où G est une matrice que l'on explicitera.

Il est évident que tous les éléments de G sont nuls, sauf la dernière ligne qui s'écrit :
$(0 \quad (x\text{-}1) \quad y \quad 0)$

10b – Montrer que G peut être mis sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

Il est évident que si l'on prend pour vecteur-ligne $L = (0 \quad (x\text{-}1) \quad y \quad 0)$ *et pour vecteur-colonne C tel que sa transposée* ${}^tC = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$, *on a* $G = CL$.

10c – En déduire la relation $t(x, y) = 0$ que doivent vérifier x et y pour que F ne soit pas inversible.

1er cas : si $x = 1$ *et* $y = 0$, *G est nulle et F = A, donc inversible (retour à la question 1).*

2ème cas : $LA^{-1}C = -8(x-1) + 10y$
D'après la question 8a, la condition de non inversibilité de F est donc :
$-8(x-1) + 10y + 1 = 0,$
soit $t(x, y) = 8x - 10y - 9 = 0$

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

1 – On considère deux nombres entiers relatifs a et b.
Montrer que le nombre $n = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

2 – Montrer que le produit P de trois nombres entiers naturels, pairs, consécutifs, est divisible par 48.

1 – Soit $n = ab(a - b)(a + b)$
Si a et/ou b sont divisibles par 3, n l'est également.
Supposons que a et b ne sont pas des multiples de 3.
Alors $a = 3p+1$ ou $3p+2$, et $b = 3q+1$ ou $3q+2$.
Soit $a = 3p+1$ et $b = 3q+1$: alors $a - b = 3(p - q)$ est donc divisible par 3, donc n également.
Soit $a = 3p+1$ et $b = 3q+2$: alors $a + b = 3(p + q + 1)$ est donc divisible par 3, donc n également.

2 – Soient trois nombres entiers naturels pairs consécutifs a, b et c.
On peut les écrire $a = 2p$, $b = 2p + 2$ et $c = 2p + 4$.

Alors $P = 8p(p+1)(p+2)$
P est donc divisible par 8.
Montrons que $p(p+1)(p+2)$ est divisible par $6 = 2x3$.
p, p+1 et p+2 étant trois entiers consécutifs, il y a forcément parmi eux un multiple de 2 et un multiple de 3.
D'où le résultat.

Remarque : $P \geq 48$. En effet, les 3 premiers entiers pairs sont 2, 4 et 6, dont le produit fait 48.

Problème 1

1 – Soit la fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$f(x) = x \sin x$$

1a – Calculer la dérivée f' de f.

$f'(x) = x \cos x + \sin x$

1b – La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$f'(0) = 0$
Cependant, pour savoir si une fonction est dérivable en un point x_0, il faut étudier la limite, quand x tend vers x_0, du taux d'accroissement $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$.
Ici $x_0 = 0$, et $(f(x) - f(0))/(x - 0) = \sin x$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.
f est donc dérivable en 0.

1c – Etudier précisément la fonction f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

On remarque immédiatement que f est paire : $f(-x) = f(x)$, et on peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi/2]$.
Sur cet intervalle, f' est positive (car x, sinx et cosx ≥ 0), et $f'(0) = 0$ et $f'(\pi/2) = 1$.
Donc f est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, avec de $f(0)= 0$ à $f(\pi/2) = \pi/2$.

1d – Calculer une primitive F de f : $F(x) = \int f(x)\,dx$

En intégrant par parties : $F(x) = \int x.\sin x.dx = -x.\cos x + \int \cos x\,dx = -x.\cos x + \sin x$

2 – On considère maintenant la fonction g définie sur R par :

$$g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

2a – La fonction g est-elle continue en 0 ?

$|g(x)| \leq |x|.|\sin(1/x)| \leq |x|$ puisque $|\sin(1/x)| \leq 1$.

Donc quand x tend vers 0, g(x) tend vers 0.
La fonction g est donc continue en 0.

2b – Etudier la parité de g

g(-x) = g(x), g est paire.

2c – Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$

Sur cet intervalle, les fonctions identité et sinus sont dérivables. g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$g'(x) = \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})$

On remarque que g' n'est pas définie en 0.

2d – g est-elle dérivable en 0 ?

Calculons la limite de $(g(x) - g(0))/(x - 0) = \sin(1/x)$ *quand* $x \to 0$.

Au voisinage de 0, $\frac{1}{x}$ *tend vers* $+\infty$, *et* $\sin(\frac{1}{x})$ *oscille entre* -1 *et* $+1$. *le taux d'accroissement de g en 0 n'a pas de limite, g n'est donc pas dérivable en 0.*

2e – Soit G la courbe représentative de g dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de G situés sur les bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Cela revient à résoudre les équations $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ *ou* -1.

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = 1$

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, $\frac{1}{x} = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(3\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = -1$.

3 – On considère maintenant la fonction h définie sur R par :

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0$$

3a – La fonction h est-elle continue en 0 ?

Comme en (2a), h est majorée par x^2, *et donc quand x tend vers 0, h(x) tend vers 0.*
La fonction h est donc continue en 0.

3b – Etudier la parité de h

h est impaire.

3c – Montrer que h est dérivable en tout point x non nul ; h est-elle dérivable en 0 ?

Pour tout $x \neq 0$, h est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$h'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$

Calculons la limite de $(h(x) - h(0))/(x - 0) = x.\sin(\frac{1}{x}) = g(x)$ quand $x \to 0$.

D'après la question (2a), g tend vers 0 quand $x \to 0$, et h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$.

3d – Soit H la courbe représentative de h dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de H situés sur les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = -x^2$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Cela revient à résoudre les équations $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ou -1, comme en (2e).

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(\pi + 4k\pi)$
Comme $h'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$: $h'(2/(\pi + 4k\pi)) = 4/(\pi + 4k\pi)$

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, $\frac{1}{x} = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(3\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = 4/(3\pi + 4k\pi)$.

Problème 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1 – On considère une courbe C du plan définie comme l'ensemble des points M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, dépendant d'un paramètre réel t.
On donne, pour $t \in R$:

$x(t) = t + t^2/2$
$y(t) = t - t^2/2$

1 a – Etudier, dans le même tableau de variations, les variations de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

$x'(t) = t + 1$
$y'(t) = 1 - t$

Pour $t \in R$, $x(t)$ décroit de $+\infty$ à $-1/2$, lorsque t va de $-\infty$ à -1, puis croît jusqu'à $+\infty$ pour t allant de -1 à $+\infty$; $x(t)$ s'annule en $t = 0$.
En outre, $x(1) = 3/2$

$y(t)$ croît de $-\infty$ à $1/2$, lorsque t va de $-\infty$ à $+1$, puis décroît jusqu'à $-\infty$ pour t allant de 1 à $+\infty$; $y(t)$ s'annule en $t = 0$.
En outre, $y(-1) = -3/2$.

1b – Etudier les points de la courbe *C* en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Cela revient à résoudre $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.
$x'(t) = 0$ pour $t = -1$ (le point associé est $(-1/2, -3/2)$).
$y'(t) = 0$ pour $t = 1$ (le point associé est $(3/2, 1/2)$).

1c – Préciser les points d'intersection de *C* avec les axes *Ox* et *Oy*. Donner un vecteur directeur des tangentes en ces points.

Avec l'axe des ordonnées : $x(t) = 0$ pour $t = 0$ et -2
Pour $t = 0$, le point est $O\ (0, 0)$
Pour $t = -2$, le point correspondant est $A(0, -4)$

Avec l'axe des abscisses : $y(t) = 0$ pour $t = 0$ et 2
Pour $t = 0$, le point est $O\ (0, 0)$
Pour $t = 2$, le point correspondant est $B(4, 0)$

La courbe C coupe donc les axes en trois points : O, A et B.

Vecteur directeur des tangentes en O, A et B :
En O, $x' = 1$ et $y' = 1$; en A, $x' = -1$ et $y' = 3$; en B, $x' = 3$ et $y' = -1$.

1d – Donner graphiquement l'allure de la courbe *C*, en positionnant les points remarquables déterminés.

1e – Donner l'équation cartésienne $v(x, y) = 0$ de la courbe *C*.

On remarque que $t = (x + y)/2$
En reportant dans la définition de $x(t)$, on a :

$$x = (x + y)^2/8 + (x + y)/2$$

En développant, on obtient :

$$v(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$$

2 – On se propose de déterminer précisément ce qu'est la courbe *C*.

2 a – Le plan étant assimilé au plan complexe, on considère l'application h qui, à tout point M d'affixe z du plan, associe un point M' d'affixe Z, définie par :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,z$$

Donner de façon précise la nature de l'application h.

On remarque que $Z = h(z) = e^{i\pi/4} z$

H est donc une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.

2b – Soit M le point d'affixe $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.
Déterminer les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de M', image de M par h.
Donner une équation cartésienne $\varphi(X, Y) = 0$ de la courbe C' des points M'.
Comment appelle-t-on la courbe C' ?
En déduire le nom de la courbe C.

Soit $z(t) = \rho\, e^{i\theta} = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta$, avec $x(t) = \rho \cos\theta$ et $y(t) = \rho \sin\theta$.

$Z = h(z) = e^{i\pi/4} z = \rho\, e^{i(\theta+\pi/4)} z$

D'où $X(t) = (x(t) - y(t))/2^{1/2}$ *et* $Y(t) = (x(t) + y(t))/2^{1/2}$

On en déduit : $Y = 2^{1/2}\, t$ *et* $X = 2^{-1/2}\, t^2$

D'où la relation $\varphi(X, Y) = 0 = 4.2^{1/2} X - Y^2$
La courbe C' est une parabole d'axe Ox.

Le courbe C' est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$. La courbe C est donc l'image de C' par la rotation de centre O et d'angle - $\pi/4$.
C'est donc encore une parabole, dont l'axe est la deuxième bissectrice.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

a) $(289.381/60.408)^{1/60} - 1 = 2{,}65\%$

b) $289.381 \text{ x } (1{,}0265)^{30} = 633.370$

c) Il s'agit de comparer le chiffre précédent à 502.003. Cela signifie donc que le taux d'accroissement annuel devrait diminuer selon les experts qui ont établi l'estimation dans le document remis. Les causes peuvent être le vieillissement de la population, la baisse du taux de fécondité, etc.

Question 2

a) L'espérance de vie est passée de 50,0 ans à 49,6 ans alors que la mortalité infantile a diminué (104 à 90). Or, c'est souvent cet indicateur (mortalité infantile) qui est corrélé à l'espérance de vie : quand la mortalité infantile baisse, l'espérance de vie augmente et réciproquement. Cela n'est donc plus vrai dans le cas présent et pour la période récente. La zone étudiée « Afrique de l'ouest » est toutefois relativement épargnée quand on la compare avec la baisse de certaines zones, notamment l'Afrique australe où l'espérance de vie est passée de 61,3 ans à 46,4 ans. Cela est probablement du aux ravages du Sida. Constat identique au sein de la zone « Afrique de l'ouest » (cf. tableau A.3) où le taux de mortalité diminue moins vite que par le passé, voire augmente dans certains pays, notamment en Côte d'Ivoire et au Togo.

b) L'évolution de l'espérance de vie entre les deux périodes 2000/2004 et 1990/1994 est donnée dans le tableau ci-après :

Pays	Evolution de l'espérance de vie (en années)
Bénin	-0,7
Burkina Faso	-1,8
Cap Vert	+3,8
Côte d'Ivoire	-7,3
Gambie	+3,1
Ghana	+1,0
Guinée	+4,3
Guinée-Bissau	+2,3
Liberia	+2,1
Mali	+1,1
Mauritanie	+3,1
Niger	+3,5
Nigeria	-0,5
Sénégal	+2,5
Sierra Leone	-0,3
Togo	-3,9

c) Il faut éliminer les pays pour lesquels il manque la donnée sur le taux de prévalence. Seulement 11 couples de valeurs sont pris en compte et on obtient un coefficient de détermination de 0,778.

d) Ce taux de détermination est élevé. On en déduit que le SIDA a bien impacté la baisse de l'espérance de vie.

Question 3

a)

Pays	Indice 2001
Bénin	127,6
Burkina Faso	126,9
Cap Vert	122,6
Côte d'Ivoire	95,9
Gambie	159,1
Ghana	122,2
Guinée-Bissau	139,7
Mali	129,1
Mauritanie	123,0
Niger	111,5
Nigeria	120,6
Sénégal	131,1
Togo	111,3

b) L'indicateur a diminué en Côte d'Ivoire, seul pays de la zone à baisser, alors qu'il n'était pas spécialement haut en niveau en 1980. On constate qu'en moyenne, les pays ont progressé de 20 points sur cet indicateur et que la Gambie fait exception avec une évolution de presque 60 points.

c) Le calcul demandé est impossible puisque les 20 points indiqués sont en évolution, et non en niveau.

Question 4

a) Niger, Burkina Faso, Guinée, Angola, Congo, Tchad, Ouganda, Somalie.

b) Sénégal, Gambie, Gabon, Sao Tomé et Principe, Comores, Soudan, Erythrée.

c) Kenya, Malawi, Tanzanie, Zambie, Côte d'Ivoire, Cameroun, Centrafrique

d) Sierra Leone, Congo (RD), Burundi, Rwanda

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE

Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Les symboles *Ln* et *tan* représentent respectivement le logarithme népérien et la tangente. On donne *Ln* 2 = 0,69.

1) Comparer les intégrales A et B :

$$A = \int_0^{\pi/4} Ln(\cos x)\,dx$$

$$B = \int_0^{\pi/4} Ln(\cos(\pi/4 - x))\,dx$$

En faisant dans B le changement de variable $u = \pi/4 - x$, on obtient directement A = B.

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} Ln(1 + \tan x)\,dx$

On sait que $\cos(\pi/4 - x) = (\cos x + \sin x)/\sqrt{2}$.

$1 + \tan x = (\cos x + \sin x)/\cos x$

$Ln(1 + \tan x) = Ln(\cos x + \sin x) - Ln(\cos x) = Ln\sqrt{2}\,(\cos(\pi/4 - x)) - Ln(\cos x) = Ln\sqrt{2}$.
$+ Ln(\cos(\pi/4 - x)) - Ln(\cos x)$

D'où, en passant à l'intégrale et comme A = B, on a $I = \frac{\pi}{4} Ln\,(\sqrt{2})$.

Problème 1

Le symbole *Ln* représente le logarithme népérien.

1) Soit l'application $g :]0, 1[\cup]1, +\infty[\to R$, définie par : $g(x) = \frac{1}{Lnx}$

Etudier très précisément les variations de *g* (dérivées, sens de variation, concavité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, graphe).

Pour toute la suite du problème, on admettra l'existence d'une primitive *G* de *g*, qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

Il est évident que g est définie sur R^{+*} sauf pour $x = 1$.
Dérivée : $g'(x) = -1 / (xLn^2x) < 0$.
Donc g est décroissante.
De même, $g'(x) = (2 + Lnx)/x^2Ln^3x$ qui s'annule en $x = e^{-2}$
Donc point d'inflexion en $x = e^{-2}$ et $g(e^{-2}) = -$ ½.

Limites :

Quand $x \to 0$, g tend vers 0.
Quand $x \to 1_-$, g tend vers $-\infty$
Quand $x \to 1_+$, g tend vers $+\infty$
Quand $x \to +\infty$, g tend vers 0.

Asymptotes : $x = 1$, $x = 0$ (vers $+\infty$)

2) On considère l'ensemble $D =]0, 1/2 [\cup]1, +\infty [$.

On définit l'intégrale $J(x)$ par :

$$J(x) = \int_x^{2x} g(t)dt$$

Montrer que $J(x)$ existe pour tout $x \in$ D.

L'intégrale n'existe que si 1 n'est pas dans l'intervalle $(x, 2x)$, soit $1 < x$ ou $1 > 2x$, donc $x <$ ½ ou $x > 1$, ce qui correspond à D.

Avec la notation introduite en Q1, $J(x) = G(2x) - G(x)$.

3) Soit l'ensemble $D^+ = [0, ½ [\cup]1, +\infty [= D + \{0\}$

On définit l'application $f : D^+ \to R$ par :

$$\forall x \in D, \ f(x) = J(x)$$
$$f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur D, et calculer f'.
Etudier le signe de f' et en déduire le sens des variations de f.

Sur D, = $G(2x) - G(x)$, et donc, puisque $G' = g$, on a : $f'(x)$ existe et vaut :
$f'(x) = 2g(2x) - g(x) = Ln(x/2) /[(Lnx) (Ln2x)]$

$\to$ Pour $x <$ ½, $f'(x)$ est < 0, donc f est décroissante.

$\to$ Pour $x > 1$, $f'(x)$ est > 0 si $x /2 > 1$, donc $x > 2$; de même, $f'(x) < 0$ si $x < 2$, et on a $f'(x) = 0$ si $x = 2$.

On remarque aussi que la limite de f' quand x tend vers 0 est égale à 0.

4) Démontrer que, $\forall\ x \in$ D :

$$x/Ln(2x) \le f(x) \le x/Lnx$$

En déduire les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \to 0$.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

D'après les accroissements finis appliqués à f, $f(x) = (2x - x)g(c)$, $x \le c \le 2x$.

Comme la fonction g est décroissante (question 1), $g(x) \ge g(c) \ge g(2x)$, donc :

$$x/Ln(2x) \le f(x) \le x/Lnx$$

et

$$1/Ln(2x) \le f(x)/x \le 1/Lnx$$

On en déduit quand x tend vers 0 :

a) $f(x)$ tend vers 0
b) $f(x)/x$ tend vers 0

Donc on peut prolonger f par continuité en 0.

De même, la limite de $(f(x) - f(0))/(x - 0) = f(x)/x$ est égale à 0, qui est aussi la limite de f ' en 0 (remarque de la question 3), donc f est dérivable en 0.

5) Quelles sont les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \to +\infty$?

Toujours en utilisant la double inégalité de la question 4, on a :

Quand x tend vers $+\infty$:

a) $f(x)$ tend vers $+\infty$
b) $f(x)/x$ tend vers 0

6) Soit l'application h : $]0, 1] \to R$:

$$u \to h(u) = Ln(u) - 2u + 2$$

Montrer qu'il existe un réel unique, noté α, $0 < \alpha < ½$, tel que $h(\alpha) = 0$.

Montrer que $\forall$ u $\in [\alpha, 1]$, on a $Ln(u) \ge 2u - 2$.

En déduire que $f(x)$ est majorée, $\forall\ x \in [\alpha, ½]$, par $(Ln[(2x - 1)/(x - 1)])/2$.

Calculer la limite de f quand $x \to ½$.

En étudiant brièvement $h(u)$ sur]0, 1], on voit que h est croissante de $-\infty$ à $1 - Ln2$ lorsque u passe de 0 à ½, admet un maximum égal à $1 - Ln2$ en ½ et décroit ensuite jusqu'à 0.

Donc il existe un nombre α, compris entre 0 et ½, tel que $h(\alpha) = 0$.

Pour $u \geq \alpha$, $h(u)$ est positive ou nulle, donc $Ln(u) \geq 2u - 2$.

Donc $1/Ln(u) \leq 1/(2u - 2)$.

En reportant cette inégalité dans la définition de f, on voit que $f(x)$ est majorée par l'intégrale :

$$f(x) \leq \int_{x}^{2x} du/(2u-2) = (Ln[(2x-1)/(\boldsymbol{x}-1)])/2.$$

Quand $x \to$ ½, $(Ln[(2x-1)/(x-1)])/2$ tend vers $-\infty$ et donc f aussi.

7) Montrer que, $\forall\ u \geq 1$, $Ln(u) \leq u - 1$.

En déduire la limite de f quand $x \to 1$.

Comme en Question 6, en étudiant les variations de $v(u) = Ln(u) - (u - 1)$, on trouve facilement que $Ln(u) \leq u - 1$ quand $u \geq 1$.

On en déduit en minorant $g(x)$ par $1/(u - 1)$ dans l'intégrale que $f(x) \geq Ln[(2x - 1)/(x - 1)]$; or $Ln[(2x - 1)/(x - 1)]$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 1$, donc f aussi.

8) Construire le tableau de variations de f.

Donc, il résulte de tout ce qui précède, que :

Pour x entre 0 et ½ : f décroît de 0 à $-\infty$

Et pour $x \geq 1$:

a) de 1 à 2, f décroît de $+\infty$ au minimum $m = J(2) = G(4) - G(2)$,
b) puis f croît de m à $+\infty$ pour $x \geq 2$.

Problème 2

Soit l'application f :]-1, +1[→ R, telle que :

$$x \rightarrow f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

1) On veut montrer que f est indéfiniment dérivable sur]-1, +1[et que, $\forall\ n \in$ N, il existe un polynôme réel P_n de la variable réelle, de degré n, tel que :

$$\forall\ x \in\ ]-1, +1[,\ f^{(n)}(x) = P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$$

a) Calculer les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur sur]-1, +1[et exprimer P_{n+1} sous la forme :

$$(R1) \qquad P_{n+1}(x) = a(x)\, P'_n(x) + \alpha(n)\, b(x)\, P_n(x)$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $\alpha(n)$ sont respectivement des fonctions de x et n que l'on explicitera.

2) Montrer que, $\forall$ x $\in$]-1, +1[: $(1 - x^2)\ f'(x) - x\ f(x) = 0$

3) Rappel : Formule de Leibniz : on rappelle que la dérivée d'ordre n du produit de deux fonctions u et v, notée $(uv)^{(n)}$, est donnée par la formule suivante :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)}$$

En utilisant les résultats des questions (2) et (1), montrer que la suite de polynômes (P_n) vérifie la relation :

$$(R2) \qquad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x\, P_n(x) - n^2(1 - x^2)\, P_{n-1}(x) = 0$$

4) Etablir, $\forall\ n \in$ N*, que $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

5) En déduire que, pour tout n entier, $n \neq 0$ et $n \neq 1$, on a la relation ($R3$) :

$$(R3) \qquad n^2 P_n(x) - (2n - 1)x\, P'_n(x) - (1 - x^2)\, P''_n(x) = 0$$

6) Pour tout n entier, calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$

1a) Des calculs simples conduisent à :

$$P_0 = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = 2x^2 + 1,\ P_3(x) = 6x^3 + 9x$$

b) Procédons par récurrence.
Soit la propriété « f est dérivable à l'ordre n et $\forall\ x \in\ ]-1, +1[,\ f^{(n)}(x) = P_n(x)/(1 - x^2)^{n+1/2}$»
La propriété est vraie au rang 0, avec $P_0 = 1$.

Supposons la propriété vraie au rang n.

$P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$ est dérivable, puisque $P_n(x)$ et $(1 - x^2)^{n+1/2}$ sont dérivables sur l'intervalle $]-1, +1[$,et donc $f^{(n+1)}$ existe et :

$$f^{(n+1)}(x) = (1 - x^2)^{-n-1/2} P'_n(x) + (2n + 1)x(1 - x^2)^{-n-3/2} P_n(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (1 - x^2)^{-n-3/2} [(1 - x^2)P'_n(x) + (2n + 1)x P_n(x)]$$

D'où la relation ($R1$) recherchée avec $P_{n+1}(x) = a(x) P'_n(x) + \alpha(n) b(x) P_n(x)$,
et $a(x) = (1 - x^2)$, $b(x) = x$ et $\alpha(n) = (2n + 1)$.

2) $f'(x) = x(1 - x^2)^{-3/2} = x f(x) (1 - x^2)^{-1}$
D'où $(1 - x^2) f'(x) = x f(x)$

3) Partons de la relation $(1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0$, et dérivons la n fois,
avec d'abord $u = (1 - x^2)$ et $v = f'$, puis avec $u = x$ et $v = f$.

On remarque que $u' = -2x$, $u'' = -2$, puis $u^{(k)} = 0$ dès que $k \geq 3$.
$v = f'$, $v^{(n)} = f^{(n+1)}$, $v^{(n-1)} = f^{(n)}$, $v^{(n-2)} = f^{(n-1)}$.

La contribution du terme $(1 - x^2) f'(x)$ sera donc $(1 - x^2) f^{(n+1)} - 2nx f^{(n)} - n(n - 1) f^{(n-1)}$.

De façon similaire, la contribution du terme $x f(x)$ sera $x f^{(n)} - n f^{(n-1)}$.

D'où : $(1 - x^2) f^{(n+1)} - (2n+1) x f^{(n)} - n^2 f^{(n-1)} = 0$.

Remplaçons respectivement $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$ par leurs expressions issues de la question 1 faisant intervenir P_{n+1}, P_n, et P_{n-1}.

$(1 - x^2) P_{n+1}(x) (1 - x^2)^{-n-3/2} - (2n+1)x P_n(x) (1 - x^2)^{-n-1/2} - n^2 P_{n-1}(x) (1 - \mathbf{x}^2)^{-n+1/2} = 0$.

Ou encore : $P_{n+1}(x) (1 - x^2)^{-n-1/2} - (2n+1)x P_n(x)(1 - x^2)^{-n-1/2} - n^2P_{n-1}(x) (1 - x^2)^{-n+1/2} = 0$.

Et en simplifiant par $(1 - x^2)^{-n-1/2}$, on obtient la relation ($R2$) recherchée :

$$(R2) \qquad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) - n^2(1 - x^2).P_{n-1}(x) = 0$$

4) Cherchons à établir, $\forall$ n $\in$ N*, que $P'_n(x) = n^2P_{n-1}(x)$

D'après ($R2$), on a : $P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) = n^2(1 - x^2) P_{n-1}(x)$

Or, d'après la question 1b, $P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) = (1 - x^2) P'_n(x)$

Il s'en suit $n^2(1 - x^2) P_{n-1}(x) = (1 - x^2) P'_n(x)$, et donc $P'_n(\mathrm{x}) = n^2P_{n-1}(x)$.

5) Ecrivons la relation ($R2$) au rang n :

$P_n(x) - (2n - 1)x.P_{n-1}(x) - (n-1)^2(1 - x^2)\ P_{n-2}(x) = 0$

D'après la question 4, $P_{n-1}(x) = P'_n(x)/n^2$, et donc en dérivant encore une fois :

$P'_{n-1}(x) = P''_n(x)/n^2$,

Et d'après la question 4, $P'_{n-1}(x) = (n-1)^2 P_{n-2}(x) = P''_n(x)/n^2$.

En remplaçant dans ($R2$), on obtient :

$P_n(x) - (2n - 1)x\ \ P'_n(x)/n^2 - (1 - x^2)\ \ P''_n(x)/n^2 = 0$

Soit encore : $n^2 P_n(x) - (2n - 1)x\ P'_n(x) - (1 - x^2)\ \ P''_n(x) = 0$

6) On sait que l'on a $P_0(0) = 1$ et $P_0(1) = 1$, $P_1(0) = 0$ et $P_1(1) = 1$.

D'après la relation ($R2$) prise en $x = 0$, on a :

$P_{n+1}(0) - n^2\ P_{n-1}(0) = 0$

De même, toujours avec la relation ($R2$) prise en $x = 1$, on a :

$P_{n+1}(1) - (2n + 1)P_n(1) = 0$

Calcul de $P_n(0)$:

Pour n pair, $n = 2p$, $P_{2p+1}(0) - (2p)^2\ P_{2p-1}(0) = 0$, qui va aller jusqu'à $P_1(0) = 0$, donc $P_{2p+1}(0) = 0$.

Pour n impair, $n = 2p-1$, $P_{2p}(0) - (2p-1)^2\ P_{2p-2}(0)$, d'où :

$P_{2p}(0) = (2p-1)^2\ (2p-3)^2\ (2p-5)^2 \ldots\ 1$

Calcul de $P_n(1)$:

$P_n(1) - (2n - 1)P_{n-1}(1) = 0$

$P_n(1) = (2n - 1)(2n - 3)\ \ldots 1$

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Le paramètre a est un réel strictement positif, $a > 0$.
Soit une application $f : [0, a] \to R$ continue, vérifiant pour tout réel x, $0 \le x \le a$, les deux conditions suivantes :

$$f(x) \neq -1$$
$$f(x).\ f(a-x) = 1$$

Calculer l'intégrale $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$

On a : $f(x) = 1/f(a\text{-}x)$

Donc $1/(1+f(x)) = f(a-x)/(1+f(a-x))$

$$\int_0^a (1/(1+f(x)))\, dx = \int_0^a f(a-x)/(1+f(a-x))\, Dx$$

En faisant le changement de variable $u = a - x$, on a :

$$\int_0^a (1/(1+f(x)))\ \mathrm{dx} = \int_0^a f(\mathrm{u})/(1+f(\mathrm{u}))\ \mathrm{du} = [\int_0^a (1+f(x))/(1+f(x)))\, dx]/2 = a/2$$

Problème 1

(le thème commun porte sur les suites, mais les trois parties sont indépendantes)

Partie A

Soit la suite (u_n), $n \in \mathrm{N}$, définie par :

$$u_0 > 0,\ \ u_1 > 0$$

(1) $\forall\, n \in \mathrm{N}$, $u_{n+2} = (u_n^2\, u_{n+1})^{1/3}$

1) Calculer le terme général de la suite u_n.

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (1) en une expression (1') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1) En passant au logarithme ($h = Ln$) : $Ln(u_{n+2}) = 2/3.\ Ln(u_n) + 1/3\ Ln(u_{n+1})$

On pose $v_n = Ln(u_n)$: $v_{n+2} = 2v_n/3 + v_{n+1}/3$

Avec $v_0 = Ln(u_0)$ et $v_1 = Ln(u_1)$

Equation associée : $3r^2 - r - 2 = 0$, qui admet comme solutions 1 et -2/3.

La forme générale de v_n est $v_n = a + b(-2/3)^n$

$v_0 = a + b$
$v_1 = a - 2b/3$
$\rightarrow a = (2v_0 + 3v_1)/5$ et $b = 3(v_0 - v_1)/5$

$u_n = \exp[a + b(-2/3)^n] = \exp[(2Lnu_0 + 3Lnu_1)/5 + (-2)^n(Lnu_0 - Lnu_1)/(5.3^{n-1})$

$u_n = (u_0^2.u_1^3)^{1/5} \exp[(-2)^n 3^{1-n} Ln((u_0/u_1)^{1/5}]$

2) Quand n tend vers $+\infty$, u_n tend vers $(u_0^2 u_1^3)^{1/5}$

Partie B

Soit la suite (u_n), $n \in$ N, définie par :

$u_0 > 0,\ u_1 > 0$

(2) $\forall\ n \in$ N, $u_{n+2} = 2\ u_n\ u_{n+1} / (u_n + u_{n+1})$

1) Calculer le terme général de la suite u_n.

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (2) en une expression (2') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1) On pose $v_n = h(u_n) = 1/u_n$: on obtient alors $v_{n+2} = (v_n + v_{n+1})/2$
Equation associée : $2r^2 - r - 1 = 0$, qui admet comme solutions 1 et -1/2.

La forme générale de v_n est $v_n = a + b(-1/2)^n$

$v_0 = a + b$

$v_1 = a - b/2$

d'où : $a = (v_0 + 2v_1)/3$ et $b = 2(v_0 - v_1)/3$

$v_n = 1/u_n = (a + b(-1/2)^n)$

$u_n = 1/(a + b(-1/2)^n) = 1/[(1/u_0 + 2/u_1)/3 + 2(1/u_0 - 1/u_1)/3.(-1/2)^n)$

$u_n = 1/[(1/u_0 + 2/u_1)/3 + (-1)^n(1/u_0 - 1/u_1)/3.(2)^{1-n})$

2) Quand n tend vers $+\infty$, $(-1/2)^n$ tend vers 0, et u_n tend vers $1/a = 3u_0u_1/(2u_0 + u_1)$

Partie C

Soit la suite (u_n), $n \in$ N, définie par :

$u_0 = u_1 = u_2 = 1$

(3) $\forall\ n \in$ N, $u_{n+3} = (1 + u_{n+2}u_{n+1}) / u_n$

1) Calculer les premiers termes de (u_n), pour $n = 3$ à 8.

2) Montrer par récurrence que l'on peut écrire la suite (u_n) sous la forme (4) :

(4) $\forall\ n \geq 0$, $u_{n+4} = a\ u_{n+2} + b\ u_n$

où a et b sont des entiers que l'on déterminera.

3) En déduire que $\forall\ n \in$ N, $u_n \in$ N*.

1) On calcule simplement que $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 7$, $u_6 = 11$, $u_7 = 26$, $u_8 = 41$.

2) En écrivant $u_4 = 3 = a + b$ et $u_5 = 7 = 2a + b$, on trouve a = 4 et $b = -1$.
Soit la relation : $u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n$
Elle est vraie au rang 0.
Supposons la relation vraie au rang n.
Montrons que $u_{n+5} = 4u_{n+3} - u_{n+1}$

D'après la relation (3), $u_{n+5} = (1 + u_{n+4}u_{n+3}) / u_{n+2} = (1 + (4u_{n+2} - u_n)u_{n+3}) / u_{n+2}$
$u_{n+5} = (1 + 4u_{n+2}u_{n+3} - u_nu_{n+3}) / u_{n+2}$

Or $u_{n+3}.\ u_n = 1 + u_{n+2}u_{n+1}$
D'où $u_{n+5} = (1 + 4u_{n+2}u_{n+3} - (1 + u_{n+2}u_{n+1}))/ u_{n+2} = (4u_{n+2}u_{n+3} - u_{n+2}u_{n+1}))/ u_{n+2}$
C'est-à-dire $u_{n+5} = 4u_{n+3} - u_{n+1}$
La relation est vraie au rang n+1.

3) Il s'en suit directement que $u_n \in$ N*.

Problème 2

Partie 1

Soit A un réel non nul.
Montrer que, pour tout n entier non nul, on peut déterminer une suite unique de n+1 nombres réels (t_0, t_1, ….. t_{n-1}, t_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $t_0 = 0$, $t_n = A$

(ii) $t_0 < t_1 < \ldots.. t_{n-1} < t_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}\ \ t_{k+1} - t_k = A/n$

On trouve immédiatement que $t_k = kA/n$, pour k allant de 0 à n.

Partie 2

Soit la fonction $f : [0, 1] \to R$, continue et strictement positive.

1) Montrer que, pour tout n entier non nul, il existe dans $[0, 1]^{n+1}$ une suite unique de n+1 nombres réels (x_0, x_1, ….. x_{n-1}, x_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $x_0 = 0$, $x_n = 1$

(ii) $x_0 < x_1 < \ldots.. x_{n-1} < x_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}\ \ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,dt$

2) Soit $U(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Déterminer la limite L de $U(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Etudier le cas particulier de $f(x) = e^x$

1) Posons $F(x) = \int_0^x f(t).dt$, qui existe d'après les hypothèses sur f ; en outre la dérivée $F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur [0, 1], et F est donc inversible.

Posons $t_k = F(x_k)$, et $A = \int_0^1 f(t)\,dt$.

On cherche une suite de n+1 nombres entre 0 et 1 vérifiant les 3 conditions de la partie 1 :

(i) $t_0 = 0$, $t_n = A$

(ii) $t_0 < t_1 < \ldots.. t_{n-1} < t_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}$ $t_{k+1} - t_k = A/n$

Donc $t_k = k\mathrm{A}/n$, pour k allant de 0 à n.

D'où $x_k = \mathrm{F}^{-1}(k\mathrm{A}/n)$, pour k allant de 0 à n.

En outre, puisque F et donc F^{-1} sont strictement croissantes, les x_k sont rangés en ordre croissant $x_0 < x_1 < \ldots.. x_{n-1} < x_n$

2) $U(n) = [\sum_{k=0}^{n} f(x_k)]/n = [\sum_{k=0}^{n} f(\mathrm{F}^{-1}(k\mathrm{A}/n))]/n$, qui converge vers :

$$\mathrm{A}^{-1} \int_0^A f(\mathrm{F}^{-1}(t)\, dt] = \mathrm{B}/\mathrm{A}$$

Où $\mathrm{B} = \int_0^A f(\mathrm{F}^{-1}(t)\, dt]$

Faisons le changement de variable $u = \mathrm{F}^{-1}(t)$, ou $t = \mathrm{F}(u)$, $dt = f(u)$ du

$$\mathrm{B} = \int_0^1 f(u)\, f(u)\, \mathrm{du} = \int_0^1 f^2(u)\, \mathrm{du}$$

On en déduit que $\mathrm{L} = \int_0^1 f^2(u)\, \mathrm{du} \Big/ \int_0^1 f(u)\, \mathrm{du}$

3) Un calcul simple donne $\mathrm{A} = e - 1$.

De même, $x_k = Ln(k(e\text{-}1)/n)$

$\mathrm{B} = (e^2 - 1)/2$ et donc $L = (e + 1)/2$

AVRIL 2012

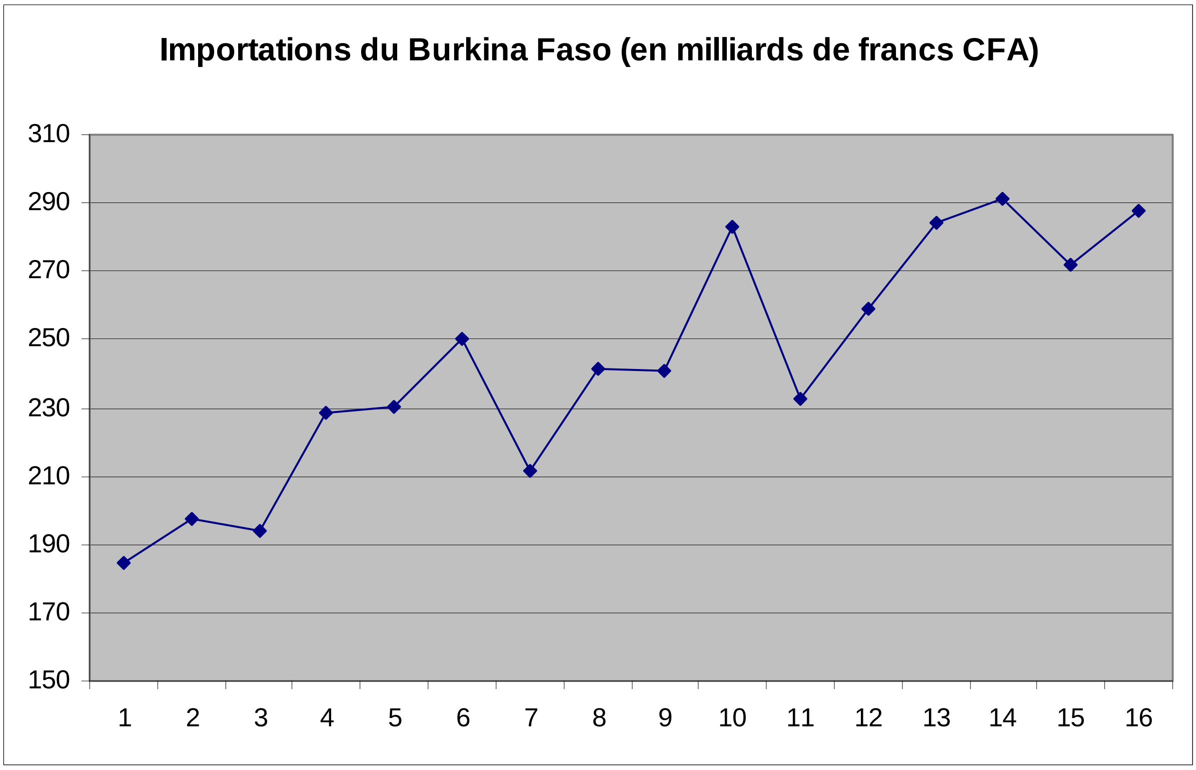
CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

1. a.

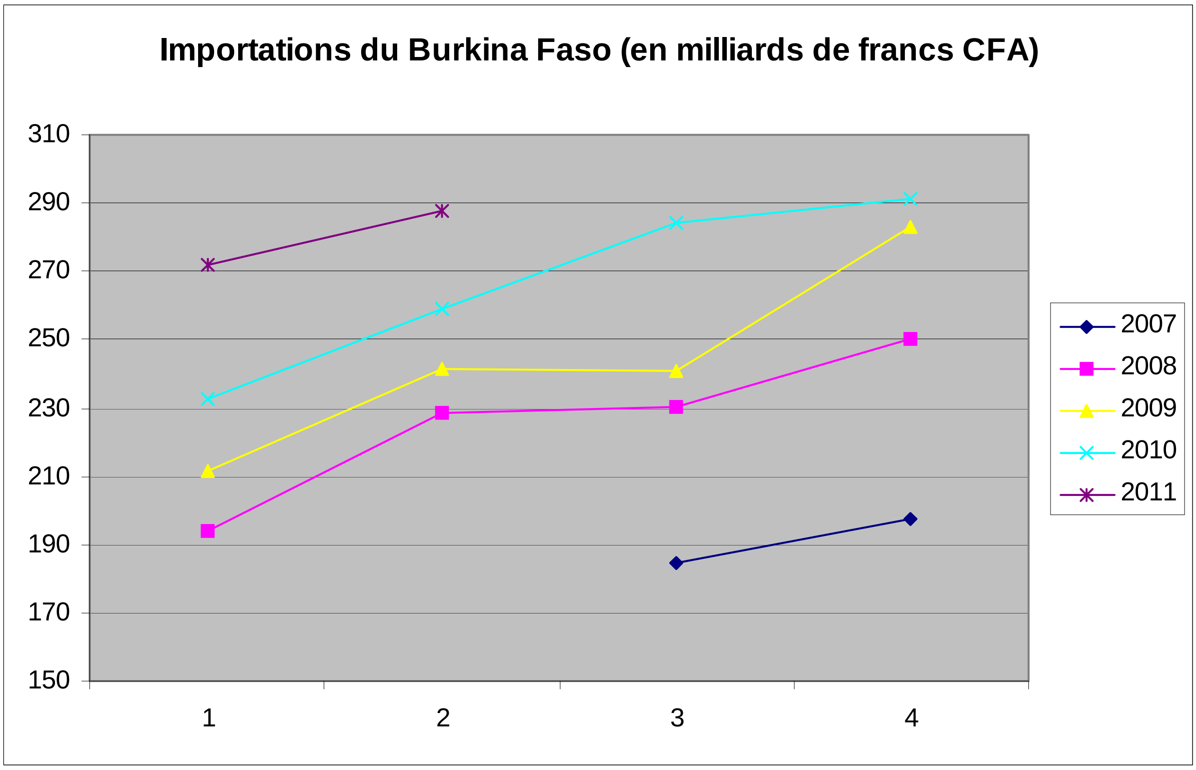


On va réaliser notre prévision via un ajustement linéaire avec la méthode des moindres carrées.

1. b.

Importations = 6,5 t + 187,8 avec t qui varie de 1 à 16.

2. a.



On constate qu'il a un effet saisonnalité : en l'occurrence, le 4ème trimestre donne toujours un chiffre plus élevé et à l'inverse, le 1er trimestre est celui pour lequel les importations sont plus basses. Par ailleurs, le montant des importations annuelles augmente régulièrement.

2. b.

t	Importations (1)	Estimation à partir du modèle (2)	rapport (1)/(2)
1	184,3	194,3	0,948
2	197,7	200,8	0,984
3	194,0	207,3	0,936
4	228,5	213,8	1,069
5	230,1	220,3	1,044
6	250,2	226,8	1,103
7	211,8	233,3	0,908
8	241,4	239,8	1,007
9	240,8	246,3	0,978
10	283,0	252,8	1,120
11	232,4	259,3	0,896
12	258,9	265,8	0,974
13	284,5	272,3	1,045
14	291,4	278,8	1,045
15	272,1	285,3	0,954
16	287,6	291,8	0,986

Le coefficient saisonnier du 1er trimestre s'obtient en faisant une moyenne arithmétique des coefficients des trimestres concernés (points t=3, t=7, t=11, t=15), soit 0,923.

Le coefficient saisonnier du 2ème trimestre s'obtient en faisant une moyenne arithmétique des coefficients des trimestres concernés (points t=4, t=8, t=12, t=16), soit 1,009.

Le coefficient saisonnier du 3ème trimestre s'obtient en faisant une moyenne arithmétique des coefficients des trimestres concernés (points t=1, t=5, t=9, t=13), soit 1,004.

Le coefficient saisonnier du 4ème trimestre s'obtient en faisant une moyenne arithmétique des coefficients des trimestres concernés (points t=2, t=6, t=10, t=14), soit 1,063.

La moyenne des 4 coefficients est bien de 1 donc il n'y a pas lieu de les corriger. On observe que le 4ème trimestre a le plus fort coefficient et que celui du premier trimestre le plus faible.

3. a. Les montants sont exprimés en Mds de Francs CFA

t	Estimation à partir du modèle
19	311,3
20	317,8
21	324,3
22	330,7

3. b. Les montants sont exprimés en Mds de Francs CFA

t	Estimation à partir du modèle	Estimation corrigée des variations saisonnières
19	311,3	311,3/0,923=337,3
20	317,8	317,8/1,009=315,0
21	324,3	324,3/1,004=323,0
22	330,7	330,7/1,063=311,1

<u>Exercice 2</u>

Pas de corrigé type sauf qu'il fallait évoquer le fait que certains pays ne donnaient que des séries brutes alors qu'il y a des phénomènes de variations saisonnières : exemple du Sénégal où le 3ème trimestre est toujours moins bon que le reste de l'année. Il fallait aussi évoquer que les comparaisons étaient difficiles à faire compte tenu du fait que les années de base ne sont pas identiques.

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Dans le plan orthonormé usuel, on donne les points $A(m)$ et $B(m)$ de coordonnées :

$A(m)$: $((\frac{1}{2}+m), 0)$

$B(m)$: $(0, (\frac{1}{2}-m))$

où m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $U = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On note par $D(m)$ la droite passant par les points $A(m)$ et $B(m)$.

1) Donner une équation de $D(m)$ sous la forme :

$$a(m)\, x + b(m)\, y + c(m) = 0$$

où a, b et c sont trois fonctions de m, dérivables, que l'on explicitera.

Solution

Equation de $D(m)$:

$(y-0) / (x - m - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - m) / (0 - m - \frac{1}{2})$

$D(m)$: $x(\frac{1}{2} - m) + y(m + \frac{1}{2}) + (m^2 - \frac{1}{4}) + 0$

$a(m) = \frac{1}{2} - m$, $b(m) = m + \frac{1}{2}$, $c(m) = m^2 - \frac{1}{4}$

2) On note par $D'(m)$ la droite d'équation : $a'(m)\, x + b'(m)\, y + c'(m) = 0$, a', b' et c' étant les dérivées respectives de a, b et c.
Montrer que les droites $D(m)$ et $D'(m)$ se coupent en un point $M(m)$ dont on déterminera les coordonnées.

Solution

Equation de $D'(m)$: $y - x + 2m = 0$

En reportant y dans l'équation de $D(m)$, on obtient les coordonnées X et Y du point d'intersection $M(m)$:

$$X = (m + \frac{1}{2})^2$$

$$Y = (\frac{1}{2} - m)^2$$

On remarque que X et Y varient entre 0 et 1.

3) Déterminer le lieu géométrique du point $M(m)$ quand m parcourt l'intervalle U. Tracer sa courbe dans le repère orthonormé usuel.

Solution

$$m + \frac{1}{2} = X^{1/2}$$

$$m = X^{1/2} - \frac{1}{2}$$

D'où : $Y = (\frac{1}{2} - X^{1/2} + \frac{1}{2})^2 = (1 - X^{1/2})^2 = X - 2\, X^{1/2} + 1.$

$Y' = 1 - X^{-1/2} = (X^{1/2} - 1) / X^{1/2}$, qui est négative puisque X est entre 0 et 1.

Quand X tend vers 0, Y tend vers 1.
Quand x tend vers 1, Y tend vers 0.

Les valeurs de Y' en 0 et 1 sont : $Y'(0) = -\infty$, et $Y'(1) = 0$

La dérivée seconde est $- X^{-3/2} / 2$, négative.

Y est donc décroissante monotone de 1 à 0 quand X varie de 0 à 1.

Problème 2

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :
$e = 2{,}718$, $e^{1/2} = 1{,}65$; $e^2 = 7{,}39$; $e^{2,1} = 8{,}17$; $e^{2,2} = 9{,}03$; $e^{2,3} = 9{,}97$; $e^{2,4} = 11{,}02$; $e^{2,5} = 12{,}18$; $Ln2 = 0{,}69$; $Ln5 = 1{,}61$.

Partie A :

On considère la fonction *f*, définie sur *R*, qui, à tout *x* réel associe :

$$f(x) = e^x(x-1) + x^2$$

1) Etudier très précisément les variations de *f* (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation.
On ne demande pas l'étude de la concavité de *f*.

Solution

$f'(x) = x(e^x + 2)$
La dérivée *a* le signe de *x*.

Lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers $+\infty$
Lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers $-\infty$
Pas d'asymptotes, branches asymptotiques.
En outre, on remarque que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+- \infty$, et que :

$x \dashrightarrow +\infty$ $f(x)/x = e^x[(1-1/x) + xe^{-x}]$ équivalent à e^x
$x \dashrightarrow -\infty$ $f(x)/x \# x^2$

Points marquants :
$f(0) = -1$, $f'(0) = 0$

X	$-\infty$ 0	$+\infty$
f'	−	+
F	$+\infty$ ↘	-1 ↗ $+\infty$

2) Etudier l'existence des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans la suite du problème, on notera *a* la solution positive de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que *a* appartient à l'intervalle $L = [\frac{1}{2}, 1]$. Encadrer l'autre racine *b* par un intervalle (a, b) de longueur $\frac{1}{2}$ la contenant.
Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de *f* aux points d'abscisses *a* et *b*.

Solution

$f(x) = 0$?
Au vu des variations de f, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines, l'une positive (a), l'autre négative notée b.
Calculs de positionnement :
Pour a :
$f(1) = 1$
$f(\frac{1}{2}) = (1 - 2e^{1/2})/4$ # $- 0{,}57$
Donc $\frac{1}{2} < a < 1$.

Pour b :
$f(-1) = (e - 2)/e$ # $0{,}26$
$f(-1/2) = (e^{1/2} - 6)/4\, e^{1/2}$ # $- 0{,}66$
Donc $-\frac{1}{2} < b < -1$.

Equation de la tangente en $(a, 0)$:
$(y - 0)/(x - a) = f'(a) = a\,(e^a + 2)$
On pourrait remplacer e^{a} par $a^2/(1 - a)$ puisque $f(a) = 0$.

Equation de la tangente en $(b, 0)$:
$(y - 0)/(x - b) = f'(b) = b\,(e^b + 2)$

3) Calculer l'intégrale $A = \int_0^1 f(x)dx$

Solution

Cherchons une primitive F de f.
$F(x) = e^x(x - 1) - e^x + x^3/3 = xe^x - 2e^x + x^3/3 + C$
$A = F(1) - F(0) = (7 - 3e)/3$

4) Calculer en fonction de a l'intégrale $B = \int_a^1 f(x)dx$

Solution

Comme pour la question 3, $B = F(1) - F(a)$
$B = e^a(2 - a) - a^3/3 + (1 - 3e)/3$

***<u>Partie B</u>* :**

On considère la fonction g, définie sur R^+, par :

$$g(x) = e^x / (e^x + x)$$

1) Etudier précisément les variations de g (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation. Indiquer les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

<u>Solution</u>

$g'(x) = e^x(x-1)/(e^x + x)^2$, $x > 0$

g' est donc négative quand $x < 1$, positive pour $x > 1$, et nulle quand $x = 1$.

Lim $g(x) = 1$ quand x tend vers $+\infty$
Lim $g(x) = 1$ quand x tend vers 0
Asymptote horizontale $y = 1$

$g(1) = e/(1 + e) = 0{,}73$

g décroit donc sur [0, 1[, allant de 1 à 0,73, passe par un minimum égal à 0,73 quand $x = 1$, puis croît jusqu'à 1 sur]1, + ∞[.

Pente en (0, 1) :
$(g(x) - 1) / x = - 1 / (e^x + x) \dashrightarrow - 1$ quand $x \dashrightarrow 0$

Tangente en (0, 1) : $y = 1 - x$

2) On veut étudier la concavité de g.
Calculer la dérivée seconde g'' de g.
Montrer que g'' peut être mise sous la forme :

$$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3} U(x)$$

où $U(x)$ est une fonction de x que l'on explicitera.
Montrer que U ne peut s'annuler que pour $x > 2$.
Donner un intervalle pour l'abscisse du point d'inflexion.

<u>Solution</u>

$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3} [(x-1)^2 + 1 + e^x(2-x)]$
$U(x) = (x-1)^2 + 1 + e^x(2-x)$

a) Si $2 - x > 0$, *i.e.* $x < 2$, $U(x)$ est une somme de terme positifs
b) $x = 2$, $U(2) = 2 > 0$
c) $U(x)$ ne peut s'annuler que si $x > 2$

Cherchons à encadrer la racine r de U, c'est-à-dire l'abscisse du point d'inflexion :

$g''(2) = 2e^2/(2 + e^2)^3$ # 0,018
$g''(2,5) = 3,25 - 0,5e^{2,5}$ # - 2,84
D'où r compris entre 2 et 2,5.

Affinons cet encadrement :

$U''(2,4) = 2,96 - 0,4e^{2,4}$ # - 1,45
$U''(2,3) = 2,69 - 0,3e^{2,3}$ # - 0,30
$U''(2,2) = 2,44 - 0,2e^{2,2}$ # + 0,63

Plus précisément, r est entre 2,2 et 2,3.

3) Tracer la courbe G représentative de g.

Solution

Décroissante et convexe entre 0 et 1, minimum en 1 égal à 0,73, croît pour $x > 1$ et convexe entre 1 et r, concave ensuite.

4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique ?
Quelle est cette racine ?

Solution

$g(x) = x \Longleftrightarrow e^x / (e^x + x) = x \Longleftrightarrow e^x(x - 1) + x^2 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$
D'après la partie A, il existe sur R^+ une solution unique a, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, telle que $g(a) = a$.

5) Montrer que pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

Solution

$g(1) = 0,73$ (cf question 1, Partie B).
$g(\frac{1}{2}) = e^{1/2} / (0,5 + e^{1/2})$ # 0,77

Comme g est décroissante monotone entre 0 et 1, pour tout x entre $\frac{1}{2}$ et 1, $g(x)$ est entre 0,73 et 0,77, et donc a fortiori entre 0 et 1.
Donc pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

6) Montrer que pour tout $x \in L$, $|g'(x)| \leq M$, où M est un majorant inférieur ou égal à ½ que l'on déterminera.

Solution

Calculons | $g'(\frac{1}{2})$ | = 0,5 $e^{1/2}$ / (0,5 + $e^{1/2}$)² # 0,18

Comme |g'(1)| = 1, | g' | décroit de façon monotone sur [0, 1] entre 1 et 0.
Donc sur L, | g' | décroit de façon monotone de 0,18 à 0.

Prenons $M = \frac{1}{5}$.

Remarque : on aurait bien sûr pu majorer | g' | par 0,18 sur L.

Partie C **:**

On définit la suite $u(n)$, n entier naturel non nul, par :

$u(1) = \frac{1}{2}$

$u(n) = g(u(n\text{-}1))$, pour tout $n > 1$

1) Montrer que, pour tout $n \in N^*$, u(n) $\in L$.

Solution

Par récurrence :

a) $u(1) \in L$ donc $g(u(1)) = u(2) \in L$, d'après la question 5, partie B.
b) Supposons $u(n) \in L$; pour la même raison, $g(u(n)) = u(n+1) \in L$.

2) Démontrer que, pour tout $n > 1$:

$$|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$$

Solution

Théorème des accroissements finis :
$|g(u(n-1) - g(a)| = |u(n-1) - a|.|g^{'}(c)|$, c entre $u(n\text{-}1)$ et a.

Or, par définition de la suite, $|g(u(n-1) - g(a)| = |u(n) - a|$, car $g(a) = a$ (question 4, Partie B).

Comme $u(n\text{-}1)$ et a sont dans L, $|g^{'}(c)|$ est majoré par $M = \frac{1}{5}$.

D'où le résultat de majoration recherché : $|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$

3) En déduire que $u(n)$ converge vers a.

Solution

On en déduit, par itération :
$|u(n) - a| \leq M^{n-1}.|u(1) - a|$

Et $|u(1) - a| < \frac{1}{2}$ (ce qui est certain car $u(1) = g(\frac{1}{2}) = 0{,}77$ et a $\in L$).

D'où :

$|u(n) - a| \leq \frac{M^{n-1}}{2} = 0{,}5\ (0{,}2)^{n-1}$

Il s'en suit que quand *n* tend vers l'infini, $|u(n) - a|$ tend vers 0.

4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de *a* à 10^{-7} près ?

Solution

Ecrivons $0{,}5\ (0{,}2)^{n-1} = 10^{-7}$
$Ln0{,}5 + (n-1)Ln(0{,}2) = -7\ Ln10$
D'où *n* est le premier entier supérieur à $(6Ln2 + 8Ln5)/Ln5$ # 10,6, soit $n = 11$.

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Les questions 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

Soit P un polynôme de degré 3, sur le corps des complexes C :
$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
On note z_1, z_2, z_3 les racines de P.
Soit les expressions :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$
$S(3) = z_1z_2z_3$

1) Exprimer $S(1)$, $S(2)$ et $S(3)$ en fonction de a, b et c.

Solution

En développant, on obtient $P(z) = z^3 - z^2 (z_1 + z_2 + z_3) + z (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) + z_1z_2z_3$
$P(z) = z^3 - z^2 S(1) + z\ S(2) + S(3)$

En identifiant :
$S(1) = - a$
$S(2) = b$
$S(3) = - c$

2) Soit l'équation $P(z) = z^3 + 5z^2 - 8z + m = 0$.
On suppose que deux des racines de l'équation vérifient $z_1 + z_2 = - 1$.
Résoudre l'équation.

Solution
On a donc :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = - 5$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = - 8$
$S(3) = z_1z_2z_3 = - m$
$z_1 + z_2 = - 1$

$z_1 + z_2 + z_3 = - 5 \Rightarrow z_3 = - 4$
D'où, d'après $S(2)$:
$z_1z_2 - 4 (z_1 + z_2) = - 8$
$4z_1z_2 = m$

$z_1z_2 = -12$
$z_1z_2 = m/4$

$\Rightarrow m = -48$

$z_1 + z_2 = -1$
$z_1z_2 = -12$

$z_1(1 + z_1) = 12$

L'équation $z_1^2 + z_1 - 12 = 0$ conduit à deux valeurs de z_1 :

a) $z_1 = -4$ d'où $z_2 = 3$

b) $z_1 = 3$ d'où $z_2 = -4$

Solutions : $(-4, 3, -4)$ et $(3, -4, -4)$

3) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Pour quelles valeurs de p cette équation admet-elle trois racines réelles dont deux de différence 1 ?
Résoudre l'équation.

Solution

$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = 0$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = p$
$S(3) = z_1z_2z_3 = -q$
Et on a, par exemple : $z_1 - z_2 = 1$

On reporte $z_1 = 1 + z_2$

$1 + 2z_2 + z_3 = 0$
$(1 + z_2)(z_2 + z_3) + z_2z_3 = p$
$(1 + z_2)z_2z_3 = -q$

$z_3 = -1 - 2z_2$, que l'on reporte dans la deuxième équation :

$(1 + z_2)(z_2 + - 1 - 2z_2) + z_2(-1 - 2z_2) = p$

$(1 + z_2)(1 + z_2) + z_2(1 + 2z_2) = -p$

z_2 est racine de l'équation :

$3\,z_2^2 + 3z_2 + 1 + p = 0$

Le discriminant est $D = -3(1 + 4p)$, et l'équation en z_2 aura deux racines réelles si et seulement si $D \geq 0$, soit $p \leq -1/4$.
Notons par d la racine positive de D.

Donc deux valeurs pour z_2 : $(-3 + d)/6$ et $(-3 + d)/6$, et deux triplets solutions :

$z_2 = (-3 + d)/6 \Rightarrow z_1 = (3 + d)/6$ et $z_3 = -d/3$

$z_2 = (-3 - d)/6 \Rightarrow z_1 = (3 - d)/6$ et $z_3 = d/3$

Remarque : si $D = 0$, *i.e.* $p = -1/4$, les deux triplets sont identiques $(1/2, -1/2, 0)$.

4) Soit l'équation $P(z) = z^3 - 7z + m = 0$.
On suppose que deux des solutions de cette équation vérifient la relation $z_2 = 2z_1$.
Résoudre l'équation.

Solution

$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = 0$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = -7$
$S(3) = z_1z_2z_3 = -m$
$z_2 = 2z_1$

En remplaçant z_2 par $2z_1$, on obtient le système équivalent :

$3z_1 + z_3 = 0$
$2z_1^2z_3 = -m$
$2z_1(z_1 + z_3) + z_1z_3 = -7$

$2z_1^2 + 3z_1z_3 = -7$

$2z_1^2 + 3z_1(-3z_1) = -7 \Rightarrow z_1^2 = 1$ et deux valeurs possibles pour z_1 : 1 et – 1

$z_1 = -1 \Rightarrow z_3 = -m/2$ et $z_2 = -2$

$z_1 = 1 \Rightarrow z_3 = -m/2$ et $z_2 = 2$

Solutions : $(-1, -2, -m/2)$ et $(1, 2, -m/2)$

5) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Calculer, en fonction de p et q, la somme $E = (1/z_1)^2 + (1/z_2)^2 + (1/z_3)^2$

Solution

En réduisant au même dénominateur, on montre aisément que :
$E = [S(2)^2 - 2\, S(1)\, S(3)] / S(3)^2$
Or, compte tenu de la forme de P, $S(1) = 0$, $S(2) = p$ et $S(3) = -q$

On en déduit : $E = p^2/q^2$

Problème 2

Données : $Ln2 = 0{,}693$; $Ln1000 = 6{,}908$, Ln signifiant logarithme népérien.

On considère une urne de 11 boules, de même taille et de même texture. Le seul élément qui les différencie est la couleur. Il y a 6 boules bleues, 3 boules rouges, et deux boules vertes.

1) On tire au hasard, en même temps, trois boules dans l'urne en fermant les yeux.

1a - Soient les deux événements suivants :

A = {les 3 boules sont toutes de couleurs différentes}

B = {les 3 boules sont de la même couleur}

Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des deux événements A et B.

$P(A) = 12/55 = 0{,}218$
$P(B) = 7/55 = 0{,}127$

1b – *A* tout tirage de 3 boules on associe X, nombre de boules bleues tirées.
Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
Calculer les probabilités $P(X = x)$, x parcourant l'ensemble des valeurs possibles pour X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.
$P(X = 0) = 2/33 = 0{,}061$
$P(X = 1) = 4/11 = 0{,}364$
$P(X = 2) = 5/11 = 0{,}454$
$P(X = 3) = 4/33 = 0{,}121$

$E(X) = (2x0 + 12x1 + 15x2 + 4x3)/33 = 54/33 = 1{,}636$

2) Au lieu de tirer en même temps les boules, on modifie la procédure et on procède de la façon suivante : dans l'urne, on tire au hasard, toujours sans regarder les couleurs, une première boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une deuxième, selon le même processus, etc …
On effectue k tirages successifs indépendants, k étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On définit les deux événements suivants :

C = {toutes les boules tirées sont bleues}
D = {toutes le boules tirées sont rouges}

Quelle est la plus petite valeur de k telle que $P(C) \geq 1000\, P(D)$?

La probabilité de tirer une boule bleue est 6/11 ; celle de tirer une boule rouge est 3/11.
$P(C) = (6/11)^k$, et $P(D) = (3/11)^k$.
$P(C) \geq 1000\, P(D)$ devient $(6/11)^k \geq 1000\, (3/11)^k$, soit $6^k \geq 1000\, 3^k$.
En passant au Logarithme népérien :
$k\, Ln6 \geq k\, Ln3 + Ln1000$
$k\, \text{Ln}3 + k\, Ln2 \geq k\, Ln3 + Ln1000$
$k.Ln2 \geq Ln1000$
$k \geq (Ln1000)/Ln2 = 6{,}908/0{,}693 = 9{,}97$
$k = 10$

Problème 3

1) Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls x, y, avec $x \leq y$, dont la somme est un multiple du produit.

Solution

Soit $x + y = kxy$, où k est un entier > 0.
Comme $x \leq \text{y}$, $kxy \leq 2y$, et comme x et y sont non nuls : $kx \leq 2$, *ie* $x \leq 2 / k$
Comme x est entier, les seules valeurs de k possibles sont $k = 1$ ou $k = 2$.
Soit donc $x = 1$ ($k = 2$) et $x = 2$ ($k = 1$)
Pour $x = 1$, $1 + y = 2\, y$ soit $y = 1$
Pour $x = 2$ ($k = 1$), $2 + y = 2y$ soit $y = 2$
Couples : (1, 1) et (2, 2)

2) Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls x, y, z, avec $x \leq y \leq z$, tels que :

$$xyz = 4(x + y + z)$$

<u>Solution</u>

$xyz = 4(x + y + z) \Longrightarrow xyz \leq 12z$
Puisque z est non nul : $xy \leq 12$.
Soit donc à trouver deux entiers x et y, $x \leq y$, tels que $xy \leq 12$.

Il y a 19 couples candidats qui sont :
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12),
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 3), (3, 4)

$xyz = 4(x + y + z) \Longrightarrow z = 4(x + y) / (xy - 4)$

Le tableau suivant donne les valeurs de z associées aux couples candidats :

x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z	-8/3	-6	-16	∞	24	14	32/3	9	8	22/3
x	1	1	2	2	2	2	2	3	3	
y	11	12	2	3	4	5	6	3	4	
z	48/7	13/2	∞	10	6	14/3	4	24/5	7/2	

Comme z doit être entier et supérieur ou égal à x et y, il n'y a que 5 triplets solutions qui sont :

(1, 5, 24), (1, 6, 14), (1, 8, 9), (2, 3, 10), (2, 4, 6).

Problème 4

Soit n un nombre positif donné.
On considère une suite $S = \{u_0, u_1, \ldots., u_{2n+1}\}$ constituée de $2n+2$ entiers naturels consécutifs classés dans l'ordre croissant : $u_0 < u_1 < \ldots .< u_{2n+1}$.

Indication :

a étant un nombre entier, la suite $\{a - n, a - n + 1, \ldots., a, a + 1, a + 2, \ldots a + n\}$ est une suite de $2n+1$ entiers consécutifs positifs et croissants.

1) Préliminaires :

1a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + \ldots .+ n^3 = n^2(n+1)^2/4$

Solution

*C'*est une formule bien connue, qui se démontre par récurrence sans aucune difficulté

1b) Etudier la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + \dots + x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 - \dots - (x+n)^3$$

où n est un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée a où a vérifie :

$$3n(n+1) < a < 1 + 3n(n+1)$$

Solution

Transformons f.
$f(x) = x^3 + S_{k=1àn}[(x-k)^3 - (x+k)^3]$
$= x^3 - 6x^2 S_{k=1àn}k - 2 S_{k=1àn}k^3$
$= x^3 - 3x^2n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$

$f'(x) = 3x^2 - 6xn(n+1) = 3x(x - 2n(n+1))$ s'annule en 0 et $2n(n+1)$.

Sur R, f est donc croissante sur $]-\infty, 0[$ allant de $-\infty$ à $-n^2(n+1)^2/2$, puis décroit sur $]0,2n(n+1)[$ de $-n^2(n+1)^2/2$ à $n^2(n+1)^2[8n(n+1) - 25/2]$, terme négatif même si $n= 1$, et croît à nouveau sur $]2n(n+1), +\infty[$ de $n^2(n+1)^2[8n(n+1) - 25/2]$ à l'infini.

Il existe donc une et une seule solution α à l'équation $f(x) = 0$, $\alpha > 2n(n+1)$.

Calculons $f(3n(n+1))$:

$f(3n(n+1)) = -n^2(n+1)^2/2$, terme < 0**.**

De même :

$f(1 + 3n(n+1)) = (1 + 3n(n+1))^3 - 3(1 + 3n(n+1))^2 n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$

En développant :

$f(1 + 3n(n+1)) = 1 + 27\, n^{3(n+1)}3 + 9n(n+1) + 27\, n^2(n+1)^2 - 3[1 + 9\, n^2(n+1)^2 +$
$6n(n+1)]n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$
$= 1 + 6n(n+1) + 17\, n^2(n+1)^2/2$, terme > 0

D'où l'encadrement recherché pour α.

2) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation A ?

$$(A) \qquad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_{n+1} + \dots + u_{2n+1}$$

Solution

Utilisons la suite donnée dans l'indication :

$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - (u_{n+1} + \dots + u_{2n+1})$
$= x + S_{k=1àn}[(x-k) - (x+k)]$
$= x - 2S_{k=1àn}k = x - n(n+1) = 0$

Donc si on prend $a = n(n+1)$, on a une solution pour (A).

3) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation B ?

$$(B) \qquad (u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 = (u_{n+1})^2 + \ldots + (u_{2n+1})^2$$

<u>Solution</u>

Comme pour la question 2 :
$(u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 - [(u_{n+1})^2 + \ldots + (u_{2n+1})^2]$
$= x^2 + S_{k=1 à n} [(x-k)^2 - (x+k)^2]$
$= x^2 - 4xS_{k=1 à n}\, k$
$= x^2 - 2xn(n+1) = x(x - 2n(n+1)) = 0$

$x = 0$ est impossible (cela conduirait à des termes négatifs), donc $x = 2n(n+1)$.
Si on prend $a = 2n(n+1)$, on obtient une solution pour (B).

4) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation C ?

$$(C) \qquad (u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 = (u_{n+1})^3 + \ldots + (u_{2n+1})^3$$

<u>Solution</u>

Comme précédemment, et d'après la question 1b :
$(u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 - [(u_{n+1})^3 + \ldots + (u_{2n+1})^3]$
$= x^3 + S_{k=1 à n} [(x-k)^3 - (x+k)^3]$
$= x^3 - 3x^2n(n+1) - n^2(n+1)^2/2 = 0$

D'après la question 1b, cette équation admet une solution comprise strictement entre les deux entiers consécutifs $3n(n+1)$ et $1 + 3n(n+1)$.

Contrairement aux questions 2 et 3, il est donc impossible de trouver un nombre a entier naturel permettant de construire une suite de S solution de (C).

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Pour calculer le taux de pauvreté H, il nous faut le nombre de personnes en situation de pauvreté multidimentionnelle (noté q) et le nombre de personnes total (noté n). Dans le tableau 1, on a 4 ménages dont 3 sont des ménages pauvres (cf. la dernière ligne du tableau). En conséquence n = (4+7+5+4) =20 et q = (7+5+4) = 16. H est donc égal à 0,8

Pour calculer la sévérité de la pauvreté A, on utilise la formule donnée dans l'énoncé et les résultats intermédiaires données en avant dernière ligne du tableau (niveau de privation du ménage, noté k) :

A = (7 x 0,722 + 5 x 0,389 + 4 x 0,500) / 16 = 0,562
IPM = A x H = 0,450

Question 2

Le coefficient de détermination, noté r^2 est le rapport de la covariance au carré divisé par le produit des variances : r^2 = Covariance (PIB/hab ; IPM) x Covariance (PIB/hab ; IPM) / Variance (PIB/hab) x Variance (IPM)

Donc $r^2 = 0,631$

Ce coefficient n'est pas proche de 1, ce qui signifie qu'il n'y a pas une forte corrélation entre les deux variables observées (IPM et PIB/hab).

Question 3

Pas de corrigé type.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien de base e, e = 2,718.

Partie A

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x, définie sur R^{+*}, x > 0, par :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \text{Ln } x$$

Etudier très précisément les variations de h.
On étudiera en particulier le signe et les variations de h' et h'' pour établir le tableau complet des variations de h ; on n'oubliera pas les points caractéristiques, leurs tangentes, les limites et les asymptotes éventuelles de h, etc.

Quand x→ + ∞, h(x) tend vers + ∞
Quand x → 0, h(x) tend vers - ∞

$h'(x) = (x-1)^2/2\,x^2$
h' est donc positive pour x > 0, et nulle pour x = 1

$h''(x) = (x-1)/\,x^3$
h'' est négative pour x < 1, positive pour x > 1, nulle en x = 1
Donc h' décroit sur (0, 1) de + ∞ à 0, et croît de 0 à 1/2 sur (1,+ ∞).

	0		1		+ ∞
h''		-	0	+	
h'	+ ∞	↘	0	↗	½ (donc h' > 0)
h	- ∞	↗	0	↗	+ ∞

h est donc strictement croissante sur R^+, de $-\infty$ à $+\infty$, $h(x) < 0$ pour $x < 0$, et $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

La courbe représentant h coupe l'axe des abscisses en un point unique, d'abscisse 1.
Pente au point (1, 0) : $h'(1) = 0$ (tangente horizontale)

Concavité : point d'inflexion en $x = 1$; évidente selon le signe de h'' (concave avant le point d'inflexion, convexe ensuite)

Asymptotes :
$h(x)/x$ tend vers 1/2 quand $x \rightarrow +\infty$.
$h(x) - x/2$ est équivalent à $-\text{Ln } x$.
Pas d'asymptote.

<u>Partie B</u>

1) Soient les deux fonctions a(t) et b(t) de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définies par :

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad b(t) = \text{Ln}(1 + t)$$

Donner les développements limités à l'ordre 3 de a(t) et b(t) au voisinage de 0.

$a(t) \sim 1 - t + t^2 - t^3$

$b(t) \sim t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) Montrer que $b(t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, pour $t \in J$.

Soit $u(t) = \text{Ln}(1 + t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})$.
Montrons que $u(t) \leq 0$.

$u'(t) = - t^3 / (1 + t)$
u' est positive sur (-1, 0), négative ensuite, et nulle en $t = 0$.
Donc u croît sur (- 1, 0) de $-\infty$ à 0, puis décroît sur $(0, +\infty)$ de 0 à $-\infty$.
Comme la valeur maximale de u est 0 pour $t = 0$, pour tout t dans J, $u(t) \leq 0$, d'où le résultat recherché.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$f(t) = \frac{(1+t)^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{t})}}{e} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

3a - Quel est le signe de f ?

$f(t) = \exp[(\mathrm{Ln}(1 + t)).(t+2)/2t - 1]$, donc positive comme toute exponentielle.

3b - Montrer que f est continue en 0.
$\mathrm{Ln}\, f(t) = - 1 + (1/t + 1/2)\mathrm{Ln}(1 + t)$
En utilisant le développement de Ln(1 + t) :
$\mathrm{Ln}\, f(t) \sim - 1 + (1/t + 1/2)(t - t^2/2 + t^3/3) = t^2/12$
Ln f(t) tend vers 0 quand t tend vers 0 ;
Donc f(t) tend vers $e^0 = 1$ quand t tend vers 0.
Comme la fonction f a été définie en 0 par f(0) = 1, f est donc continue en 0.

4) Calculer f '(t). Montrer que f est dérivable en 0.

On sait que $\mathrm{Ln}\, f(t) = - 1 + (1/t + 1/2)\mathrm{Ln}(1 + t)$
Donc $f'(t)/f(t) = (1/t + 1/2)(1/(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)/t^2$

Existe-t-il f'(0) ?
Toujours avec le DL de Ln(1+t), on a :
$f'(t)/f(t) \sim (1/t + 1/2)(1 - t + t^2) - (t - t^2/2 + t^3/3)/t^2 \sim t/6$ qui tend vers 0.
Lim f'(t) = 0 quand t $\rightarrow$ vers 0

Par ailleurs, $(f(t) - f(0))/(t - 0) = \{\exp[(1/t + ½)(\mathrm{Ln}(1 + t)).- 1] - 1\}/t$

$[(1/t + ½)(\mathrm{Ln}(1 + t)).- 1] \sim (1/t + 1/2)(1 - t + t^2) - 1 = t^2/12$
$\exp(t^2/12) \sim 1 + t^2/12$
Donc $f'(t)/f(t) \sim t/12 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$.
Comme f(0) = 1, f'(0) = 0 et f est dérivable et f' continue en 0.

<u>Partie C</u>

1) On considère la fonction numérique g de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$g(t) = \frac{1 + t - \frac{1}{1+t}}{2} - \mathrm{Ln}(1 + t)$$

Etablir un lien entre g et h (h introduite à la Partie A).
Il est évident que g(t) = h(1 + t).
Les variations de g s'en déduisent.

2) Montrer que la dérivée f '(t) peut être mise sous la forme $\frac{f(t).g(t)}{t^2}$, pour $t \neq 0$.

On a vu (question 4, partie B), que $f'(t)/f(t) = (1/t + 1/2)(1/(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)/t^2$
$f'(t)/f(t) = [t^2(1/t + 1/2)(1/(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)]/t^2$
$= [((1 + t)^2 - 1)/2(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)]/t^2$
$= [((1 + t) - 1/(1 + t))/2 - \mathrm{Ln}(1 + t)]/t^2 = g(t)/t^2$

D'où : $f'(t) = f(t).g(t)/t^2$

3) Démontrer que f ' est continue pour tout $t \in J$.
On sait que f et g étant définies et continues sur J, leur produit également.
$f'(t) = f(t)\, g(t)/t^2$ l'est donc aussi sur U, sauf en 0.
Or, d'après la question 4 de la partie B, f' est continue en 0.
f' est donc continue sur J.

4) A partir des tableaux de variations de g et f, montrer que $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in J$.
On sait que $g(t) = h(1+t)$ (h étudiée en Partie A), donc s'annule en $t = 0$, est négative pour $-1 < t < 0$, et est positive pour $t > 0$.
Par ailleurs, f est strictement positive (question 3a, partie B)

Donc f' est négative pour $t < 0$, et positive pour $t > 0$ (et non définie en 0, mais sa continuité a été vue précédemment).
Donc f est décroissante sur]-1, 0[, croissante pour $t > 0$, et sa valeur minimale est $f(0) = 1$.
On en déduit donc que, pour tout appartenant à J, $f(t) \geq 1$.

5) Montrer que $\text{Ln } f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$ pour $t \in J$.

$\text{Ln } f(t) = -1 + (1/t + 1/2)\text{Ln}(1 + t)$
Comme $\text{Ln}(1 + t) \leq t - t^2/2 + t^3/3$ (question 2, Partie B), on a :
$\text{Ln } f(t) \leq -1 + (1/t + 1/2)\,(t - t^2/2 + t^3/3)$ puisque $(1/t + ½) > 0$

En développant, on trouve aisément que $\text{Ln } f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$

<u>Partie D</u>

Soit une suite $\{u_n\}$, à termes positifs, n entier > 0 ; on définit la suite U_n par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) Montrer qu'une condition nécessaire pour que la suite $\{U_n\}$ admette une limite finie U est que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Supposons que U_n converge vers U, $U < +\infty$.
$U_n - U_{n-1} = u_n$
$\text{Lim}_{n \to +\infty} (U_n - U_{n-1}) = U - U = 0 = \lim u_n$

2) Que peut-on dire du comportement de la suite U_n si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$?
On sait que si $A \Rightarrow B$, $B^c \Rightarrow A^c$, où A^c et B^c sont les contraires de A et B.
Donc, de la question 1, on déduit que si u_n ne tend pas vers 0, alors U_n ne converge pas vers une limite finie U (elle est divergente).

3) Pour x réel > 0, n entier > 0, on définit la suite de fonctions $\{u_n(x)\}$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(nx)^n \sqrt{n}}{n!}$$

Montrer que, pour $x > 0$, le ratio $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ est égal à $e.x.f(\frac{1}{n})$ où f a été définie en B3.
Calcul immédiat en remarquant que $f(1/n) = [(n+1)/n]^{n+1/2}$

4) Dans cette question, on suppose que $ex \geq 1$.

4a – Montrer que la suite de terme général $\{u_n(x)\}$, n entier > 0, est une suite croissante.
$u_{n+1}(x)/u_n(x) \geq f(1/n)$, lui-même ≥ 1, d'après les variations de f (question 4, Partie C).
Comme $u_n(x)$ est positif, la suite $\{u_n(x)\}$ est croissante.

4b - En déduire alors la nature de la suite associée $\{U_n(x)\}$ où $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.
Pour tout entier n > 0, $u_n(x) \geq u_1(x)$ puisque u_n est croissante.
Soit m la limite de $u_n(x)$, alors on a $m \geq u_1(x) > 0$, ce qui montre que la suite $\{u_n\}$ ne converge pas vers 0.
Par conséquent, d'après la question 2 de cette Partie D, la suite de terme général U_n est divergente, car ne converge pas vers une limite finie U

5) Dans cette question, on suppose que $ex < 1$.
Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.

5a - Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.
Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.
$u_{n+1}(x)/u_n(x) = ex.f(1/n)$, et $\lim f(1/n) = f(0) = 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.
Donc la limite de $u_{n+1}(x)/u_n(x) = ex$, quand $n \rightarrow +\infty$, et $ex < q$.
Alors, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.

5b - En déduire alors que, pour tout $n \geq N$, $u_n(x) \leq q^{n-N} u_N(x)$.
Pour tout $n \geq N$: $u_{n+1}(x) \leq q.u_n(x)$
On obtient aisément par récurrence : $u_n(x) \leq q^{n-N} .u_N(x)$.

5c - Quelle est la nature de la suite $\{U_n(x)\}$?
$U_n(x) = \Sigma_{k=1à+n}\, u_k(x) = \Sigma_{k=1à(N-1)}\, u_k(x) + \Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x) = A(x, N) + \Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x)$, en notant $A(x, N) = \Sigma_{k=1à(N-1)}\, u_k(x)$

Par ailleurs, pour $n \geq N$, $u_n(x)$ est > 0, et vérifie que $u_n(x) \leq q^{n-N}.u_N(x)$, avec $0 < q < 1$.
On en déduit que :
$\Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x) \leq u_N(x).\ \Sigma_{k=Nàn}\, q^{k-N} = u_N(x).\ [1 - (1 - q)^{n-N+1}]/q$, quantité finie car $0 < q < 1$.

Donc $U_n(x)$ est croissante et majorée par $A(x, N) + u_N(x).\ [1 - (1 - q)^{n-N+1}]/q$.
Elle est donc convergente.

6) On définit les deux suites v_n et w_n, n entier > 0 :

$$v_n = \frac{(\frac{n}{3})^n \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{2})^k \sqrt{k}}{k!}$$

Quelles sont les limites de ces deux suites ?
On remarque que v_n n'est autre que $u_n(1/3)$.
Comme e.1/3 est < 1, la suite $V_n = \Sigma v_k$ est convergente (question 5, Partie D).
Et donc $\lim v_n = 0$ (question 1, Partie D).

De même, $w_n = \Sigma_{k=1àn}\, u_k(1/2)$
$e/2 > 1$, et donc d'après la question 4 de cette même partie, la suite $\Sigma_{k=1àn}\, u_k(1/2)$ est divergente, et à termes positifs ; w_n ne converge pas et sa limite est $+ \infty$.

7) On définit la suite $u_n(\frac{1}{e})$.

7a – Donner l'expression de $u_n(\frac{1}{e})$.

$u_n(1/e) = (n/e)^n.n^{1/2} / n!$

7b – Pour tout entier $k \geq 1$, calculer le rapport $R(k, e) = u_{k+1}(\frac{1}{e}) / u_k(\frac{1}{e})$.

$u_{k+1}(1/e)/u_k(1/e) = e.1/e.f(1/k) = f(1/k) \geq 1$.

7c – Montrer, en utilisant la question 5 de la partie C, que Ln R(k, e) est majoré par $M(k) = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}$

En passant par les logarithmes népériens :

$\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e) = \text{Ln } f(1/k) \leq (1/k^2)/12 + (1/k)^3/6$, d'après la question 5 de la Partie C.

$\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e) \leq 1/12k^2 + 1/6k^3$

7d – En déduire que, pour n entier > 1 :

$$\text{Ln}[u_n(\frac{1}{e})] \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} M(k)$$

En sommant l'inégalité de la question précédente pour k allant de 1 à n-1, on obtient :

$\Sigma_{k=1 \text{ à } n-1} [\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e)] \leq \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$

Soit :

$[\text{Ln } u_n(1/e) - \text{Ln } u_1(1/e)] \leq \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$

Or $u_1(1/e) = 1/e$, donc $\text{Ln } u_1(1/e) = -1$, et il s'en suit :

$\text{Ln } u_n(1/e) \leq -1 + \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$, pour n > 1

7e – Montrer que la suite $u_n(\frac{1}{e})$ est majorée.

Selon les règles classiques, les suites $(1/k^2)$ et $(1/k^3)$ convergent (décroissantes et minorées par 0).

Notons D et T leurs limites respectives (inutile de chercher à les calculer).

On obtient : $\text{Ln } u_n(1/e) \leq -1 + D/12 + T/6$

$u_n(1/e) \leq \exp[-1 + D/12 + T/6]$, donc $u_n(1/e)$ est une suite majorée (et croissante).

8) Soit la suite $z_n = \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}$, n entier > 0.

8a – Donner une relation entre z_n et $u_n(\frac{1}{e})$.

De façon immédiate : $z_n = n^{-1/2}.u_n(1/e)$.

8b – Quelle est la limite de la suite z_n quand n tend vers $+\infty$?

Comme $u_n(1/e)$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée, elle converge vers une limite réelle notée u.

Or $n^{-1/2}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et donc le produit $n^{-1/2}.u_n(1/e) = z_n$ tend vers 0.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Soit a un paramètre réel qui vérifie $0 < a < 1$.
N désigne un entier fixé, $N > 1$.

1) On considère la suite (u_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$u_0 = 0$
$u_N = 1$
$u_n = a.u_{n+1} + (1 - a)u_{n-1}$, pour tout $n > 0$

Exprimer u_n en fonction de n, N et a (on discutera selon les valeurs du paramètre a).

$a.u_{n+1} - u_n + (1 - a)u_{n-1} = 0$
Equation caractéristique : $ar^2 - r + (1 - a) = 0$
$D = (1 - 2a)^2$

Cas n°1 : a = 1/2
Racine double $r = 1/2a = 1$
La solution générale de la suite s'écrit sous la forme $u_n = s + tn$
$u_0 = 0 = s$
$u_N = 1 = s + tN$
D'où $s = 0$ et $t = 1/N$
$u_n = n/N$

Cas n°2 : a ≠ 1/2
Deux racines distinctes : $r_1 = (1 - a)/a$ et $r_2 = 1$
Solution générale : $u_n = s(1)^n + t[(1 - a)$++- ²$/a]^n$
$u_0 = 0 = s + t$
$u_N = 1 = s + t[(1 - a)/a]^N$

D'où $s = - t$ et $t = 1 / [((1 - a)/a)^N - 1]$

La solution générale de la suite est :
$u_n = [1 - ((1 - a)/a)^n] / [1 - ((1 - a)/a)^N]$

2) On considère la suite (v_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$v_0 = 1$
$v_N = 0$
$v_n = a.v_{n+1} + (1 - a)v_{n-1}$, pour tout $n > 0$

Exprimer v_n en fonction de n, N et a.

$a.v_{n+1} - v_n + (1 - a)v_{n-1} = 0$
L'équation caractéristique est inchangée : $ar^2 - r + (1 - a) = 0$
$D = (1 - 2a)^2$

Cas n°1 : a = 1/2
Racine double $r = 1/2a$
La solution générale de la suite s'écrit sous la forme $v_n = s + tn$
$v_0 = 1 = s$
$v_N = 0 = s + tN$
D'où $s = 1$ et $t = - 1/N$
$u_n = 1 - n/N$

Cas n°2 : a ≠ 1/2
Deux racines distinctes : $r_1 = (1 - a)/a$ et $r_2 = 1$
Solution générale : $v_n = s(1)^n + t[(1 - a)/a]^n$
$v_0 = 1 = s + t$
$v_N = 0 = s + t[(1 - a)/a]^N$

D'où $s = 1 - t$ et $t = 1 / [1 - ((1 - a)/a)^N]$

La solution générale de la suite est :
$v_n = [((1 - a)/a)^n - ((1 - a)/a)^N] / [1 - ((1 - a)/a)^N]$

Problème 2

Le Calife appelle son Grand Vizir, et lui tient ce discours :
« Cher ami, tout le monde sait que tu rêves de prendre ma succession quand je me retirerai. Alors pour que tout soit clair entre nous, je te propose le jeu suivant.
J'ai dans les mains deux sacs de forme et de couleurs identiques. Celui que je tiens dans ma main droite contient deux boules rouges, celui que j'ai dans ma main gauche en contient trois. Tu peux vérifier.
Voici six boules bleues : je te laisse les mettre dans ces sacs comme tu le souhaites. Quand tu auras procédé à la totale répartition de ces six boules bleues entre les deux sacs, tu fermeras les yeux, je tirerai au sort, entièrement au hasard, un sac, et tu choisiras une boule au hasard dans le sac que je te proposerai.
Si la boule est bleue, tu prendras ma succession instantanément.
Mais si elle est rouge, tu seras banni à jamais et condamné à l'exil ».

Comment le Grand Vizir doit-il répartir ses six boules bleues entre les deux sacs de façon à maximiser ses chances de devenir Calife ?

Appelons A le sac que le Calife tient dans sa main droite, et B celui de la main gauche.
Soit x le nombre de billes bleues que le Vizir va mettre dans A, et donc $6 - x$ le nombre de billes bleues qui iront dans B ; $0 \le x \le 6$.
Juste avant le tirage, le sac A contient alors $x + 2$ boules, 2 rouges et x bleues ; B en contient $9 - x$, 3 rouges et $6 - x$ bleues.
La probabilité que le Vizir devienne Calife est qu'il tire une boule bleue.
P(Bleue) = P(Bleue/A).P(A) + P(Bleue/B).P(B)

P(Bleue/A) = $x/(x + 2)$
P(Bleue/B) = $(6 - x)/(9 - x)$

P(Bleue) = $[x/(x + 2) + (6 - x)/(9 - x)]/2$

Il suffit alors de faire varier x de 0 à 6 et de voir pour quelle valeur de x cette probabilité est maximale.

x	0	1	2	3	4	5	6
P(Bleue)	0,333	0,479	0,536	0,55	0,533	0,482	0,375

Le meilleur choix est $x = 3$, répartition égale entre les deux sacs.

Problème 3

C désigne le corps des nombres complexes.

Partie A

Soit f l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq -3$, associe f(z) défini par :

$$f(z) = (z + 1 - i)/(z + 3)$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble, noté U, des points M tels que le module $|f(z)|$ de f(z) soit égal à 1.

Soit A le point d'affixe $-(1+i)$, B le point d'affixe (-3).
$|f(z)| = 1 \leftrightarrow BM/AM = 1$, soit BM = AM.
L'ensemble U est donc la médiatrice du segment AB.

2) Déterminer l'ensemble V des points M tels que f(z) soit un nombre réel strictement négatif.

Ecrivons f(z) sous une forme trigonométrique : $f(z) = r(\cos q + i.\sin q)$.
Pour que f(z) soit un réel, il faut que $\sin q = 0$, soit $q = 0$ ou π.
Pour que f(z) soit négatif, il faut que $q = \pi$.

L'argument de f(z) est l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.
Donc V est le segment AB, sauf les points A et B.

3) Déterminer l'ensemble W des points M tels que $|f(z)|$ soit un nombre imaginaire pur.

Comme à la question précédente, pour que f(z) soit un imaginaire pur, il faut que q = $\pi/2$ (modulo 2π).
M voit le segment AB sous un angle droit : W est donc le cercle de diamètre AB, à l'exception du point A.

Partie B

Soit g l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq 2i$, associe g(z) défini par :

$$g(z) = (z - 1)/(z - 2i)$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Ecrire g(i) sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique.

$g(i) = -(1 + i)$
$r = 2^{1/2}$ et $q = -3\pi/4$

2) Résoudre l'équation g(z) = 2i
$g(z) = 2i = (z - 1)/(z - 2i) \leftrightarrow z(1 - 2i) = 5$
ou $z = 1 + 2i$

3) Déterminer l'ensemble A des points M tels que $|g(z)| = 2$.

Soit $z = x + iy$
$(x - 1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y - 2)^2]$
Ce qui conduit à :
$3x^2 + 3y^2 + 2x - 16y + 15 = 0$
Ou encore : $(x + 1/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 20/9$
A est donc le cercle de centre (- 1/3, +8/3) et de rayon $2.5^{1/2}/3$

4) Déterminer l'ensemble B des points M tels que l'argument arg(g(z)) soit égal à $\pi/2$, modulo 2π.

Notons par E le point d'affixe 2i et F le point d'affixe 1.

B est l'ensemble des points M tels que l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME})$ est égal à $\pi/2$, modulo 2π.
C'est donc le demi-cercle de diamètre EF situé au-dessus du diamètre.
En effet, pour le demi-cercle au-dessous du diamètre, l'angle orienté est égal à - $\pi/2$.

5) Etudier l'intersection de A et B.

L'intersection de A et B est unique, et est 1 + 2i.

6) Résoudre l'équation f(z) = g(z).

$(z - 1)/(z - 2i) = (z + 1 - i)/(z + 3) \leftrightarrow z(1 + 3i) = 1 - 2i$
Ou encore : $z = - (1 + i)/2$

Problème 4

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien, de base e = 2,718.

On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$, où a et b sont deux paramètres réels, définie sur $R^{+*} - \{1\}$, par :

$$f_{a,b}(x) = ax + b(\text{Ln } x)^{-1}$$

1 – Déterminer les réels a et b pour que la courbe C représentant graphiquement $f_{a,b}$ dans le repère orthonormé usuel coupe l'axe des abscisses au point E (e, 0), et pour que la tangente à C au point E soit parallèle à la droite y = 2x.

Dans la suite du problème, on notera par f la fonction correspondant aux valeurs ainsi trouvées de a et b.

$f_{a,b}(e) = ae + b$
$f'_{a,b}(x) = a - b/(x.\text{Ln}^2x)$
$f'_{a,b}(e) = a - b/e = 2$
Ce qui conduit à a = 1 et b = - e.
$f(x) = x - e/\text{Ln}x$

2 – Etudier très précisément les variations de f (dérivées, concavité, limites, asymptotes éventuelles, intersection avec les axes, etc …).

Domaine de définition : $R^{+*} - \{1\}$

Dérivée : $f'(x) = 1 + e/(x.\text{Ln}^2x)$, qui est strictement positive

Dérivée seconde :
$f''(x) = - e.\text{Ln}x(2 + \text{Ln}x)/(x^2.\text{Ln}^4x)$
f'' est négative pour $x < e^{-2}$ et $x > 1$, et négative entre e^{-2} et 1. La concavité s'en déduit.
f'' s'annule pour x = 1 (mais f n'y est pas définie) et pour $x = e^{-2}$.
Au point d'abscisse e^{-2}, la pente est $f'(e^{-2}) = 1 + e^3/4 \sim 6$.

Limites :

$x \to 0 : f(x) \to 0$
$x \to 1_- : f(x) \to + \infty$
$x \to 1_+ : f(x) \to - \infty$
$x \to + \infty : f(x) \to + \infty$

Point remarquable : outre le point d'inflexion, la courbe représentant f coupe l'axe des abscisses (f(x) = 0) au point d'abscisse e. D'après la question 1, la pente en (e, 0) est 2.

Pente à l'origine :
$(f(x) - f(0))/(x - 0) = 1 - e/(x\text{Ln}x) \to \infty$ quand $x \to 0$.

Asymptote :
La droite x = 1 est asymptote verticale.
La droite y = x est asymptote oblique (f(x)/x → 1 et f(x) – x → 0 quand x → + ∞

Tableau de variations

x	0		e^{-2}		1		e		+ ∞
f’’		-	0	+	0 ||		-		
f’	+ ∞	↘	6	↗	+∞ || +∞	↘	1		
f	0	↗			+∞ || 0	↗			+ ∞

3 – Soit la fonction g définie sur l’intervalle R^{+*} – {1} par :

g(x) = x – e/(x.Lnx)

3a) Etudier les positions respectives des courbes F et G représentant les fonctions f et g.

g(x) – f(x) = e(x-1)/(xLn x)
g(x) – f(x) > 0, donc G au dessus de F.
03b) Calculer une primitive de g(x).

Une primitive de g est x²/2 – e.∫dx/(x.Lnx) + K, où K est une constante quelconque.
En posant u = Lnx, ∫dx/(x.Lnx) = ∫du/u = Lnu = Ln(Lnx)
Primitive : K + x²/2 – e.Ln(Lnx)

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

On considère l'ensemble *C* des nombres complexes.

1) Résoudre dans *C* l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$
Deux racines réelles :
$z(1) = 1$
$z(2) = \sqrt{2}$

2) Résoudre dans *C* l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable $u = z + \frac{1}{z}$

L'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$u^2 - (1 + \sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0$, qui admet deux solutions 1 et $\sqrt{2}$.

Les racines en *z* vérifient donc :

$z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z^2 - z + 1 = 0$

$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ ou $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$

$z^2 - z + 1 = 0$ conduit à $z(1)$ et $z(2) = 1 \pm i\sqrt{3}/2$

$z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$ conduit à $z(3) = (1 + i)/\sqrt{2}$ et $z(4) = (1 - i)/\sqrt{2}$

Problème

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}39$; $Ln\, 2 = 0{,}69$; $Ln 0{,}6 = - 0{,}51$; $Ln 0{,}7 = - 0{,}36$; $Ln 0{,}8 = - 0{,}22$.

Définition générale

Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On considère la famille $W(p, q)$, paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(Ln\ x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$: pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc …).
Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé usuel.

Etude de f_1 :
$f_1(x) = Lnx/x$
$x > 0$
$f'_1(x) = (1 - Lnx)/x^2$ a le signe de $(1 - Lnx)$, nulle pour $x = e$, > 0 pour $x < e$ et < 0 pour $x > e$.

Dérivée seconde :
$f''_1(x) = x(2lnx - 3)/x^4$
S'annule en $x_0 = e^{3/2} \sim 4{,}5$
En ce point d'abscisse x_0, $f_1(x_0) \sim 0{,}33$.
→ Point d'inflexion (4,5 ; 0,33)

Asymptotes :
Lim $f_1(x) = -\infty$ quand $x \to 0$ (asymptote verticale) et *Lim* $f_1(x) = 0$ quand $x \to +\infty$ (asymptote horizontale).
Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :
$f_1(1) = 0$
Pente en (1, 0) : $f'_1(1) = 1$
$f_1(e) = 1/e \sim 0{,}37$.
Pente au point d'inflexion : $f'_1(e^{3/2}) = -0{,}025$

Fonction croissante de 0 à e, passant de $-\infty$ à $1/e$, coupant l'axe des abscisses et point d'abscisse 1 (pente 1), puis décroissante sur $(e, +\infty)$ de $1/e$ à 0.
Changement de concavité en $\boldsymbol{x_0} = e^{3/2} \sim 4{,}5$

x	0	1	e	$+\infty$
f'_1		+	0	-
f_1	$-\infty$ ↗	0 ↗	$1/e$ ↘	0

Etude de f_2 :

$f_2(x) = (Lnx)^2/x$, $x > 0$

$f'_2(x) = Lnx(2 - Lnx)/x^2$

S'annule en $x = 1$ et en $x = e^2 \sim 7{,}4$

f'_2 est négative sur (0, 1), positive entre 1 et e^2, et à nouveau négative pour $x > e^2$;

Donc f_2 est décroissante sur (0, 1), croissante sur (1, e^2), décroissante sur (e^2, + ∞).

Dérivée seconde :

$f''_2(x) = 2x(1 - 3Lnx + (Lnx)^2)/x^4$

Solutions de $1 - 3Lnx + (Lnx)^2 = u^2 - 3u + 1 = 0$ en posant $u = Lnx$

$\Delta = 5 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (3 - \sqrt{5})/2 \sim 0{,}38$ et $u(2) = (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}62$

Donc deux racines en x : $x' = e^{u(1)} \sim 1{,}46$ et $x'' = e^{u(2)} \sim 13{,}74$

Asymptotes :

Lim $f_2(x) = + \infty$ quand $x \rightarrow 0$ (asymptote verticale) et *Lim* $f_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow + \infty$ (asymptote horizontale).

Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :

$f_2(1) = 0$, tangente horizontale

$f_2(e^2) = 0$, tangente horizontale

x	0		1		e^2		$+\infty$
f'_2		-	0	+	0	-	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a.

Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

Tangente à F_2 au point A $(a, f_2(a))$: $(y - f_2(a))/(x - a) = f'_2(a)$

$y = x\, Lna(2 - Lna)/a^2 + 2lna(Lna - 1)/a$

$D(a)$ passe par l'origine si et seulement si $2lna(Lna - 1) = 0$, soit pour $a = 1$ et $a = e$.

Pour $a = 1$, $y = 0$ (tangente horizontale)

Pour $a = e$, $y = x/e^2$

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x)dx$.

Donner la valeur de $U(3)$.

Que vaut la limite de $U(p)$ quand $p \rightarrow +\infty$?

$U(3) = \int_1^{e^3} f_3(x)dx = \int_1^{e^3} \frac{(Ln\,x)^3}{x} dx$

On pose $u = Lnx$: u varie de 0 à 3 et $du = dx/x$

$U(3) = \int_0^3 u^3 du = (3^4/4) = 81/4$

De même, on trouve aisément que $U(p) = p^{p+1}/(p+1)$

Quand $p \rightarrow + \infty$, $U(p) \rightarrow + \infty$.

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.
On notera par g_p une fonction de $W(p, 2)$: $g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(Ln\ x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

On trouve aisément :
$g'_2(x) = 2xLnx(1 - Lnx)/x^4$
$g'_2(x)$ est négatif sur $(0, 1)$ et $(e, +\infty)$, et positif entre 1 et e.
Donc g_2 est décroissante, croissante puis décroissante sur ces mêmes intervalles.

$g''_2(x) = 2(1 - 5Lnx + 3(Lnx)^2)/x^4$

g'_2 s'annule en $x = 1$ et $x = e$.

g''_2 s'annule pour $1 - 5Lnx + 3(Lnx)^2) = 0$; soit avec $u = Lnx$, $3u^2 - 5u + 1 = 0$; $\Delta = 13 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (5 - \sqrt{13})/6 \sim 0{,}23$ et $u(2) = (5 + \sqrt{13})/6 = 1{,}43$, auxquelles sont associées les valeurs $x(1) \sim 1{,}26$ et $x(2) \sim 4{,}18$.

Asymptotes :
Lim $g_2(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ et *Lim* $g_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
Pas d'asymptote.
$g_2(1) = 0$
$g_2(e) = 1/e^2$

Tableau de variations

x	0		1		e		$+\infty$
f'_2		-	0	+	0	-	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/e^2$	$\searrow$	0

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx$.
Calculer la valeur de $J(2)$.

On pose $u = Lnx$, u varie de 0 à 2 quand x varie de 1 à e^2.
$J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx = \int_0^2 u^2 e^{-u} du$

En faisant une intégration par parties :

$J(2) = [-u^2e^{-u}]_0^2 + 2\int_0^2 ue^{-u}du = -4e^{-2} + 2\int_0^2 ue^{-u}du$

$\int_0^2 ue^{-u}du = [-ue^{-u}]_0^2 + \int_0^2 e^{-u}du = -2e^{-2} + (1 - e^{-2})$

D'où le résultat : $J(2) = -4e^{-2} + 2[-2e^{-2} + (1 - e^{-2})] = 2 - 10/e^2$

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p.

$g'_p(x) = x(Lnx)^{p-1}(p - 2Lnx)/x^4$

S'annule pour $x = 1$ et $x = e^{p/2}$

Il faut donc distinguer selon la parité de p :

a) Si p est pair, p-1 est impair et $(Lnx)^{p-1}$ est négatif pour $x < 1$
b) Si p est impair, p-1 est pair, et $(Lnx)^{p-1} > 0$ pour $x < 1$

$g''_p(x) = (Lnx)^{p-1}[p(p-1) - 5pLnx + 6(Lnx)^2]/x^4$

S'annule pour $x = 1$ et si $6u^2 - 5pu + p(p-1) = 0$ avec $u = Lnx$

$\Delta = p(p+24) > 0$ donc il existe deux racines $[5p \pm \sqrt{p(p+24)}]/12$.

$g_p(1) = 0$

$g_p(e^{p/2}) = \frac{p^p}{(2e)^p}$

Limites :

Si p est pair, $Lim\ g_p(x) = +\infty$ quand $x \to 0$ et $Lim\ g_p(x) = 0$ quand $x \to +\infty$.

Si p est impair, $Lim\ g_p(x) = -\infty$ quand $x \to 0$ et $Lim\ g_p(x) = 0$ quand $x \to +\infty$.

Pas d'asymptote.

***p* pair**

x	0		1		$e^{p/2}$		$+\infty$
g'_p		-	0	+	0	-	
g_p	$+\infty$	↘	0	↗	$p^p(2e)^{-p}$	↘	0

***p* impair**

x	0		1		$e^{p/2}$		$+\infty$
g'_p		-	0	+	0	-	
g_p	$-\infty$	↗	0	↗	$p^p(2e)^{-p}$	↘	0

4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx$.
Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Faisons le changement de variable $u = Lnx$

Pour $p > 1$: $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx = \int_0^2 u^p e^{-u}du$
$= [-u^p e^{-u}]_{(0,2)} + p\int_0^2 u^{p-1}e^{-u}du$
D'où la relation : $J(p) = pJ(p-1) - 2^p/e^2$

→ $h(p) = p$ et $k(p) = - 2^p/e^2$

$J(1) = \int_1^{e^3} \frac{Lnx}{x^2}dx = \int_0^2 ue^{-u}du = 1 - 3/e^2$

$J(2) = 2J(1) - 4/e^2 = 2 - 10/e^2$
(on retrouve bien $J(2)$ de la question $B2$)
$J(3) = 3J(2) - 8/e^2 = 6 - 38/e^2$

$J(4) = 4J(3) - 16/e^2 = 24 - 168/e^2$

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.
1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de D et de F_2.
Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

$y = (Lnx)^2/x$
$y = x/e^2$
Soit $z = (Lnx)^2/x - x/e^2 = (e^2(Lnx)^2 - x^2)/xe^2 = (eLnx - x)(eLnx + x)/xe^2$
$a(x) = eLnx + x$
$b(x) = eLnx - x$
On montre facilement que b est toujours négative (max = 0, atteint en $x = e$), et que a est croissante de $-\infty$ à $+\infty$.
$a(x) = 0$ a donc une solution r telle que $eLnr = r$.
$a(1) = 1$
$a(1/2) = -1{,}38$
$a(0{,}6) = -0{,}79$
$a(0{,}7) = -0{,}26$
$a(0{,}8) = 0{,}19$
→ r est donc compris entre 0,7 et 0,8.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2, graphe de g_2. En donner un encadrement à 0,1 près.

De façon analogue, $z = ((Lnx)^2/x^2 - x^2) = a(x).b(x)/x^4$
avec $a(x) = Lnx - x^2$ et $b(x) = Lnx + x^2$
$a'(x) = (1 - 2x^2)/x$, positive sur $(0, \sqrt{2}/2)$, négative ensuite.
$a(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, \sqrt{2}/2)$, allant de $-\infty$ à un maximum m, décroissante sur $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Sa valeur maximale $m = (Ln2)^2/2 - 4 \sim -3{,}76$, < 0
Donc $a(x)\Delta$ a un signe constant, négatif, et ne change pas de signe (pas de racine).

Inversement, $b'(x) = (1 + 2x^2)/x$, positive.
$b(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, +\infty)$ allant de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet donc une racine s, telle que $Lns + s^2 = 0$.
s est donc l'abscisse du point d'intersection unique de P et de G_2.

$Ln1 + 1 = 1 > 0$
$Ln0{,}5 + 0{,}25 = -0{,}44 < 0$
$Ln0{,}6 + 0{,}36 = -0{,}15$
$Ln0{,}7 + 0{,}49 = 0{,}13$

→ s est entre 0,6 et 0,7

Partie D

Dans cette partie, p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

$f'_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-1}(p - qLnx)/x^{q+1}$
S'annule pour $x = 1$ et $x = e^{p/q}$
Son signe dépend de la parité de p : en effet, pour $x < 1$:
→ si p est pair, p-1 est impair et $(Lnx)^{p-1} < 0$
→ si p est impair, p-1 est pair et $(Lnx)^{p-1} > 0$

Le signe de la dérivée est donc :
Cas 1 : p pair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$		-	0	+		+	
$p - qLnx$		+		+	0	-	
$f'_{p,q}(x)$		-	0	+	0	-	

Cas 2 : p impair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$		+	0	+		+	
$p - qLnx$		+		+	0	-	
$f'_{p,q}(x)$		+	0	+	0	-	

2) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer les points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

Après calculs, on établit :
$f''_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-2}(p(p-1) - p(2q+1)Lnx + q(q+1)(Lnx)^2)/x^{q+2}$

Remarque : on retrouve la cohérence avec les résultats des questions $A1$, $B1$, $B3$.

$f''_{p,q}(x)$ s'annule pour $x = 1$ et pour les solutions de l'équation $p(p-1) - p(2q+1)Lnx + q(q+1)(Lnx)^2 = 0$
Soit l'équation : $q(q+1)u^2 - p(2q+1)u + p(p-1) = 0$
$\Delta = p^2 + 4pq(q+1) > 0$
Donc il y a deux solutions s_1 et s_2 et donc deux points d'inflexion e^{s1} et e^{s2}.

3) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$?

Quand $x \to +\infty$, $f_{p,q}(x) \to 0$
Quand $x \to 0$:

a) Si p est pair, $lim\ f_{p,q}(x) = +\infty$
b) Si p est impair, $lim\ f_{p,q}(x) = -\infty$

4) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

On en déduit :

Cas 1 : p pair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$f'_{p,q}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_{p,q}(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	M	↘	0

Cas 2 : p impair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$f'_{p,q}$		$+$	0	$+$		$-$	
$f_{p,q}$	$-\infty$	↗	0	↗	M	↘	0

La valeur maximum est $M = f_{p,q}(e^{p/q}) = (p/q)^p/e^p = p^p(qe)^{-p}$

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x)dx$
Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q).A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

En posant $u = (Ln\ x)$ P et en intégrant par parties, on obtient :
$A(p, q) = \frac{p}{q-1} A(p-1, q)$

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.
Soit A cet événement.
$P(A) = (C_6^1\ C_3^1\ C_2^1)/C_{11}^3 = 12/55$

2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.
Soit B ce deuxième événement.
$P(B) = (C_6^3 + C_3^3)/C_{11}^3 = 21/165 = 7/55$

3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.
Donner la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance et son écart-type.

X peut prendre 4 valeurs x : $x = 0, 1, 2$ et 3.
$P(X = x) = (C_6^x\ C_5^{3-x})/C_{11}^3$
Ce qui donne :
$P(X = 0) = 2/33$
$P(X = 1) = 12/33 = 4/11$
$P(X = 2) = 15/33 = 5/11$
$P(X = 3) = 4/33$

Espérance $E(X) = \sum_{i=0}^{3} p_i\, x_i = 54/33 = 18/11 \sim 1{,}64$

$E(X^2) = 108/33 \sim 3{,}27$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (108/33 - (54/33)^2 = 648/1089 = 0{,}595$
D'où un écart-type égal à 0,77

Problème 2

$\mathcal{M}_3$ désigne l'ensemble des matrices carrées 3x3 à coefficients réels. Les parties *A* et *B* sont indépendantes.

Partie A

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_3$.
On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \qquad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3$, et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1}.

On a $M(M - aI) = bI$
La matrice $C = b^{-1}(M - aI)$ vérifie $M.C = I$
Donc $b^{-1}(M - aI)$ est l'inverse de M.

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R), et donner les valeurs de a et b associées.

On calcule aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit que $A^2 = A + 2I$, $a = 1$ et $b = 2$.
Donc $A[(A - I)/2] = I$

3) En déduire l'expression de A^{-1}, inverse de A.

$A^{-1} = (A - I)/2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Partie B

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale).

Soit $B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Son déterminant (polynôme caractéristique) est $P(\lambda) = (1 - \lambda)(4 + \lambda)(\lambda - 2)$.
Donc B admet trois valeurs propres distinctes qui sont 1, 2, -4.
B, matrice de M_3, admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, est donc bien diagonalisable.

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

Les trois sous-espaces propres étant de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur propre (x, y, z) associé à chacune des valeurs propres.
Pour $\lambda = 1$:
$2y - z = x$
$3x - 2y = y$
$-2x + 2y + z = z$

On en déduit $x = y$ et $x = z$: prenons $e(1) = (1, 1, 1)$

Pour $\lambda = 2$:
$-2x + 2y - z = 0$
$3x - 4y = 0$
$-2x + 2y - z = 0$

On en déduit $3x - 4y = 0$ et $-2x + 2y - z = 0$: prenons $x = 4$, donc $y = 3$ et $z = -2$.
Soit le *vp* $e(2) = (4, 3, -2)$

Pour $\lambda = -4$:
$-4x + 2y - z = 0$
$3x + 2y = 0$
$-2x + 2y + 5z = 0$

On en déduit $x - z = 0$ et $3x + 2y = 0$: prenons $x = 2$, donc $z = 2$ et $y = -3$.
Soit le *vp* $e(-4) = (2, -3, 2)$.

La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

On sait que $D = P^{-1}BP$

Avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$

Et $D^n = P^{-1}B^n P$; on en déduit : $B^n = PD^nP^{-1}$

$P^{-1} = \frac{-1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

En effectuant le calcul, on trouve :

$$B^n = \frac{-1}{30}\begin{pmatrix} -5.2^{n+2} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 + 5.2^{n+2} - 2(-4)^n \\ -15.2^n - 15(-4)^n & -12 - 18(-4)^n & -18 + 5.2^{n+1} + 3(-4)^n \\ 5.2^{n+1} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 - 5.2^{n+1} - 2(-4)^n \end{pmatrix}$$

Problème 3

Partie A

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$
(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On définit la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n, $a(1)$, $b(1)$.

Les suites $a(n)$ et $b(n)$ sont des suites arithmétiques respectivement de premier terme 1 (6) et de raison 2 (-1).
On obtient facilement :
$a(n) = 1 + 2(n-1)$
$b(n) = 6 - (n-1)$

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + 2) + b(n) – 1 = 10\ a(n) + b(n) + 19 = u(n) + 19$
La suite $\{u(n)\}$ est une suite arithmétique de raison 19 et de premier terme $u(1) = 16$
Son terme général est $u(n) = u(1) + 19(n-1) = 16 + 19(n-1) = 19n - 3$

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?
$19n – 3 > 1000$
$n > (1000 +3)/19 = 52{,}8$
A partir de $n = 53$, $u(n)$ est supérieur strictement à 1000 (et on a : $u(53) = 1004$)

4) On donne la liste de chiffres : 1 ; 6 ; 3 ; 5 ; 5 ; 4 ; 7 ; ….
Quels sont les trois chiffres suivants ?
$u(1) = 16$, $u(2) = 35$, $u(3) = 54$, $u(4) = 73$, $u(5) = 92$
On remarque que la liste est la succession des chiffres composant les nombres $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, etc. C'est un mode de construction de suite infinie de chiffres.
Les trois chiffres suivants après 7 sont donc 3, 9, 2.

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier par strictement positif, définies par :

(1) $a(1)$ et $a(n+1) = a(n) + \lambda$
(2) $b(1)$ et $b(n+1) = b(n) + \mu$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \le \lambda,\ \mu \le 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie *A*, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n, $u(1)$, λ et μ.
La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + \lambda) + b(n) + \mu = 10\ a(n) + b(n) + 10\lambda + \mu$
$u(n+1) = u(n) + (10\lambda + \mu)$
Suite arithmétique de premier terme $u(1) = 10a(1) + b(1)$ et de raison $(10\lambda + \mu)$
Son terme général est donc : $u(n) = u(1) + (n-1)\ (10\lambda + \mu)$
$u(n) = 10a(1) + b(1) + (n-1).\ (10\lambda + \mu)$

La suite $u(n)$ est constante si $(10\lambda + \mu) = 0$. Ce qui est impossible puisque λ et μ sont des nombres entiers relatifs non nuls.

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

Puisque $1 \le a(1),\ b(1) \le 6$, on en déduit que $10a(1) + b(1)$ vaut au minimum 11 et au maximum 66.
De même, puisque $-2 \le \lambda,\ \mu \le 2$, avec λ, μ non nuls, on en déduit que $10\lambda + \mu$ vaut au minimum – 22 et au maximum 22.
$u(n)$ varie donc entre -11 et 88.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, b(1), λ et µ. Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?

Puisque $u(n)$ est compris entre -11 et 88, il peut être nul.
Pour quelles valeurs des paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et µ $u(n)$ sera-t-il nul ?
$u(n) = 0 \leftrightarrow 10a(1) + b(1) + (n\text{-}1).(10\lambda + \mu) = 0 \leftrightarrow n - 1 = -(10a(1) + b(1))/(10\lambda + \mu)$

On remarque que $10a(1) + b(1)$ est toujours > 0 ; il faut donc déterminer les paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et µ tels que $(10\lambda + \mu) < 0$, et $10a(1) + b(1)$ soit un multiple de $(10\lambda + \mu)$.

Tableau des valeurs de $(10\lambda + \mu)$

$10\lambda+\mu$	$\lambda = -2$	-1	1	2
$\mu = -2$	-22	-12	8	18
-1	-21	-11	9	19
1	-19	-9	11	21
2	-18	-8	12	22

Tableau des valeurs de $10a(1) + b(1)$

$10a(1)+b(1)$	$a(1) = 1$	2	3	4	5	6
$b(1) = 1$	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Valeurs admissibles pour $(10\lambda + \mu)$ et $10a(1)+b(1)$:

$10\lambda + \mu = -22$ ($\lambda = -2, \mu = -2$) et $10a(1)+b(1) = 22, 44, 66$
Pour $10a(1)+b(1) = 22$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 2$: $n = 2$
Pour $10a(1)+b(1) = 44$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 4$: $n = 3$
Pour $10\ a(1)+b(1) = 66$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 6$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -21$ ($\lambda = -2, \mu = -1$) et $10a(1)+b(1) = 21, 42, 63$
Pour $10a(1)+b(1) = 21$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 1$: $n = 2$
Pour $10a(1)+\text{b}(1) = 42$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 2$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 63$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 3$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -18$ ($\lambda = -2, \mu = 2$) et $10a(1)+b(1) = 36, 54$
Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 54$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 4$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -12$ ($\lambda = -1, \mu = -2$) et $10a(1)+b(1) = 12, 24, 36$
Pour $10a(1)+b(1) = 12$, $a(1) = 1$ et $b(1) = 2$: $n = 2$
Pour $10a(1)+b(1) = 24$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 4$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -11$ ($\lambda = -1, \mu = -1$) et $10a(1)+b(1) = 22, 33, 44, 55, 66$
Pour $10a(1)+b(1) = 22$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 2$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 33$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 3$: $n = 4$
Pour $10a(1)+b(1) = 44$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 4$: $n = 5$
Pour $10a(1)+b(1) = 55$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 5$: $n = 6$
Pour $10a(1)+b(1) = 66$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 6$: $n = 7$

$10\lambda + \mu = -9$ ($\lambda = -1, \mu = 1$) et $10\,a(1)+b(1) = 36, 45, 54, 63$
Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 5$
Pour $10a(1)+b(1) = 45$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 5$: $n = 6$
Pour $10a(1)+b(1) = 54$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 4$: $n = 7$
Pour $10a(1)+b(1) = 63$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 3$: $n = 8$

$10\lambda + \mu = -8$ ($\lambda = -1, \mu = 2$) et $10a(1)+b(1) = 16, 24, 32, 56, 64$
Pour $10a(1)+b(1) = 16$, $a(1) = 1$ et $b(1) = 6$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 24$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 4$: $n = 4$
Pour $10a(1)+b(1) = 32$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 2$: $n = 5$
Pour $10a(1)+b(1) = 56$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 6$: $n = 8$
Pour $10a(1)+b(1) = 64$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 4$: $n = 9$

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants..

Exercice

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

$3^{n+6} - 3^n = 3^n (3^6 - 1) = 728.\ 3^n = 7 \times 104 \times 3^n$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A toute fin utile, on donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^{1/2} = 1{,}649$; $e^{-1/2} \approx 0{,}607$; $e^{-3/2} \approx 0{,}223$

Contexte

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.
On considère la famille F(p, q), doublement paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$x \to f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$$

On notera par $C_{p,q}$ le graphe de $f_{p,q}$.
L'objet du problème est d'étudier la famille F(p, q).

Partie A

On prend p = q = 1, et, pour alléger les notations, on notera par f_1 la fonction $f_{1,1}$ et par C_1 le graphe $C_{1,1}$: $f_1(x) = x^x$, pour $x > 0$

A1) Etudier précisément les variations de f_1 (limites, asymptotes, points d'inflexion, points caractéristiques, etc ...). Dresser le tableau de variation de f_1.

A1) $\mathrm{Ln} f_1(x) = x\mathrm{Ln}x$
$f'_1(x)/f_1(x) = 1 + \mathrm{Ln}x$
$f'_1(x) = (1 + \mathrm{Ln}x)\, x^x$
$f''_1(x) = f'_1(x)\,(1 + \mathrm{Ln}x) + f_1(x)/x = x^x\,[(1 + \mathrm{Ln}x)^2 + 1/x]$

On en déduit que

a) $f'_1(x) = 0$ pour $x = 1/e \approx 0{,}37$; la valeur de f_1 en ce point $1/e = f_1(1/e) = (1/e)^{1/e}$ voisin de 0,692
b) $f''_1 > 0$ pour tout $x > 0$. Il n'y a donc pas de point d'inflexion.

Limites :

Quand $x \to 0$, $x\mathrm{Ln}x \to 0$ et donc $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1$.
Quand $x \to +\infty$, $\lim f_1(x) = +\infty$.

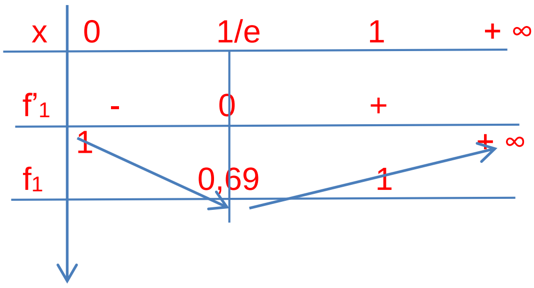
Asymptote

Quand x → +∞, lim $f_1(x)/x$ = +∞, branche parabolique dans la direction Oy

Pente quand x → 0 :
$\lim_{x\to 0}(f_1(x)-1)/x$ = lim $[e^{xLnx} - 1]/x$ = lim Lnx = - ∞

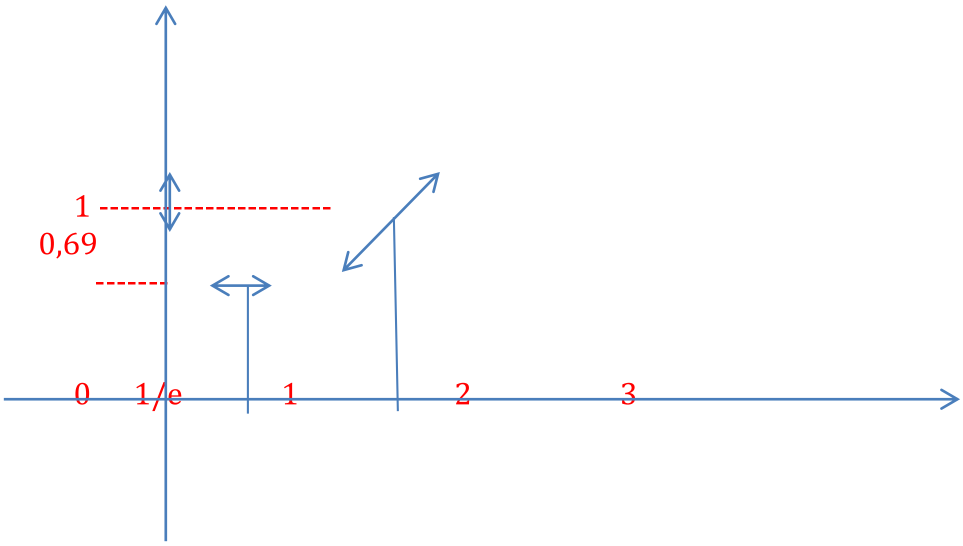
Pente quand x = 1 :
$f'_1(1) = 1$

Tableau de variations



A2) Tracer le graphe C_1 de f_1.

Quelques points : $f_1(1) = 1$; $f_1(2) = 4$; $f_1(3) = 27$; $f_1(4) = 256$



Partie B
On prend maintenant p = q = 2, et on notera f_2 pour $f_{2,2}$ et par C_2 le graphe $C_{2,2}$.
$f_2(x) = (x^2)^{(x^2)}$, pour x > 0

B1) Donner l'expression de f'_2, dérivée première de f_2. Etudier son signe.

$Lnf_2(x) = 2x^2Lnx$
$f'_2(x)/f_2(x) = 2x(1 + 2Lnx)$
$f'_2(x) = 2x(1 + 2Lnx). (x^2)^{(x^2)}$
Puisque x > 0, $f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2} \approx 0{,}606$
Signe de f'_2 : $f'_2 < 0$ pour $x < e^{-1/2}$ et > 0 pour $x > e^{-1/2}$
Valeur de f_2 en $e^{-1/2}$: $f_2(e^{-1/2}) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$

$f'_2(1) = 2$

Quand x → 0, $(f_2(x) - x)/x \approx (e^{2x^2Lnx} - x)/x \approx 2xLnx \to 0$

B2) Donner l'expression de f''_2, dérivée seconde de f_2. Etudier son signe et en déduire la concavité de f_2. Donner le tableau de variations de f_2.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_2(x)$ une expression de la forme $a(x) - b(x)$, où a et b sont deux fonctions à expliciter.

$f''_2(x) = 2[f'_2(x).x(1 + 2Lnx) + f_2(x)(3 + 2Lnx)]$
$f''_2(x) = 2f_2(x)[2x^2(1 + 2Lnx)^2 + (3 + 2Lnx)]$
Posons $a(x) = 2x^2(1 + 2Lnx)^2$ et $b(x) = -(3 + 2Lnx)$
$f''_2(x) = a(x) - b(x)$

Etude de a(x) :
$a'(x) = 4x(1 + 2Lnx)^2 + 8x(1 + 2Lnx) = 4x(1 + 2Lnx)(3 + 2Lnx)$

$a'(x) = 0$ pour $x = e^{-1/2} \approx 0,606$ et $x = e^{-3/2} \approx 0,223$
Quand $x \to 0$: $a(x) \to 0$ et en outre, $(a(x) - a(0))/x = 2x(1 + 2Lnx)^2 \to 0$

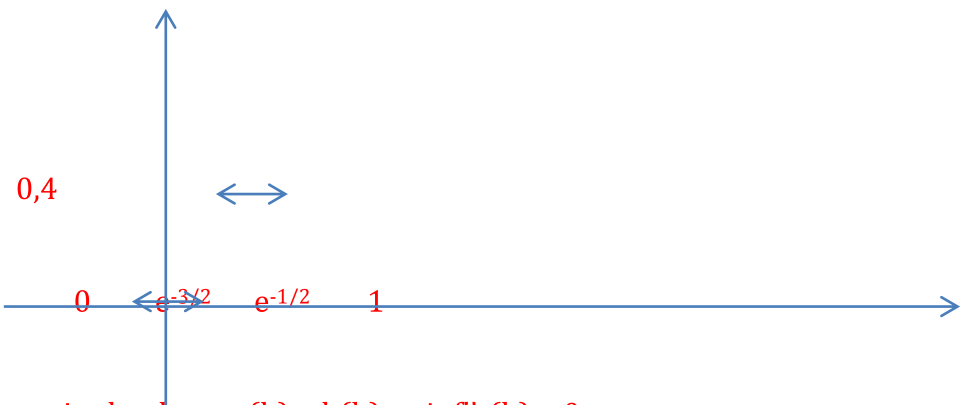
D'où les variations de a(x) :

x	0		$e^{-3/2}$		$e^{-1/2}$		$+\infty$
a'		+	0	-	0	+	
a	0	↗	M_1	↘	m_1	↗	$+\infty$

$M_1 = 2e^{-3}(1 + 2Ln\, e^{-3/2})^2 = 8/e^3 \approx 0,4 > 0$
$m_1 = 0 \Rightarrow a(x)$ est strictement > 0

Etude de b(x) :
$b(x) = 0$ en $x = e^{-3/2}$
$b'(x) = -2/x < 0$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
b'		-		-	
b	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$



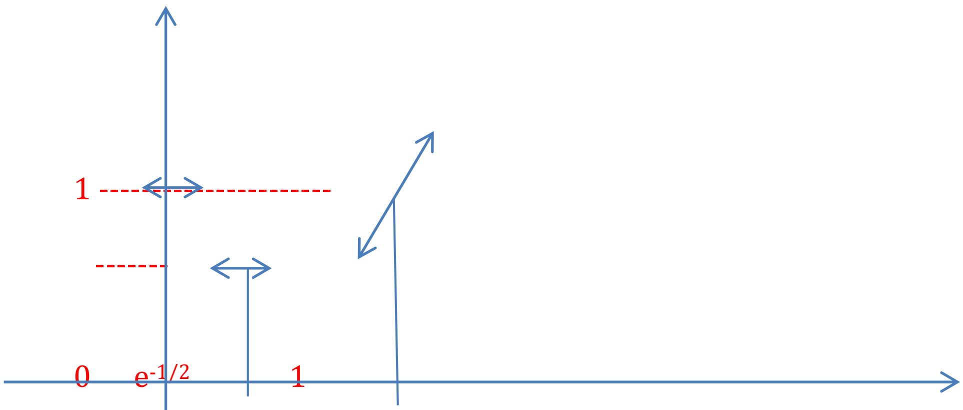
Il existe donc un point h tel que $a(h) = b(h)$, soit $f''_2(h) = 0$,
h étant compris entre 0 et $e^{-3/2}$.
Position de h :
Le calcul montre que $f''_2(0,15) < 0$ et $f''_2(0,2) > 0$
$0,15 < h < 0,2$

On en déduit que pour $x < h$, $b > a$ et $f''_2 < 0$; et $f''_2 > 0$ pour $x > h$.

x	0		h		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f''_2		$-$	0	$+$		$+$	
f'_2			$-$		0	$+$	
f_2	1	$\searrow$			m_2	$\nearrow$	$+\infty$

$m_2 = f_2(e^{-1/2}) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$

B3) Donner la forme du graphe C_2.
Etudier l'intersection de C_1 et C_2 et en déduire les positions respectives de f_1 et f_2.



Intersection de C_1 et C_2

Soit $w = (x^2)^{(x^2)}/x^x$

$\text{Ln}w = 2x^2\text{Ln}x - x\text{Ln}x = x\text{Ln}x(2x - 1)$

$w = 1 \Leftrightarrow \text{Ln}w = 0$ si $x = 1$ ou $x = 1/2$.

x	0		$1/2$		1		$+\infty$
$\text{Ln}w$		$+$	0	$-$	0	$+$	
w		> 1		< 1		> 1	
		$f_2 > f_1$		$f_2 < f_1$		$f_2 > f_1$	

Partie C

On considère dans cette partie le cas général $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, les cas particuliers $p = q = 1$ et $p = q = 2$ ayant fait l'objet des parties A et B.

C1) Donner l'expression de $f'_{p,q}$.
Etudier les éventuelles racines de l'équation $f'_{p,q}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{p,q}$.

$\text{Ln}f_{p,q}(x) = px^q\text{Ln}x$

$f'_{p,q}(x)/ f_{p,q}(x) = px^{q-1}(1 + q\text{Ln}x)$

$f'_{p,q}(x) = p.f_{p,q}(x).x^{q-1}(1 + q\text{Ln}x)$

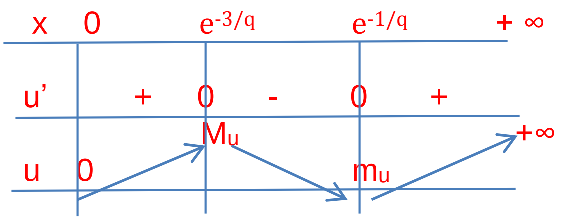
La dérivée est nulle pour 1 + qLnx = 0 soit $x = e^{-1/q}$, négative avant, positive après.

C2) Donner l'expression de $f''_{p,q}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $f_{p,q}$.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_{p,q}(x)$ une expression de la forme u(x) – v(x), où u et v sont deux fonctions à expliciter.

$f''_{p,q}(x) = p.f_{p,q}(x).x^{q-2}[px^q(1 + qLnx)^2 + (q-1)(1+qLnx) + q]$

Puisque $p.f_{p,q}(x).x^{q-2} > 0$, $f''_{p,q}(x)$ a le signe de $[px^q(1 + qLnx)^2 + (q-1)(1+qLnx) + q]$.
Posons :
$u(x) = px^q(1 + qLnx)^2$
$v(x) = -(q-1)(1+qLnx) - q$

Etude de u
Lim u = 0 quand x tend vers 0.
Dérivée :
$u'(x) = pqx^{q-1}(1 + qLnx)(3 + qLnx)$
$u'(x) = 0$ en $e^{-3/q}$ et $e^{-1/q}$ (on remarque que $e^{-1/q}$ est toujours < 1)



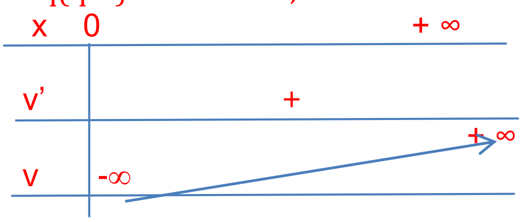
$m_u = 0$, donc $u \geq 0$ pour tout x > 0, donc $M_u > 0$.
$M_u = 4p/e^3$
Quand $x \to 0$, u'(x) tend vers ∞ pour q<1 et tend vers 0 pour q>1.

Etude de v
$v(x) = -(q-1)(1+qLnx) - q$
$v(x) = 0$ pour $x = e^{(2q-1)/q(1-q)}$

$v'(x) = -q(q-1)/x$

Le signe de v' dépend de q.

1^{er} cas : q<1
Alors q(q-1) < 0 et v' > 0, v est strictement croissante



On calcule $v(e^{-1/q}) = -q$ et $v(e^{-3/q}) = q - 2$ (or q – 2 < 0).

La courbe représentant la fonction v coupe l'axe des abscisses à droite de $e^{-1/q}$, zéro de u, et ne coupe donc jamais la courbe représentant u.
$f''_{p,q}$ n'est donc jamais nulle, il n'y a pas de point d'inflexion au graphe de $f_{p,q}$; en outre, $f''_{p,q}(x) = u - v > 0$, $C_{p,q}$.est convexe.

2ème cas : q>1
Alors q(q-1) > 0 et v' < 0, v est strictement décroissante

x	0		$+\infty$
v'		$-$	
v	$+\infty$		$-\infty$

On a toujours $v(e^{-1/q}) = -q\ (< 0)$ et $v(e^{-3/q}) = q - 2$.
En $e^{-1/q}$, v est négative.
En $e^{-3/q}$, v est négative si $q < 2$ et positive si $q > 2$.
Donc :

a) si $1 < q < 2$, le graphe de v coupe celui de u à gauche de $e^{-3/q}$; il existe donc un point d'inflexion dont l'abscisse z est comprise entre 0 et $e^{-3/q}$.
b) si $q > 2$, le graphe de v coupe celui de u en un point d'abscisse z comprise entre $e^{-3/q}$ et $e^{-1/q}$.

Des variations de u et v, pour $q > 1$, on déduit qu'il existe une et une seule valeur z telle que $u(z) = v(z)$ et donc un et un seul point d'inflexion pour $f_{p,q}$.

La forme des graphes de u et v montre que pour $q>1$, $v > u$ pour $x < z$, puis $v < u$ pour $x > z$.

C3) En déduire les variations de $f_{p,q}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale du graphe $C_{p,q}$.

x	0		$e^{-1/q}$		$+\infty$
$f'_{p,q}$		$-$	0	$+$	
$f_{p,q}$	1		m_3		$+\infty$

Valeur du minimum : $m_3 = f_{p,q}(e^{-1/q}) = (e^{-p/q})^{1/e} = e^{-p/eq}$
Pente en $x = 0$: $(f_{p,q}(x) - 1)/x \approx px^{q-1}Lnx \to 0$ si $q > 1$ et $\to -\infty$ si $q \leq 1$
D'où :
$q > 1$: $f'_{p,q}(x) \to 0$
$q \leq 1$: $f'_{p,q}(x) \to -\infty$

Pente en $x = 1$: $f_{p,q}(1) = 1$; $f'_{p,q}(1) = p$

C4) Existe-t-il un point fixe F au faisceau de courbes $\{C_{p,q}\}$. Si oui, donner ses coordonnées, et calculer l'équation de la tangente en F à $C_{p,q}$.

On remarque que pour tous p et q, pour $x = 1$, $f_{p,q}(1) = 1$; $F = (1,1)$.
La pente en $x = 1$ est p.
L'équation de la tangente en F est $y = px + (1 - p)$

C5) Etudier l'intersection de C_1 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 1$.

$(x^p)^{(x^q)} = x^x$
$xLnx = px^qLnx \Leftrightarrow xLnx(px^{q-1} - 1) = 0$
Solutions : $x = 1$ ou $x = (1/p)^{1/(q-1)}$

C6) Etudier l'intersection de C_2 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 2$.

$(x^p)^{(x^q)} = (x^2)^{(x^2)} \Leftrightarrow px^q Lnx = 2x^2 Lnx \Leftrightarrow x^2 Lnx(2 - px^{q-2})$
Solutions : x = 1 ou $x = (2/p)^{1/(q-2)}$

C7) Etudier l'intersection de $C_{p,q}$ avec la première bissectrice d'équation y = x.

$(x^p)^{(x^q)} = x$
$px^q Lnx = Lnx \Leftrightarrow Lnx(px^q = 1)$

Solutions : x = 1 ou $x = (1/p)^{1/q}$

Partie D
Dans cette partie, on suppose que p et q sont entiers positifs ou nuls.
Pour tout x réel strictement positif, on définit la fonction $g_{p,q}$ par :
$x \to g_{p,q}(x) = x^p(Lnx)^q$

Pour tout réel x > 0, on définit l'intégrale $J_{p,q}(x) = \int_0^x g_{p,q}(t)dt$.

D1) Calculer $J_{p,0}(x)$
$J_{p,0}(x) = \int_0^x g_{p,0}(t)dt = \int_0^x t^p dt = x^{p+1}/(p+1)$

D2) Montrer que, pour q ≥ 1, $J_{p,q}(x)$ peut se mettre sous la forme :
$J_{p,q}(x) = h(x ; p, q) + k(p, q)\, J_{p,q-1}(x)$
où h dépend de x, p et q, et k dépend uniquement de p et q.

$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - q\int_0^x t^{p+1}(Lnt)^{q-1}/t(p+1)dt$

$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(x)$

$h(x, p, q) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1)$
$k(p, q) = - q/(p+1)$

D3) Dans cette question, on prend x = 1, et on notera $J_{p,q}$ pour $J_{p,q}(1)$.

D3 a) Calculer explicitement J(p, 0) et J(0, q)

D3 b) Calculer $J_{p,q}$ en fonction des entiers p et q

D3 a)
$J_{p,0} = 1/(p+1)$
$J_{0,q} = \int_0^1 (Lnt)^q dt = 0 - \int_0^1 q(Lnt)^{q-1}dt = - q\, J_{0,q-1}$

$J_{0,q} = (-1)^{q-1} q!\, J_{0,1}$

$J_{0,1} = \int_0^1 (Lnt)^1 dt = -1$
$J_{0,q} = (-1)^q.(q!)$

D3 b)
$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(x) \Rightarrow J_{p,q}(1) = - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(1)$
$J_{p,q} = - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}$
$J_{p,q-1} = - (q-1)/(p+1))\, J_{p,q-2}$
.
.
.
$J_{p,1} = - 1/(p+1))\, J_{p,0}$

$\Rightarrow J_{p,q} = (-1)^q \, (q! \,/\, (p+1))^q$

D4) On pose $w(x) = xLnx$.

D4a) Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de x^x de la forme $P(x) = a + bw(x) + cw^2(x)$, où a, b et c sont des constantes dont on donnera les valeurs.

$x^x = e^{xLnx} = e^w \approx 1 + w + w^2/2$ ($w \to 0$ quand $x \to 0$)

$a = 1, b = 1, c = 1/2$

D4b) On veut calculer $F(x) = \int_0^x t^t dt$, pour x proche de 0.

On décide d'approximer $F(x) = \int_0^x t^t dt$ par l'intégrale $F^*(x) = \int_0^x P(t)dt$.

Donner l'expression de $F^*(x)$.

$\int_0^x t^t dt \approx \int_0^x (1 + tLnt + \frac{(tLnt)^2}{2})dt = x + (x^2Lnx)/2 - x^2/4 + x^3(Lnx)^2/6 - x^3Lnx/9 + x^3/27$

$\int_0^x t^t dt \approx x - x^2/4 + x^3/27 + (x^2Lnx)/2 - x^3Lnx/9 + x^3(Lnx)^2/6 = F^*(x)$

D5) En s'inspirant de la démarche de la question D4, avec la fonction $m(x) = px^q(Lnx)$, proposer un développement limité d'ordre 2 de $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, et en déduire une approximation de l'intégrale $K_{p,q}(x) = \int_0^x (t^p)^{(t^q)}(t)dt$.

$(x^p)^{(x^q)} = e^{m(x)} \approx 1 + m(x) + m^2(x)/2 = 1 + px^q(Lnx) + p^2x^{2q}(Lnx)^2/2$

$K_{p,q}(x) \approx x + p.J_{q,1}(x) + p^2/2.\, J_{2q,2}(x)$

$J_{q,1}(x) = \int_0^x t^q Lnt\, dt = x^{q+1}Lnx/(q+1) - x^{q+1}/(q+1)^2$

$J_{2q,2}(x) = \int_0^x t^{2q}(Lnt)^2\, dt = x^{q+1}(Lnx)^2/(2q+1) - 2x^{2q+1}Lnx/(q+1)^2 + 2x^{2q+1}/(2q+1)^3$

$K_{p,q}(x) \approx x + p.\,[x^{q+1}Lnx/(q+1) - x^{q+1}/(q+1)^2 + p^2/2.\,[x^{2q+1}(Lnx)^2/(2q+1) - 2x^{2q+1}Lnx/(q+1)^2 + 2x^{2q+1}/(2q+1)^3]$

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, couvrant les thèmes suivant s : polynômes, matrices, probabilités, nombres complexes. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : polynômes

On se place dans l'espace des polynômes définis sur R, et donc à coefficients réels.

1) On considère les polynômes Q_1 et Q_2 définis par :
$Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1$
$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1$
Factoriser Q_1 et Q_2.

2) Soit le polynôme P_n défini sur R par :
$P_n(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$

2a) Calculer P_1 et factoriser P_2
2b) Donner l'expression générale de P_n comme produit de polynômes irréductibles (on pourra raisonner par récurrence).

Corrigé :
1) $Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1 = Q_1(x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^4 - x^2 + 1)\, Q_1(x)$
On a factorisé $Q_1(x)$.
On remarque que $(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$
$Q_2(x) = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

2) $P_1(x) = 1 + x$ et $P_2(x) = 1 + x + x(x+1)/2! = (x+1)(x+2)/2!$

Supposons que $P_n(x)$ s'écrit sous la forme $\frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{n!}$
Par récurrence : l'écriture est vraie pour n = 1
Supposons-la vraie au rang n.
$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{(n+1)!}$

$P_{n+1}(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{n!} + \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{(n+1)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{(n+1)!}(n + 1 + x) = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)}{(n+1)!}$

L'expression est donc vraie au rang n+1, donc vérifiée.

Problème 2 : matrices

A - On se place dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.

On note I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

A1) Mettre A sous la forme aI + bJ, a et b étant deux entiers à déterminer

a = 1, b = 4 ; A = I + 4J

A2) Calculer A^n, pour tout entier $n \geq 2$.

On remarque que $J^2 = 0$, matrice nulle

Donc en développant $(I + 4J)^n$, tous les termes contenant J^k pour $k \geq 2$ sont nuls, et on obtient : $(I + 4J)^n = I + 4nJ$

B - On se place dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère la matrice B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

Calculer B^n, pour tout entier $n \geq 2$.

Par le calcul direct, on a : $B^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}$

Le calcul direct de B^3 donne 0, matrice nulle.

On en déduit que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$.

C - On considère toujours M_3.

Soit la matrice C = $\begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$

où les réels a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

I_3 désigne la matrice identité de M_3.

C1) Mettre C sous la forme $C = D - I_3$, D étant une matrice de M_3 à déterminer.

De manière évidente, on a C = D – I avec D = $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

C2) Calculer D^2 et comparer D et D^2.

Soit u le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

En notant par u^t le transposé de u, on voit immédiatement que $D = u.u^t$

D'où $D^2 = u.\, u^t.\, u.u^t = u.(\, u^t.\, u).u^t = u.\, u^t = D$ puisque $.u^t.\, u = a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

L'application linéaire associée à D est donc une projection orthogonale.

C3) En déduire C^n, pour tout entier $n \geq 2$.

On déduit que $C^2 = (D - I)^2 = D^2 - 2D + I = I - D = -C$
Donc pour tout entier $n \geq 2$, $C^n = (-1)^{n+1}C$.

Problème 3 : probabilités
Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On procède à n ($n \geq 2$) tirages successifs, avec remise à chaque tirage.
On définit les quatre événements suivants :
A = {il y a des boules des deux couleurs}
B = {il y a au plus une boule bleue}
C = {toutes les boules tirées ont la même couleur}
D = {il y a une seule boule bleue}

1) Calculer la probabilité P(C)
$P(C) = 2.(1/2)^n = 1/2^{n-1}$
2) Calculer la probabilité P(D)
$P(D) = n/2^n$

3) En déduire les probabilités des événements $A \cap B$, A et B.
$A \cap B$ = 1 bleue, n-1 rouges $\Rightarrow P(A \cap B) = P(D) = n/2^n$
$P(A) = 1 - 1/2^{n-1}$
$P(B) = P(0 \text{ bleue}) + P(1 \text{ bleue}) = 1/2^n + n/2^n = (n+1)/2^n$

4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a la relation suivante :

$$2^{n-1} = n + 1$$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
C'est-à-dire $n/2^n = (1 - 1/2^{n-1}).\ (n+1)/2^n$
Ce qui conduit à : $2^{n-1} = n+1$

5) Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 2^{n-1} - n - 1$
Montrer que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

$u_{n+1} = 2^n - n - 2 = 2.2^{n-1} - n - 2 = 2(u_n + n + 1) - n - 2$
$u_{n+1} - u_n = u_n + n$
Pour $n = 2$, $u_2 = -1$
Pour $n = 3$, $u_3 = 0$
Pour $n = 4$, $u_4 = 3$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour $n \geq 2$. La suite est donc croissante strictement.

6) Pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants ?

Le calcul précédent montre que n = 3.

Problème 4 : nombres complexes
Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal usuel.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives – 1, 1 et i.

A – Soit M un point de P d'affixe non nulle z(M). N désigne le point de P d'affixe $\frac{1}{z(M)}$.
A1) Démonter la relation :

$$AN = \frac{AM}{OM}$$

On a $z(N) – z(A) = 1/z(M) + 1 = (1 + z(M))/z(M) = (z(M) – (-1))/z(M)$
En passant aux modules, on a de façon évidente $AN = AM/OM$

A2) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
$|z|$ désignant le module du complexe z, calculer $|z(M) + 1|^2$
En déduire la valeur de AN.

L'équation du cercle est $x^2 + y^2 - 2x – 1 = 0$
Posons $z(M) = x + iy$
$z(M) + 1 = x + 1 + iy$
$|z(M) + 1|^2 = (AM)^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2|z(M)|^2 = 2\ OM^2$
Soit encore $AM/OM = AN = \sqrt{2}$.

B – A tout point M du plan P distinct de C on associe le point M', d'affixe z(M') défini par l'application $h : M \rightarrow M'$ telle que :

$$z(M') = \frac{z^2(M)}{i - z(M)}$$

B1) Déterminer les point fixes de la transformation h.
On remarque que h est définie pour tout point M sauf C.
$z^2 = z(i – z) \Leftrightarrow z(2z – i) = 0$, c'est-à-dire $z = 0$ ou $z = i/2$

B2) En écrivant $z(M) = x + iy$ et $z(M') = x' + iy'$, donner les expressions de x' et y'.
Quel est l'ensemble U des points M de P dont l'image par h est un nombre imaginaire pur ?

$x' = -x(x^2 + y^2 - 2y)/[x^2 + (y-1)^2]$
$y' = (-y(x^2 + y^2 - y) – x^2)/[x^2 + (y-1)^2]$
L'ensemble U est tel que $x' = 0$, soit $x = 0$ (axe des ordonnées sauf le point C) ou $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (cercle de centre (0, 1) et de rayon 1.

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Soit un entier n strictement positif.
On note $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ les k diviseurs de n, indicés en sens strictement croissant, avec $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$.
1 – On donne n = 6.
Quelles sont les valeurs des 4 diviseurs (d_1, d_2, d_3, d_4) de 6.
Montrer que $(\prod_{j=1}^{4} d_j)^2 = 6^4$

Les 4 diviseurs de 6 sont 1, 2, 3, 6.
$6^4 = 1296$
1 x 2 x 3 x 6 = 36
$36^2 = 1296$

2 – On se place dans le cas général.
Démontrer la relation suivante :

$$(\prod_{j=1}^{k} d_j)^2 = n^k$$

Soit $n = d_j.q_j$ pour j = 1 à k, q_j étant la division de n par d_j.
On remarque que pour j = 1, $d_1 = 1$ et donc $q_1 = n = d_k$
De même, pour j = k, $d_k = n$ et donc $q_k = 1 = d_1$
Plus généralement, si d_j divise n, alors q_j divise n ; les q_j sont donc des d_j classés dans l'ordre inverse décroissant.
Donc $(\prod_{j=1}^{k} d_j) = (\prod_{j=1}^{k} q_j)$

Puisque $n = d_j.q_j$, $n^k = (\prod_{j=1}^{k} d_j q_j) = (\prod_{j=1}^{k} d_j)(\prod_{j=1}^{k} q_j) = (\prod_{j=1}^{k} d_j)^2$

Exercice 2

Rappel : soient 2 événements A et B, de probabilités P(A) et P(B) non nulles.
On rappelle que la probabilité de A conditionnellement à B, notée P(A/B) est donnée par :

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B / A).P(A)/P(B)$$

Dans un pays imaginaire, on sait a priori que 3 % des automobilistes du pays conduisent en état d'ébriété. Le gouvernement lance une campagne de lutte contre l'alcool au volant.
A cet effet, la gendarmerie est équipée d'un alcootest dont les performances sont les suivantes :

- Dans 2 % des cas, l'alcootest est positif à tort (la personne contrôlée n'est pas en état d'ébriété)
- Dans 96 % des cas, l'alcootest est positif à juste titre (la personne contrôlée est effectivement en état d'ébriété)

1 – Calculer la probabilité que l'alcootest soit positif.

On note :
E = être en état d'ébriété
S = ne pas être en état d'ébriété = être sobre
+ = alcootest positif
N = alcootest négatif

D'après les données de l'énoncé :
P(E) = 3 %
P(S) = 97 %
P(+/S) = 2 %
P(+/E) = 96 %

Pour connaître P(+), on écrit P(+) = P(+/S).P(S) + P(+/E).P(E) = 0,02 x 0,97 + 0,96 x 0,03 = 0,0482

2 – Calculer la probabilité qu'un conducteur ne soit pas en état d'ébriété alors que son alcootest a été positif.
Quelle conclusion en tirez-vous ?
On cherche à évaluer P(S/+).
P(S/+) = P(+/S).P(S) / P(+) = 0,02 x 0,97 / P(+) = 0,0194 / P(+)

En utilisant le résultat de la question 1, P(+) = 0,0482, la probabilité qu'un conducteur soit sobre alors que le contrôle par alcootest est positif est donc de 0,0194 / 0,0482 = 40,2 %, ce qui est très élevé.

Donc :

a) Les performances – en terme de fiabilité – de l'alcootest sont très insuffisantes et doivent être largement améliorées
b) Il est nécessaire de compléter l'alcootest par d'autres types de contrôle (par exemple une prise de sang)

Problème

Soient n et p deux nombres entiers naturels strictement positifs.
On considère la famille G(n, p), dépendant des paramètres n et p, des fonctions $g_{n,p}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :
$x \longrightarrow g_{n,p}(x) = (x^n)e^{(-x^p)}$

Partie I

Dans cette première partie, on prend n = 1 et p = 2.
Pour simplifier, on notera par g la fonction $g_{1,2}$: $g_{1,2}(x) = x\, e^{-x^2}$.

I-1. Calculer g' et g'', dérivées première et seconde de g, et étudier leur signe.

Un calcul direct donne :
$g'(x) = (1 - 2x^2)\, e^{-x^2}$

et $g''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$

Dérivée première : comme x > 0, elle s'annule en $1/\sqrt{2}$ ~ 0,707, est positive avant, négative après.
Dérivée seconde : elle s'annule en $\sqrt{3/2}$ ~ 1,22, négative avant et positive après.

I-2. Etudier très précisément les variations de g (limites, asymptotes, points caractéristiques et pentes en ces points, convexité, …). Etudier la position de G, graphe de g, par rapport à la première bissectrice d'équation y = x. Donner le tableau de variation de g.

Limites :
Quand $x \to 0$, $g \to 0$.
Pente en 0 : lim $(g(x) - 0)/x = 1$
Tangente en 0 : y = x
Quand $x \to +\infty$, $g \to 0$.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale (y = 0)

Points caractéristiques :
Le maximum est atteint en $1/\sqrt{2}$ et vaut $M = 1/\sqrt{2e}$ ~ 0,43

Point d'inflexion en $\sqrt{3/2}$; $g(\sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2}\,.\,e^{-3/2}$ ~ 0,27
Tangente au point d'inflexion : $(y - \sqrt{3/2}\,.\,e^{-3/2}) = (x - \sqrt{3/2})\,(-2\,e^{-3/2})$
$y = -2\,x\,e^{-3/2} + 3\sqrt{3/2}\,.\,e^{-3/2}$

Soit E l'écart entre la bissectrice et G : $E = x - x\,e^{-x^2} = x(1 - e^{-x^2}) > 0$.
G est donc toujours en dessous de la bissectrice (sauf en 0).
<u>Tableau de variations</u>

x	0	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3/2}$	$+\infty$
g'	+	0	-	
g	0 ↗	0,43	↘	0

La fonction est concave sur] 0, $(3/2)^{1/2}$[et convexe sur] $(3/2)^{1/2}$, $+\infty$[

I-3. Donner la forme du graphe G de g.

Croissant de 0 à $1/\sqrt{2}$, avec tangente y = x en 0, décroissant ensuite avec inflexion en $\sqrt{3/2}$.
y = 0 est asymptote horizontale.

I-4. On définit l'intégrale $L_1 = \int_0^{+\infty} g(x)dx$
Calculer L_1.

$L_1 = \int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$
On pose $u = x^2$; u varie de 0 à $+\infty$; $du = 2xdx$

$L_1 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du/2 = [-e^{-u}]_0^{\infty}/2 = 1/2$

Partie II
Dans cette deuxième partie, on prend n = 3 et p = 2.
On notera par g_3 la fonction $g_{3,2}$: $g_{3,2}(x) = x^3 e^{-x^2}$.

II-1. Etudier très précisément les variations de g_3 : limites, asymptotes, étude des dérivées première et seconde, points d'inflexion, points caractéristiques, convexité, … Dresser le tableau de variation de g_3.

En s'inspirant de la partie I.

$g_3'(x) = x^2(3 - 2x^2)\, e^{-x^2}$

Elle s'annule en x = 0 et en $x = \sqrt{3/2}$; en x = 0, la valeur de g_3 est 0, et la pente est évidemment 0 ; en $x = \sqrt{3/2}$, la valeur de g_3 est voisine de 0,41.

$g_3''(x) = 2x(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2}$

Posons $v = x^2$ et résolvons l'équation $2v^2 - 7v + 3 = 0$

Son discriminant est égal à 25, donc deux racines admissibles pour v, car > 0 : 1/2 et 3.

Donc deux points d'inflexion : $x_1 = 1/\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{3}$.

$g_3(1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2})^3\, e^{-1/2}$, voisin de 0,21

Pente en ce premier point d'inflexion : $e^{-1/2}$, voisin de 0,61

$g_3(\sqrt{3}) = (3\sqrt{3})\, e^{-3}$, voisin de 0,26

Pente en ce deuxième point d'inflexion : $-9\, e^{-3}$, voisin de – 0,45

Limites :

Quand $x \to 0$, $g_3 \to 0$.

Quand $x \to +\infty$, $g \to 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale (y = 0)

II-2. Donner la forme du graphe G_3 de g.

Croissant de 0 à $\sqrt{3/2}$, avec tangente horizontale en 0, décroissant ensuite ; deux points d'inflexion en $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Quand x est grand, y = 0 est asymptote horizontale.

II-3. Etudier l'intersection de G et G_3.

$x\, e^{-x^2} - x^3 e^{-x^2}$ s'annule pour $x - x^3 = x(1 - x^2) = 0$, soit en x = 0 et x = 1.

Pour x entre 0 et 1, G est au-dessus de G_3 ; pour x > 1, G passe au-dessous de G_3.

II-4. On définit l'intégrale $L_3 = \int_0^{+\infty} g_3(x)dx$

Calculer L_3.

$L_3 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

On pose $u = x^2$; u varie de 0 à $+\infty$; $du = 2xdx$

$L_3 = \int_0^{+\infty} u e^{-u} du/2$

En intégrant par parties, on a :

$2L_3 = [-ue^{-u}]_0^{\infty} + [-e^{-u}]_0^{\infty} = 1$

D'où $L_3 = 1/2$

Partie III

Dans cette troisième partie, on prend p = 2, et n est un entier quelconque strictement positif.

On notera par g_n la fonction $g_{n,2}$: $g_{n,2}(x) = x^n e^{-x^2}$.

III-1. Montrer que g_n passe par un maximum pour un point d'abscisse $\alpha(n)$ que l'on déterminera.

La dérivée est $g'_{n,2}(x) = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$,
Elle s'annule pour x = 0 et pour $x^2 = n/2$, d'où la valeur de $\alpha(n) = \sqrt{n/2}$

III-2. On pose $u(n) = g_n(\alpha(n))$.
Calculer u(n).
Montrer que la suite {u(n)}, $n \geq 3$, est croissante.
$u(n) = g_n(\alpha(n)) = (n/2)^{n/2}e^{-n/2} = (n/2e)^{n/2}$
On remarque que u(n) peut s'écrire sous la forme exp[(n/2)(Ln(n/2) – 1)].
Considérons la fonction h définie sur x > 0 par h(x) = exp[(x/2)(Ln(x/2) – 1)].
Sa dérivée est h'(x) = h(x).[Ln(x/2)/2], s'annule en x = 2.
Donc h est décroissante entre 0 et 2, puis croissante après 2.

Comme u(n) n'est autre que la restriction de h aux entiers naturels, on en déduit que u(n) est croissante pour n > 2, c'est-à-dire pour $n \geq 3$.

Exemples de calculs numériques :
$u(1) = (1/2e)^{1/2} = 0{,}43$
$u(2) = 1/e = 0{,}37$
$u(3) = (3/2e)^{3/2} = 0{,}41$

III-3. On définit l'intégrale $L(n) = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$.
Trouver une relation de récurrence entre L(n) et L(n-2).

$L(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$
Intégrons par parties : $L(n) = [x^{n+1}e^{-x^2}/(n+1)]^{\infty}_0 + (2/(n+1)) \int_0^{+\infty} x^{n+2}e^{-x^2}dx$

D'où : L(n) = (2/(n+1))L(n+2), soit L(n+2) = (n+1)L(n) / 2

Ou encore : L(n) = (n-1) L(n-2) /2

Partie IV
On considère dans cette partie le cas général $g_{n,p}(x) = x^n e^{-x^p}$.

IV-1. Donner l'expression de $g'_{n,p}$, dérivée première de $g_{n,p}$.
Etudier les racines éventuelles de l'équation $g'_{n,p}(x) = 0$ et en déduire le signe de $g'_{n,p}$.

Le calcul direct permet d'établir simplement que $g'_{n,p}(x) = x^{n-1}(n - px^p)e^{-x^p}$.
La dérivée s'annule pour $n - px^p = 0$, soit $x = (n/p)^{1/p}$.
La fonction $g_{n,p}$ est donc croissante de 0 à $(n/p)^{1/p}$, décroissante ensuite.

IV-2. Donner l'expression de $g''_{n,p}$, dérivée seconde de $g_{n,p}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $g_{n,p}$.

Par calcul direct, on obtient :
$g''_{n,p}(x) = x^{n-2}A(n, p, x)e^{-x^p}$.

où $A(n, p, x) = p^2x^{2p} - x^p(p^2 + 2np - p) + n(n-1)$

En posant $w = x^p$, on a à résoudre une équation du second degré en w :
$p^2w^2 - w(p^2 + 2np - p) + n(n-1) = 0$

Son discriminant Δ est > 0, égal à $p^2((p-1)^2 + 4np)$.

Il existe donc des racines :
$w_1 = [(p^2 + 2np - p) - \Delta^{1/2}]/2p^2$
$w_2 = [(p^2 + 2np - p) + \Delta^{1/2}]/2p^2$

w_2 est évidemment positive.
w_1 l'est également car un calcul simple permet d'établir que $[(p^2 + 2np - p)]^2$ est égal à $\Delta + 4np^2(n-1)$.

Les racines p-ièmes de w_1 et w_2 sont donc des points d'inflexion.
Remarque : pour n = 1 et p = 2, on retrouve les résultats de la partie I.

IV-3. En déduire les variations de $g_{n,p}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale de son graphe $G_{n,p}$.

La fonction $g_{n,p}$ est croissante de 0 jusqu'à $(n/p)^{1/p}$, décroissante ensuite ; elle prend la valeur 0 en x = 0 avec une tangente horizontale, et admet y = 0 comme asymptote horizontale, deux points d'inflexion.

IV-4. Montrer que toutes les courbes $\{G_{n,p}\}$ passent par un point fixe A ; donner les coordonnées de A ainsi que l'équation de la tangente en A à $G_{p,q}$.

Le point fixe A est tel que x = 1, et $g_{n,p}(1) = 1/e$.
La pente en A est $g'_{n,p}(1) = (n - p)/e$
L'équation de la tangente en A est :
$y - 1/e = (x - 1)(n - p)/e$
$y = (x - 1)(n - p)/e + 1/e$

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : diagonalisation
M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable dans R, ensemble des nombres réels.

On sait que toute matrice symétrique est diagonalisable.
Montrons-le dans ce cas : le polynôme caractéristique est $P(x) = (a - x)(c - x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$
Son discriminant est $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$
$\Delta = 0$ si $a = c$ et $b = 0$, c'est-à-dire si A est déjà diagonale.
Sinon, $\Delta > 0$, et il y a deux racines distinctes réelles x_1 et x_2, donc A est toujours diagonalisable.

Problème 2 : puissance de matrice
M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D.

Le polynôme caractéristique est $P(x) = (1 - x)^2(2 - x)$
1 est racine double, 2 est simple.

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.
En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

Sous-espace E(1) associé à la vp 1 :
$x = x$
$y = y$
$x - y + z = 0$
$\Rightarrow$ E(1) est un plan dont les vecteurs (1, 1, 0) et (0, 1, 1) forment une base.

Sous-espace E(2) associé à la vp 2 :
$x = 2x$
$y = 2y$
$x - y + 2z = 2z$
$\Rightarrow$ E(2) est une droite dont le vecteur (0, 0, 1) est une base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n.

On sait que $P^{-1}AP = D$, $P^{-1}A^nP = D^n$, et donc $A^n = PD^nP^{-1}$
On calcule aisément P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Par le calcul : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2.

On définit la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec des valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $v_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a $v_{n+1} = A.v_n$, $n \geq 1$; et donc $v_{n+1} = A^n.v_1$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique P(x) de A. Diagonaliser la matrice A.

$P(x) = x^2 - x/2 - 1/2$
Deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -1/2$

$\text{Diag}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par P(x), $n \geq 2$.
Montrer que $R_n(x) = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n.

On a $x^n = P(x).Q_n(x) + R_n(x)$, Q_n étant le polynôme quotient
Comme P(x) est de degré 2, $R_n(x)$ est de degré 1 : $R_n(x) = a_n x + b_n$

$(x_1)^n = 1 = a_n + b_n$
$(x_2)^n = (-1/2)^n = -a_n/2 + b_n$

On en déduit :
$a_n = 2[1 – (-1/2)^n]/3 = 2/3 – 2(-1/2)^n)/3$
$b_n = 1/3 + 2(-1/2)^n)/3$

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_nA + b_nI_2$.

Par récurrence :
$A^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
On trouve facilement $a_2 = ½$ et $b_2 = ½$
Vrai pour $n = 2$
Supposons la relation vraie au rang n.
$A^n = a_nA + b_nI_2 \Rightarrow A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA = a_n(A/2 + I_2/2) + b_nA = A(a_n/2 + b_n) + (a_n/2)I_2$

Reste à vérifier que $a_{n+1} = (a_n/2 + b_n)$ et $b_{n+1} = a_n/2$.

- $a_n/2 = 1/3 – 1(-1/2)^n)/3 = 1/3 + 2(-1/2)^{n+1}/3 = b_{n+1}$
- $(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n)/3 = 2/3 - 2(-1/2)^{n+1})/3 = a_{n+1}$

La relation est donc vérifiée pour tout $n \geq 2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite A^* à déterminer.

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + b_n & \frac{a_n}{2} \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$

$(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n)/3$

Quand $n \to +\infty$:
$a_n/2 \to 1/3$
$b_n \to 1/3$
$(a_n/2 + b_n) \to 2/3$

$A^* = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

4c – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

D’après la question 1, $v_{n+1} = A^n.v_1$; d’où $u_{n+1} = a_n/2 + b_n = 2/3 + (-1/2)^n)/3$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2/3$

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l’ensemble des matrices carrées d’ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.
Pour toute matrice A de M_n, de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j, j = 1 à n, la $j^{ième}$ colonne de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i \leq n$.
On s’intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout i = 1 à n, l’ensemble (H) d’inégalités :

$$\text{(H)} \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante.*

1 – Soit A une matrice de M_2, vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; d'après (H), on a : a > b et d > c.
Le déterminant de A est Dét(A) = ad - bc ; on a donc Dét(A) > 0.
A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H).
On désigne par B, de coefficients b_{ij}, $1 \le i, j \le n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \ge 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.\, c_1$

$$c_j \to c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

Puisque $a_{11} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{1j}$ et que tous les a_{1j} sont ≥ 0, $a_{11} > 0$

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij}. Que valent les coefficients b_{1j}, pour j = 1 à n ?

On a, pour le cas général : $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.a_{i1}$, pour $j \neq 1$.
Bien sûr, par construction, la première colonne de B est identique à celle de A, et donc $b_{i1} = a_{i1}$ pour tout i = 1 à n, et bien sûr $b_{11} = a_{11}$.
Et on remarque que $b_{1j} = 0$ pour tout $j \ge 2$.

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H* :

$$(H^*) \quad \forall\, i \ge 2,\ b_{ii} > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij}$$

On note que $b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}.a_{i1}$
$\sum_{j=2,j\neq i}^{n} b_{ij} = \sum_{j=2,j\neq i}^{n} (a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.a_{i1}) = \sum_{j=2,j\neq i}^{n} a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2,j\neq i}^{n} a_{1j}$
Comme tous les coefficients sont positifs ou nuls, on a la majoration suivante :
$\sum_{j=2,j\neq i}^{n} b_{ij} < (\sum_{j=2,j\neq i}^{n} a_{ij}) + (\frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2,j\neq i}^{n} a_{1j}) = G + kH$ avec $k = a_{i1}/a_{11}$

De façon évidente, on a : $G = \sum_{j=2,j\neq i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij} - a_{i1} < a_{ii} - a_{i1}$

De même, $H = \sum_{j=2,j\neq i}^{n} a_{1j} = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{1j} - a_{1i}$ qui est $< a_{11} - a_{1i}$
On obtient donc :
$\sum_{j=2,j\neq i}^{n} b_{ij} < a_{ii} - a_{i1} + (a_{11} - a_{1i})\, a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{i1} + a_{i1} - a_{1i}.a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{1i}.a_{i1}/a_{11} = b_{ii}$

Soit $\sum_{j=2,j\neq i}^{n} b_{ij} < b_{ii}$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H. Montrer qu'elle est inversible.

Par récurrence.

- Le résultat est vrai pour n = 2 (question 1)
- Supposons la propriété vérifiée au rang n-1.

En procédant aux changements de colonnes indiqués à la question 2, Dét(A) = a_{11} Dét(B) où la matrice B est celle de la Q2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ a_{12} & & & \\ & & B & \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix}$$

Or B est une matrice carrée d'ordre n-1 qui vérifie les hypothèses H, donc inversible d'après l'hypothèse de récurrence vraie au rang n-1.
Donc A est inversible puisque $a_{11} > 0$ (question 2a).

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème (en trois parties) indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Déterminer au moins un entier naturel x strictement supérieur à 1, tel que le nombre entier $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 3.

Même question, pour que n soit divisible par 7.

Divisibilité par 3 :

$x^2 + x - 2 = 3q$, q entier

$\Delta = 9 + 12q$

$x = [(9 + 12q)^{1/2} - 1]/2$

9 + 12q doit être un carré parfait et x un nombre entier.

Pour q = 1 à 5, échec

q = 6 donne $\Delta = 81 = 9^2$ et x = 4

Divisibilité par 7 :

$x^2 + x - 2 = 7q$, q entier

$\Delta = 9 + 28q$

$x = [(9 + 28q)^{1/2} - 1]/2$

9 + 28q doit être un carré parfait et x un nombre entier.

Pour q = 1 à 3, échec

q = 4 donne $\Delta = 121 = 11^2$ et x = 5

Exercice 2

Déterminer le polynôme P de degré 2, à coefficients entiers naturels, tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = [P(x)]^2$$

On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$
On peut remarquer que $P(0)=1=c$
En développant les deux termes, on trouve :
$a^2 = 1$
$2ab = 6$ ie $ab = 3$
$b^2 + 2ac = 11$
$2bc = 6$ ie $bc = 3$
$c^2 = 1$

On en déduit :
Pour $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$
Et pour $a = -1$, $b = -3$, $c = -1$

$P(x) = x^2 + 3x + 1$ ou $P(x) = -x^2 - 3x - 1$
La deuxième solution n'est pas admissible puisque P doit être car à coefficients entiers naturels).
Donc $P(x) = x^2 + 3x + 1$

Problème
Ln désigne le symbole des logarithmes népériens ; le symbole | | désigne la valeur absolue.
On donne e = 2,718 et 1/e = 0,368.

Partie A

Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par : $x \rightarrow g(x) = x \,\mathrm{Ln}x$.
A1) Etudier précisément les variations de g.

Lim $g(x) = 0$ qd $x \rightarrow 0$
Lim $g(x) = +\infty$ qd x tend vers $+\infty$
Branche parabolique

Pente en 0 : $(g(x) - 0)/(x - 0) = \mathrm{Ln}x \rightarrow -\infty$ qd $x \rightarrow 0$
$g'(x) = 1 + \mathrm{Ln}x$
S'annule en $x = 1/e$; $g(1/e) = -1/e$
Pente en 1/e : 0
$g''(x) = 1/x > 0$ et g est convexe
On remarque que $g(1) = 0$ et $g(e) = e$ (intersection avec la bissectrice).

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
f'		$-$	0		$+$		
f	0	$\searrow$	$-0,368$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A2) Donner une primitive G de g.

$G(x) = (x^2 Lnx)/2 - x^2/4 + constante = x^2(2Lnx - 1)/4 + C$

Partie B

Soit f l'application de $R^{+*} =]0, +\infty[$ dans R^+ définie par : $x \to f(x) = |x\, Lnx| = |g(x)|$.

B1) Calculer la limite de f quand x tend vers 0_+. On prolongera f sur R^+ par la valeur ainsi trouvée.
Lim $f(x) = 0$ qd $x \to 0$
On peut donc prolonger f en 0 par $f(0) = 0$ et $f(x) = |x\, Lnx|$ pour x strictement positif.

B2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f ; on étudiera particulièrement les points $x = 0_+$ et $x = 1$.
Continuité :
Les fonctions $g(x) = xLnx$ est continue, ainsi que la fonction « valeur absolue ».
Donc f est continue en tout point $x > 0$.
Par la prolongation de la question 1, f est continue sur R^+.

Dérivabilité :
En tout point différent de 1, pas de problème. Etude en 1.
$x < 1$ $f(x) = -xLnx$
$x \geq 1$ $f(x) = xLnx$

$(f(x) - 0)/(x-1) = -xLnx/(x-1) \to -1$ qd $x \to 1_-$

$(f(x) - 0)/(x-1) = xLnx/(x-1) \to 1$ qd $x \to 1_+$

Le point $x = 1$ et $y = 0$ est donc un point de rebroussement ; f n'est pas dérivable en 1.

Puisqu'on a prolongé f en 0 par $f(0) = 0$, la pente en 0 est $f(x)/x = -Lnx$ donc la tangente en $x = 0$ est verticale.

B3) Etudier très précisément les variations de f et tracer son tableau de variations.
De façon évidente on a :
$x < 1$ $f(x) = - x\text{Ln}x$, $f'(x) = - 1 - \text{Ln}x$
$x \geq 1$ $f(x) = x\text{Ln}x$, $f'(x) = 1 + \text{Ln}x$

$f''(x) = -1/x$ ou $1/x$ selon la position par rapport à 1, donc pas de point d'inflexion.

x	0		1/e		1		e		+ ∞
f'		+	0	-	-1 ‖ +1		+		
f	0	↗	1/e	↘	0	↗	e	↗	+ ∞

On peut remarquer que $f(x)=\text{Sup}(g(x), -g(x))$

B4) Montrer qu'existent deux points a et b appartenant à l'intervalle]1, e[vérifiant :
$f(a) = 1/e$ et $f(b) = 1$.
Donner les valeurs approchées de a et b à 0,01 près.

f est strictement croissante et continue de]1, e[dans]0, e[(bijection). Donc pour tout y dans]0, e[il existe un et un seul x de]1, e[vérifiant $y = f(x)$.

Or $0 < 1/e < e \Rightarrow \exists$ a tel que $f(a) = 1/e$

De même, $0 < 1 < e \Rightarrow \exists$ b tel que $f(b) = 1$

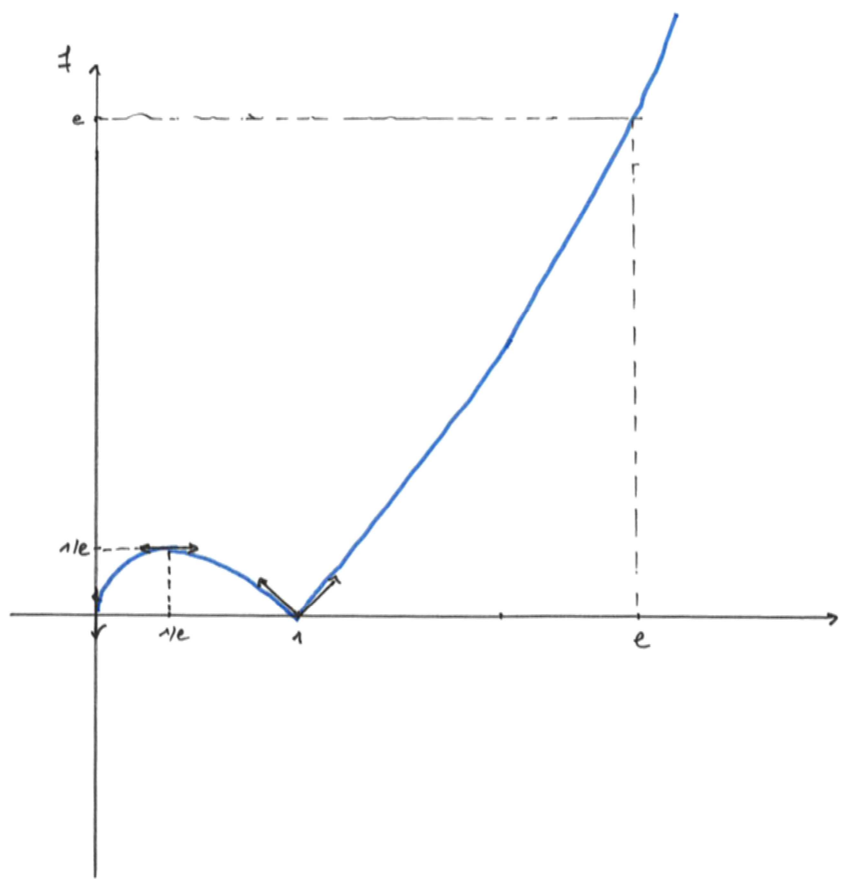
$1/e = 0{,}368$
$f(1{,}32) = 0{,}366$ et $f(1{,}33) = 0{,}379 \Rightarrow 1{,}32 < a < 1{,}33$

$f(1{,}76) = 0{,}995$ et $f(1{,}77) = 1{,}011 \Rightarrow 0{,}99 < b < 1{,}01$

B5) Etudier le signe de $v(x) = f(x) – x$.
$v(x) = - x(\text{Ln}x + 1)$ si $x < 1$ et $x(\text{Ln}x – 1)$ si $x \geq 1$
$v(x) = 0$ en $x = 0$, $x = 1/e$ et $x = e$

x	0		1/e		1		e		+ ∞
v		+	0	-	‖	-	0	+	

B6) Tracer le plus précisément possible la courbe C représentant f dans un repère orthonormé.



Partie C

$u(0)$ étant un réel positif ou nul, on considère la suite à termes positifs ou nuls $\{u(n)\}$, $n \geq 0$, définie par $u(0)$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

C1) Déterminer les valeurs de $u(0)$ pour lesquelles la suite $u(n)$ est constante.
Ce sont les points fixes de f, à savoir : 0, e et 1/e
Supposons $u(n)$ constante.
Alors $u(1) = u(0)$, ie $f(u(0)) = u(0)$
D'après la question B5, $u(0) = 0$ ou $1/e$ ou e.
Inversement, si $u(0) = 0$ ou $1/e$ ou e, $f(u(0)) = u(1) = 0$ et donc $f(u(n)) = 0 \; \forall n$

C2) Dans cette question, on considère que $0 < u(0) < 1/e$.

2a – Montrer que $0 < u(n) < 1/e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question B3 et l'étude des variations de f, on établit que $\forall x \in (0, 1/e)$, $f(x)$ est aussi dans $(0, 1/e)$.
Par récurrence immédiate, on en déduit que $0 < u(n) < 1/e$.

2b – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

D'après B5, sur $(0, 1/e)$, $v(x) > 0 \Rightarrow f(u(n)) - u(n) > 0 \Rightarrow u(n+1) > u(n)$.

2c – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

La suite $u(n)$ est donc croissante et majorée par $1/e$, donc est convergente vers une limite L, telle que $L = f(L) \Rightarrow L = 1/e$.

C3) Dans cette question, on considère que $1/e < u(0) < 1$.

3a – Montrer que $0 < u(1) < 1/e$.

D'après B3, f décroit de $1/e$ à 0, et d'après B5 $v(x) < 0$.
Donc $0 < u(1) < 1/e$.
Et donc pour tout $n \geq 1$, $u(n)$ est entre 0 et $1/e$.

3b – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

D'après la question C2, à partir de $n = 1$, $u(N)$ est croissante, convergente de limite $1/e$.

C4) Dans cette question, on considère que $u(0) > e$.

4a – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

$u(0) > e \Rightarrow u(1) > e$ et donc $u(n) > e$
$v(x) > 0 \Rightarrow u(n)$ croissante
Nous allons montrer par deux approches différentes que la suite $\{u(n)\}$ est divergente.

4b – Première approche : en raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u(n) = +\infty$.

Supposons que u(n) converge vers une limite notée L.
On a (puisque u(n) est croissante) : $L \geq u(0)$
Or f est continue en L, donc L = f(L) c'est-à-dire que L = 0 ou 1/e ou e (B5).
Comme $L \geq u(0) > e$, c'est impossible.
$\Rightarrow$ u(n) diverge

4c – Deuxième approche :

- Montrer que, pour tout $x \geq e$, on a $f'(x) \geq 2$.

$f'(x) = \text{Ln}x + 1$; pour $x \geq e$, $\text{Ln}x \geq 1$ et donc $f'(x) \geq 2$.

- En déduire que pour tout $n \in N^*$, on a : $u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$

$u(n+1) - u(n) = f(u(n)) - f(u(n-1))$
f étant continue et dérivable sur l'intervalle proposé dans cette question, d'après les accroissements finis, il existe un point c (le point c dépend de n, donc c'est un c(n)) tel que $f(u(n)) - f(u(n-1)) = (u(n) - u(n-1))f'(c)$
ie $f(u(n)) - f(u(n-1)) = u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$

- En déduire que $u(n+1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))(2^{n+1} - 1)$

On a de façon évidente : $u(n+1) - u(n) \geq 2^n(u(1) - u(0))$
ou $u(n+1) \geq u(n) + 2^n(u(1) - u(0))\ \forall n$
En écrivant cette inégalité jusqu'à n = 0, ie $u(1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))$, et en sommant, on obtient :
$u(n+1) \geq u(0) + (2^{n+1} - 1)(u(1) - u(0))$

- Retrouver le résultat de la question 4b.

Et donc $\lim u(n+1) = +\infty$ quand $n \to +\infty$

C5) Dans cette question, on considère que $1 < u(0) < e$.

5a – Supposons qu'il existe un entier n* tel que u(n*) = b défini à la Partie B, question 4.
Quelle est alors la nature de la suite {u(n)} ?

Sur (1, e), f croît de 0 à e, et v < 0.
Soit n* tel que u(n*) = b, f(b) = 1.
u(n*+1) = f(u(n*)) = f(b) = 1
Et donc pour tout n > n*+1 (n ≥ n*+2) f(u(n)) = 0.
La suite est donc constante ou stationnaire à partir du rang n*+1, de limite 0.

5b – On suppose maintenant que $u(n) \neq b$ pour tout entier $n \in N$.
Montrer qu'il existe un entier n° tel que u(n°) < b (on pourra raisonner par l'absurde).
Etudier alors la convergence de la suite u(n).

Supposons, par exemple, que u(n) > b pour tout entier $n \in N$
Alors pour tout $x \in]b, e[$, $f(x) \in]1, e[$
$\Rightarrow \forall n$, $u(n) < e$ et donc $b < u(n) < e$

$u(n+1) - u(n) = f(u(n)) - u(n) < 0$ (car $v < 0$), donc $u(n)$ décroît ; comme elle minorée par b, la suite est convergente.
Sa limite L est telle que $1/e < b \leq L \leq u(0) < e$
Or $L = 0$ ou $1/e$ ou e, $\Rightarrow$ impossibilité.
Donc l'hypothèse $\forall n\ u(n) > b$ est fausse.
Il existe donc au moins un entier n° tel que $u(n) < b$.
$\forall\ x < b$, $f(x) \leq 1$.

On distingue alors 3 cas :

a) Soit $0 < u(n°+1) < 1/e$: alors $u(n)$ tend vers $1/e$ (C2)
b) Soit $u(n°+1) = 1/e$: la suite est stationnaire de limite $1/e$
c) Soit $1/e < u(n°+1) < 1$: cas C3 ; $u(n)$ converge vers $1/e$

Donc dans tous les cas, la suite converge vers $L = 1/e$

AVRIL 2018

<u>CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES</u>

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit la fonction f de R dans R définie par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$

$f(x) = (4e^x - e^x - 1)/(e^x + 1) = (4e^x/(e^x + 1)) - 1$

On pose $u = e^x + 1$; $x = 0 \Rightarrow u = 2$ et $x = 1 \Rightarrow u = 1 + e$

$I = 4(\text{Ln}(1+e) - \text{Ln}2) - 1$

$I = 4\,\text{Ln}[(1+e)/2] - 1 \sim 0{,}077$

Exercice 2

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice $C = A^3 - A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$C = A^3 - A = 4I$, où I est la matrice identité de dimension 3.

2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

$A^3 - A = 4I = A(A^2 - I) = 4I$

$A(A^2 - I)/4 = I$

D'où : $A^{-1} = (A^2 - I)/4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Pour tout n entier naturel strictement positif, on définit la somme S(n) par :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$$

1) z désigne le nombre complexe z = cos(π/n) + i.sin(π/n).
On considère la somme $Z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$
Ecrire Z(n) en fonction de z et n sous forme de fraction rationnelle.

$z = e^{i\pi/n}$
$Z(n) = (1 - z^n)/(1 - z)$

2) En déduire l'expression de S(n) en fonction de tan(π/2n).
S(n) est la partie imaginaire de Z(n).
$Z(n) = (1 - e^{i\pi})/(1 - e^{i\pi/n}) = 2/(1 - e^{i\pi/n}) = 2/ e^{i\pi/2n} (e^{-i\pi/2n} - e^{i\pi/2n}) = 1 + i /\tan(\pi/2n)$
$\Rightarrow S(n) = 1/ \tan(\pi/2n)$

3) Déterminer la limite de S(n)/n quand n →+ ∞.
$S(n)/n = 1/ n.\tan(\pi/2n) \sim 2/\pi$

Exercice 4

On considère la fonction f : R → R^+, définie par f(x) = 0 pour x < 0 et $f(x) = ke^{-ax}$, pour x ≥ 0, où a est un paramètre réel strictement positif et k une constante à déterminer.
1) Trouver la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité sur R^+.
En écrivant que l'intégrale de f sur R vaut 1, on trouve k = a
$f(x) = ae^{-ax}$ pour x > 0
2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité admet pour densité la fonction déterminée à la question 1.
Donner la fonction de répartition F de X.
F(x) = P(X < x) = 0 pour x < 0
$F(x) = 1 - e^{-ax}$ pour x ≥ 0

3) Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X) de X.
Calcul : On rappelle que $E(X) = \int_0^{\circ\infty} xf(x)dx$ et que $V(X) = \int_0^{\circ\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$

E(X) = 1/a et V(X) = 1/a².

4) Soient deux réels positifs u et v tels que v > u.
Calculer la probabilité conditionnelle P(X > v / X > u).
$P(X > v / X > u) = P(X > v)/P(X > u) = e^{-av}/e^{-au} = e^{-a(v-u)}$

Exercice 5

On considère la suite {u(n)}, n ϵ N, définie par :
u(0) = 0, u(1) = 1 et u(n+1) = 7u(n) + 8u(n-1)

1) Pout tout n ϵ N, on définit la suite s(n) = u(n) + u(n+1).
Déterminer la nature de la suite {s(n)}.
Donner l'expression générale de s(n) en fonction de n.
Que vaut la limite de s(n) quand n →+ ∞ ?
u(n) + u(n+1) = 8u(n) + 8u(n-1) ⇒ s(n) = 8s(n-1)
s(0) = 1 ⇒ s(n) = 8^ns(0) = 8^n
s(n) →+ ∞ quand n →+ ∞

2) On pose v(n) = $(-1)^n$u(n), et on définit la suite {t(n)}, n ϵ N, par :
t(n) = v(n+1) – v(n)
Exprimer t(n) en fonction de s(n).
t(n) = $(-1)^{n+1}$s(n).

3) Donner les expressions de v(n) et u(n) en fonction de n.
On a :
t(n-1) = v(n) – v(n-1)
…….
t(0) = v(1) – v(0)
En sommant : t(0) + t(1) + … + t(n-1) = v(n) – v(0) = v(n) (car v(0) = 0)
v(n) somme d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison (-8) :
v(n) = [1 + $(-1)^{n+1}8^n$]/9
u(n) = $(-1)^n$v(n) = [$(-1)^n$ – 8^n]/9

4) Que vaut la limite de u(n)/s(n) quand n →+ ∞ ?
u(n)/s(n) = u(n)/8^n = [$(-1)^n$ – 8^n]/9.8^n → - 1/9 quand n →+ ∞

Exercice 6

Pour tout entier naturel n, on note par F(n) l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle, infiniment dérivables, vérifiant la relation suivante pour tout x réel :

$$4xf''(x) – 8nf'(x) – xf(x) = 0$$

1) Montrer que, ∀n ϵ N, F(n) n'est pas vide.
La fonction nulle appartient à F(n), quel que soit n.

2) Soit la fonction $f_0(x) = e^{x/2}$
Montrer que f_0 ϵ F(0).
$f'_0(x) = e^{x/2}/2$
$f_0(x) = e^{x/2}/4$

Puisque n = 0, $4xf''(x) - xf(x) = 4x(e^{x/2}/4) - x.e^{x/2} = 0$, d'où le résultat

3) Soit une fonction f_n appartenant à F(n).
On définit la fonction f_{n+1} par : $f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$
3a – Etablir la relation :
$f_{n+1}'(x) = - x\, f_n(x)/2$
$f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf'(x)] \Rightarrow f'_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f'_n(x) - f'_n(x) - xf_n''(x)]$
$\Rightarrow f'_{n+1}(x) = 4nf'_n(x) - 2xf_n''(x)$
Or $f_n \in F(n) \Rightarrow 4xf_n''(x) - 8nf_n'(x) = xf_n(x)$
$2xf_n''(x) = 4nf_n'(x) + xf_n(x)/2$
En reportant dans l'expression de $f'_{n+1}(x)$: $f'_{n+1}(x) = 4nf'_n(x) - [4nf_n'(x) + xf_n(x)/2]$
D'où $f_{n+1}'(x) = - x\, f_n(x)/2$

3b – Montrer que $f_{n+1} \in F(n+1)$.
En dérivant le résultat de (3a), on a : $f_{n+1}''(x) = - f_n(x)/2 - x\, f_n'(x)/2$
$4xf_{n+1}''(x) - 8(n+1)f_{n+1}'(x) - xf_{n+1}(x)$
$= 4x[- f_n(x)/2 - x\, f_n'(x)/2] - 8(n+1)\,(- x\, f_n(x)/2) - 2x[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$
= 0 en développant
D'où le résultat

Exercice 7 *(deux questions indépendantes)*
1) On rappelle que le polynôme réel B divise le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ.
Soit le polynôme A défini sur R, à coefficients réels, par : $A(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$
A quelles conditions sur les paramètres a, b et c le polynôme A est-il divisible par le polynôme B défini par $B(x) = x^2 + x + 1$?
$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a)$
A divisible par B si $b - a + 1 = 0$ et $c - a = 0$

2) Déterminer la valeur du réel v telle que le polynôme $P(x) = (x + 1)^7 - x^7 - v$ admet une racine réelle multiple.
x est racine multiple de P si P(x) = 0 et P'(x) = 0
Soit :
$(x + 1)^7 - x^7 - v = 0$ et $7(x + 1)^6 - 7x^6 = 0$ $((x + 1)^6 - x^6 = 0)$
Ou :
$(x + 1)x^6 - x^7 - v = 0$ et $(x + 1)^6 = x^6$
Ou :
$x^6 - v = 0$ et $(x + 1)^6 = x^6$
Or $(x + 1)^6 = x^6 \Leftrightarrow (x + 1) = +/- x$
$\Rightarrow x = - ½$
Et donc v = 1/64

AVRIL 2019

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR STATISTICIEN ÉCONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

Exercice

1) Soit la fonction f de la variable réelle positive x, définie par $x \rightarrow f(x)$ avec :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Etudier la fonction f.

$f'(x) = 1/(x^2 + 1)^{3/2}$, strictement positive sur R^+
f est donc croissante sur R^+
$f(0) = 0$; $\lim f = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$

2) On considère la suite u_n, n entier naturel positif ou nul, définie par $u_0 = 1$ et de terme général :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2 + 1}}$$

Etudier la suite u_n.

Comme $f(x) - x < 0$, la suite u_n est décroissante.
Elle est minorée par 0, et tend donc vers une limite $l = 0$.

3) Donner la forme explicite en fonction de n du terme général u_n.
Procédons par récurrence.
On sait que $u_0 = 1$; $u_1 = 1/(2)^{1/2}$
Un calcul de réassurance montre que $u_2 = 1/(3)^{1/2}$

Posons $u_n = 1/(n+1)^{1/2}$
On calcule aisément que $u_{n+1} = 1/(n+2)^{1/2}$

La forme explicite de u_n est donc $u_n = 1/(n+1)^{1/2}$

Problème

Notations et valeurs numériques :
Le symbole e désigne la base des logarithmes népériens, notés Ln ; e = 2,718.

Ln 2 = 0,693
$e^{1,5} = 4,482$; $e^{1,6} = 4,953$; $e^{1,7} = 5,474$; $e^{1,8} = 6,050$; $e^{1,9} = 6,686$; $e^{2} = 7,389$
$e^{-0,5} = 0,607$; $e^{-0,6} = 0,549$; $e^{-0,7} = 0,497$; $e^{-0,8} = 0,449$; $e^{-0,9} = 0,407$; $e^{-1} = 0,368$

Partie 1 : Etude des variations d'une fonction

On considère la fonction réelle f, de la variable réelle x, définie par x →f(x) avec :

$$f(x) = 2x + 2 - e^x$$

On veut étudier les variations de f.

1) Calculer les dérivées f' et f'' ; étudier leurs signes.
$f'(x) = 2 - e^x$; $f'(x) = 0$ pour x = Ln2, positive avant, négative après
$f''(x) = - e^x < 0$: la fonction est concave

2) Etudier le comportement de f quand x tend vers - ∞ et + ∞.
Construire le tableau de variation de f.

$\text{Lim}_{x\to+\infty} f(x) = \lim x(2 + 2/x - e^x/x) = - \infty$
$\text{Lim}_{x\to-\infty} f(x) = - \infty$

Asymptotes :
$\text{Lim}_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^x/x) = - \infty$: pas d'asymptote au voisinage de + ∞

$\text{Lim}_{x\to-\infty} f(x)/2 = \lim (2 + 2/x - e^x/x) = 2$
$y – 2x = 2 - e^x \to 2$ quand $x \to - \infty$
La droite y = 2x + 2 est asymptote au voisinage de - ∞

Tableau de variations

x	0		Ln2		+ ∞
f'		+	0	-	
f_1	- ∞	↗	M	↘	- ∞

M = f(Ln2) ≈1,39

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions notées α et β, avec α < β. Situer numériquement α et β dans des intervalles de longueur 0,1.

f continue, M > 0, limites égales à - ∞ pour x → - ∞ ou + ∞
Il existe donc 2 solutions à f(x) = 0 : α < 0 et β > 0

Positionnement de α et β :
Pour α :
Avec les valeurs données :
f(-0,7) = 0,6 – 0,497 > 0
f(-0,8) = 0,4 – 0,449 < 0
Donc α est compris entre -0,8 et -0,7

Pour β :
f(1,6) = 5,2 – 4,953 > 0
f(1,7) = 5,4 – 5,474 < 0
Donc β est compris entre 1,6 et 1,7

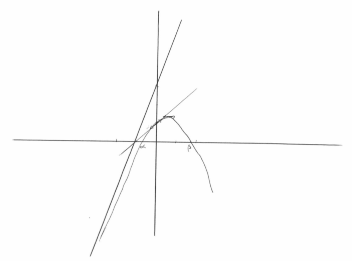
4) Donner les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction f aux points A de coordonnées (α, 0), B (β, 0), et C d'abscisse 0.

Tangente en A : $y = (2 - e^{\alpha})(x - \alpha)$
Or $2\alpha + 2 - e^{\alpha} = 0 \rightarrow 2 - e^{\alpha} = -2\alpha$
$y = -2\alpha x + 2\alpha^2$

Tangente en B :
Idem : $y = -2\beta x + 2\beta^2$

Tangente en C :
Quand x = 0, y = 1
y = x + 1

5) Tracer le plus précisément possible le graphe de f dans un repère orthonormé.



Partie 2 : Intégrales

6) Donner la valeur exacte de l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 f(x)dx$.
Une primitive de f est : $x^2 + 2x - e^x$

$J = 4 - e$

7) On rappelle que les nombres réels α et β ont été introduits en Partie 1, question 3.
Donner, en fonction de α, la valeur exacte de l'intégrale $J(\alpha)$ définie par :
$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx.$
$J(\alpha) = (\alpha^2 + 2\alpha - e^\alpha) - (-1) = \alpha^2 + 1 + (2\alpha - e^\alpha)$
Or $2\alpha + 2 - e^\alpha = 0 \rightarrow 2\alpha - e^\alpha = -2$
$J(\alpha) = \alpha^2 - 1$

8) Donner, en fonction de β, la valeur exacte de l'intégrale $J(\beta)$ définie par :
$J(\beta) = \int_0^\beta f(x)dx.$
$J(\beta) = (\beta^2 + 2\beta - e^\beta) - (-1) = \beta^2 - 1$ car $2\beta - e^\beta = -2$
$J(\beta) = \beta^2 - 1$

9) Démontrer que la valeur exacte de $J(\alpha, \beta)$ définie par $J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ est :
$J(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

$J(\alpha, \beta) = J(\beta) - J(\alpha) = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$

Partie 3 : Famille paramétrée

Dans cette partie, on considère la famille F de fonctions réelles f_a de la variable réelle x, définie par $x \rightarrow f_a(x)$ avec :

$f_a(x) = 2x + 2 - e^{ax}$

où a est un paramètre réel quelconque.
On veut étudier les variations de la fonction f_a selon les valeurs du paramètre a.

10) Etudier le cas a = 0.
On trouve la droite $f_0(x) = 2x + 1$

Dans les quatre questions suivantes, on supposera $a \neq 0$.
11) Etudier le signe de $(f_a)'$ et $(f_a)''$.
$f_a'(x) = 2 - ae^{ax}$
Deux cas à distinguer :
1er cas : $a < 0$: la dérivée $f_a'(x)$ est positive pour tout x.
$\rightarrow$ la fonction f_a est strictement croissante

2ème cas : $a > 0$
Alors $f_a'(x) = 0$ pour $x = (Ln(2/a))/a$
$f_a' < 0$ pour $x > (Ln(2/a))/a$
$f_a' > 0$ pour $x < (Ln(2/a))/a$

12) En déduire le tableau de variation de f_a selon les valeurs du paramètre a.
Montrer qu'il existe un point commun aux courbes des fonctions de la famille F.

Limites :

a) Au voisinage de + ∞

Pour a > 0 : $\text{Lim}_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Pour a < 0 : $\text{Lim}_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = +\infty$

b) Au voisinage de - ∞

Pour a > 0 : $\text{Lim}_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Pour a < 0 : $\text{Lim}_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Asymptotes éventuelles :

a) Au voisinage de + ∞

Pour a > 0 : $\text{Lim}_{x \to +\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Pour a < 0 : $\text{Lim}_{x \to +\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = 2$

Et $\text{Lim}_{x \to +\infty}(f_a(x) - 2x) = \lim (2 - e^{ax}) = 2$

La droite y = 2x + 2 est asymptote oblique de f_a au voisinage de + ∞ lorsque a < 0.

b) Au voisinage de - ∞

Pour a > 0 : $\text{Lim}_{x \to -\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = 2$

$\text{Lim}_{x \to -\infty}(f_a(x) - 2x) = \lim (2 - e^{ax}) = 2$

La droite y = 2x + 2 est asymptote oblique de f_a au voisinage de - ∞ lorsque a > 0 (on retrouve bien le cas de la Partie 1, avec a = 1).

Pour a < 0 : $\text{Lim}_{x \to -\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = +\infty$

<u>Tableau de variations :</u>

Pour a > 0

x	-∞		(Ln(2/a))/a		+ ∞
f_a'		+	0	-	
f_a	- ∞		M(a)		- ∞

M(a) = 2 + 2(Ln(2/a) – 1)/a

Pour a < 0

x	0	+ ∞

f_a'	$+$	
f_a	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

On remarque que pour $x = 0$, $f_a(0) = 1$ → le point C(0, 1) est un point commun à la famille F.

13) On note par M(a) le maximum de f_a, lorsque ce maximum existe. Montrer alors que M(a) > 0.
D'après la question précédente, M(a) n'existe que pour a > 0 et $M(a) = 2 + 2(\text{Ln}(2/a) - 1)/a$
Pour a > 0, étudions les variations de M(a).
$M'(a) = 2\text{Ln}(a/2)/a^2$
M'(a) = 0 pour a = 2, M'(a) positive pour a > 2, négative pour a < 2.
En outre, lim M(a) = + ∞ pour x → 0 ou 2 pour x → + ∞

a	0	2	$+\infty$
M(a)'	$-$	0	$+$
M(a)	$+\infty$ $\searrow$	S	$\nearrow$ 2

Soit S le minimum de M(a), atteint en a = 2.
S = 1, donc S > 0
On en déduit que M(a) est > 0 pour tout a > 0.

14) Combien y a-t-il de solutions à l'équation $f_a(x) = 0$?
D'après les questions 12 et 13 :
Cas a < 0 :
Il existe un et une seule solution à $f_a(x) = 0$
Cas a > 0 :
Il existe deux solutions à $f_a(x) = 0$.

15) Pour k entier strictement positif, calculer la différence $f_{a+k}(x) - f_{a+k-1}(x)$.
En déduire l'expression de $f_{a+k}(x) - f_a(x)$ en fonction de a, k et x.

Soit $D(a, k) = f_{a+k}(x) - f_{a+k-1}(x) = e^{(a+k-1)x} - e^{(a+k)x} = (e^{-x} - 1)e^{ax}\, e^{kx}$
$f_{a+k}(x) - f_a(x) = \sum_{i=1}^{k} D(a,i) = (e^{-x} - 1)e^{ax} \sum_{i=1}^{k} D(a,i) = (e^{-x} - 1)e^{ax} \sum_{i=1}^{k} e^{ix}$
D'où :
$f_{a+k}(x) - f_a(x) = e^{ax}(1 - e^{kx})$

16) Soit l'intégrale J(a) définie par : $J(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$

16a) Donner la valeur de J(0) sans faire le moindre calcul intégral.

Pour a = 0, on a vu en question 10 que pour a = 0, on a la droite y = 2x + 1.
J(0) est donc la surface du trapèze compris entre la droite 2x + 1, les droites x = 0 et x = 1 et y = 0.
La surface d'un trapèze est (B + b)h/2 où B est la grande base, b la petite base, h la hauteur. Ici B = 3, b = 1, h = 1 → J(0) = 2

16b) Donner, en fonction de a, la valeur exacte de J(a).

Une primitive de f_a est $x^2 + 2x - e^{ax}/a$
$J(a) = 3 + (1 - e^a)/a$

16c) Etudier les limites de J(a) quand le paramètre a tend vers - ∞, + ∞, et 0.

Quand $a \to +\infty$, $J(a) \to -\infty$
Quand $a \to -\infty$, $J(a) \to 3$
Quand $a \to 0$, $e^a \approx 1 + a$ et donc $\lim_{a \to 0} J(a) = 2$

AVRIL 2019

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR STATISTICIEN ÉCONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

Exercice 1

Un point M, de coordonnées x et y, décrit une courbe C. Ses coordonnées x et y de M dépendent d'un paramètre réel t, selon les relations suivantes :

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

$$y(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}$$

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ? pour y ?

Il est évident que x(t) ≥ 0 et < 1 ; x varie donc entre 0 et 1.
Et y(t) ϵ R.

2) Montrer que le point O (0, 0) appartient à la courbe C.
On rappelle que la pente p de la tangente en un point de coordonnées (x_0, y_0) est telle que $(y - y_0)/(x - x_0) = p$. Quelle est la pente de la tangente à C au point O ?
x(t) = 0 ↔ t = 0 et donc si x = 0, alors y = 0.
La courbe C passe par le point O (0, 0).
y/x est donc la pente de la tangente en O à C, et comme y/x = t, t = 0 et la pente est nulle : tangente horizontale en O.

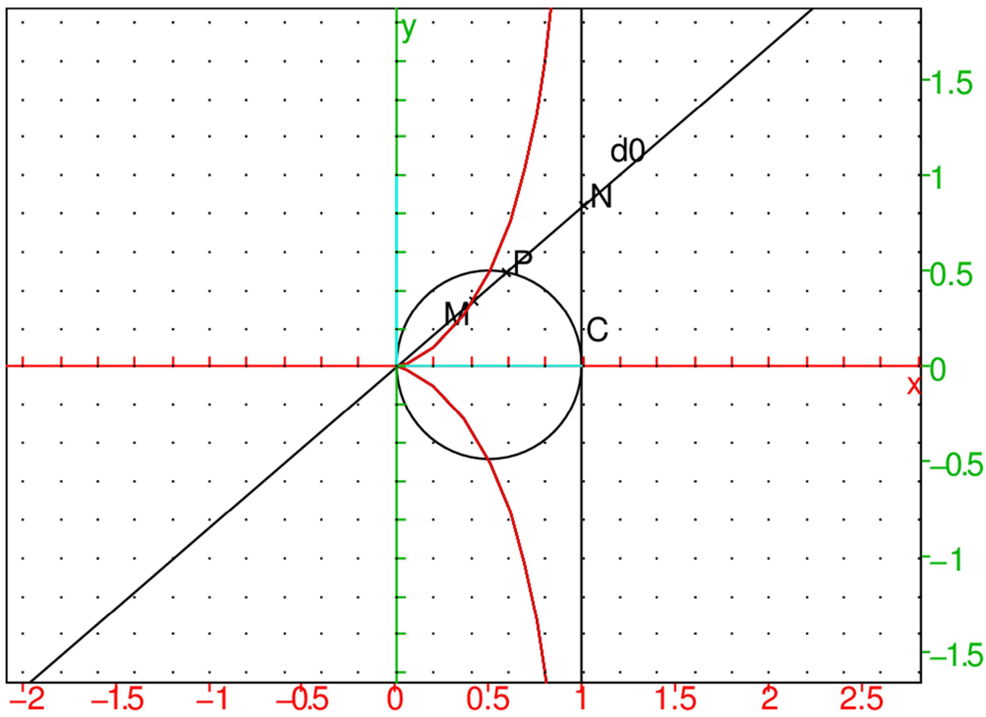
3) Donner l'équation de la courbe C en coordonnées cartésiennes sous la forme y = g(x).
Calculer y' et donner les variations de g et la forme générale de la courbe C.
y(t)/x(t) = t
En reportant dans x(t), on a $x = y^2/(y^2 + x^2)$
Soit : $y^2 = x^3/(1 – x)$, ou encore $y = + - x^{3/2}/(1 – x)^{1/2}$
La courbe C est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

En dérivant : $2yy' = x^2(3 – 2x)/(1 – x^2)$, ou : $y' = x^2(3 – 2x)/2y(1 – x^2)$
y' a donc le signe de y : y' > 0 quand y > 0 y croissante), y' < 0 quand y < 0 (y décroissante)

Quand x tend vers 1, y tend vers ∞.
La droite x = 1 est asymptote à C.
Pour y > 0 :

x	0		1
y'		+	
y	0	↗	+∞

La courbe C est en rouge ci-dessous.



Exercice 2

Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel n positif ou nul par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1) Montrer que, pour tout entier n : $1 \leq u_n < 2$

Par récurrence : $u_0 = 1$.
La propriété est vraie pour n = 0.
Supposons-la vraie au rang n : $1 \leq u_n < 2$
$3 \leq 2 + u_n < 4 \rightarrow (3)^{1/2} \leq (2 + u_n)^{1/2} = u_{n+1} < 2$
Donc vraie au rang n+1.

2) Etudier le sens de variation de u_n.

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = (-u_n^2 + u_n + 2)/(\sqrt{2+u_n} + u_n)$
Le dénominateur est > 0, et le numérateur a deux racines, - 1 et 2, mais situées hors de l'intervalle [1, 2[, et il est donc > 0 sur cet intervalle.
La suite est croissante.

3) Montrer que la suite u_n est convergente. Quelle est la valeur de sa limite L ?
La suite est croissante et majorée par 2 → elle converge vers une limite L telle que : $L = \sqrt{2+L}$, ou $L^2 - L - 2 = 0$, qui n'admet comme solution positive que L = 2.

Exercice 3
1) Soit n un entier naturel strictement positif.
On appelle diviseur strict de n tout nombre strictement positif divisant n, autre que lui-même.
Quels sont les diviseurs stricts de 220 ?

Les diviseurs stricts de 220 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

2) On appelle nombres amiables deux entiers n et m tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Les entiers 220 et 284 sont-ils amiables ?

D'après la question 1, la somme des diviseurs stricts de 220 est 284.
Les diviseurs stricts de 284 sont : 1, 2, 4, 71, 142 ; leur somme est 220.
220 et 284 sont donc amiables.

3) On appelle nombre parfait un entier égal à la somme de ses diviseurs stricts. Les nombres 21 et 28 sont-ils parfaits ?

Diviseurs stricts de 21 : 1, 3, 7 : somme = 11, 21 n'est pas parfait
Diviseurs stricts de 28 : 1, 2, 4, 7, 14 : somme = 28, 28 est parfait

4) On rappelle qu'un nombre entier premier n'est divisible que par 1 et par lui-même. Déterminer la valeur d'un nombre entier premier p tel que le nombre $2^4.p$ soit parfait.

Diviseurs stricts de $2^4.p = 16p$: 1, 2, 4, 8, 16, p, 2p, 4p, 8p
Somme = 15p + 31
Nombre parfait si 16p = 15p + 31 → p = 31

5) Soient p un nombre entier premier impair, et n un nombre entier naturel strictement positif. On suppose que le nombre $2^n.p$ est parfait. Exprimer alors p en fonction de n.

Puisque p est premier et impair, les diviseurs stricts de $2^n.p$ sont : 1, 2, …, 2^n, p, 2p, …, $2^{n-1}.p$

$2^n.p$ est parfait si $2^n.p = 1 + 2 + \ldots + 2^n + p + 2p + \ldots + 2^{n-1}.p$
$\leftrightarrow 2^n.p = (1 - 2^{n+1})/(1 - 2) + p(1 - 2^n)/(1 - 2)$
$2^n.p = (2^{n+1} - 1) + p(2^n - 1)$

$p = 2^{n+1} - 1$

(Ainsi, on vérifie que pour n = 4, p = 31 : question 4)

Exercice 4
1) Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
Donner dans C, corps des nombres complexes, les solutions de l'équation P(Z) = 0.

$P(Z) = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = (Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i)$
Solutions : 1, - 1, i, -i

2) z étant un complexe quelconque différent de 1, on définit z* par $z^* = \frac{2z+1}{z-1}$.
Résoudre dans C l'équation $(z^*)^4 = 1$.

Notons de façon générique par a l'un des termes 1, - 1, i, - i.
D'après la 1), on a z* = a, ou $(2z + 1)/(z + 1) = a$, ce qui conduit à l'écriture générale :
$z = (a + 1)/(a - 2)$

a = 1 : z = - 2

a = - 1 : z = 0

a = i : $z = (i+1)/(i-2) = - (1 + 3i)/5$

a = -i : $z = (1 - i)/(-i -2) = - (1 - 3i)/5$

Exercice 5
1) Pour un examen oral, un étudiant a fait des impasses et n'a préparé que 50 des 100 sujets qu'il doit connaître. Chaque sujet fait l'objet d'une question, écrite sur un papier, les 100 papiers sont dans une urne présentée à l'étudiant.
L'étudiant tire deux papiers au hasard, simultanément.
1a) Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ?
P(1) = 49/198 ; car (C^2_{50}/ C^2_{100})

1b) Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
P(2) = 49/198 car aussi (C^2_{50}/ C^2_{100})

1c) Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul des deux sujets ?
P(3) = 50/99 car $(C^1_{50}\, C^1_{50} / C^2_{100})$; on remarque aussi que P(3) = 1 – P(1) – P(2)

1d) Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?
P(4) = 1 – P(1) = 149/198

2) L'étudiant a préparé n des 100 sujets possibles ($n \leq 100$).
2a) Quelle est la probabilité p(n) qu'il connaisse au moins un des deux sujets tirés ?
$p(n) = 1 - C^2_{100-n} / C^2_{100} = 1 - (100 - n)(99 - n)/100x99$
$p(n) = n(199 - n)/9900$

2b) Quelle est la plus petite valeur de n pour que p(n) soit supérieur à 0,95 ?
$p(n) \geq 0{,}95 \leftrightarrow - n^2 + 199\, n - 9405 \geq 0$

d'où $n \geq 78$

Exercice 6
1) Soit la matrice A à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

Det A = 1 → A est inversible

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre le système linéaire suivant, où les inconnues x, y, z sont réelles et m est un paramètre réel :
$x - z = m$
$- 2x + 3y + 4z = 1$
$y + z = 2m$

On note X le vecteur colonne $(x, y, z)^t$, M le vecteur colonne $(m, 1, 2m)^t$.
Le système revient à AX = M ou encore $X = A^{-1}M$

Ce qui conduit à : $x = 5m - 1$, $y = - 2m + 1$, $z = 4m - 1$

Exercice 7
Soit la fonction f définie sur $R^{+*} =]0, + \infty[$ par $x \to f(x) = (\mathrm{Ln}\ x) / x$, où Ln est le symbole des logarithmes népériens.
1) Calculer l'intégrale $J_1 = \int_1^e f(x)dx$

Une primitive de f est $(\mathrm{Ln}x)^2/2$
$J_1 = 1/2$

2) L'intégrale $J_2 = \int_0^1 f(x)dx$ existe-t-elle et, si oui, quelle est sa valeur ?

Au voisinage de 0, f n'est pas définie (lim f = - ∞ quand x →0)
L'intégrale est non convergente (J_2 → - ∞)

3) Calculer J(n) = $\int_n^{n+1} f(x)dx$.
Donner le signe de J(n), et calculer la limite de J(n) quand n → + ∞.

$J(n) = (Ln^2(n+1) – Ln^2(n))/2$,
$J(n) = (Ln(n+1) – Ln(n))(Ln(n+1) + Ln(n))/2$ et J(n) est donc positive.

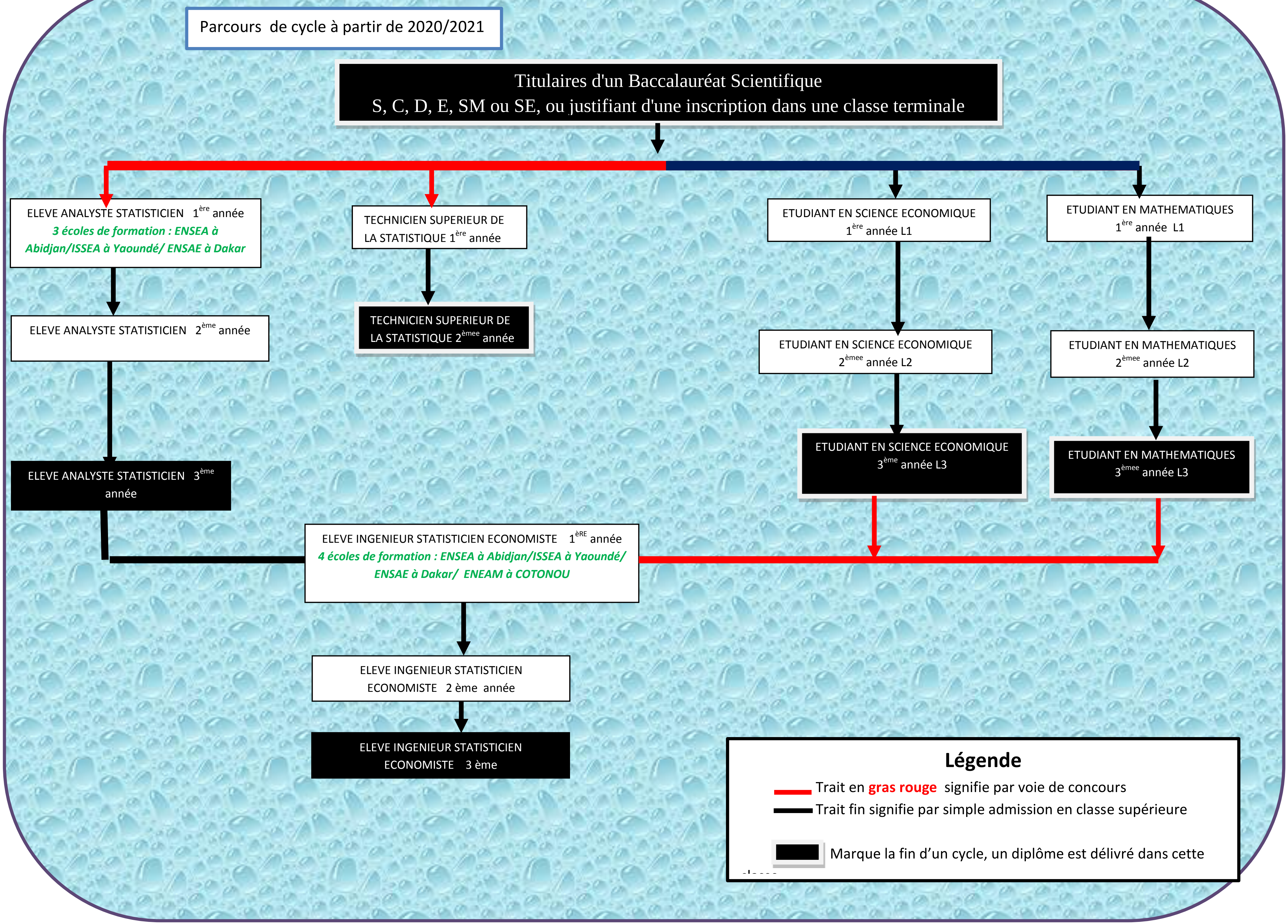
Limite de J(n) :
$J(n) = Ln(1 + 1/n). Ln(n^2).Ln(1 + 1/n) / 2 = Ln(n).Ln^2(1 + 1 / n)$
$J(n) \approx Ln(n)/n^2$ et donc la limite de J(n) est 0.

Exercice 8
On se place dans l'espace E des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, n entier strictement positif.
Soit P un polynôme de E : P(x) = $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
P' étant le polynôme dérivé de P, on définit g, application de E dans E, par :
P → g(P) = P + (1 – x)P'

1) Ecrire les coefficients de g(P) en fonctions des coefficients de P

Posons g(P(x)) = $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$
$b_n = a_n(1 – n)$
$b_0 = a_0 + a_1$
$b_k = a_k(1 – k) + (k + 1) a_{k+1}$

2) Une application f de E dans E est linéaire si pour tous polynômes P et Q de E, et tout réel a, f(aP + Q) = af(P) + f(Q).
L'application g est-elle linéaire ?
Evident


Parcours de cycle à partir de 2020/2021
Titulaires d'un Baccalauréat Scientifique
S, C, D, E, SM ou SE, ou justifiant d'une inscription dans une classe terminale
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 1ère année
3 écoles de formation : ENSEA à Abidjan/ISSEA à Yaoundé/ ENSAE à Dakar
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 2ème année
ELEVE ANALYSTE STATISTICIEN 3ème année
TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 1ère année
TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE 2èmee année
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 1ère année L1
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 2èmee année L2
ETUDIANT EN SCIENCE ECONOMIQUE 3ème année L3
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 1ère année L1
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 2èmee année L2
ETUDIANT EN MATHEMATIQUES 3èmee année L3
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 1èRE année
4 écoles de formation : ENSEA à Abidjan/ISSEA à Yaoundé/ ENSAE à Dakar/ ENEAM à COTONOU
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 2 ème année
ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE 3 ème
Légende
Trait en gras rouge signifie par voie de concours
Trait fin signifie par simple admission en classe supérieure
Marque la fin d'un cycle, un diplôme est délivré dans cette