# Fiche de travaux dirigés sur les nombre complexes

## Exercice 0

On note (E) l'équation $X^3 - 3X + 1 = 0$

1) Montrer que (E) a trois solutions réels $X_1$ $X_2$ et $X_3$

2) Montrer que $X^2{}_1X_2X_3 + X_1X_2{}^2X_3 + X_1X_2X^2{}_3 = 0$ et que $X_1{}^2 + X^2{}_2 + X_1X_2 = 0$

3) On pose X=2cos α déterminer la valeur exacte de $X_1$ $X_2$ et $X_3$ sous forme trigonométrique

## Exercice 1

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire $Z$ sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de $z_1$, $z_2$ et $Z$.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $Z$. Placer le point $B$, puis placer les points $A$ et $C$ en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z^{2007}$.

## Exercice 2

$\alpha$ étant un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 2$\pi$] et $z$ un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$, défini par : $P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$.

1. a. Calculer $P(1)$.

b. En déduire l'existence de trois réels $a$, $b$, $c$ tels que $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$. Déterminer $a$, $b$ et $c$.

c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère trois nombres complexes : $z_1 = 1$ ; $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ ; $z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$.

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes $z_1$, $z_2$ et $z_3$.

## Exercice 3

On désigne par $M_n$ le point du plan complexe d'affixe $z_n$ définie par:

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3})$$

où n est un nombre entier naturel et où $M_0$ est le point d'affixe $z_0 = 1$.

1. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $z_n$ est réel.
2. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal. $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité = 8 cm).

a. Représenter dans P les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$.

b. Calculer en fonction de $n$ les longueurs des trois côtés du triangle $OM_nM_{n+1}$. Montrer que ce triangle est rectangle.

3. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. Montrer que la suite $(a_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Calculer $l_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k$. Déterminer la limite de $l_n$ quand n tend vers $+\infty$.

4. a. Calculer en fonction de $n$ l'aire $b_n$ du triangle $OM_nM_{n+1}$.

b. Calculer $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} b_k$. Déterminer la limite de $b_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel $n$, la suite $(z_n)$ de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + i \end{cases}$.

On note $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

1. Calcul de $z_n$ en fonction de $n$ et de $\lambda$.

a. Vérifier les égalités : $z_1 = i$ ; $z_2 = (\lambda+1)i$ ; $z_3 = (\lambda^2+\lambda+1)i$.

b. Démontrer que, pour tout entier $n$ positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} i$.

2. Étude du cas $\lambda = i$.

a. Montrer que $z_4 = 0$.

b. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $z_{n+1}$ en fonction de $z_n$.

c. Montrer que $M_{n+1}$ est l'image de $M_n$ par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Représenter les points $M_0$ ,$M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Caractérisation de certaines suites $(z_n)$.

a. On suppose qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel $k$ tel que, pour tout entier naturel $n$ on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

## Exercice 5

Dans le plan complexe, on considère les points $A$, $B$, $C$, $D$ d'affixes respectives 1, $i$, –1, $-i$.

1. Montrer que le point $M$ d'affixe le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ est sur le cercle de centre $B$ et de rayon 1 si et seulement si $r\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ ou $r = 0$.

2. Montrer que le produit $P = MA \times MB \times MC \times MD$ est égal à $P = \left|z^4 - 1\right|$.

3. En déduire une condition (portant sur $r$ et $\theta$) pour que $P$ soit égal à 1.

4. Déterminer les points $M$ de l'axe des réels tels que $P$ est égal à 1.

5. Déterminer les points $M$ du cercle de centre $O$, de rayon 1 tels que $P$ est égal à 1.

## Exercice 6

On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Mettre $z$ sous forme trigonométrique. Calculer $z^2$ et $z^3$. En déduire $z^{1992}$ et $z^{1994}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle) . En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz-1)^3 + 8 = 0$ . Donner les solutions sous forme algébrique.

## Exercice 7

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Pour tout complexe $z$ on considère dans P les points $M$ d'affixe $z$, $N$ d'affixe $z^2$ et $Q$ d'affixe $z^3$.

1. Déterminer les nombres complexes $z$ pour lesquels deux au moins de ces trois points , $M$, $N$ et $Q$ sont confondus.
2. Dans ce qui suit on supposera $M$, $N$ et $Q$ deux à deux distincts. Exprimer les distances $MN$ et $MQ$ en fonction de $z$. Déterminer et construire dans P l'ensemble E des points $M$ tels que $MN = MQ$.
3. Montrer que l'angle $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$ a pour mesure un argument de $z + 1$. Déterminer et construire l'ensemble F des points $M$ tels que le triangle $MNQ$ soit rectangle en $M$.
4. Dans cette question $z = -1 - i$.

Calculer les affixes de $N$ et $Q$ et construire le triangle $MNQ$ dans le plan P. Que peut on constater ? Expliquer ce résultat à partir des questions 2. et 3.

## Exercice 8

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note $I$, $A$, $B$, $C$, $D$ les points du plan complexe d'affixes 1, $a$, $a^2$, $a^3$, $a^4$.

1. Vérifier que $a^5 = 1$.
2. Montrer que $IA = AB = BC = CD = DI$.
3. Vérifier que, pour tout $z$ complexe : $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$.
4. En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.
5. Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$.
6. En déduire que $(a+\bar{a})^2 + (a+\bar{a}) - 1 = 0$.
7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
8. Calculer $(a+\bar{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
9. Placer les points $I$, $A$, $B$, $C$ et $D$ dans le plan complexe (unité 4 cm).

## Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm. On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note $A_n$ le point du plan d'affixe $z_n$.

1. Calculer $z_1, z_2, z_3, z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel. Placer les points $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ sur une figure.
2. Pour tout entier $n$, on pose $u_n = |z_n|$. Justifier que $(u_n)$ est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
3. A partir de quel rang $n_0$ tous les points $A_n$ appartiennent-ils au disque de centre $O$ et de rayon 0,1 ?
4. a. Établir que, pour tout entier naturel $n$, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$. En déduire la nature du triangle $OA_nA_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel $n$, on note $l_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ .On a ainsi $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer $l_n$ en fonction de $n$. Quelle est la limite de la suite $(l_n)$ ?

## Exercice 10

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(2)$. Soit un réel $\theta$ appartenant à $]0\,;\pi[$. On note $P$ le point d'affixe $z_P = 1 + e^{2i\theta}$.

1. Montrer que le point $P$ appartient au cercle (C) de centre $A$ et de rayon 1.
2. Exprimer l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AP}\right)$ en fonction de $\theta$.

En déduire l'ensemble (E) des points $P$ quand $\theta$ décrit l'intervalle $]0\,;\pi[$.

3. On appelle $P$ ' l'image de $P$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $-2\theta$ et on note $z_{P'}$ l'affixe de $P$ '.
Montrer que $z_{P'} = \overline{z}_P$, puis que $P$ ' appartient au cercle (C).
4. Dans toute la suite on prend $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On appelle $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $A$' l'image de $A$ par $r$.

a. Définir l'image (C') du cercle (C) par $r$.
b. Déterminer les affixes de $P$ et de $P$ ' image de $P$ par $r$.
c. Placer sur une figure $A$, $B$, (C), $P$, (C') et $P$ '.
d. Démontrer que le triangle $AMO$ est équilatéral.
e. Soit le point $Q$ symétrique de $P$ par rapport à $A$. Montrer que $P$ ' est le milieu de $[A'Q]$.

## Exercice 11

Soit la famille d'équation :(E) $\boldsymbol{Z^2 - (1 + i\sin 2\theta)Z + \frac{i}{2}\sin 2\theta} = 0$ dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle ]-π/2  π/2[ .

Soit P le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O ; u ; v)

À tout complexe Z=x+i y (x ; y) $\in$ $R^2$ , on associe le point M(x ;y) dans P.

1. Résoudre (E) dans C préciser le cas des racines doubles
2. Soit M'(θ) et M''(θ) les points de P associés aux solutions Z'(θ) et Z''(θ) de l'équation (E) et soit I(θ) le milieu du segment) M''(θ) , déterminer l'ensemble des points I(θ) quand θ décrit ]-π/2 π/2[
3. Quand θ d'écrit l'intervalle ]-π/2 π/2[ Montrer que l'ensemble M'(θ) et M''(θ) est un cercle que l'on précisera.

Démontrer que lorsque que M'(θ) et M''(θ) sont distincts que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ

faire une figure avec x=π/6 ).

**Hugues SILA**
**Professeur honoraire de Mathématiques**
**Ingénieur Statisticien Économiste**