Fiche de travaux dirigés sur les suites numériques

Exercice 1

1- Montrer que les suites définies, pour tout n entier naturel non nul, par

$u_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$ sont adjacentes.

2- En déduire que la suite de terme général $w_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Exercice 2

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général donné par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2- Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente. Quelle est sa limite ?

4- Montrer que pour tout k entier naturel non nul, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $u_n \geq \ln(n)$ et retrouver le résultat de la question 3-.

5- On introduit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout n entier naturel non nul, par $v_n=u_n-\ln(n)$ et $w_n = u_{n+1}-\ln(n)$. Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 3

On définit pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et tout $x \in [0, 1]$, $P_n(x) = x^n - nx + 1$.

1- A l'aide d'un tableau de variations, montrer que P_n admet une unique racine dans [0,1] que l'on notera u_n. Trouver des relations d'inégalité entre u_n, $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$.

2- Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ puis celle de la suite $(nu_n)_{n\geq 2}$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1=\sqrt{2}$, $u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, …, $u_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{\text{n termes}}$.

1- Déterminer une application f telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

3- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1+\frac{1}{u_n}$. On se propose de montrer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de déterminer sa limite par trois méthodes différentes.

Montrer que la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).

1- a- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{\alpha}|u_n-\alpha|$ |.

b- En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

2-a- Étudier le signe de $u_{n+1}-\alpha$ en fonction de celui de $u_n-\alpha$ et le signe de $u_{n+1}- u_n$ en fonction de celui de $u_n- u_{n-1}$.

b- Montrer par récurrence que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_{2p} \le \alpha \le u_{2p+1}$.

c- Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

d- En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3- Soit $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$.

a- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle correctement définie ?

b- Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. On pourra remarquer que α et sont les racines de l'équation $r^2=r+1$. Quelle est sa limite ?

c- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 6

Soit $a\in]0, 1[$ et f la fonction définie sur [0, 1] par $f(x) = x(1 - x)$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- Etudier les variations de f sur [0, 1].

2- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in]0, 1[$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

3- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n < \frac{1}{n+1}$.

4- On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n = nu_n$.

a- Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers un réel v tel que $0 < v \le 1$.

b- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)=v(1-v)$.

c- On suppose que $v < 1$. En écrivant $v_{2n} - v_n = \sum_{k=n}^{2n-1}(v_{k+1}-v_k)$ et en remarquant que $\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} \ge \frac{1}{2}$, en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait divergente. Conclure.

Exercice 7

Soient a et b deux réels tel que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0=b$ et par les relations de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$, $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite (appelée moyenne arithmetico-géométrique des nombres a et b).

Exercice 8

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n},\, n \geq 2 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$

c. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

3. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Problème

Partie A - Étude préliminaire d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$.

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.
5. Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$.

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et calcul intégral.

1. Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la partie A, construire le tableau des variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie A s'annule.
5. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale : $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie C - Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition Dg de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle I = [−2 ; 0] est incluse dans cet intervalle.

2. a. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle I = [−2 ; 0]. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$.

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \le u_1 \le v_1 \le v_0 \le 0$.
Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle [−2 ; 0], que pour tout entier naturel n strictement positif, on a : $-2 \le u_n \le v_n \le v_{n-1} \le 0$.
Préciser le sens de variation de la suite (v_n).
3. a. Soit m la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $m(x) = x - \ln(1+x)$.
Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1+x) \le x$.

b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\ln\left(1+\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right)$. En déduire que $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle [−2 ; 0], donner un encadrement de $\dfrac{1}{2-v_n}$ et établir que : $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.

Prouver alors que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$.

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?
4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.

Hugues SILA
Professeur honoraire de Mathématiques
Ingénieur Statisticien Économiste