Fiche de travaux dirigés sur le calcul intégral

Exercice 0

Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.
2. a. Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Etablir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
c. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. a. Justifier l'inégalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout x de [0, 1].
b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. a. En utilisant une intégration par parties, montrer que In = $I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.
b. Montrer que 0 ≤ $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$ et en déduire un encadrement de I_n.
c. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n : $I_n = \frac{1}{e(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.
3. a. En déduire pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n - \frac{1}{e(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 2

Soit $I_n = \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \, dx$.

1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n+1)I_n = -2nI_{n-1}$.
2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 3

1. Vérifier que $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
En déduire la limite quand l'entier n tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

2. Soit u la suite réelle définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$; on pourra utiliser une intégration par parties. En déduire la limite de u_n et celle de nu_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit I la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. a. Calculer I_0 et I_1.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \le \frac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite I.

2. Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$, et $I_n = \frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!} + \frac{n!}{(n+p)!} I_{n+p}$.

b. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $0 \le I_n - \frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!} \le \frac{n!}{(n+p+1)!} \le \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$.

Exercice 5

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. Quelle est la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$? Calculer I_0.

2. Calculer I_1.

3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. Etablir à l'aide d'une intégration par parties que $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$.

Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 6

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

1. Etude de la suite $(J_n)_{n\ge1}$.

a. Calculer J_1.

b. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1, $0 \le J_n \le \frac{1}{n+1}$.

c. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\ge1}$.

2. Etude de la suite $(I_n)_{n\ge1}$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

b. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\ge1}$.

c. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Calculez les intégrales suivantes (la rédaction doit être détaillée) :

a) $\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-1)dx$; b) $\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$; c) $\int_{1}^{e}\frac{\ln t}{t}\,dt$; d) $\int_{1}^{2}2e^{3x}dx$; e) $\int_{0}^{3}\frac{5}{\sqrt{2x+3}}dx$; f) $\int_{1}^{2}(x+1)\ln x\,dx$; g) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}\,dx$; i) $\int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)dx$; j) $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3u-1)^2}du$; k) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$; l) $\int_{0}^{2}3e^{2x}dx$;

m) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$; n) $\int_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$; o) $\int_{1}^{e}\frac{\ln 2t}{t^2}\,dt$; p) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,e^{\sin x}\,dx$;

q) $\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt$; r) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+2x)^2}\,dx$; s) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)du$.

t) $\int_{0}^{1}xe^{2x}dx$ u) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x dx$, v) $\int_{1}^{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Exercice 8

1. Calculer $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 x\;dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\tan x$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O\,;\vec{i})$, la droite d'équation $x=\frac{\pi}{4}$ et la courbe (C_f).

Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm^3.

Exercice 9

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

1. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3 qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

2. Soit k la fonction définie par $k(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+x-1$. Factoriser k et en déduire la position relative de C_f et C_P, les courbes représentatives de f et P.

3. A l'aide d'un encadrement de 1+x pour x dans [0 ; 1] montrer que $\frac{1}{240}<\int_0^1 k(x)dx<\frac{1}{120}$.

4. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 P(x)dx$.

5. Déduire des résultats précédents la valeur de l'entier n tel que $\frac{n}{240}<\ln 2<\frac{n+1}{240}$.

6. On considère la suite géométrique u_n de premier terme 1 et de raison $-x$.

a. Calculer la somme des n premiers termes : $s_n(x)=1-x+x^2-...+(-x)^n$; en déduire $f(x)=s_n(x)+\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$.

b. Montrer que $\int_0^a f(x)dx = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + ... + \frac{1}{n+1}(-x)^{n+1} + \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx$.

c. Montrer que sur [0 ; a] on a $-\frac{a^{n+1}}{1+a} \le \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \le \frac{a^{n+1}}{1+a}$ puis que $-\frac{a^{n+2}}{1+a} \le \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx \le \frac{a^{n+2}}{1+a}$. Préciser la limite de $\int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx$.

1. Calculer I_0 et J_0

2. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 11

26. On pose

$$\mathbf{K} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos 2t\,dt, \quad \mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos^2 t\,dt, \quad \mathbf{J} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin^2 t\,dt.$$

Calculer K, I + J et I — J. En déduire I et J.

27. On pose $\mathbf{I_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}dx$, $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ **et** $\mathbf{I_2} = \mathbf{I_1} + \mathbf{I}$.

Calculer $\mathbf{I_2}$ puis $\mathbf{I_1}$. En déduire I.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le f(n) \le \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \le S_n$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 13

Considèrons la famille de fonctions définies à l'aide du paramètre réel λ par :

$$f_\lambda(x) = \left(\lambda(x-1) + \frac{1}{x+1}\right) e^x$$

a) Montrer que toutes les coubes $\mathcal{C}_\lambda$ passent par un même point fixe A que l'on déterminera.

b) Etudier le comportement de f_λ au voisinage de $+\infty$, $-\infty$ et du point -1. On précisera les asymptotes éventuelles.

c) Etudier le sens de variation de f_λ. Montrer que pour $\lambda < 0$ et $\lambda \neq -1$, f_λ admet deux extrêmums d'abscisses non nulles : $x_1(\lambda) < x_2(\lambda)$.

d) Déterminer l'ensemble Γ des points P_λ des courbes $\mathcal{C}_\lambda$ correspondant à ces extrêmums.

c) Tracer sur une même figure les courbes $\mathcal{C}_\lambda$ pour

$$\lambda = -2 ; -1 ; -\frac{1}{2} ; 0 ; 1 ; 2.$$

Exercice 14

Calculer les intégrales suivantes

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$ (Deux méthodes)

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t\, dt}{1 + t^4}.$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)}$, puis $\displaystyle\int_1^2 \frac{\text{Log}(1+t)}{t^2}\, dt.$

Exercice 15

On pose, pour tous entiers naturels, non nuls, a et n

$$I(a, n) = \int_0^1 x^a(1-x)^n \, dx \quad \text{et} \quad I(a, 0) = \int_0^1 x^a \, dx.$$

1° Montrer, en intégrant par parties, que

$$I(a+1, n) = \frac{a+1}{n+1} \cdot I(a, n+1).$$

2° Établir que $I(a, n) - I(a, n+1) = I(a+1, n)$.

En déduire que $I(a, n+1) = \dfrac{n+1}{n+a+2} \cdot I(a, n)$.

3° On fixe l'entier a de $\mathbb{N}^*$. Calculer $I(a, 0)$ et démontrer par récurrence sur n, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$I(a, n) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}{(a+1)(a+2) \dots (a+n+1)}.$$

EXERCICE 16

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$.

1° Calculer I_0 et I_1.

2° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (3+2n) I_n = 2n I_{n-1}$.

Exercice 7

Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1° Calculer I_0, I_1 et I_2.

2° Montrer que, pour tout n entier naturel, on a

$$(n \geqslant 2) \Rightarrow (nI_n = (n-1) I_{n-2}).$$

En déduire la valeur de I_{2p} et I_{2p+1} pour p entier positif.

3° Vérifier que $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow (\cos^n t \leqslant \cos^{n-1} t) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$.

4° Montrer que la suite u définie par, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \dfrac{I_{2p-2}}{I_{2p}}$ converge vers 1 et en déduire

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,\dots\, (2n-2) \,.\, 2n}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \dots (2n-3) \,.\, (2n-1)} \right]^2 \quad \text{(formule de Wallis).}$$

Exercice 8

4. 1° Montrer que, pour tout réel x, différent de -1 et pour tout entier naturel n non nul

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \, dx = \text{Log } 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right].$$

2° Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -(x^n) \leqslant \frac{(-x)^n}{1+x} \leqslant x^n.$$

En déduire les inégalités

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \, dx \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Hugues SILA
Professeur honoraire de Mathématiques
Ingénieur Statisticien Économiste