**EXERCICES DE MATHEMATIQUES**
**TERMINALE C**
**Nombres complexes**

Proposés par Hugues SILA

1. 1. Divers,QCM,

5 points

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A$ et $\Omega$ d'affixes respectives : $a=-1+\sqrt{3}+i$ et $\omega=-1+2i$.

On appelle $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points $A$ et $\Omega$, l'image $B$ du point $A$ par $r$, l'image $C$ du point $B$ par $r$ et l'image $D$ du point $A$ par $h$.

2. On note $b$, $c$ et $d$ les affixes respectives des points $B$, $C$ et $D$.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\lvert a-\omega\rvert=$ | 2 | 4 | $\sqrt{3}-1$ |
| 2 | $\arg(a-\omega)=$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{47\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 3 | $(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C})=$ | $\arg[(\omega-i)]$ | $-(\vec{v},\overrightarrow{C\Omega})$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
| 4 | $\omega=$ | $\frac{1}{3}(a+b+c)$ | $a+b+c$ | $b-2i$ |
| 5 | $\frac{b-d}{a-d}=$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}i$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}i$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ |
| 6 | Le point $D$ est : | l'image de $\Omega$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$. | l'image de $\Omega$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{3}{2}$. | l'image de $\Omega$ par la rotation de centre $B$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. |

**Annexe**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Réponses | | | |
| 2 | Réponses | | | |
| 3 | Réponses | | | |
| 4 | Réponses | | | |
| 5 | Réponses | | | |
| 6 | Réponses | | | |

1. 2. Qcm,

*3 points*

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

1. Le point $M$ est situé sur le cercle de centre $A(-2\ ;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe $z$ vérifie :

a. $|z-2+5i|^2=3$ ; b. $|z+2-5i|^2=3$ ; c. $|z-2+5i|=3$.

2. On considère trois points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$, deux à deux distincts et tels que le triangle $ABC$ n'est pas équilatéral. Le point $M$ est un point dont l'affixe $z$ est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. $M$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ ;

b. $M$ appartient aux cercles de diamètres respectifs [$AC$] et [$AD$] ;

c. $M$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

3. Soit $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $1+i$ et $5+4i$, et $C$ un point du cercle de diamètre [$AB$]. On appelle $G$ l'isobarycentre des points $A$, $B$ et $C$ et on note $z_G$ son affixe.

a. $|z_G-3-2,5i|=\dfrac{5}{6}$ ; b. $z_G-(1+i)=\dfrac{1}{3}(4+3i)$ ; c. $z_G-(3+2,5i)=\dfrac{1}{3}(4+3i)$.

1. 3. QCM, N.

*4 points*

*Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine $O$.

1. Une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :

a. 3 b. $i$ c. $3+i$

2. Soit $z$ un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

a. $|z|+1$ b. $|z-1|$ c. $|i\bar{z}+1|$

3. Soit $z$ un nombre complexe non nul d'argument $\theta$. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b. $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c. $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit $n$ un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a. $n=3$ b. $n=6k+3$, avec $k$ relatif c. $n=6k$ avec $k$ relatif

5. Soient $A$ et $B$ deux points d'affixe respective $i$ et $-1$. l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant $|z-i|=|z+1|$ est :

a. la droite ($AB$) b. le cercle de diamètre [$AB$] c. la droite perpendiculaire à ($AB$) passant par $O$

6. Soit le point d'affixe $1-i$.

L'ensemble des points $M$ d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1+i|=|3-4i|$ a pour équation :

a. $y=-x+1$ b. $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ c. $z=1-i+5ie^{i\theta}$ avec $\theta$ réel

7. Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point $C$ tel que le triangle $ABC$ soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

a. $1-4i$ b. $-3i$ c. $7+4i$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

a. $\{1-i\}$ b. L'ensemble vide c. $\{1-i\,;1+i\}$

1. 4. QCM

Dans chaque question sont proposées plusieurs réponses, chacune de ces réponses pouvant être vraie ou fausse. Il n'y a pas forcément une seule bonne réponse pour chaque question. Donner pour chaque question les réponses vraies et les réponses fausses. Chaque résultat exact rapportera des points, chaque résultat inexact entraînera une pénalité. Une absence de réponse ne sera pas considérée comme un résultat inexact. Si le total des points, pour une question est négatif, ce total sera ramené à 0.

1. Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ non nuls, on a :

a. $|1+z|\geq 1$. b. Si $|z|=|z-1|$ alors $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$.

c. Si $|z|=|z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$. d. $|z+z'|=|z|+|z'|$.

2. On considère les complexes $a=1-i$ et $b=1+i\sqrt{3}$

a. $ab=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$. b. Il existe un entier $n$ non nul tel que $a^n$ est un réel.

c. Il existe un entier $n$ non nul tel que $a^n$ et $b^n$ sont tous deux des entiers.

d. Le point $A$ d'affixe $a$ est l'image du point $B$ d'affixe $b$ par une rotation de centre $O$.

3. Pour tout réel $\theta$ de $[0\,;2\pi[$ on pose $Z(\theta)=1+e^{i\theta}$. Alors :

a. $Z(\dfrac{2\pi}{3})=e^{i\frac{\pi}{3}}$. b. Pour tout $\theta$ de $[0\,;2\pi[$, $\overline{Z(\theta)}=Z(-\theta)$.

c. Pour tout $\theta$ de $[0\,;2\pi[$, $Z(\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$ est réel.

d. L'ensemble des points $M(\theta)$ d'affixe $Z(\theta)$ est un cercle de rayon 1.

4. Soit $a$ un réel de $]\frac{1}{e}\,;e[$ et (E) l'équation d'inconnue $z$ : $z^2-2z\ln a+1=0$. On appelle $M$ et $N$ les points dont les affixes sont les solutoins de (E). Alors :

a. Les points $M$ et $N$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

b. Les points $M$ et $N$ sont situés sur le cercle de centre $O$ et de rayon 1.

c. Il n'existe aucune valeur de $a$ telle que $M$ et $N$ sont symétriques par rapport à $O$.

d. Si $A$ est le point d'affixe $-1$, on a $AM < 2$.

1. 5. Basique

*5 points*

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit $A$ le point d'affixe $1 + i$.

Au point $M$ d'affixe $z$, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z'=\dfrac{1}{2}(z+i\bar{z})$.

1. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $x$, $y$, $x'$ et $y'$ réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x'=\dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\dfrac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point $M'$ appartient à la droite ($OA$).

b. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point $M$ du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. $M_1$ est le point d'affixe $z_1$ image de $M$ par $r$, $M_2$ le point d'affixe $z_2=\bar{z}$, $M_3$ le point d'affixe $z_3$ tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement $M$ a pour affixe $4 + i$, placer les points $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$.

b. Exprimer $z_1$ en fonction de $z$, puis $z_3$ en fonction de $z$.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2} i z_3$. En déduire que $MM' = \frac{1}{2} OM_3$.

3. Démontrer que les points $M$, $M_1$, $M_2$ et $M_3$ appartiennent à un même cercle de centre $O$ si et seulement si $MM' = \frac{1}{2} OM$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

<u>1. 6. Basique</u>

*5 points*

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points

– $A$ d'affixe $a$, $a \in \mathbb{R}$ ;

– $B$ d'affixe $b + i$, $b \in \mathbb{R}$ ;

– $C$ image de $B$ dans la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer une relation entre $a$ et $b$ pour que le point $C$ appartienne à l'axe $(O\,;\vec{v})$.

b. Exprimer alors l'affixe du point $C$ en fonction de $a$.

2. Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points $C$ d'affixe $c = -i$ et $D$ d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.

a. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

b. Calculer le quotient $\frac{d-a}{c-a}$ ; que peut-on en déduire pour le triangle $ACD$ ?

c. Déterminer l'affixe du point $E$ image de $D$ dans la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d. Déterminer l'affixe du point $F$ image de $D$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

e. Déterminer la nature du triangle $BEF$.

<u>1. 7. 2nd degré et barycentre</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue $z$ : $z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.

2. On considère les points $A$ et $B$ qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.

Calculer les distances $OA$, $OB$ et $AB$. En déduire la nature du triangle $OAB$.

3. On désigne par $C$ le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par $D$ son image par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe $d$ du point $D$.

4. On appelle $G$ le barycentre des points pondérés $(O\,; -1)$, $(D\,; 1)$ et $(B\,; 1)$.

a. Montrer que le point $G$ a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.

b. Placer les points $A$, $B$, $C$, $D$ et $G$ sur une figure (unité graphique : 1 cm).

c. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

5. a. Justifier l'égalité $\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$.

Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle $AGC$ ?

<u>1. 8. 2nd degré</u>

**Partie A**

Soit $P$ le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par: $P(z) = z^2 + 2\sqrt{3}z + 4$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité 4 cm). Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $a = 2i$, $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$.

1. Placer les points $A$, $B$ et $C$ sur une figure.

2. Soit $Z = \dfrac{a-b}{c-b}$.

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $Z$.

b. Écrire $Z$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

c. En déduire la nature du triangle $ABC$ ainsi qu'une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

3. Calculer l'aire du triangle $ABC$ en centimètres carrés.

<u>1. 9. 2nd degré,</u>

1. a. Démonstration de cours : Etudier la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a$, $b$, $c$ étant trois réels avec $a$ non nul.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On appellera $z_1$ et $z_2$ les solutions, $z_1$ ayant sa partie réelle positive.

c. Donner la forme exponentielle de $z_1$ et $z_2$ puis celle de $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère othonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $M_1$ d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, $M_2$ d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et $A$ d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

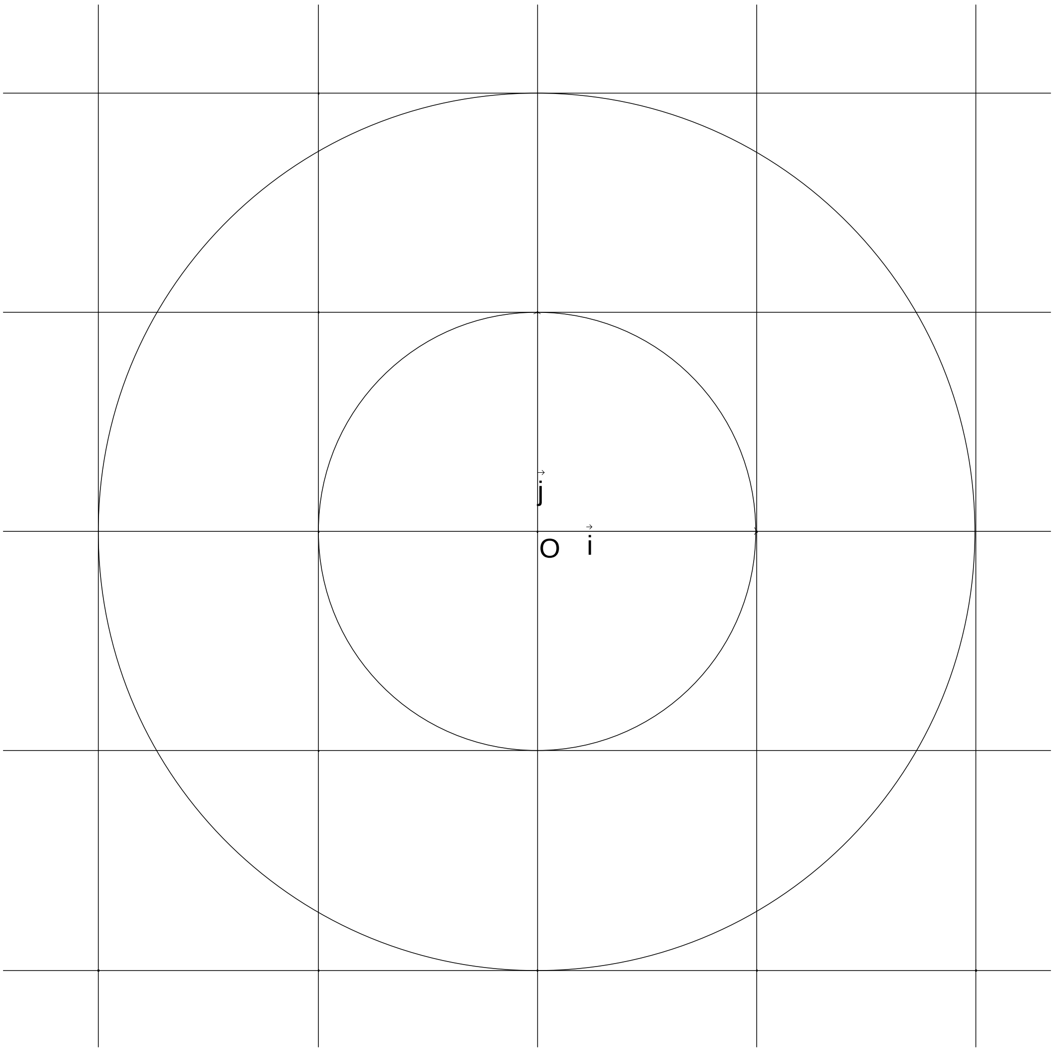
a. Déterminer l'affixe $z_3$ du point $M_3$ image de $M_2$ par l'homothétie $h$ de centre $A$ et de rapport $-3$.

b. Déterminer l'affixe $z_4$ du point $M_4$ image de $M_2$ par la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

c. Représenter les points $O$, $A$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$

d. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$. Que peut-on en conclure ?

1. 10. Petit exo de base




1. Sur la figure ci-dessus placer les points suivants :

$A(1+i)$, $B(2-2i)$, $C(1+i\sqrt{3})$, $D(-\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i)$, $E(1+2i)$, $F(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$, $G(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$, $H(2ie^{-i\frac{3\pi}{4}})$, $K(-\frac{3}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}})$.

2. Lire sur la figure le module et l'argument de chacun des complexes correspondants.

3. Faire le calcul pour $z_B, z_D, z_G, z_H$.

4. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle des conjugués de $z_B, z_D, z_G, z_H$.

5. Calculer $(z_C)^5$, $\frac{(z_A)^3}{(z_H)^4}$, $(z_E)^2(z_K)^6$.

6. Calculer les complexes $z_A - z_E$ et $z_B - z_E$ ; déterminer leurs modules. Calculer $\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E}$, déterminer son module et son argument, en déduire l'angle des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EB}$.

7. On fait une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur les points *E*, *A* et *B*. Si *E*', *A*' et *B*' sont leurs images, quelles sont les affixes de ces trois points. Que vaut alors $\frac{z_{A'} - z_{E'}}{z_{B'} - z_{E'}}$ ?

8. On veut construire un triangle rectangle isocèle *ABM* dont l'hypothénuse est [*AB*]. Lire sur la figure les affixes possibles des points *M*. Donner une méthode pour trouver les points *M*, l'appliquer.

9. Soient $z_1 = 2$, $z_2 = 3i$ et $z_3 = 1 - 2i$, calculer $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$, $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$, $a = \frac{z_1 + z_2}{z_3}$ et $b = (z_3)^3$.

10. Soit *f* la transformation du plan qui à *M* d'affixe *z* associe *M*' d'affixe *z*' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$.
Déterminer l'unique point invariant de *f* et en déduire la nature et les éléments caractéristique de *f*.

1. 11. Cours,

*4 points*

Partie A : restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

($i$) Si $z$ est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r \geq 0 \end{cases}$$

($ii$) Pour tous nombres réels $a$ et $b$ : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{cases}$.

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si $z$ est un nombre complexe, $z$ désigne le conjugué de $z$ et $|z|$ désigne le module de $z$.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors $z^4$ est un nombre réel.

2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

1. 12. Classique

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. On désigne par $i$ le nombre complexe demodule 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient $A$, $B$, $A'$ et $D$ les points du plan complexe d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 4$, $a' = 2i$ et $d = 2 + 2i$.
Quelle est la nature du triangle $ODB$ ?

4. Soient $E$ et $F$ les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$ ?

5. Soit C le cercle de centre $A$ et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre $A'$ et de rayon 2. Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a. On désigne par $E'$ l'image par la rotation $r$ du point $E$. Calculer l'affixe $e'$ du point $E'$.

b. Démontrer que le point $E'$ est un point du cercle C'.

c. Vérifier que : $e - d = \left(\sqrt{3} + 2\right)(e' - d)$. En déduire que les points $E$, $E'$ et $D$ sont alignés.

6. Soit $D'$ l'image du point $D$ par la rotation $r$. Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

1. 13. Transformation ?

A tout nombre complexe $z$ on associe le nombre complexe égal à $f(z) = \frac{1}{6}\left((3+4i)z + 5\overline{z}\right)$

1. Calculer $f(3)$, $f(i)$ et $f(1-4i)$.

2. Exprimer $z' = \frac{f(z) - z}{1+2i}$ à l'aide de $z$ et de $\overline{z}$.

3. En déduire que $z'$ est réel pour tout $z$ complexe.

1. 14. Equation

Soit (E) l'équation complexe : $\frac{1}{z} - 2\overline{z} + z - 1 = 0$.

1. Démontrer que $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels est solution de (E) si et seulement si : $\begin{cases} -x^2 - x - 3y^2 + 1 = 0 \\ (2x-1)y = 0 \end{cases}$.

2. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

1. 15. Cercles

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$, et $c$ telles que : $a = 1 - i$, $b = 1 + i$, $c = -1 + i = -a$. On note $\Gamma$ le cercle de diamètre $[AB]$.

1. a. Placer sur une figure les points $A$, $B$, $C$ et le cercle $\Gamma$.

b. Mettre les nombres complexes $a$, $b$ et $c$ sous forme trigonométrique.

c. Soit $r$ la rotation de centre $O$ telle que $r(A) = B$. Déterminer l'angle de $r$ et le point $r(B)$, image de $B$ par $r$.
d. Déterminer l'image $\Gamma'$ du cercle $\Gamma$ par $r$ ; placer $\Gamma'$ sur la figure.

2. On considère un nombre $\theta$ dans $]0\,;2\pi[$ distinct de $\pi$ ; on note $M$ le point d'affixe $z = 1 + ie^{i\theta}$. On désigne par $M'$ l'image de $M$ par $r$, et on appelle $z'$ l'affixe de $M'$.

a. Montrer que $M$ est un point de $\Gamma$ distinct de $A$ et de $B$.

b. Exprimer $z'$ en fonction de $z$. Calculer en fonction de $\theta$ les affixes $u$ et $u'$ des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

c. Etablir la relation $u = u'\tan\frac{\theta}{2}$.

d. Prouver que les points $B$, $M$ et $M'$ sont alignés. Placer sur la figure un point $M$ et son transformé $M'$.

1. 16. Rotation

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique : 2 cm), on note $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $-i$ et $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Soit R la transformation du plan P qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

1. Placer les points $B$ et $C$ dans le plan P et donner l'écriture de leurs affixes respectives sous la forme exponentielle ($re^{i\theta}$ <<Unknown HTML Tag>>).

2. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R.

3. Déterminer, sous la forme exponentielle, les affixes des images respectives $B'$ et $C'$ par la transformation R des points $B$ et $C$. Placer $B'$ et $C'$ dans le plan P.

Que peut-on dire du point $B'$ ?

Que peut-on dire des points $B'$ et $C'$ relativement à l'axe des abscisses ?

4. a. En utilisant les points $B$ et $C$, déterminer et construire l'ensemble $D$ des points $M$ d'affixe $z$ telle que $|z + i| = \left|z - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right|$.

b. Déterminer l'image $D'$ par la transformation R de l'ensemble $D$.

1. 17. Carrés, rotations et alignement

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère trois points distincts A, B et C d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

a. Interpréter géométriquement l'argument du quotient $\frac{c-a}{b-a}$.

b. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.

2. Placer sur une figure (unité graphique : 1 cm) les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ d'affixes respectives

$$a_1 = 2,\quad b_1 = i\sqrt{3},\quad c_1 = -4 + 3i\sqrt{3}.$$

Montrer, à l'aide de la propriété précédente, que les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ sont alignés.

3. On considère les points $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$, $B_3$, $C_3$ tels que les quadrilatères $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$ soient des carrés directs.

a. Tracer les carrés $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$.

b. Donner les affixes $a_3$ et $b_3$ des points $A_3$ et $B_3$ puis les affixes $a_2$ et $b_2$ des points $A_2$ et $B_2$.

c. À l'aide de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ , calculer l'affixe $c_3$ de $C_3$ à l'aide de $c_1$.

d. En déduire que les points $A_3$, $B_3$ et $C_3$ sont alignés.

4. a. Déterminer le réel $a$ tel que le barycentre du système $\{(O, a), (C_1, 1), (C_3, 1)\}$ soit $C_2$.

(Rappel : le barycentre G du système (A, $\alpha$ ), B, $\beta$ ),... est tel que $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}+...=\vec{0}$ )

b. Calculer l'affixe $c_2$ de $C_2$.

c. Montrer que les points $A_2$, $B_2$, $C_2$ sont alignés.

<u>1. 18. Système+parallélogramme</u>

*5 points*

<u>Partie A</u>

1. Déterminer le complexe $\alpha$ tel que $\begin{cases}\alpha(1+i)=1+3i\\ i\alpha^2=-4+3i\end{cases}$.

2. Pour tout nombre complexe $z$, on pose $f(z)=z^2-(1+3i)z+(-4+3i)$. Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f(z)=0$.

<u>Partie B</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1. On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a=2+i$ et $b=-1+2i$. Placer $A$ et $B$ dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.

Montrer que $b=ia$, en déduire que le triangle $OAB$ est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. On considère le point $C$ d'affixe $c=-1+\frac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point $D$ tel que le triangle $OCD$ soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

On pourra conjecturer l'affixe de $D$ à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit $M$ le milieu du segment $[BC]$. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}=\frac{1}{2}i$.

4. Donner une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OM}\right)$.

5. Prouver que $OM=\frac{1}{2}DA$.

6. On appelle $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.

On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme ; démontrer que c'est un carré.

<u>1. 19. Barycentre, ligne de niveau</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ; on prend comme unité graphique 2 cm.

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz-2=4i-z$. On donnera la solution sous forme algébrique.

2. On désigne par $I$, $A$ et $B$ les points d'affixe respectives 1, $2i$ et $3+i$.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Calculer l'affixe $Z_C$ du point $C$ image par $A$ de la symétrie de centre $I$.

c. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.
d. Soit $D$ le point d'affixe $Z_D$ telle que $z_D - z_C = z_A - z_B$, montrer que $ABCD$ est un carré.

3. Pour tout point $M$ du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

c. Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Construire $\Gamma$.

<u>1. 20. Barycentre + ligne de niveau</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 1 cm.

1. On désigne par $A$, $B$ et $I$ les points d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.
a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z=\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle $IAB$ ?
c. Calculer l'affixe $z_C$ du point $C$ image de $I$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport 2.
d. Soit $D$ le barycentre du système $\{(A, 1) ; (B, -1) ; (C, 1)\}$ ; calculer l'affixe $z_D$ du point $D$.
e. Montrer que $ABCD$ est un carré.
2. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma_1$ des points $M$ du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble $\Gamma_2$ des points $M$ du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$.

a. Montrer que B appartient à $\Gamma_2$.

b. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma_2$.

<u>1. 21. 3ème degré, barycentre, ligne de niveau</u>

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z$ : (E) $Z^3-12Z^2+48Z-128=0$.
a. Vérifier que 8 est solution de cette équation.
Déterminer les nombres réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que, pour tout complexe $Z$,

$$Z^3-12Z^2+48Z-128=(Z-8)(\alpha Z^2+\beta Z+\gamma).$$

b. Résoudre l'équation (E).
2. $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 1 cm.

On considère les points $A$, $B$, $C$ d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}$, $b=2+2i\sqrt{3}$, $c=8$.

a. Calculer le module de $a$ (noté $|a|$) et son argument $\theta$. Placer les trois points $A$, $B$ et $C$.

b. Calculer le complexe $q=\frac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument $\theta$. En déduire la nature du triangle $ABC$.

c. Déterminer le barycentre $D$ des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$. Placer $D$.

d. Déterminer l'ensemble E des points $M$ du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$. Tracer E.

<u>1. 22. 3ème degré, rotation,</u>

<u>Première partie</u>

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante : (E) $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$, où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Placer les points $A$, $B$ et $D$ d'affixes respectives $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.
2. Calculer l'affixe $z_C$ du point $C$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer $C$.
3. Soit $E$ l'image de $C$ par la rotation de centre $B$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et $F$ l'image de $C$ par la rotation de centre $D$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Calculer les affixes des points $E$ et $F$, notées $z_E$ et $z_F$.
b. Placer les points $E$ et $F$.

4. a. Vérifier que : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

b. En déduire la nature du triangle $AEF$.

5. Soit $I$ le milieu de $[EF]$. Déterminer l'image du triangle $EBA$ par la rotation de centre $I$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1. 23. 3ème degré+rotation

*5 points*

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où $z$ est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe $i$ est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout nombre complexe $z$ on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $i$, $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

1. Soit $r$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point $A'$, image du point $A$ par la rotation $r$.
2. Démontrer que les points $A'$, $B$ et $C$ sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre $B$ qui transforme $C$ en $A'$.

1. 24. Orthocentre,

*5 points*

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu' un nombre complexe $z$ est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe $z$ est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe $z$, on a l'égalité : $z\bar{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct . On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets $A$, $B$, $C$, deux à deux distincts, d'affixes respective $a$, $b$, $c$, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine $O$, a pour orthocentre le point $H$ d'affixe $a+b+c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Vérifier que $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.
2. Placer les points $A$, $B$, $C$ et le point $H$ d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

III. Étude du cas general

$ABC$ est un triangle dont $O$ est le centre du cercle circonscrit, et $a$, $b$, $c$ sont les affixes respectives des points $A$, $B$, $C$.

1. Justifier le fait que $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ si et seulement si : $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$.
1. On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que $w$ est imaginaire pur.

b. Verifier l'égalité : $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)=w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

2. Soit $H$ le point d'affixe $a+b+c$.

a. Exprimer en fonction de $a$, $b$ et $c$ les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b. Prouver que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c. Que représente le point $H$ pour le triangle $ABC$ ?

1. 25. Produit scalaire

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm). $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes et on pose : $\varphi(z,z')=z\overline{z}'+\overline{z}z'$. $\overline{z}$ et $\overline{z}'$ désignent les conjugués respectifs de $z$ et $z'$.

1. Calculer : $\varphi(i, 3)$ ; $\varphi(1+2i, -2+i)$, $\varphi(2+i, -3+2i)$, $\varphi\left(e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Montrer que pour tout couple $(z, z')$ le nombre $\varphi(z, z')$ est réel.

2. a. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ ; $x, y, x', y'$ réels. Calculer $\varphi(z, z')$ en fonction de $x, x', y, y'$.

b. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe $z$ tels que $\varphi(z, 1+i)=2\sqrt{2}$. Dessiner D.

3. a. On pose $z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$ ; $\theta$ et $\theta'$ réels, $r$ et $r'$ réels positifs. Calculer $\varphi(z, z')$ en fonction de $r$, $r'$ et $\cos(\theta-\theta')$.

b. Exprimer $\varphi(z, z')$ en fonction de $r$.

c. Déterminer l'ensemble C des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\varphi(z, z')=2$.

d. Dessiner C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Que peut-on dire de la position relative de C et D ? Justifier la réponse.

1. 26. Forme algébrique & trigo de pi/12 -1

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives : $Z_A=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $Z_B=1-i$, $Z_C=\dfrac{Z_A}{Z_B}$.

1. a. Écrire $Z_C$ sous forme algébrique.

b. Déterminer le module et un argument de $Z_A$ et de $Z_B$.

c. Écrire $Z_C$ sous forme trigonométrique ; en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Soit $I$ le point d'affixe $Z_I=1$.

a. Quelle est la nature du triangle $OIB$ ?

b. Déterminer les images de $I$ et $B$ dans la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$. En déduire la nature du triangle $OAC$.

1. 27. Forme algébrique & trigo de pi/12 -2

Soit les nombres complexes : $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

a. Mettre sous forme trigonométrique $z_1$, $z_2$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

b. En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

c. On considère l'équation d'inconnue réelle $x$ : $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$.

Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

1. 28. Forme algébrique & trigo de pi/12 -3

Le plan complexe $P$ est rapporté à un repere orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. On considère dans $P$ les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = -1-i$ et $z_C = -(2+\sqrt{3})+i$.

1. a. Calculer le module et un argument du nombre complexe $W = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

b. En déduire la nature du triangle $ABC$.

2. a. Écrire le nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.

b. Écrire les nombres $z_A$ et $z_B$ sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{z_A}{z_B}$.

c. À l'aide des deux questions précédentes donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

1. 29. pi/12 –4,

*5 points*

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6}$, $z_2 = 2+2i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire $Z$ sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de $z_1$, $z_2$ et $Z$.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $Z$. Placer le point $B$, puis placer les points $A$ et $C$ en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z^{2007}$.

1. 30. Equation du second degré - 1

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe $z$ : $z^2-2z+4=0$. On notera $z_1$ la solution dont la partie imaginaire est positive et $z_2$ l'autre. Donner le module et l'argument de chacun des nombres $z_1$, $z_2$, $z_1^2$, $z_2^2$. Ecrire sous forme algébrique $z_1^2$ et $z_2^2$.

2. On considère dans le plan les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$, $C(-2+2i\sqrt{3})$ et $D(-2-2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points $A$, $B$, $C$ et $D$ dans le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

b. Montrer que les points $O$, $A$ et $D$ d'une part et les points $O$, $B$ et $C$ d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$ ?

c. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ? Montrer que les droites $AB$ et $AC$ sont perpendiculaires.

1. 31. Equation du second degré - 2

$\alpha$ étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ et $z$ un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$, défini par : $P(z) = z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$.

1. a. Calculer $P(1)$.

b. En déduire l'existence de trois réels $a$, $b$, $c$ tels que $P(z) = (z-1)(az^2+bz+c)$. Déterminer $a$, $b$ et $c$.

c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère trois nombres complexes : $z_1 = 1$ ; $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ ; $z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$.

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes $z_1$, $z_2$ et $z_3$.

1. 32. Médiatrice - 1

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. Soit (D) l'ensemble des points $M$ de (P) d'affixe $z$ vérifiant (1) : $|z-3i| = |z+2-i|$.

1. En écrivant $z = x+iy$, montrer par le calcul que (D) est une droite dont on donnera une équation.

2. On se propose dans cette question de vérifier le résultat du 1. Soit $A$ le point d'affixe $3i$ et $B$ le point d'affixe $-2+i$.

a. Placer $A$ et $B$ dans le repère $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

b. En interprétant géométriquement la relation (1) à l'aide des points $A$ et $B$, re-démontrer que (D) est une droite. Tracer (D).

c. Retrouver alors par le calcul l'équation de (D) obtenue au 1.

1. 33. Médiatrice - 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 3 cm.

1. Placer les points $B$ et $D$ d'affixes respectives $z_B=\sqrt{3}+i$, $z_D=\sqrt{3}-i$. On complètera la figure dans les questions suivantes.

2. Montrer que le triangle $ODB$ est un triangle équilatéral.

3. Soit $E$ le point d'affixe $z_E=e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

a. Le point $A$ est l'image de $E$ par la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe $z_A$ du point $A$ et vérifier que $A$ est le milieu du segment $[OB]$.

b. Le point $C$ est l'image de $E$ par la translation $t$ de vecteur $2\vec{v}$. Déterminer l'affixe $z_C$ du point $C$.

4. Calculer $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ et déterminer un argument de ce nombre complexe.

5. Déduire des questions précédentes que la droite $(CD)$ est la médiatrice du segment $[OB]$.

1. 34. Suite géométrique

On désigne par $M_n$ le point du plan complexe d'affixe $z_n$ définie par:

$$z_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$$

où n est un nombre entier naturel et où $M_0$ est le point d'affixe $z_0=1$.

1. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $z_n$ est réel.

2.Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal.$(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ (unité = 8 cm).

a. Représenter dans P les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$.

b. Calculer en fonction de $n$ les longueurs des trois côtés du triangle $OM_nM_{n+1}$. Montrer que ce triangle est rectangle.

3. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n=|z_{n+1}-z_n|$.

a. Montrer que la suite $(a_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Calculer $l_n=\sum_{k=0}^{k=n}a_k$. Déterminer la limite de $l_n$ quand n tend vers $+\infty$.

4. a. Calculer en fonction de $n$ l'aire $b_n$ du triangle $OM_nM_{n+1}$.

b. Calculer $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}b_k$. Déterminer la limite de $b_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

1. 35. Suite arithmético-géométrique

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel $n$, la suite $(z_n)$ de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\lambda z_n+i \end{cases}$.

On note $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

1. Calcul de $z_n$ en fonction de $n$ et de $\lambda$.

a. Vérifier les égalités : $z_1=i$ ; $z_2=(\lambda+1)i$ ; $z_3=\left(\lambda^2+\lambda+1\right)i$.

b. Démontrer que, pour tout entier $n$ positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} i$ .

2. Étude du cas $\lambda = i$ .

a. Montrer que $z_4 = 0$.

b. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $z_{n+1}$ en fonction de $z_n$.

c. Montrer que $M_{n+1}$ est l'image de $M_n$ par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Représenter les points $M_0$ ,$M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

3. Caractérisation de certaines suites $(z_n)$.

a. On suppose qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel $k$ tel que, pour tout entier naturel $n$ on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

<u>1. 36. Suite de carrés,</u>

*5 points*

Dans le plan complexe ($P$)muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, d'unité 2 cm, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives : $z_A = -i$ ; $z_B = 3$ ; $z_C = 2+3i$ et $z_D = -1+2i$.

1. Placer sur une figure les points $A$, $B$, $C$ et $D$.

2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ .

b. Calculer le complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ .

c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [$AC$] et [$BD$] ?

3. a. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier.

b. Calculer l'aire $s_0$ du quadrilatère $ABCD$.

4. a. Placer sur la figure précédente les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ et $D_1$ tels que $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C}$ , où les points $A_1$ et $B_1$ appartiennent à [$DC$], le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant un carré situé àl'extérieur du quadrilatère $ABCD$.

b. Tracer le carré $A_1B_1C_1D_1$ et déterminer son aire $s_1$.

5. a. On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$ et $D_{n+1}$ tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_n}$ où les points $A_{n+1}$ et $B_{n+1}$ appartiennent à [$D_nC_n$], le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$.

Tracer le carré $A_2B_2C_2D_2$.

b. Soit $s_n$ l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$. Exprimer $s_{n+1}$ en fonction de $s_n$, puis de $n$. En déduire $s_n$, en fonction de $n$.

c. Déterminer, en fonction de $n$, l'aire $S_n$ de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère $ABCD$ et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, . . . et $A_nB_nC_nD_n$.

d. La suite ($s_n$) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

<u>1. 37. Inversion 1</u>

Le plan complexe $P$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

À tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = -\dfrac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

1. a. Déterminer une relation entre les arguments de $z$ et de $z'$.

b. En déduire que les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés.

2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

On nomme $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 1 et – 1. On désigne par C le cercle de centre $A$ contenant le point $O$ et par C* le cercle C privé du point $O$.

3. On suppose dans cette question que le point $M$ appartient à C* .

a. Justifier l'égalité : $|z-1| = 1$. Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point $M'$ à partir du point $M$.

4. Le point $M$ étant un point du plan, d'affixe $z$ non réelle, on nomme $M_1$ son symétrique par rapport à l'axe des réels.

a. Calculer $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $z$. Exprimer alors l'argument de $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$.

b. Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

c. Démontrer que $M'$ appartient au cercle circonscrit au triangle $AMB$.

<u>1. 38. Inversion 2,</u>

*5 points*

$(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P. Soit $A$ le point d'affixe 1; soit $B$ le point d'affixe −1.

Soit $F$ l'application de P privé de $O$ dans P qui à tout point $M$ d'affixe $z$ distinct de $O$ associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \frac{-1}{\overline{z}}$.

1. a. Soit $E$ le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; on appelle $E'$ son image par $F$. Déterminer l'affixe de $E'$ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note $C_1$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Déterminer l'image de $C_1$ par l'application $F$.

2. a. Soit $K$ le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $K'$ l'image de $K$ par $F$. Calculer l'affixe de $K'$.

b. Soit $C_2$ le cercle de centre $O$ et de rayon 2. Déterminer l'image de $C_2$ par l'application $F$.

3. On désigne par $R$ un point d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi\ ; +\pi\right[$. $R$ appartient au cercle $C_3$ de centre $A$ et de rayon 1.

a. Montrer que $z'+1 = \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$. En déduire que : $|z'+1| = |z'|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\pi\ ; +\pi\right[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du 3. a.

<u>1. 39. Inversion 3</u>

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique 2 cm.

Soit $f$ l'application qui à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \frac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application $f$ est le point $J$ d'affixe 1.

3. Soit $\alpha$ un nombre complexe non nul. Démontrer que le point $A$ d'affixe $\alpha$ admet un antécédent unique par $f$, dont on précisera l'affixe.

4. a. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si $r$ désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par $f$ du cercle de centre $O$ et de rayon $r$.

c. Choisir un point $P$ du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que O$P$ = 3, et construire géométriquement son image $P'$ par $f$.

5. On considère le cercle $C_1$, de centre $J$ et de rayon 1. Montrer que l'image par $f$ de tout point de $C_1$, distinct de $O$, appartient à la droite $D$ d'équation $x = 2$.

<u>1. 40. Homographie,</u>

*4 points*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $a = 3$, $b = 5- 2i$ et $c = 5+2i$. On désigne par $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$. Soit $M$ un point d'affixe $z$ du plan, distinct des points $A$ et $B$.

a. Montrer que $ABC$ est un triangle rectangle isocèle.

b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\frac{z-3}{z-5+2i}$.

c. Déterminer alors l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\frac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2. Soit $\Gamma$ le cercle circonscrit au triangle *ABC* et $\Omega$ le point d'affixe $2 - i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'image $\Gamma'$ de $\Gamma$ par la rotation $r$. Déterminer une équation paramétrique de $\Gamma'$.

1. 41. Homographie+ROC

*4 points*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe $z$, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg z = (\vec{u}, \vec{w})$ à $2k\pi$ près.

Partie A : restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls. Démontrer que : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

Partie B

On note $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $-i$ et $3i$. On note $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan, d'affixe $z$, distinct de A, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que : $z' = \frac{iz+3}{z+i}$.

1. Étude de quelques cas particuliers.

a. Démontrer que $f$ admet deux points invariants $J$ et $K$ appartenant au cercle de diamètre [$AB$]. Placer ces points sur le dessin.

b. On note $C$ le point d'affixe $c = -2 + i$. Démontrer que le point $C'$, image de $C$ par $f$, appartient à l'axe des abscisses.

2. Pour tout point $M$ du plan distinct de $A$ et $B$, démontrer que $\arg z' = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2}$ à $2k\pi$ près.

3. Étude de deux ensembles de points.

a. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $z'$ soit un nombre complexe imaginaire pur.

b. Soit $M$ d'affixe $z$ un point du cercie de diamètre [$AB$] privé des points $A$ et $B$. À quel ensemble appartient le point $M'$ ?

1. 42. Homographie 1

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives : $z_A = -2i$, $z_B = 4 - 2i$, $z_C = 4 + 2i$, $z_D = 1$.

1. a. Placer les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sur une figure, qui sera peu à peu complétée. On prendra pour unité graphique 2 cm.

b. Préciser la nature du triangle $ABC$.

2. On désigne par F l'application qui, à tout point $M$ de P, d'affixe $z$ et distinct de $A$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = \frac{z-(4+2i)}{z+2i}$.

a. Déterminer les images de $B$ et $C$ par F.

b. Déterminer l'ensemble E des points d'affixe $z$ tels que $|z'| = 1$. Construire E.

3. a. Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ distinct de $-2i$, on a : $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.

b. En déduire que si $M$ est sur un cercle de centre $A$ et de rayon $r$, $M'$ est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. De même montrer que si $M$ est sur une droite passant par $A$, alors $M'$ est sur une droite passant par $D$.

**Variante originelle**

3. a. Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ distinct de $-2i$, on a : $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.

b. Montrer que, pour tout point $M$, distinct de $A$, et dont l'image par F est notée $M'$, on a :

$$\begin{cases} M' \neq D \\ DM' \times AM = 4\sqrt{2} \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

1. 43. Homographie 2

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. On note $A$ le point d'affixe $i$ et $B$ celui d'affixe $-2i$. $M$ le point d'affixe $z$ et $M'$ le point d'affixe $z'$.

Soit $f$ l'application du plan complexe définie par : $f(z)=z'=\dfrac{2z-i}{iz+1}$.

1. Soit $z$ un complexe différent de i.

a. On désigne par $r$ et $\theta$ le module et un argument de $z - i$. Interpréter géométriquement $r$ et $\theta$.

b. Montrer que $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

c. On désigne par $r'$ et $\theta'$ le module et un argument de $z' + 2i$. Interpréter géométriquement $r'$ et $\theta'$.

2. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1. Montrer que si $M$ appartient à (C), son image $M'$ par $f$ appartient à un cercle (C') de centre B dont on donnera le rayon.

3. Soit $T$ le point d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

a. Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$ ; en déduire que $T$ appartient au cercle (C).

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AT}\right)$. Tracer le cercle (unité 2 cm) et placer $T$.

c. En utilisant les questions précédentes, construire l'image $T'$ de $T$ par $f$.

1. 44. Homographie 3,

A tout complexe $z$ différent de $3-i$ on associe le complexe $f(z)=\dfrac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1. Calculer $f(1+i)$.

2. Déterminer le complexe $z$ tel que $f(z)=1+i$.

3. On appelle $x$ et $y$ la partie réelle et la partie imaginaire de $z$. déterminer en fonction de $x$ et $y$ la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ de $f(z)$.

4. Dans le plan complexe, on appelle $A$ le point d'affixe $-1-2i$, $B$ le point d'affixe $3-i$ et $M$ le point d'affixe $z$.

Montrer que $\left|f(z)\right|=\dfrac{2MA}{MB}$.

Donner une interprétation de $\arg(f(z))$ à l'aide de l'angle $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})$.

1. 45. Homographie 4,

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on appelle $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 2 et $-2$. À tout point $M$ d'affixe $z$, $z$ différent de 2, on associe le point $N$ d'affixe $\bar{z}$ et $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z'=\dfrac{2z-4}{\bar{z}-2}$.

1. Calculer $z'$ et $\left|z'\right|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + i$.

2. a. Interpréter géométriquement $\left|z-2\right|$ et $\left|\bar{z}-2\right|$.

b. Montrer que, pour tout $z$ distinct de 2, $\left|z'\right|=2$. En déduire une information sur la position de $M'$.

3. Déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ d'affixe $z$ ($z \neq 2$) tels que $M' = B$.

4. On note $Z_{\overrightarrow{AM}}$ et $Z_{\overrightarrow{BM}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$. Montrer que, pour tout point $M$ distinct de $A$ et n'appartenant pas $E$, le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.

5. Un point $M$ distinct de $A$, n'appartenant pas $E$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point $M'$. On illustrera par une figure.

1. 46. Homographie+cercles,

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 1 et $i$. À tout point $M$, distinct de $A$ et d'affixe $z$, est associé le point $M'$ d'affixe $Z$ définie par : $Z=\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. a. Calculer l'affixe du point $C'$ associé au point $C$ d'affixe $-i$.

b. Placer les points $A$, $B$ et $C$.

2. Soit $z = x + iy$ où $x$ et $y$ désignent deux nombres réels.

a. Montrer l'égalité : $Z=\dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2}-i\dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$.

b. Déterminer l'ensemble E des points $M$ d'affixe $z$ telle que $Z$ soit réel.

c. Déterminer l'ensemble F des points $M$ d'affixe $z$ telle que Re($Z$) soit négatif ou nul.

3. a. Écrire le nombre complexe $(1 - i)$ sous forme trigonométrique.

b. Soit $M$ un point d'affixe $z$, distinct de $A$ et de $B$. Montrer que $Z$ est un réel non nul si et seulement s'il existe un entier relatif $k$ tel que $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

c. En déduire l'ensemble des points $M$ vérifiant $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points $M$ vérifiant $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$.

<u>1. 47. Homographie,</u>

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ; $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Soient les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $i$, $1+i$ et $-1+i$.

Soit $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan différent de $A$, d'affixe $z$, associe le point $M'$ du plan d'affixe $z'$ tel que : $z'=\dfrac{iz+2}{z-i}$.

1. a. Déterminer les images de $B$ et de $C$ par l'application $f$.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de $i$, on a la relation $(z'-i)(z-i)=1$.

c. Soit $D$ le point d'affixe $1+2i$. Placer les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sur une figure (unité graphique 4 cm). Déduire de la question précédente une construction du point $D'$ image du point $D$ par l' application $f$.

2. Soit $R$ un nombre réel strictement positif. Quelle est l'image par l'application $f$ du cercle de centre $A$ et de rayon $R$ ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point $M$ est un imaginaire pur différent de $i$, alors l'affixe du point $M'$ est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application $f$ de l'axe imaginaire privé du point $A$ ?

b. Soit $\Delta$ la droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l' image de la droite $\Delta$ privée du point $A$ par l'application $f$.

<u>1. 48. Carré</u>

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $M$ d'affixe $z_M=2+im$ (où $m$ est un nombre réel) et le carré $MNPQ$ de centre $O$ et tel que $N$ soit l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

1. a. Déterminer, en fonction de $m$ les affixes $z_N$, $z_P$, $z_Q$ des points $N$, $P$ et $Q$.

b. Représenter le carré $MNPQ$ dans le cas particulier où le point $M$ a pour affixe $2 + 3i$.

2. $M$ étant le point d'affixe $z_M = 2 + im$, on note $I$ le milieu du segment $[MN]$ et $J$ le milieu du segment $[NP]$ d'affixes respectives $z_I$ et $z_J$.

Calculer le nombre complexe $w=\dfrac{z_M-z_J}{z_Q-z_I}$.

Donner l'interprétation géométrique du module et de l'argument de $w$, et expliquer, par un raisonnement géométrique, le résultat obtenu.

3. Soit $A$ le point d'affixe 2.

a. Calculer l'affixe $Z$ du vecteur $\overrightarrow{AI}$ . Calculer le module de $Z$, puis, en distinguant les cas $m < -2$ et $m > -2$, déterminer un argument de $Z$.

b. En déduire l'ensemble $\Delta$ décrit par le point $I$ quand $M$ décrit la droite D d'équation $x = 2$. Représenter $\Delta$.

1. 49. Rotation et homothétie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ ayant comme unité graphique 2cm.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

b. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$, exprimer $a$ et $b$ sous forme exponentielle.

c. Placer $A(a)$ et $B(b)$ dans le repère précédent.

2. a. Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Donner l'expression complexe de $r$, puis déterminer l'image $A'$ de $A$ par cette rotation (*On exprimera a' sous forme algébrique et exponentielle*). Placer $A'$ dans le repère précédent.

b. Soit $h$ l'homothétie de centre $O$ et de rapport $-\frac{3}{2}$. Donner l'expression complexe de $h$, puis déterminer l'image $B'$ de $B$ par cette homothétie (*On exprimera b' sous forme algébrique et exponentielle*). Placer $B'$ dans le repère précédent.

1. 50. Homothéties

On considère deux cercles (C) et (C') de centres respectifs $O$ et $O'$ et de rayons respectifs $r$ et $2r$, tangents extérieurement en $A$, de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AA']$.

Soit $M$ un point quelconque de (C) , distinct de $A$ et $B$, et $M'$ le point de (C') tel que le triangle $AMM'$ soit rectangle en $A$ (on prendra pour la figure $r$ = 2cm).

1. a. Déterminer en justifiant les réponses :

- le rapport de l'homothétie $h_1$ de centre $A$ qui transforme (C) en (C').
- le centre $I$ de l'homothétie $h_2$, distincte de $h_1$ qui transforme (C) en (C'). Placer $I$ sur la figure.

b. On note $M_1 = h_1(M)$. Montrer que $M_1$ est le point de (C') diamétralement opposé à $M'$. Déterminer $h_2(M)$ et en déduire que la droite $(MM')$ passe par un point fixe lorsque $M$ décrit le cercle (C) privé des points $A$ et $B$.

2. Soit $\Omega$ le milieu de $[MM']$. Montrer que $\Omega$ appartient à un cercle fixe dont on donnera le centre et le rayon.

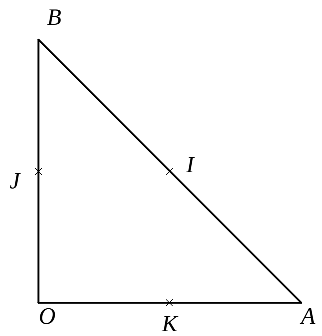
3. On considère le repère orthonormé direct du plan complexe constitué par $O$ et les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ (orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, et de longueur 1, on considère donc que $r$ = 1). Soit $M$ d'affixe $z$ un point de (C). On a donc $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$.

a. Calculer en fonction de $z$ les affixes des points $M_1$ puis $M'$. En déduire l'affixe de $I$.

b. Vérifier que $\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}$ pour tout $\theta$. Montrer que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ est droit.

1. 51. Rotation-translation

Dans le plan orienté, on considère un triangle $ABC$ tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. Soient $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.




On appelle $R$ la rotation de centre $I$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $T$ la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. Déterminer l'image de $K$ par $f$ et l'image de $J$ par $g$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $f$ et $g$.

2. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$. Chercher l'image de $A$ par cette transformation et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

Soit $M$ un point du plan, $M_1$ l'image de $M$ par $f$ et $M_2$ l'image de $M$ par $g$.

3. Déterminer $g \circ f^{-1}(M_1)$. Quelle est la nature du quadrilatère $ACM_2M_1$ ?

4. On choisit le repère $\left(A\ ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Déterminer les affixes des points $I$, $J$ et $K$. Donner l'expression complexe de $f$ et celle de $g$. Déterminer les affixes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$. Conclure.

1. 52. Rotations,

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle $ABC$ tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$. Soit $I$ le point tel que le triangle $CAI$ soit rectangle isocèle avec $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice, on prendra $AB = 5$ cm.

1. On appelle $r_A$ la rotation de centre $A$ qui transforme $B$ en $C$ et $r_C$ la rotation de centre $C$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par $f$ de $A$ et $B$.

b. Démontrer que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre $O$. Placer $O$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $CABO$ ?

2. Soit $s$ la similitude de centre $O$ qui transforme $A$ en $C$. On appelle $C'$ l'image de $C$ par $s$, $H$ le milieu du segment $[BC]$ et $H'$ son image par $s$.

a. Donner une mesure de l'angle de $s$. Montrer que $C'$ appartient à $(OA)$.

b. Donner l'image par $s$ du segment $[OA]$ et montrer que $H'$ est le milieu de $[OB]$.

c. Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à $(OB)$. En déduire que $C'$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $OCB$.

1. 53. Quadrilatère et triangles,

*4 points*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \alpha[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) = \beta[2\pi]$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$.

On construit les triangles équilatéraux $DCP$, $DAQ$, $BAM$ et $BCN$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi],\ \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DQ}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi],\ \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi],\ \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ les affixes respectives des points $A$, $B$, $C$ et $D$, $m$, $n$, $p$ et $q$ les affixes respectives des points $M$, $N$, $P$ et $Q$.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)+b,\ n = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,\ p = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-d)+d,\ q = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogrammme.

b. Démontrer que l'on a : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$, $AC = QP$, $\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et NP = BD.

3. Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient : $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{6}[\pi]$.

1. 54. 3ème degré+Hyperbole

*5 points*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que l'équation (E) s'écrive : $(z-2)(z^2 + az + b) = 0$.

b. Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points $M$ du plan complexe d'affixe $z$ vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$.

a. On note $x$ et $y$ les parties réelle et imaginaire de l'affixe $z$ d'un point $M$. Montrer que : $M$ appartient à (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-i\sqrt{5}$, $-3+i\sqrt{5}$.

Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit $r$ la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation *r* (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note *M'* l'image par *r* du point *M* d'affixe *z*. On note *z'* l'affixe de *M'*. Les parties réelle et imaginaire de *z* sont notées *x* et *y*, celles de *z'* sont notées *x'* et *y'*. On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par *r* est un point de (H).

- Exprimer *x* et *y* en fonction de *x'* et *y'*.
- En utilisant la question 2. a. prouver que : *M'* appartient à (H') si et seulement si $x'y' = -2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

1. 55. Conjugué

4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 2 cm. On appelle *A* le point d'affixe $-2i$.

À tout point *M* du plan d'affixe *z*, on associe le point *M'* d'affixe $z' = -2\overline{z} + 2i$.

1. On considère le point *B* d'affixe $b = 3 - 2i$.

Déterminer la forme algébrique des affixes *a'* et *b'* des points *A'* et *B'* associés respectivement aux points *A* et *B*. Placer ces points sur le dessin.

2. Montrer que si *M* appartient à la droite $(\Delta)$ d'équation $y = -2$ alors *M'* appartient aussi à $(\Delta)$.

3. Démontrer que pour tout point *M* d'affixe *z*, $|z'+2i| = 2|z+2i|$ ; interprétez géométriquement cette égalité.

4. Pour tout point *M* distinct de *A* on appelle $\theta$ un argument de $z + 2i$.

a. Justifier que $\theta$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.

b. Démontrer que $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel négatif ou nul.

c. En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de $\theta$.

d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites [*AM*) et [*AM'*) ?

5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point *M'* associé au point *M*.

1. 56. Transformations + ROC,

*5 points*

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit *R* la rotation du plan de centre $\Omega$, d'affixe $\omega$ et d'angle de mesure $\theta$. L'image par *R* d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega) = \Omega$ ;
- pour tout point *M* du plan, distinct de $\Omega$, l'image *M'* de *M* est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\,[2\pi]$.

On rappelle que pour des points *A* et *B* d'affixes respectives *a* et *b*, $AB = |b-a|$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a)\,[2\pi]$.

*Question* : montrer que les affixes *z* et *z'* d'un point quelconque *M* du plan et de son image *M'* par la rotation *R* sont liées par la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$.

2. On considère les points *I* et *B* d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$. Soit *R* la rotation de centre *B* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de *R*.

b. Soit *A* l'image de *I* par *R*. Calculer l'affixe $z_A$ de *A*.

c. Montrer que *O*, *A* et *B* sont sur un même cercle de centre *I*. En déduire que *OAB* est un triangle rectangle en *A*. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit *T* la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de *A'*.

b. Quelle est la nature du quadrilatère *OIAA'* ?

c. Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

1. 57. Transform.+médiatrice

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 8 cm.

On appelle *A* le point d'affixe –1 et *B* le point d'affixe 1. On appelle E l'ensemble des points du plan distincts de *A*, *O* et *B*.

À tout point *M* d'affixe *z* appartenant à E, on associe le point *N* d'affixe $z^2$ et le point *P* d'affixe $z^3$.

1. Prouver que les points *M*, *N* et *P* sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points *M* appartenant à E tels que le triangle *MNP* soit rectangle en *P*.

a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que *MNP* est rectangle en *P* si et seulement si

$$|z+1|^2+|z|^2=1.$$

b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble C cherché.

3. Soit *M* un point de E et *z* son affixe, on désigne par *r* le module de *z* et $\alpha$ l'argument de *z*, $\alpha\in\,]-\pi\,;+\pi\,]$.

a. Démontrer que l'ensemble F des points *M* de E tels que l'affixe de *P* soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles C et F dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

c. Déterminer les affixes des points *M* de E tels que le triangle *MNP* soit rectangle en *P*, l'affixe de *P* étant un réel strictement positif.

1. 58. Transformation non linéaire

*5 points*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application *f* qui à tout point *M* d'affixe *z* non nulle associe le point *M'* = *f*(*M*) d'affixe *z'* tel que : $z'=\frac{z}{|z|}(2-|z|)$.

Le cercle $C_1$, de centre *O* et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Pour *z* complexe non nul, on note $z=re^{i\alpha}$, *r* étant lemodule de *z* et $\alpha$ un argument de *z*.

1. Montrer que $z'=(2-r)e^{i\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe *a'* du point *A'*, image par *f* du point *A* d'affixe *a* = 3.

3. Soit *B* le point d'affixe $b=-\sqrt{3}+i$.

a. Écrire *b* sous forme exponentielle.

b. Déterminer l'affixe *b'* du point *B'*, image du point *B* par *f*.

4. Placer *A*, *B*, *A'* et *B'* sur la figure.

5. a. Déterminer l'ensemble *E* des points *M* du plan privé du point *O* dont l'image par *f* est *O*.

b. Représenter *E* sur la figure.

6. Montrer que le cercle $C_1$ est l'ensemble des points *M* du plan distincts de *O* tels que *f*(*M*) =*M*.

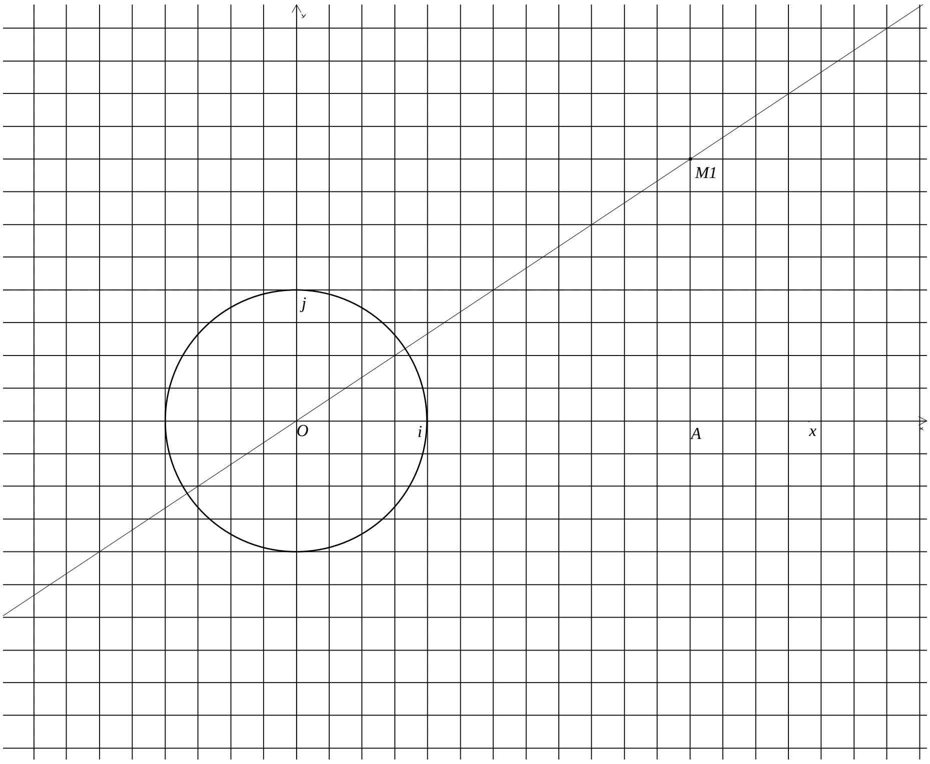
7. Pour cette question, *M* est un point du plan, distinct de *O*, n'appartenant pas au cercle $C_1$.

On appelle *I* le milieu du segment [*MM'*] où *M'* est l'image de *M* par *f*.

a. Montrer que *I* appartient à $C_1$.

b. Montrer que *I* appartient à la demi-droite [*OM*).

c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé $M_1$. Construire le point $M'_1$, image par *f* du point $M_1$.




1. 59. f(z)=z²+1, N.

*5 points*

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la transformation ponctuelle *f* qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M*' d'affixe *z*' définie par : *z*' = $z^2$ +1.

1. Déterminer les antécédents du point *O*.

2. Existe-t-il des points invariants par *f* ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.

3. Montrer que deux points symétriques par rapport à *O* ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?

4. Soit *A* le point d'affixe $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Déterminer l'affixe du point *A*' image de *A* par *f* puis prouver que les points *O*, *A* et *A*' sont alignés.

5. Soit $\theta$ un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 2$\pi$ [ et *N* le point d'affixe $e^{i\theta}$.

a. Montrer que *N* appartient au cercle ( $\Gamma$ ) de centre *O* et de rayon 1.

b. Lorsque $\theta$ varie, montrer que *N*', image du point *N* par *f* reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Vérifier que $\overrightarrow{ON'}=(2\cos\theta)\overrightarrow{ON}$. En déduire que les points *O*, *N* et *N*' sont alignés.

d. Expliquer la construction du point *N*'.

1. 60. f(z)=z²

*5 points*

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point *M* d'affixe *z* on considère les points *M*' et *M*'' d'affixes respectives $z'=z-2$ et $z''=z^2$.

1. a. Déterminer les points *M* pour lesquels $M''=M$.

b. Déterminer les points *M* pour lesquels $M''=M'$.

2. Montrer qu'il existe exactement deux points $M_1$ et $M_2$ dont les images $M_1', M_1'', M_2', M_2''$ appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.

3. On pose $z=x+iy$ où *x* et *y* sont des nombres réels.

a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z''-z}{z'-z}$.

b. En déduire l'ensemble E des points *M* du plan pour lesquels les points *M*, *M*' et *M*'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.

4. On pose $z=\sqrt{3}e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[\ 0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

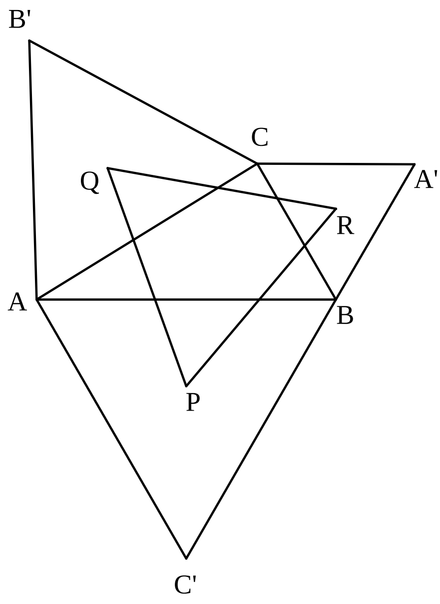
a. Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ d'affixe $z$ ainsi définis et chacun des ensembles $\Gamma'$ et $\Gamma''$ des points $M'$ et $M''$ associés à $M$.

b. Représenter $\Gamma$, $\Gamma'$ et $\Gamma''$ sur la figure précédente.

c. Dans cette question $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Placer le point $M_3$ obtenu pour cette valeur de $\theta$, et les points $M_3'$, $M_3''$ associés. Montrer que le triangle $M_3M_3'M_3''$ est rectangle. Est-il isocèle ?

1. 61. Napoléon

*5 points*




Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'. On considère respectivement les points P, Q et R, centres de gravité respectifs des triangles BCA', ACB' et ABC'.

On note $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $p$, $q$ et $r$ les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P, Q et R.

1. a. Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3. En déduire que les triangles ABC, A'B'C' et PQR ont même centre de gravité.

4. Montrer que : $3(q - p) = (b' - c)+(c - a')+(a - b)$.

On admettra que, de même :

$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$

5. Justifier les égalités suivantes : $a-c=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(b'-c\right)$ ; $b-a'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(c-a'\right)$ ; $c'-b=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(a-b\right)$.

6. Déduire des questions 4. et 5. que le triangle PQR est équilatéral.

1. 62. f(z)=z²−4z+6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 2 et 3.

On fera un dessin (unité graphique : 2 cm) qui sera complété selon les indications de l'énoncé.

On désigne par $f$ l'application du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par l'égalité : $z'=z^2-4z+6$.

1. Cette transformation admet-elle des points invariants ?

2. a. Déterminer le(s) point(s) admettant l'origine $O$ comme transformé.

b. On désigne par $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives : $z_1=2+i\sqrt{2}$ et $z_2=2-i\sqrt{2}$. Déterminer la forme algébrique du complexe $\dfrac{z_1-3}{z_1}$, donner son argument et en déduire la nature du triangle $OBM_1$.

c. Démontrer, sans nouveau calcul, que les points $O$, $B$, $M_1$ et $M_2$ appartiennent à un même cercle (C) que l'on précisera et construira. Placer les points $M_1$ et $M_2$.

3. a. Vérifier que pour tout point $M$ du plan d'affixe $z$ on a : $z'-2=(z-2)^2$.

b. On désigne par $(\Gamma)$ le cercle de centre $A$ et de rayon $\sqrt{2}$. Justifier que les points $M$ du cercle $(\Gamma)$ sont caractérisés par une affixe $z$ vérifiant : $z=2+\sqrt{2}\,e^{i\theta}$, où $\theta$ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\pi]$.

c. Montrer, à l'aide des deux questions précédentes, que si $M$ appartient au cercle $(\Gamma)$, alors l'affixe $z'$ de $M'$ vérifie : $z'=2+2e^{2i\theta}$.

d. En déduire que $M'$ est situé sur un cercle $(\Gamma')$ dont on précisera le centre et le rayon. Construire $\Gamma'$.

e. Déterminer l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'})$ en fonction de $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$.

4. Application : On appelle *D* le point d'affixe $d=2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ ; *D*' est son image par *f*.

a. Ecrire sous forme exponentielle le complexe $d-2$. En déduire que *D* est situé sur le cercle $(\Gamma)$.

b. A l'aide de la question **3. d.** donner une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AD'})$ et placer le point *D'* sur le dessin.

c. Démontrer que le triangle *OAD'* est équilatéral.

1. 63. Projection orthogonale

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

Soit *I* le point d'affixe 1. On note (C) le cercle de diamètre [*OI*] et on nomme son centre $\Omega$.

Partie I : On pose $a_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et on note $A_0$ son image.

1. Montrer que le point $A_0$ appartient au cercle C.
2. Soit *B* le point d'affixe *b*, avec $b=-1+2i$, et *B*' le point d'affixe *b*' telle que $b'=a_0b$.

a. Calculer *b*'.

b. Démontrer que le triangle *OBB*' est rectangle en *B*'.

Partie II : Soit *a* un nombre complexe non nul et différent de 1, et *A* son image dans le plan complexe. À tout point *M* d'affixe *z* non nulle, on associe le point *M*' d'affixe *z*' telle que $z'=az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points *A* tels que le triangle O*MM*' soit rectangle en *M*'.

a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O},\overrightarrow{M'M}\right)=\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c. En déduire que le triangle O*MM*' est rectangle en *M*' si et seulement si *A* appartient au cercle C privé de *O* et de *I*.

2. Dans cette question, *M* est un point de l'axe des abscisses, différent de *O*. On note *x* son affixe. On choisit *a* de manière que *A* soit un point de C différent de *I* et de *O*.

Montrer que le point *M*' appartient à la droite (*OA*). En déduire que *M*' est le projeté orthogonal de *M* sur cette droite.

1. 64. f(M)=MA.MB,

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par $(C)$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de $z_A$ et celle de $z_B$.
2. Dans la suite de l'exercice, *M* désigne un point de $(C)$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0\,;2\pi]$.

On considère l'application *f* qui tout point *M* de $(C)$, associe $f(M)=MA\times MB$

a. Montrer, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}$.

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe deux points *M* de (*C*), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels *f*(*M*) est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe un seul point *M* de (*C* ), dont on donnera les coordonnées, pour lequel *f* (*M*) est maximal. Donner cette valeur maximale.

1. 65. Hyperbole+rotation,

7 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

**Partie A**

Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la courbe H d'équation $y^2-x^2=16$.

1. Montrer que H est la réunion de deux courbes C et C' où C est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ et où C' est l'image de C par une transformation simple que l'on précisera.

2. Étudier la fonction *f* (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de C.

b. Tracer H dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On nomme $A$ et $B$ les points de la courbe H d'abscisses respectives −3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant $-3\le x\le 3$ et $\sqrt{x^2+16}\le y\le 5$. Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

**Partie B**

On appelle $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de $r$.

b. On désigne par $x'$ et $y'$ les coordonnées du point $M'$, image par $r$ du point $M(x\,;\,y)$ du plan.

Vérifier que $\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$. Déterminer les coordonnées des points $A'$ et $B'$, images respectives de $A$ et $B$ par la rotation $r$. Placer les points $A'$ et $B'$ dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Soit H' l'hyperbole d'équation $xy = 8$.

a. Tracer H' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Montrer que H' est l'image de H par la rotation $r$.

3. Soit D' l'image de D par la rotation $r$. On admet que D' est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2}\le x\le 4\sqrt{2}$ et $\frac{8}{x}\le y\le 5\sqrt{2}-x$.

a. Hachurer D'.

b. Calculer l'aire de D' exprimée en cm². En déduire une valeur approchée à $10^{-3}$ près de l'aire de D.

<u>1. 66. Conique</u>

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E des points $M$ d'affixe $z$ tels que

$$z^2-(1+i)^2=\bar{z}^2-(1-i)^2$$

a. Déterminer et construire E.

b. Déterminer et construire l'ensemble F des points $M$ tels que $[z-(1+i)][\bar{z}-(1-i)]=8$

c. Vérifier qu'il existe un point de $E\cap F$ où les deux courbes ont même tangente.

<u>1. 67. Spirale</u>

Dans cet exercice on essaie de calculer la longueur d'une portion de spirale. La figure jointe au sujet sera complétée au fur et à mesure des besoins et rendue avec la copie.

1. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ de sorte que le point $A$ ait pour affixe 1.

a. Donner sous forme algébrique et sous forme exponentielle l'affixe du point $B$ du cercle de centre $O$, de rayon 1, tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$.

b. Calculer la distance $AB$ à $10^{-2}$ près. En considérant que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle trigonométrique a une longueur de $\frac{\pi}{4}$, donner alors une valeur approchée de $\pi$ à l'aide de la distance $AB$.

c. Placer sur la figure le point $M_1$, image de $A$ par la rotation R de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{8}$, placer de même les points $M_k$ tels que $M_{k+1}=R(M_k)$ avec $1\le k\le 15$. Que peut-on dire de $M_{16}$ ?

d. On appelle $z_1$ l'affixe de $M_1$ ; montrer que $z_1^2=e^{i\frac{\pi}{4}}$ et vérifier que $z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Calculer alors la distance $AM_1$ à $10^{-3}$ près et donner une nouvelle valeur approchée de $\pi$.

2. On construit maintenant les points $N_k$ de la manière suivante : $N_0=A$ et pour tout $k$, $1 \le k \le 15$ , $ON_{k+1} = \frac{3}{4} ON_k$ et $N_k$ appartient au segment $[OM_k]$.

a. Placer sur la figure les point $N_k$ , $1 \le k \le 16$ . Que peut-on dire de $N_{16}$ ? Quelle est la nature de la suite $d_k = ON_k$ ? Exprimer sous forme trigonométrique l'affixe $Z_k$ des points $N_k$.

b. Justifier que les triangles $N_k O N_{k+1}$ sont tous semblables. Quelle est la nature de la suite $D_k = N_k N_{k+1}$ ? Donner son expression en fonction de $k$ et de $D_0$ ; exprimer en fonction de $k$ et $D_0$ la somme $S_n = D_0 + D_1 + \ldots + D_n$ où $n$ est un entier quelconque.

c. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la longueur $D_0 = N_0 N_1$, en déduire une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la longueur de la ligne polygonale $N_0 N_1 N_2 \ldots N_{15} N_{16}$ . Quelle est la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini ? Quelle signification concrète a cette limite ?

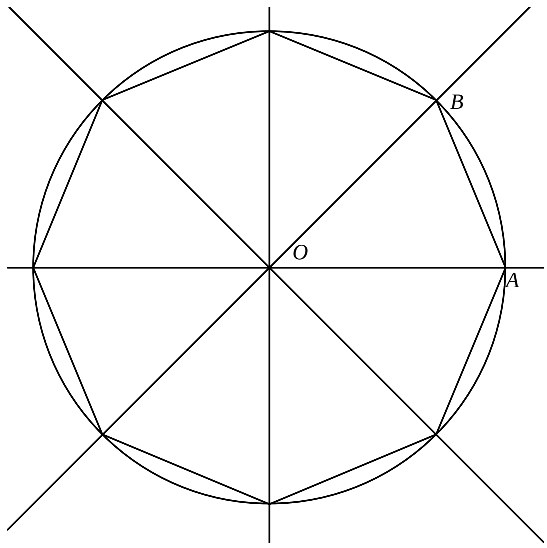



Figure à compléter.

<u>1. 68. Courbe paramétrée+conique</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ), unité graphique : 2 cm.

1. **Étude d'une courbe paramétrée (C)**

On considère la courbe (C) définie paramétriquement par : $\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{t^2}{2} + t \\ y = g(t) = -\dfrac{t^2}{2} + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

a) Étudier conjointement les variations sur R des fonctions $f$ et $g$.

b) Préciser les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

c) Préciser les points d'intersection de (C) avec chacun des axes O$x$ et O$y$.

Donner un vecteur directeur des tangentes aux points obtenus. Dessiner (C).

2. On se propose de démontrer que la courbe (C) est une parabole, en étudiant son image par une transformation particulière du plan.

a) Le plan est assimilé au plan complexe. On considère l'application R qui, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe : $z' = \dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}} z$.

Quelle est la nature de R ? Déterminer ses éléments géométriques.

b) Calculer en fonction de $t$ l'affixe de $M'$ lorsque $M$ est le point d'affixe : $f(t) + ig(t)$. En déduire l'expression en fonction de $t$ des coordonnées $x'$ et $y'$ du point $M'$ .

Écrire une équation cartésienne de la courbe (C') image par R de la courbe (C).

Représenter (C') sur la même figure que (C).

Pourquoi peut-on affirmer que (C) est une parabole ?

1. 69. Hyperbole et complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par $M$, $N$, $P$ trois points distincts de ce plan d'affixes respectives $m$, $n$, $p$.

1. Démontrer que le triangle $MNP$ est rectangle en $N$ si et seulement si le complexe $i\dfrac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.

2. Dans cette question, $M$, $N$, $P$ sont d'affixes respectives $z$, $z^2$, $z^4$.

a. Quelles conditions doit vérifier $z$ pour que $M$, $N$, $P$ soient distincts deux à deux ?

b. Démontrer que l'ensemble des points $M$ d'affixe $z = x + iy$ du plan tels que le triangle $MNP$ soit rectangle en $N$ est une conique $\Gamma$ d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.

3. Préciser la nature de $\Gamma$ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).

4. Représenter $\Gamma$ et mettre en place sur la figure les sommets, les foyers et les asymptotes de $\Gamma$.

1. 70. Bissectrice (recherche)

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels, on considère les nombres complexes $z$ et $z'$ de module 1 et d'arguments respectifs $a$ et $b$.

1. Montrer, en utilisant la forme exponentielle de $z$ et $z'$, que $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.

2. En déduire que $\arg[z + z'] = \dfrac{1}{2}(\arg[z] + \arg[z'])$.

3. On appelle $M$ et $M'$ les images de $z$ et $z'$ dans le plan muni d'un repère orthonormé direct de centre O et $N$ le point tel que O$MNM'$ soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.

1. 71. Birapport

Quelques définitions :

On dira qu'une application $f$ est involutive si et seulement si $f \circ f = \text{Id}$.

Quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques si et seulement si ils appartiennent au même cercle $\Gamma$.

On montre que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques ssi $(AC, AD) = (BC, BD)[\pi]$ (attention, ce sont des angles de droites…)

On désigne par P le plan complexe, par $\Omega$ le point d'affixe $i$ et P'=P−$\{\Omega\}$. $M$ un point quelconque de P' a pour affixe $z$.

Pour tout réel non nul $m$, on désigne par $f_m$ l'application de P' dans P' telle que

$$f_m : M(z) \to M'(z') / \ z' - i = \frac{m}{\overline{z}+i}.$$

1. On suppose $m$ donné. Montrer que $f_m$ est involutive. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f_m$. Démontrer que pour tout point $M$ de P', les points $\Omega$, $M$ et $M'$ sont alignés et que $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = m$ (produit scalaire).

2. Soit $m$ et $\lambda$ deux réels non nuls. Pour tout point $M$ de P', on désigne par $M'$ le point $f_m(M)$ et par $M''$ le point $f_\lambda(M')$. Montrer que $M''$ est l'image de $M$ par une transformation que l'on précisera. Quelle est la nature de cette transformation ?

3. Le nombre $m$ est toujours supposé fixé. Soit $A$, $B$, $C$, $D$ quatre points distincts de P', d'affixes respectives $a$, $b$, $c$ et $d$. On appelle **birapport** de ces quatre points, noté $(A, B, C, D)$, le nombre complexe $\dfrac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$.

a. Démontrer que $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$.

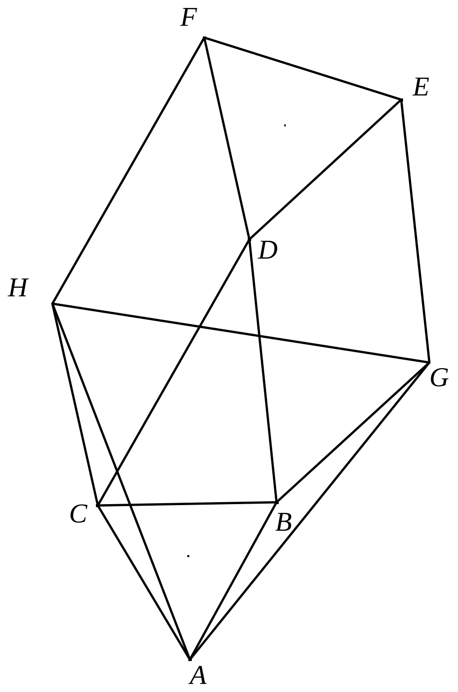
b. Démontrer que $(A, B, C, D)$ est un nombre réel si et seulement si les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont alignés ou cocycliques.

c. On désigne par $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ les images respectives des points $A$, $B$, $C$ et $D$ par $f_m$. Montrer que $(A, B, C, D)$ et $(A', B', C', D')$ sont conjugués.

4. Déduire de la question précédente que, quels que soient les points $M$ et $N$ appartenant à P', les points $M$, $N$, $M'$ et $N'$ sont alignés ou cocycliques.

5. On désigne par $\Delta$ une droite ou un cercle du plan P et par $\Delta_1$ son intersection avec P'. Démontrer que l'image de $\Delta_1$ par $f_m$ est l'intersection d'une droite ou d'un cercle avec P'.

1. 72. Triangles équilatéraux




Dans la figure ci-contre, $ABC$ et $DEF$ sont deux triangles équilatéraux direct, $BDEG$ et $CDFH$ sont des parallélogrammes. Le but de l'exercice est de prouver que le triangle $AGH$ est équilatéral.

On appelle $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ les affixes des points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$.

Première méthode :

1. a. Démontrer que $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

b. Exprimer $(f-d)$ en fonction de $(e-d)$.

2. a. En déduire l'expression de $g$ et $h$ en fonction $b$, $c$, $d$, $e$, $f$.

b. Montrer que $h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$, conclure.

Deuxième méthode :

1. On appelle $R$ la rotation de centre $D$, d'angle $\frac{\pi}{3}$, $t_1$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, $t_2$ la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$. Donner l'expression complexe de $R$, $t_1$, $t_2$.

2. On appelle $T$ la transformation $T=t_2\circ R\circ t_1$.

a. Donner l'expression complexe de $T$, en déduire la nature de $T$.

b. Déterminer $T(B)$ et le centre de $T$. Déterminer enfin $T(G)$ et conclure.

1. 73. Produit de distances,

Dans le plan complexe, on considère les points $A$, $B$, $C$, $D$ d'affixes respectives 1, $i$, $-1$, $-i$.

1. Montrer que le point $M$ d'affixe le nombre complexe $z=re^{i\theta}$ est sur le cercle de centre $B$ et de rayon 1 si et seulement si $r\cos\theta=\frac{1}{2}$ ou $r=0$.

2. Montrer que le produit $P=MA\times MB\times MC\times MD$ est égal à $P=\left|z^4-1\right|$.

3. En déduire une condition (portant sur $r$ et $\theta$) pour que $P$ soit égal à 1.

4. Déterminer les points $M$ de l'axe des réels tels que $P$ est égal à 1.

5. Déterminer les points $M$ du cercle de centre $O$, de rayon 1 tels que $P$ est égal à 1.

1. 74. Logarithme complexe

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes privé du nombre complexe nul.

Tout nombre complexe $z$ non nul peut s'écrire de façon unique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ lorsqu'on suppose que $\theta$ vérifie les inégalités $-\pi\le\theta<\pi$ et que $r>0$.

Dans cet exercice, on étudie l'application $F$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à tout nombre complexe non nul $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ le nombre complexe $Z=\ln r+i\theta$.

On propose de transformer au moyen de $F$ des régions de $\mathbb{C}^*$.

1. Déterminer les images par $F$ des demi-cercles de centre $O$, tracés dans $\mathbb{C}^*$ de rayon $R$ et dont les extrémités sont placées sur l'axe des imaginaires aux points d'affixes $iR$ et $-iR$. Déterminer de même les images des segments de droite portés par des demi-droites d'origine O et dont aucune des extrémités n'est située en $O$.

2. On définit la région D limitée par les demi-droites $((\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ d'origine $O$ telles que $(Ox,\Delta_1)=\theta_1$ et $(Ox,\Delta_2)=\theta_2$ où on suppose que $\theta_1$ et $\theta_2$ appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et vérifient $\theta_2>\theta_1$ et par les deux arcs de cercles $(\Gamma_a)$ et $(\Gamma_b)$ de centre $O$ et de rayons $a$ et $b$ entièrement situés dans le secteur limité par les deux demi-droites précédentes. Dessiner cette région qui est donc un « secteur de couronne circulaire ». Définir l'image de la frontière de cette région qui est donc constituée de deux arcs de cercles et de deux segments. Montrer que l'intérieur de cette

région D est transformé par $F$ en l'intérieur d'un rectangle que l'on définira précisément à l'aide des angles $\theta_1$ et $\theta_2$ et des réels $a$ et $b$.

3. Déterminer les conditions liant $\theta_1$ et $\theta_2$ d'une part et $a$ et $b$ d'autre part pour que ce rectangle soit centré en $O$. On pose alors $\theta = \theta_2$ et $R = a$. Trouver la relation entre $\theta$ et $R$ pour que ce rectangle devienne un carré de centre $O$.

4. Soit le cercle C qui passe par $O$ et qui est centré au point d'affixe 1.

En utilisant son équation cartésienne, trouver la relation fournissant $r$ en fonction de $\theta$ pour qu'un point d'affixe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ appartienne à ce cercle. On suppose $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

L'image par $F$ d'un point quelconque de C étant défini par son affixe $X + iY$, déterminer $X$ en fonction de $Y$.

Étudier les variations de $X$ en fonction de $Y$ et, en prenant garde à l'échange des coordonnées, dessiner la courbe image de C par $F$.

Définir l'image par $F$ de la région D' intérieure à ce cercle et comprise entre deux arcs de cercle de rayon $R$ et $\frac{1}{R}$.

5. Soit la parabole (P) d'équation $y^2 = 2x$. Déterminer la relation entre $\theta$ et $r$ pour qu'un point d'affixe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ appartienne à cette courbe. Soit alors la région D" comprise dans l'intérieur de cette parabole et entre deux cercles de rayons $R$ et $\frac{1}{R}$.

L'image d'un point $x + iy$ de la portion de parabole (P) comprise entre les deux arcs de cercle précédents étant désignée par $X + iY$, exprimer $X$ en fonction de $Y$ Étudier les variations de $X$ en fonction de $Y$ et en déduire l'image de cette portion de la parabole (P).

Sans prétendre à la précision, dessiner l'allure de l'image de la région D".