EXERCICES CORRIGES DE PROBABILITE

Niveau Terminale scientifique (Tle C, D, E, S, S1, S2, SM, SE)

Exercice 1 : Combinatoire avec démonstration

Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \le k < n$, on a : $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$.

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$, on a :

$$C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k} = C_n^k$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.
On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'évènement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a. Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'évènement $\bar{A}$, contraire de A. En déduire la probabilité de A.

b. Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'évènement A et montrer, à l'aide de la formule obtenue à la question 2, que l'on retrouve le même résultat.

Correction exercice 1

Démonstration

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

Il suffit donc de multiplier la fraction $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ par k en haut et en bas, ce qui donne

$$\frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

En mettant $\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$ en facteur on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{k(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k}{n-k}+1\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+n-k}{n-k}\right)\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

et c'est fini.

2. Réécrivons $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$ un rang plus bas pour n et pour k ça donne: $C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$; réécrivons $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$ un rang plus bas pour n mais pas pour k : ça donne également $C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k} = C_{n-1}^{k}$;

Additionnons membre à membre ajoutons les deux lignes : $C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k} = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$.

3. Dans l'urne on a 2 boules rouges et n – 2 boules blanches ; il y a C_n^k tirages simultanés possibles de k boules de l'urne.

a. A = « au moins une boule rouge a été tirée » ; $\bar{A}$ = « aucune boule rouge n'a été tirée » = « les k boules tirées sont blanches » : il y a C_{n-2}^{k} manières de faire et $P(\bar{A}) = \frac{C_{n-2}^{k}}{C_n^k}$. On a donc :

$$P(A) = 1 - \frac{C_{n-2}^{k}}{C_n^k}$$

$$P(A) = \frac{C_n^k - C_{n-2}^{k}}{C_n^k} \qquad (1)$$

b. A peut se produire si on tire 1 rouge et $k-1$ blanches, nombre de manières : $C_2^1.C_{n-2}^{k-1}=2.C_{n-2}^{k-1}$, ou 2 rouges et $k-2$ blanches : nombre de manières : $C_2^2.C_{n-2}^{k-2}=C_{n-2}^{k-2}$.

On a alors $P(\mathrm{A})=\dfrac{2C_{n-2}^{k-1}+C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$ (2).

L'égalité entre les (1) et (2) est alors l'égalité des numérateurs :

$2C_{n-2}^{k-1}+C_{n-2}^{k-2}=C_n^k-C_{n-2}^k$,

soit l'égalité du 2.

Exercice 2 : Rangements

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes (n $\geq$ 2). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?
2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par r – 1 personnes)

Correction exercice 2 Rangements

Le nombre total de possibilités de rangement est $n!$

1. Supposons que A est en premier, B est derrière, il reste $(n-2)!$ répartitions possibles. Comme A peut être placé n'importe où dans la file avec B derrière lui, il y a $(n-1)$ places possibles pour A et donc la probabilité $\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$ d'avoir A suivi de B ; c'est pareil pour B suivi de A, soit la probabilité finale $\dfrac{2}{n}$.

2. Même raisonnement ; au pire B est en dernier et A r places devant ; on peut placer A de $n-r$ manières, la probabilité finale est alors $2\dfrac{(n-r)(n-2)!}{n!}=\dfrac{2(n-r)}{n(n-1)}$. (on peut ainsi retrouver la réponse de la première question avec r=0)

Exercice 3 : Calcul de probabilité d'événements 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A)=\dfrac{1}{5}$ et $P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.
2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.
3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Correction exercice 3

A et B incompatibles donc $A\cap B=\varnothing$ d'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}$.

2. A et B indépendants : $P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}+P(B)-\dfrac{1}{5}P(B)\Rightarrow\dfrac{4}{5}P(B)=\dfrac{3}{10}\Rightarrow P(B)=\dfrac{3}{8}$.

3. A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les événements de A sont dans B,

$P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}+P(B)-\dfrac{1}{5}\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 : Calcul d'événements 2

Soient A, B et C des événements. On pose $E_1=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ et $E_2=A\cap(B\cup C)$.

1. Montrer que E1 et E2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1\cup E_2$.
3. On sait que

$P(A)=0,6$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,3$, $P(B\cap C)=0,1$, $P(A\cap C)=0,1$, $P(A\cap B)=0,2$ et $P(A\cap B\cap C)=0,05$.

Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

Correction exercice 4 Calcul d'événements 2

$E_1\cap E_2=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap(B\cup C)=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap C\right)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

2. $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$ donc en appelant $K=B\cup C$, on a $E_1\cup E_2=\left(A\cap\overline{K}\right)\cup(A\cap K)=A$.

3. On calcule $P(B\cup C)=0,4+0,3-0,1=0,6$, $P\left(\overline{B\cup C}\right)=0,4$; $P(E_1)+P(E_2)=P(A)=0,6$.

$P(A\cup K)=P(A\cup B\cup C)=0,6+0,4+0,3-0,1-0,1-0,2+0,05=0,95$; par ailleurs

$P(A\cup K)=P(A)+P(K)-P(A\cap K)\Rightarrow 0,95=0,6+0,6-P(E_2)\Rightarrow P(E_2)=0,25$

et enfin $P(E_1)=0,6-0,25=0,35$.

Exercice 5 : Dés pipés

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

Correction exercice 5 Dés pipés

Il manque $P(5)=1-3\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

1. Il faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x = 5 ou 6 ; on a donc la probabilité $2\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (on enlève 1/4 pour ne pas compter (6, 6) deux fois).

2. Là c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.

Exercice 6 : Pièces d'or

Trois coffres notés C1, C2, C3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C1 contient 2 pièces d'or, C2 2 pièces d'argent et C3 une pièce d'or et une d'argent.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C2 ?
2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

Correction exercice 6 Pièces d'or

$P(A)=P_{C_1}(A)\times P(C_1)+P_{C_2}(A)\times P(C_2)+P_{C_3}(A)\times P(C_3)=0+1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$;

$P_A(C_2)=\frac{P(A\cap C_2)}{P(A)}=\frac{P_{C_2}(A)\times P(C_2)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$ (ce qui était totalement évident…)

2. Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C_2, donc $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ (attention à l'indépendance, sinon on aurait quelque chose plus compliqué).

Exercice 7 : Boules

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculez la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.

b. Deux boules de couleurs différentes.

Correction exercice 7 : Boules

a. Il y a $C_{14}^2=91$ manières de tirer 2 boules simultanément parmi les 14 boules de la boîte, $C_4^2=6$ manières de tirer 2 rouges parmi les 4 rouges, $C_3^2=3$ manières de tirer 2 vertes parmi les 3 vertes et $C_7^2=21$ manières de tirer 2 jaunes parmi les 7 jaunes.

Probabilité recherchée = $\frac{6+3+21}{91}=0,3297$ soit 32,97%.

b. Comme on tire deux boules, l'événement contraire de « 2 boules de même couleur » est « 2 boules de couleurs différentes ». La probabilité est donc $1-0,3297=0,6703$.

Exercice 8

Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que

- 1182 jouent à la loterie (A)
- 310 vont au casino (B)
- 190 jouent autant à la loterie qu'au casino.

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

Correction exercice 8

a. $P(A)=\frac{1182}{1500}=0,788$, $P(B)=\frac{310}{1500}=0,2067$, $P(A\cap B)=\frac{190}{1500}=0,1267$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,868$.

b. Il y a 310 – 190 joueurs qui jouent uniquement au casino, soit $P(C)=\frac{120}{1500}=0,08$.

Exercice 9 : Conformité 1

D'après les données recueillies jusqu'à ce jour, 2 % de la production d'une unité d'une entreprise est non conforme et ne peut être commercialisée.

a. Quelle est la probabilité que 2 pièces choisies au hasard de la production de cette unité soient non conformes ?

b. Quelle est la probabilité que la première pièce soit non conforme et que la seconde soit conforme ?

Correction exercice 9 Conformité 1

a. On peut toujours utiliser une loi binomiale : $p=0,02$ et $n=2$. La probabilité que l'on ait les deux pièces non conformes est $C_2^2p^2\left(1-p\right)^0=0,02^2=0,0004$.

b. Événements successifs : $P\left(C,\overline{C}\right)=P\left(C\right)p(\overline{C})=0,02\times 0,98=0,0196$.

Exercice 10 : Fumeurs

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

b. Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

Correction exercice 10 : Fumeurs

Formule des probabilités totales :

$$P\left(f\right)=P\left(\left[H\cap f\right]\cup\left[F\cap f\right]\right)=P\left(H\right)P_H\left(f\right)+P\left(F\right)P_F\left(f\right)=\frac{12}{20}\times\frac{20}{100}+\frac{8}{12}\times\frac{40}{100}=0,28.$$

b. Probabilité recherchée = $\frac{0,6\times 0,2}{0,6\times 0,2+0,4\times 0,4}=0,43$.

Exercice 11 : Conformité 2

On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25 % pour X, 35 % pour Y, 40 % pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont :

5 % pour les microprocesseurs de X, 4 % pour ceux de Y et 2 % pour ceux de Z.

Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme ?

b. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type X ?

Correction exercice 11 : Conformité 2

a . A l'aide d'un arbre de probabilités à nouveau nous obtenons 0,25.0,05 + 0,35.0,04 + 0,40.0,02 = 0,0345.

b. $\frac{0,25\times 0,05}{0,25\times 0,05+0,35\times 0,04+0,40\times 0,02}=0,3623$.

Exercice 12 : des Chiens, des chats

On sait que 36 % des foyers ont un chien et que dans 22 % des foyers où l'on a un chien on trouve aussi un chat. On sait par ailleurs que 30% des foyers ont un chat.

a. Quelle est la proportion de foyers dans lesquels on trouve un chien et un chat ?

b. Quelle est la probabilité qu'un foyer possède un chien sachant qu'il possède un chat ?

Correction exercice 12

a. $P(chien)=0,36$ donc $P(chien\cap chat)=P_{chien}(chat)\times P\left(chien\right)=0,22\times 0,36=0,079$.

b. $P(chat)=0,30$, $P_{chat}(chien)=\frac{P(chien\cap chat)}{P(chat)}=\frac{0,079}{0,30}=0,2633$.

Exercice 13 : Maladie

Dans une population, un sujet a une probabilité de 0,3 d'être atteint d'une maladie M.

On sait que si un sujet n'est pas atteint de M, il a 9 chances sur 10 de répondre négativement à un test T et que s'il est atteint de M, il a 8 chances sur 10 de répondre positivement à T.

On fait le test.

a. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit malade ?

b. Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

Correction exercice 13

a. J'ai résolu cet exercice à l'aide d'un arbre de probabilités.

Probabilité recherchée= $\frac{0,3\times 0,8}{0,3\times 0,8+0,7\times 0,1}$ = 77,42%

b. Probabilité recherchée= $\frac{0,3\times\times 0,2}{0,3\times 0,2+0,7\times 0,9}$ = 8,7%.

Exercice 14

Répondre par Vrai ou Faux Puis justifiez

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par U l'événement : « on choisit l'urne U », par V l'événement : « on choisit l'urne V » et par B l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a. On a : $\mathrm{P}\left(B\cap U\right)=\frac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b. On a : $P(B)=\frac{n^2-n+2}{(n+2)(n+1)}$.

c. $P(U/B)=\frac{2}{n^2-n+2}$.

d. Pour que $P(U/B)\le 0,1$, il suffit que $n\ge 4$.

Correction exercice 14

a. **Faux** : $P(B\cap U) = P(U \text{ et } 2 \text{ blanches}) = P(B/U).P(U) = \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

b. **Faux** : Utilisons les probabilités totales : $P(B) = P(B\cap U) + P(B\cap V) = P(B/U)P(U) + P(B/V)P(V)$.

Or $P(B/V) = \frac{C_n^2}{C_{n+2}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$, $P(B) = \frac{1}{2}\frac{2}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$, soit $P(B) = \frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}$.

c. **Vrai :** $P(U/B) = \frac{P(B\cap U)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{2(n+2)(n+1)}}{\frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}} = \frac{2}{n^2-n+2}$.

d. **Faux** : $P(U/B) \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{n^2-n+2} \le 0,1 \Leftrightarrow n^2-n+2 \ge 20 \Leftrightarrow n^2-n-18 \ge 0$; $\Delta=1+72$, soit $\sqrt{\Delta}\approx 8,5$ d'où $n_1 \approx 4,75$; $n_2 \approx -3,75$; le trinôme est positif si $n \ge n_1$, il faut donc que $n \ge 5$. De toutes manières on pouvait tester 4 qui donne $P(U/B) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ qui est trop gros.

Exercice 15

Répondre par Vrai ou Faux Puis justifiez

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle p la probabilité associée à cette expérience. On définit de plus les événements suivants :

* On appelle An l'événement : « Les n – 1 tirages ont donné la même boule et la nième boule tirée est différente des précédentes » ;

* Lorsque k est un entier compris entre 1 et n, on appelle Bk, Vk et Rk les événements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du k ième tirage.

a. $p(B_1\cap\overline{B}_2) = 1 - p(V_1\cap\overline{V}_2) - p(R_1\cap\overline{R}_2)$.

b. $p(A_2) = \frac{2}{3}$.

c. Pour tout entier $n \ge 2$, on a : $p(A_n) = \frac{2}{3^{n-1}}$.

d. $\lim_{n\to\infty}\left[p(A_2)+p(A_3)+...+p(A_n)\right] = \frac{1}{3}$

Correction exercice 15

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	V	F

a. $B_1\cap\overline{B}_2$ se traduit par : « tirer une blanche en 1 et tirer une rouge ou une verte en 2 ». Comme les tirages sont indépendants le mieux est encore de faire le calcul : $p(B_k) = \frac{1}{3}$, $p(\overline{B}_k) = \frac{2}{3}$, et la même chose pour les autres couleurs :

$p(B_1\cap\overline{B}_2) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $1 - p(V_1\cap\overline{V}_2) - p(R_1\cap\overline{R}_2) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$.

b. A_2 est l'événement « tirer une boule d'une couleur en 1 et d'une couleur différente en 2 », soit $p(A_2) = p(B_1\cap\overline{B}_2) + p(V_1\cap\overline{V}_2) + p(R_1\cap\overline{R}_2) = \frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

c. Pour A_n il faut tirer $n-1$ fois la même couleur, soit pour chaque couleur $\frac{1}{3^{n-1}}$ puis tirer une couleur différente, soit $\frac{2}{3}$; comme il y a 3 couleurs, ça nous fait $p(A_n)=3\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\frac{2}{3}=\frac{2}{3^{n-1}}$.

d. La somme $p(A_2)+p(A_3)+...+p(A_n)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $p(A_2)=\frac{2}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$ donc elle vaut $\frac{2}{3}\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3^{n-1}}$ (de 2 à n il y a $n-1$ termes) qui tend vers 1 à l'infini. On pouvait s'en douter dans la mesure où on est sûr de finir par tirer une boule de couleur différente…

Exercice 16

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que p(R) = 0,15.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs 2x, x−1 et − 4.

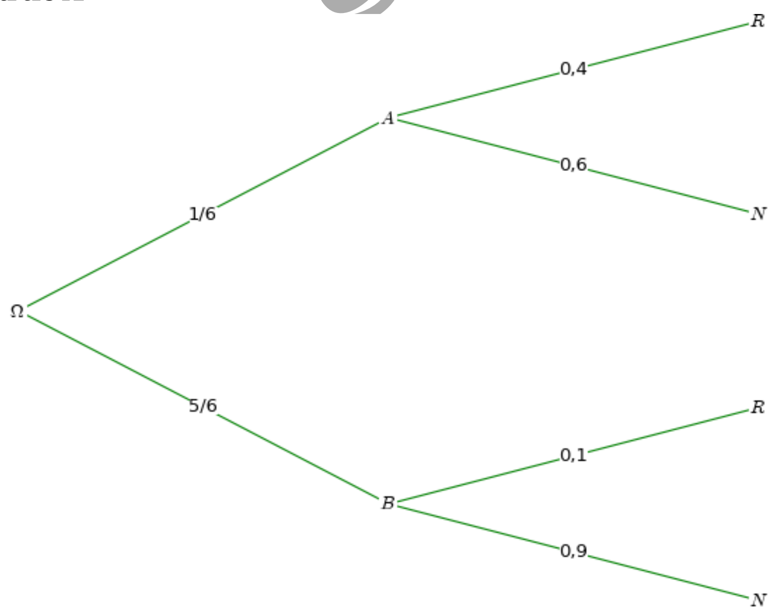
1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on E(G) > 0 ?

Correction exercice 16

Partie A



1. A et B forment une partition de l'univers Ω ; d'après la formule des probabilités totales, on a $p(R)=p(A\cap R)+p(B\cap R)=p_A(R)\times p(A)+p_B(R)\times p(B)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{60}$.

Par conséquent, $p(R)=0{,}15$.

2. Calculons $p_R(A)$ et $p_R(B)$: $p_R(A)=\frac{p(A\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}}=\frac{4}{9}$ et $p_R(B)=\frac{p(B\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}}=\frac{5}{9}$. Donc, si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est inférieure à celle qu'elle provienne de B.

Partie B

L'épreuve décrite dans la partie A est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir une boule rouge ». On a $p=0{,}15$ et $n=2$: $p(X=k)=C_2^k(0{,}15)^k(1-0{,}15)^{2-k}$.

1. $p(G=2x)=p(X=2)=C_2^2(0{,}15)^2=0{,}0225$; $p(G=x-2)=p(X=1)=\binom{2}{1}(0{,}15)^1(0{,}85)^1=0{,}255$;

$p(G=-4)=p(X=0)=C_2^0(0{,}85)^2=0{,}7225$.

2. $E(G)=0{,}0225\times(2x)+0{,}255\times(x-2)+0{,}7225\times(-4)=0{,}3x-3{,}4$.

3. $E(G)\geq 0\Leftrightarrow 0{,}3x-3{,}4\geq 0\Leftrightarrow 0{,}3x\geq 3{,}4\Leftrightarrow x\geq\frac{3{,}4}{0{,}3}\Leftrightarrow x\geq 11{,}33$. Or x est un entier naturel, donc $E(G)\geq 0$ lorsque x est supérieur ou égal à 12.

Exercice 17

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;

* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;

* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ». B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

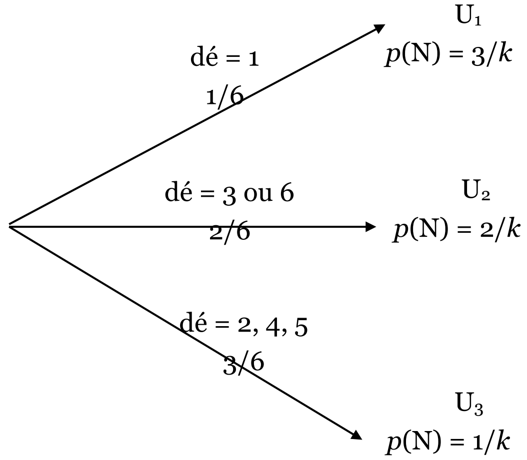
c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

<u>Corrigé</u> exercice 18

On fait un arbre qui donne toutes les réponses immédiatement :



1. a. Pour avoir une boule noire il faut calculer la probabilité d'avoir tiré 1 avec le dé et une noire dans U_1, etc., soit sous forme de probabilité conditionnelle :

$$p(N)=p[(A\cap N)\cup(B\cap N)\cup(C\cap N)]=p(A)p_{U_1}(N)+p(B)p_{U_2}(N)+p(C)p_{U_3}(N).$$

Ceci donne évidemment $p(N)=\frac{1}{6}.\frac{3}{k}+\frac{2}{6}.\frac{2}{k}+\frac{3}{6}.\frac{1}{k}=\frac{10}{6k}=\frac{5}{3k}$.

b. On cherche ici $P_N(dé=1)=\frac{p(A\cap N)}{p(N)}=\frac{1/2k}{5/3k}=\frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3k<10\Leftrightarrow k<\frac{10}{3}$; comme k est entier et supérieur ou égal à 3, il reste k = 3.

d. $\frac{5}{3k}=\frac{1}{30}\Leftrightarrow 3k=150\Leftrightarrow k=50$.

2. Le nombre de fois où on tire une boule noire sur les 20 parties suit une Loi binomiale de paramètres n = 20 et $p=\frac{1}{30}$.

La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est donc

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-C_{20}^{0}\left(\frac{1}{30}\right)^{0}\left(\frac{29}{30}\right)^{20}=1-\left(\frac{29}{30}\right)^{20}\approx 0,492.$$

Exercice 19

Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

- Qualité supérieure : 80% des parcelles
- Qualité moyenne : 15% des parcelles
- Qualité inférieure : 5% des parcelles

Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ?

Corrigé exercice 18

$$P(\sup\cap\sup\cap\sup)=0.8X0.8X0.8=0.512$$

Exercice 19

Soit M (x, y) un point du plan où $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$.

On pose $D=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2=1\}$

On tire aléatoirement des valeurs de x et de y entre 0 et 1. Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

Corrigé exercice 19

La probabilité est égale au rapport des surfaces des deux ensembles (le quart du cercle unitaire et le carré), soit

$$P = \frac{surface \text{ du quart du cercle unité}}{surface \text{ du carré de coté } 1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1}$$

$$P = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 20 : dé cubique + dé parallélépipédique

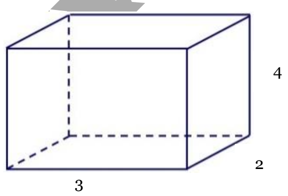
On dispose de deux « dés ».
Le premier dé est un cube composé de 6 faces identiques, dont trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.
Le deuxième dé est un parallélépipède de largeur 2 cm, de longueur 3 cm et de hauteur 4 cm. Les deux plus petites faces (superficie la plus petite) portent le chiffre 1, les deux faces moyennes le chiffre 2 et les deux plus grandes faces le chiffre 3. On jette les deux dés (qui forcément tombent sur une face) et on suppose que la probabilité de tomber sur une face est proportionnelle à sa surface.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus par les deux dés.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité que $X>4$?
3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?

Corrigé exercice 20

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
Pour le premier dé A :
la probabilité de faire 1 est égale à 3/6 car 3 face sur 6 portent le numéro 1,
la probabilité de faire 2 égale à 2/6 car 2 face sur 6 portent le numéro 2,
puis la probabilité d'obtenir 3 est égale à 1/6 car 1 face sur 6 portent le numéro 3.

Pour le premier dé B
la surface totale de toutes les 6 faces est égale à
$s = 2(4X2) + 2(3X2) + 2(4X3) = 52cm^2$



Pour les deux plus petites surfaces (2*3) qui portent la chiffre 1, la probabilité est donc égale à 12/52=3/13.
Pour les deux surfaces moyennes (2*4) qui portent la chiffre 2, la probabilité est donc égale à 16/52=4/13.
Pour les deux plus grandes surfaces (4*3) qui portent la chiffre 3, la probabilité est donc égale

à 24/52=6/13.

La loi de probabilité de X est donc :

X	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{3}{6}X\frac{3}{13}=\frac{9}{78}$	$\frac{2}{6}X\frac{3}{13}+\frac{3}{6}X\frac{4}{13}=\frac{18}{78}$	$\frac{29}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{6}{78}$

2. la probabilité $P(X>4)=\frac{16}{78}+\frac{6}{78}=0,28\ldots$

3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?

L'hypothèse selon laquelle la probabilité que le « dé » parallélépipédique tombe sur une certaine face est proportionnelle à sa surface n'est pas réaliste. En effet, le dé a vraiment une probabilité presque nulle de tomber sur la plus petite face, du fait du positionnement du centre de gravité et de l'angle d'incidence.

Exercice 21

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.
2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

Corrigé exercice 21

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang

$$\tilde{S}=\frac{100}{500}X\ surface\ du\ terrain=\frac{1}{5}X100m^2=200m^2.$$

2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

Première possibilité : augmenter le nombre de flèches tirées, mais ceci présente l'inconvénient d'augmenter les coûts.

Deuxième possibilité : s'assurer que toute la zone est couverte par les flèches, en stratifiant le terrain en rectangles et en envoyant les flèches dans chaque sous rectangle (et sans augmenter le nombre total de flèches).

Exercice 22 : calcul de la moyenne

Dans une épreuve scolaire nationale, le premier groupe d'élèves composé de 120 candidats a obtenu une moyenne égale à 8,20, le second groupe composé de 80 candidats une moyenne de 13,10 et enfin le troisième groupe formé de 100 candidats une moyenne de 9,68. Quelle est la moyenne nationale ?

Corrigé Exercice 22 : calcul de la moyenne

La moyenne nationale est égale à $m=\frac{(8,2x120)+(13,1x80)+(9,68x100)}{(120+80+100)}=10$

Corrigé Exercice 23

On sait que, dans une population donnée, une personne a une certaine maladie *M* avec la probabilité P(*M*) = 0,03. On considère un groupe de 100 sujets pris au hasard dans la population. L'état de maladie d'une personne est supposé indépendant de celui des autres personnes.
1. On s'intéresse d'abord à la probabilité de trouver plus de 2 sujets ayant la maladie *M* dans ce groupe de 100 sujets. Écrire cette probabilité à l'aide d'une variable aléatoire *X:*
2. Quelle loi suit cette variable aléatoire *X* ? Pour *k* un entier positif, donner l'expression de la probabilité P(*X* = *k*), en précisant quelles sont les valeurs possibles de *k*.
3. Notons par *F* la fonction de répartition de la variable aléatoire *X*. Calculer *F*(2).
4. En déduire la probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité de trouver plus de 2 sujets ayant la maladie *M* dans le groupe de 100 sujets.
5. Calculer aussi le nombre moyen des personnes présentant la maladie *M* dans le groupe de 100 sujets

Corrigé Exercice 23

1. Soit *A* l'événement *A* = « trouver plus de 2 sujets ayant la maladie *M* dans le groupe de 100 sujet » et *X* la variable aléatoire qui donne le nombre de sujets ayant la maladie *M* dans ce groupe de 100 personnes. Nous pouvons alors écrire
   P(*A*) = P(*X* > 2)
2. La variable aléatoire *X* suit une loi binomiale *B*(100 ; 0,03), avec
   $P(\mathrm{X}=\mathrm{k}) = C_{100}^{k} 0,03^{k}(1-0,03)^{100-k}$
   $F(2) = P(\mathrm{X} \leq 2) = P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2)$
3. $= 0,97^{100} + 100X\,0,03X\,0,97^{99} + \frac{100X99}{2}X\,0,03^{2}X\,0,97^{98} = 0,4199$
4. P(*A*) = P(*X* > 2) = 1 - P(*X* ≤ 2) = 1 - *F*(2) = 0,5801
5. *Le nombre* moyen de *malades dans le groupe de* 100 *sujets est donné par* $E(X) = 100*0,03 = 3$

Exercices non corrigés (11)

Exercice 1

On lance deux dés cubiques parfaits :

- un dé bleu dont quatre faces portent le numéro 1 et les autres le numéro 6.
- un dé rouge dont deux faces portent le numéro 1, une face le numéro 6 et les autres, le numéro 4.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne :

a. une somme égale à 2 ?

b. une somme égale à 7 ?

2. Les sommes possibles sont-elles équiprobables ?

Exercice 2

Les faces d'un dé cubiques sont numérotées de 1 à 6. On lance trois fois de suite le dé.

1. Combien y-a-t-il de triplets résultats possibles ?

2. Tous les triplets sont supposés équiprobables. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

a. Le premier lancer donne 6.

b. Il y a exactement un 6 sur les trois lancers

c. Il y a exactement deux 6 sur les trois lancers.

d. On a obtenu trois fois le chiffre 6.

e. On n'a jamais obtenu le chiffre 6.

Exercice 3

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets distribués :

- 3 donnent droit à 4 places gratuites ;
- 6 donnent droit à 2 places gratuites ;
- 42 donnent droit à 1 place gratuite ;
- les autres billets ne gagnent rien.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de places gratuites gagnées avec un billet.

Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 4

Une urne contient deux boules rouges, cinq boules blanches et trois boules noires. Un joueur tire une boule de l'urne. Si la boule tirée est rouge il gagne 2 FCFA, si elle est blanche il gagne 3 FCFA et si elle est noire, il perd 5 FCFA. On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le gain du joueur. Déterminer la loi de X.

Exercice 5

Une association sportive organise une loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2000.

Parmi tous les billets :

- un billet rapporte un lot de 1500 FCFA;
- deux billets rapportent chacun un lot de 150 FCFA;
- cinq billets rapportent chacun un lot de 100 €.

Les prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.

À chaque billet, on associe le gain algébrique X qu'il procure à l'acheteur.

1. a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

   b. Calculer la probabilité $P(X = -2)$.

2. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance *de* X. Que peut-on conclure ?

Exercice 6

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	0,15	0,05	0,1	0,2	0,1	a

1. Déterminer la valeur de a.

2. a. Calculer $P(X > 3)$.

b. Calculer $P(X \leq 5)$.

Exercice 7

Un patron d'un chalutier fait une sortie sur sa zone de pêche. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons.

On note B et S les événements suivants :

- B : « Il y a un banc de poissons sur sa zone » ;

- S : « Le sonar détecte la présence de poissons ».

	S	$\overline{S}$	
B	0,56		0,7
$\overline{B}$			
	0,575		1

Une étude statistique sur les sorties dans cette zone et sur la fiabilité du sonar a permis d´etablir que :

$P(B) = 0,7$; $P(S) = 0,575$; $P(B \cap S) = 0,56$.

1. a. Compléter le tableau de probabilité ci-contre :

b. Traduire par une phrase l'événement $\overline{B} \cap S$ et donner sa probabilité.

2. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve dans l'une des situations ci-dessous.

• <u>Situation 1</u> : un banc est présent et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas, le gain estimé est de 2 000 €.

• <u>Situation 2</u> : il n'y a pas de banc de poissons, mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas, on estime la perte à 400 €.

• <u>Situation 3</u> : le sonar ne détecte rien. Le bateau rentre à quai et on estime la perte à 150 €.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique pour une sortie en mer.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Le chalutier effectue de nombreuses sorties. Quel gain moyen par sortie peut-il espérer ?

Exercice 8

Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A et le défaut B.

La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 FCFA pour le défaut A et 150 FCFA pour le défaut B. On admet que 90 % des objets produits n'ont aucun défaut, 4 % ont le seul défaut A, 2 % ont le seul défaut B et 4 % ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel.

Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type de cette variable aléatoire. Que représente $E(X)$ pour l'usine ?

3. On admet que tous les objets produits sont vendus

a. L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 FCFAchaque objet produit ?

b. L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 FCFApar objet. Quel prix de vente doit-elle choisir pour l'objet produit ?

Exercice 9

Une machine fabrique des fils. La probabilité d'obtenir 10 m de fil sans défaut est $p = 0,81$. On suppose que la présence d'un défaut sur le fil est indépendante de la présence d'autres défauts sur ce fil.

Quelle est la probabilité d'avoir 40 m de fil sans défaut ?

Exercice 10

Une urne contient trois boules indiscernables : une rouge R, une verte V et une noire N.

On tire successivement avec remise trois boules de l'urne.

1. Quel est le nombre d'issues ?

2. On considère les événements :

- U : « tirage unicolore »,

- T : « tirage tricolore » et

- B : « tirage bicolore ».

Calculer la probabilité de U, T et B.

Exercice 11

Un dé parfait a ses faces numérotées 1, 1, 1, 2, 2, 4. On lance ce dé trois fois de suite et on note le numéro obtenu.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer sous forme fractionnaire la probabilité des événements suivants :

- A : « le nombre est 421 »,
- B : « le nombre a trois chiffres différents »
- C : « le nombre contient au moins une fois le chiffre 2 ».

3. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où le chiffre 1 est utilisé dans l'écriture du nombre.

Donner la loi de probabilité de X.