EXERCICES DE MATHEMATIQUES
TERMINALE C
ARITHMETIQUE

Proposés par Hugues SILA

1. 1. Division Euclidienne -1

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

Correction

On a $320 = q\times b+39 \Leftrightarrow q\times b = 320-39 = 281$. Cherchons les diviseurs de 281 : 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b.

1. 2. Division Euclidienne-2

Quel est le nombre de diviseurs de 2880 ?

1. 3. Division Euclidienne-3 (c)

1. Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6.
3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.
4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.

Correction

1. L'ensemble des diviseurs de 6 est $D = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.
2. $n - 4$ divise 6 si $n - 4$ appartient à D, soit si n appartient à $D + 4 = \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$.
3. On peut remarquer que $n + 2 = n - 4 + 6$. Puisqu'il est évident que $n - 4$ divise $n - 4$, le résultat du 2. permet alors d'affirmer que si $n - 4$ divise $n + 2$, alors $n - 4$ divise $n + 2 - (n - 4)$ c'est-à-dire $n - 4$ divise 6.

Réciproquement si $n - 4$ divise 6 alors $n - 4$ divise $6 + n - 4$ c'est-à-dire $n - 4$ divise $n + 2$. On a donc démontré que $n - 4$ divise $n + 2$ si et seulement si $n - 4$ divise 6.

4. On peut raisonner en utilisant le même principe qu'à la question précédente. On remarque que

$$3n - 4 = 3(n + 1) - 7,$$

et puisqu'il est immédiat que $n + 1$ divise $3(n + 1)$, on peut écrire :

- si $n + 1$ divise $3n - 4$, alors $n + 1$ divise $3n - 4 - 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise -7 ;

réciproquement : si $n + 1$ divise -7 alors $n + 1$ divise $-7 + 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise $3n - 4$.

L'ensemble des diviseurs de -7 (ou de 7) étant $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$, on en déduit que $n + 1$ divise $3n - 4$ si et seulement si $n + 1$ appartient à $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$ soit n appartient à $\{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$.

1. 4. Multiples - 1

a et b sont deux entiers relatifs. Démontrez que si $a^2 + b^2$ est divisible par 7 alors a et b sont divisibles par 7.

1. 5. PGCD - 1 (c)

Trouvez le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.

…

1. 6. PPCM et PGCD - 2

Trouvez les deux nombres a et b sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.

1. 7. PPCM et PGCD - 3

Trouvez deux entiers dont la différence entre leur PPCM et leur PGCD est 187.

1. 8. Théorème de Gauss-1

1. a est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2. a et b sont des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrez que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

1. 9. Bases de numération-1

Trouvez toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $n=\overline{26x95y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

1. 10. Bases de numération-2

A est le nombre qui s'écrit 16524 dans le système à base 7. Ecrivez ce nombre en bases 10, puis 2 et enfin 16 (tous les calculs doivent apparaître).

1. 11. Bases de numération-3

Le nombre N s'écrit 23 dans le système décimal. Peut-il s'écrire 27 dans une autre base ?

1. 12. Ecriture répétée

Soit n un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal $n=\overline{abcabc}$ avec $a\neq 0$.

1. a. Déterminer n tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

* n est divisible par 5,

* L'entier $\overline{bc}$ est le double de a.

b. Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2. Etude du cas général

a. Montrer que n est divisible par $\overline{abc}$. En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

b. Montrer que n ne peut pas être un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier naturel).

3. Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4. On pose n_1 = 121121 et n_2 = 140140. On appelle (E) l'équation $n_1x+n_2y=1001$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Déterminer une solution particulière de (E)

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

1. 13. Congruences-1 (c)

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

Correction

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 4^2 donne 2, 4^3 donne 8, soit 1 ; comme 45 = 15.3, on a :

$$32^{45}\equiv 4^{45}(7)\equiv\left(4^3\right)^{15}(7)\equiv(1)^{15}(7)\equiv 1(7).$$

Le reste est donc 1.

1. 14. Congruences-2

Démontrez que le nombre $n=ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3 pour tous les entiers relatifs a et b.

1. 15. Congruences-3 (c)

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.

2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre N = $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Correction

1. p = 0 : 1, p = 1 : 5, p = 2 : −1 ou 12, p = 3 : −5 ou 8, p = 4 : 1 donc

pour $p=4k$ le reste est 1,

pour $p=4k+1$ le reste est 5,

pour $p=4k+2$ le reste est 12 ou −1,

pour $p=4k+3$ le reste est 8 ou −5.

2. $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$: $31=2\times 13+5\equiv 5(13)$ et $18=13\times 1+5\equiv 5(13)$; on a donc

$$N=31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv\left[5^{4n+1}+5^{4n-1}\right](13)\equiv\left[5^{4n+1}+5^{4n'+3}\right](13)\equiv[5+8](13)\equiv 0(13).$$

1. 16. Divers-1

Un nombre qui s'écrit avec 4 chiffres identiques peut-il être un carré parfait (carré d'un nombre entier) ?

1. 17. Divers-2

Démontrez qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut être égal à la somme de trois carrés.

1. 18. Divers-3

a et b sont deux entiers positifs premiers entre eux. Montrez que $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.

1. 19. Divers-4

On considère la fraction $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ avec n entier positif.

a. prouvez que tout diviseur commun d à $2n + 1$ et $n^3 + n$ est premier avec n.

b. Déduisez en que d divise $n^2 + 1$, puis que $d = 1$ ou $d = 5$.

c. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la fraction est irréductible ?

1. 20. Nombres Premiers-1

Le nombre 401 est-il premier ? Résolvez en entiers naturels l'équation $x^2 - y^2 = 401$.

1. 21. Nombres Premiers-2

p et q sont des entiers naturels.

1. Démontrez que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.

2. Déduisez en que pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.

3. Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^n - 1$ soit premier.

1. 22. Nombres Premiers-3

Soit p un entier premier. Montrer que si $p \geq 5$ alors 24 divise $p^2 - 1$.

1. 23. Démonstration de Fermat

Soit p, un entier naturel premier.

1. a. Démontrer que si k est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$, le nombre $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ est divisible par p.

1. b. En déduire que, quel que soit l'entier n, le nombre $(n + 1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.

2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p (on pourra faire un raisonnement par récurrence).

3. Montrer que pour tout entier n premier avec p, $n^{p-1} - 1$ est divisible par p.

1. 24. La classe...

Dans une Terminale S, la taille moyenne des élèves est de 167 cm, la taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quel est l'effectif de la classe (inférieur à 40...) ?

Correction

Appelons f le nombre de filles et g le nombre de garçons :

$f \times 160 + g \times 173,5 = (f+g) \times 167 \Leftrightarrow 6,5g = 7f \Leftrightarrow 13g = 14f$ donc il y a 13 filles et 14 garçons (ou 26 filles et 28 gars, mais le total dépasse 40).

1. 25. Un

Les nombres entiers de 1 à 9999 sont écrits en français : un, deux, trois, quatre, ...dix, onze, ..., vingt, ..., mille deux cent trente quatre, ... puis rangés par ordre alphabétique.

1. Quels sont les deux premiers et les deux derniers de la liste ?

2. Quelle est la position de « un » dans la liste ?

2. Bézout

2. 26. Bezout-1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x - 28y = 1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x - 28y = 414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On donne les points A(−30 ; − 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de −10 à +10 en abscisses et de −14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [−40 ; +40] en abscisses et à [−50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

2. 27. Bezout-2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $13x - 23y = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $-156x + 276y = 24$.

2. 28. Bezout-3

1. Démontrer que, pour que la relation suivante $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 3$ soit satisfaite, pour x et y entiers naturels, il faut prendre x et y de la forme : $x = 9(k+3)$ et $y = 4k$ avec k entier naturel.

2. Démontrer que le PGCD de x et y ne peut être qu'un diviseur de 108.

3. On pose m = PPCM(x ; y) et on envisage la décomposition de m en facteurs premiers. Comment faut il choisir k pour que :

a. m ne contienne pas le facteur 2 ?

b. m contienne le facteur 2 ou le facteur 2^2 ?

c. m ne contienne pas le facteur 3 ?

d. m contienne le facteur 3, ou le facteur 3^2 , ou le facteur 3^3 ?

4. Comment faut-il choisir x et y de telle façon que l'on ait PGCD(x ; y) = 18 ?

2. 29. Bezout-4

1. Décomposer 319 en facteurs premiers.

2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres $3x + 5y$ et $x + 2y$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$ où m est le PPCM de a et b.

2. 30. Bezout-5

Au 8° siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

3. Anciens

3. 31. Somme et produit

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose S = $x + y$ et P = xy.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que S et P sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : SP = 84.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$$ avec d = PGCD(a ; b)

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux.)

3. 32. Quadratique

1. Soit x un entier impair. Quel est le reste de la division de x^2 par 8 ?

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.

3. On veut tracer sur l'écran d'une calculatrice comportant 320 points de large sur 200 points de haut les points à coordonnées entières de la courbe d'équation $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}$.

Le repère choisi a son origine en bas à gauche de l'écran, et chaque point de l'écran a pour coordonnées sa position à l'écran – 1 (par exemple, le point en haut à droite aura pour coordonnées (319 ; 199)). Combien de points pourra-t-on tracer ?

3. 33. Divisibilité

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$. On note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les cas suivants : n=1, n=11, n=15.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

b. Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

3. 34. Equation diophantienne

1. On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a + b = 11994$ et dont le PGCD vaut 1999.

2. On considère l'équation (E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{Z}$

a. Peut on trouver S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

b. Même question avec 5 ?

c. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S.

3. 35. Base de numération 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5242 + 13x = 6y$.

2. Soit N le nombre dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est $N = \overline{25x3}$. Pour quelles valeurs de x :

* N est-il divisible par 6 ?

* N est-il divisible par 4 ?

* N est-il divisible par 24 ? (24 est écrit en décimal…).

3. 36. Base de numération 2

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

En déduire que $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.

2. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.

a. Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A_p par 8 ?

b. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A_p est divisible par 8.

4. On considère les nombres a et b écrits dans le système "base 3" :

$a = \overline{1110}_{\text{trois}}$.

$b = \overline{101010100}_{\text{trois}}$.

Les nombres a et b sont-ils divisibles par 8 ?

5. De même, on considère le nombre $c = \overline{2002002002000}_{\text{trois}}$. Démontrer que c est divisible par 16.

Remarque : pour les questions 4 et 5, on raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix des nombres a, b, c.

3. 37. Somme des cubes

1. Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Démontrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p\right)^2$. Exprimer $s_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$ en fonction de n.

3. Soit D_n le PGCD des nombres s_n et s_{n+1}. Calculer D_n lorsque

a. $n = 2k$,

b. $n = 2k+1$.

En déduire que s_n, s_{n+1} et s_{n+2} sont premiers entre eux.

3. 38. Somme des diviseurs

1. On considère le nombre $n = 200 = 2^3 5^2$.

a. Combien n a-t-il de diviseurs ? En utilisant un arbre, calculez les tous et faites leur somme s.

b. Vérifiez que $s=(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$.

2. On considère maintenant le nombre $N=a^{\alpha}b^{\beta}$ où a et b sont deux nombre premiers, α et β des entiers.

a. Quel est le nombre de diviseurs de N ?

b. Soit S la somme des diviseurs de N. Montrez que $S=(1+a+a^2+...+a^{\alpha})(1+b+b^2+...+b^{\beta})$.

Déduisez en une expression « simple » de S.

c. Montrez alors que pour α et β suffisamment grands on a $\frac{S}{N}\approx\frac{a}{a-1}.\frac{b}{b-1}$.

3. Application numérique : $N=5^{100}7^{200}$; trouver une valeur approchée de S.

Rappel : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. 39. Racines rationnelles (méthode de Descartes)

1. Montrer que si p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de p et q^3.
2. On se propose de trouver les solutions rationnelles de l'équation :

$$(1) : 3x^3-2x^2+6x-4=0.$$

On rappelle qu'un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs.

a. Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que s'il est solution de (1) alors a divise 4 et b divise 3.

b. Montrer qu'une solution de (1) ne peut pas être négative.

c. Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $3x^3-2x^2+6x-4=0$.

3. 40. QCM,

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.
5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

3. 41. Cryptographie

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u-13v=1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0-26v_0=4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a-26k=4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a. Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que

$$\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}.$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) = 0$ modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

3\. 42. Repunits 1,

Des nombres étranges (part one)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 100 + ... + 10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour k entier compris entre 1 et 8.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1 (7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

3\. 43. Repunits 2,

Des nombres étranges (part two)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1. Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3, N_4 et N_5.

3. Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.

a. Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.

b. Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$.

c. En déduire que $n^2 \equiv 1(20)$.

4. a. Soit $k > 2$. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ?

b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

3. 44. Recherche,

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = 1! + 2! + \ldots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (u_n).

$u_1 = 1$ $\quad u_6 = 3^2 \times 97$

$u_2 = 3$ $\quad u_7 = 3^4 \times 73$

$u_3 = 3^2$ $\quad u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$

$u_4 = 3 \times 11$ $\quad u_9 = 3^2 \times 131 \times 347$

$u_5 = 3^2 \times 17$ $\quad u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que u_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.

2. Peut-on affirmer que u_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?

3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

3. 45. Cryptographie,

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par *f* la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 ».

On désire coder à l'aide de *f* le message « BACF ». Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
n	2	1	3	6
$f(n)$	3			
Lettre	C			

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par g la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de 2^n par 11 ». Etablir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de g. Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de g ?

3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier a compris entre 1 et 10 pour que la fonction h définie sur E par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de a^n par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères.

Soit i un élément de Ω.

a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction h permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.

b. Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction h ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.

c. On suppose que i est le plus petit entier naturel tel que $1 \leq i \leq 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$.

En utilisant la division euclidienne de 10 par i, prouver que i est un diviseur de 10.

d. Quelle condition doit vérifier le nombre a pour permettre le chiffrage et le déchiffrage sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction h ? Faire la liste de ces nombres.

4. Exercices

4. 46. Base

5 points

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple : $\overline{\beta\alpha7}^{12}=\beta\times12^2+\alpha\times12+7=11\times144+10\times12+7=1711$ en base 10.

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1=\overline{\beta1\alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2=1131=1\times10^3+1\times10^2+3\times10+1$.

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}^{12}$.

2. a. Démontrer que $N\equiv a_0\,[\,3\,]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0\,[\,11\,]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $N=\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Correction

Partie A : Question de cours

Les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances sont $a\equiv a'[\,p\,]$ et $b\equiv b'[\,p\,]$ alors $a+b\equiv a'+b'[\,p\,]$, $ab\equiv a'b'[\,p\,]$ et $a^n\equiv a'^n\,[\,p\,]$.

Propriété de compatibilité avec la multiplication :

on pose que $a=pk+a'$, $b=ph+b'$ d'où $ab=p^2kh+a'ph+b'pk+a'b'=a'b'+p(\,...\,)$.

Partie B

1. a. $N_1=\overline{\beta1\alpha}^{12}=12^2\times11+12\times1+10=1606$.

b. Il faut diviser par 12 plusieurs fois : $1131\equiv12\times94+3$, $94\equiv12\times7+10=12\times7+\alpha$, donc

$$N_2=\overline{7\alpha3}^{12}=7\times12^2+\alpha\times12+3=7\times144+10\times12+3=1131.$$

2. a. $N=12^{n-1}\times a_n+...+12\times a_1+a_0\equiv a_0\,[\,12\,]\equiv a_0\,[\,3\,]$. Si le dernier chiffre est 0 modulo 3, soit un multiple de 3 le nombre sera divisible par 3.

b. N_2 se termine par 3 en base 12, il est divisible par 3. En base 10 la somme des chiffres est 6, il est donc divisible par 3.

3. a. Chaque puissance de 12 est congrue à 1 modulo 11 donc $N\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0\,[\,11\,]$. Si la somme des chiffres est un multiple de 11, ce nombre sera divisible par 11.

b. La somme des chiffres de N_1 en base 12 est $\beta+1+\alpha=11+1+10=22$ donc N_1 est divisible par 11. En base 10 on fait la somme des termes de rang pair moins la somme des termes de rang impair : 12–1=11 qui est divisible par 11.

4. $N=\overline{x4y}^{12}$. N est divisible par 33 si N est divisible par 3 : $y=3k$, et par 11 : $x+4+y=11k'$.

On résoud : $\begin{cases}y=3k\\x+4+3k=11k'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3k\\x=11k'-3k-4\end{cases}$; les valeurs possibles de k sont 0, 1, 2, 3 :

k	y	x	k'	N	N (b. 10)
0	0	$11k'-4$	$k'=1$ soit $x=7$	$\overline{740}^{12}$	1056
1	3	$11k'-7$	$k'=1$ soit $x=4$	$\overline{443}^{12}$	627
2	6	$11k'-10$	$k'=1$ soit $x=1$	$\overline{146}^{12}$	198
3	9	$11k'-13$	$k'=2$ soit $x=9$	$\overline{949}^{12}$	1353

4. 47. QCM,

5 points

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

   Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 = 0 \pmod 5$ si et-seulement si $x \equiv 1 \pmod 5$. »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

   Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

   Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'afiixe $1-i$ a pour écriture complexe $z' = \left(\sqrt{3}+i\right)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$. »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(O\,;\vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

   Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

<u>4. 48. QCM,</u>

5 points

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z \to \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i$.

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

   Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

   Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

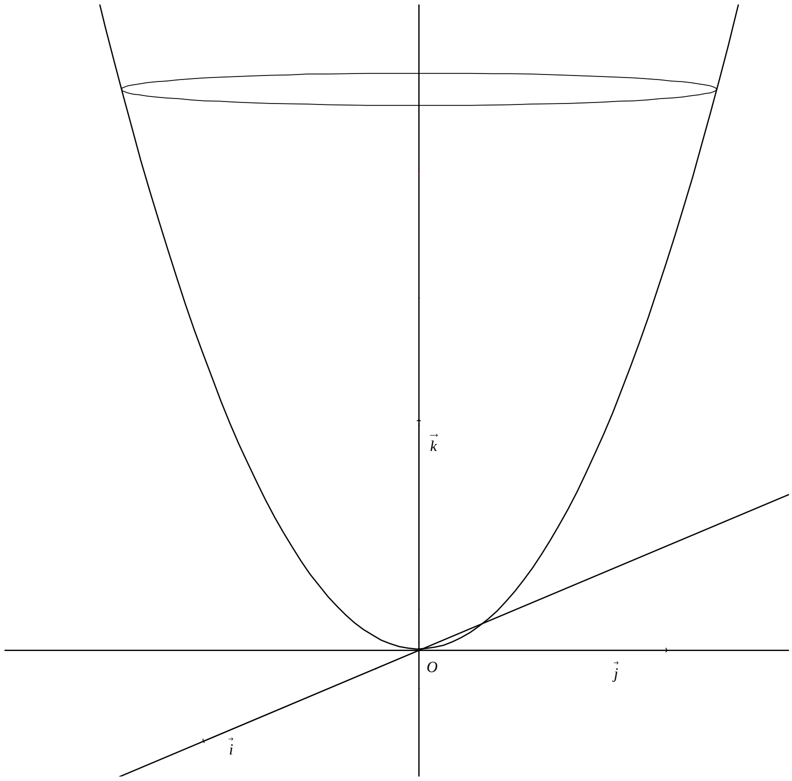
   Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k+14\,;11k+28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La surface Σ ci-dessous a pour équation $z = x^2 + y^2$.

Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».



<u>Rappel :</u> *Soit V le volume du solide délimité par* Σ *et les plans d'équations z = a et z=b où* $0 \le a \le b \le 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,dk$ *où S(k) est l'aire de la section du solide par le plan d'équation z=k où* $k \in [a, b]$.

<u>4. 49. Réseau,</u>

5 points

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthononnal, dont les coordonnées (x ; y) sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \le x \le a$ et $0 \le y \le b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A. Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x ; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 ;
2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 ;
3. $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3.

B. Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution (x ; y) pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C. Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

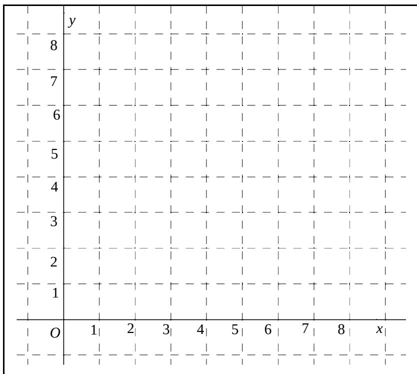
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0 ; 0)$ et $A(a ; b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

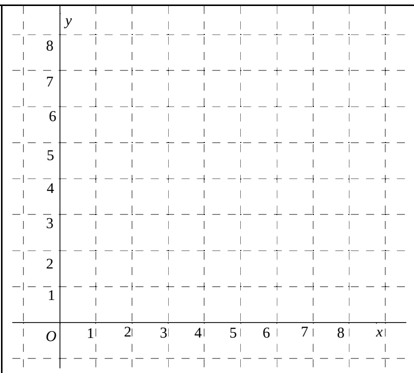
$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ ay = bx.$$

2. Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.

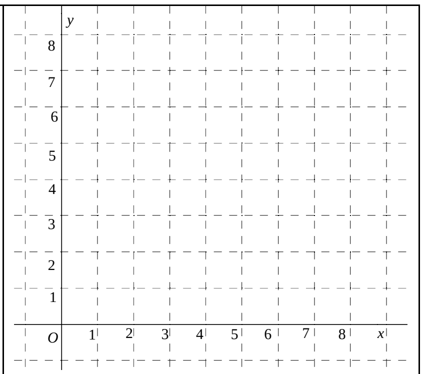
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau. (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)



Graphique n°1



Graphique n°2



Graphique n°3

4. 50. Codage affine,

5 points

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (-7 ; -3) est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs (u ; v) solution de (E) tel que $0 \le u \le 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$,

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11\times 11+8 = 129 \equiv 25 \pmod{26}$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 19j \pmod{26}.$$

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

4. 51. Surface+Eq. dioph.,

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; -3) et (-1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm(a ; b)= 440, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}.$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors pgcd(a ; b) est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplete ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction

1. Si $M(x ; y ; z)$ appartient à (S), alors on a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, soit $x^2 + y^2 - (-z)^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x ; y ; -z)$ appartient également à (S) et réciproquement.

Par conséquent, le plan d'équation $z = 0$, c'est-à-dire le plan (xOy), est un plan de symétrie de la surface (S).

2. a. $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -4k \\ y - 1 = 0k \\ z + 3 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k + 3 \\ y = 1 \\ z = 4k - 3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

b. On remplace x, y et z dans l'équation de (S) :

$x^2 + y^2 - z^2 = (-4k + 3)^2 + 1^2 - (4k - 3)^2 = 16k^2 - 24k + 9 + 1 - 16k^2 + 24k - 9 = 1$, ce qui est toujours vrai.

On en déduit que tout point de (D) appartient à (S), la droite est incluse dans la surface (S).

3. Soit (P) un plan parallèle au plan (xOy). (P) a alors une équation de la forme $z = c$ où c est un réel, soit $x^2 + y^2 = c^2 + 1$ qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0 ; 0 ; c)$ et de rayon $\sqrt{1 + c^2}$, tracé dans (P). La section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle.

4. a. Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$.

D'après la question précédente (C) est le cercle de centre $\Omega(0 ; 0 ; 68)$ et de rayon $\sqrt{1 + 68^2} = 5\sqrt{185}$, tracé dans le plan d'équation $z = 68$.

b. Soit $(a ; b)$ une solution de (1). Alors : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}$.

d le PGCD de a et b divise a (et aussi a^2) et divise b (et aussi b^2), d'où d divise $a^2 + b^2$; d divise 4625.
De plus, d divise le PPCM de a et b. Donc d divise 440, d est un diviseur commun de 440 et de 4625.
Or les diviseurs de 4625 sont : 1 ; 5 ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.
Les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440.
d ne peut être égal qu'à 1 ou à 5.

* $d = 1$, $ab = \text{pgcd}(a ; b) \times \text{ppcm}(a ; b)$, c'est-à-dire $ab = 1 \times 440 = 440$.

a et b sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 440.

Or $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 880 = 5505$; ce qui est impossible car $a + b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels). Il n'y a dans ce cas aucun couple solution de ce système.

* Supposons que $d = 5$; alors $ab = \text{pgcd}(a ; b) \times \text{ppcm}(a ; b)$, c'est-à-dire $ab = 5 \times 440 = 2200$.

a et b sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 2200.

Or $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 4400 = 9025$, soit $a + b = 95$.

Seul le couple $(40\ ;\ 55)$ est solution de ce système dans ce cas.

Il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $ppcm(a\ ;\ b) = 440$.

4. 52. Bézout+Fermat

5 points

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\}$.

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1\ ;2\ ;...\ ;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1[31]$ et $3x \equiv 1[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$.

4. 53. Bézout,

5 points

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 610 par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 64 par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $640 \equiv 1[11]$ et que $640 \equiv 1[5]$.

d. Démontrer que 640 – 1 est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet aumoins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

4. 54. Codage affine

5 points

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\ ;1\ ;2\ ;...\ ;24\ ;25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an+b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2\times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \le x \le 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

4. 55. Surface+éq. dioph

5 points

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1;3;2)$, $B(4;6;-4)$ et le cône (Γ) d'axe $(O ; \vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2=\frac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ). Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

* deux droites parallèles ;
* deux droites sécantes ;
* une parabole ;
* une hyperbole ;
* un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x;y;z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation (E) : $x^2+y^2=40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x;y;z)$, où x, y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2) alors $x^2 \equiv 1 \text{ modulo } 10$.

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 \equiv 1 \text{ modulo } 10$.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. 56. QCM,

5 points

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2iz + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\,;0\,;5)$ et de rayon 5 ».

3. Proposition 3 : « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. Proposition 4 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

4. 57. Bézout,

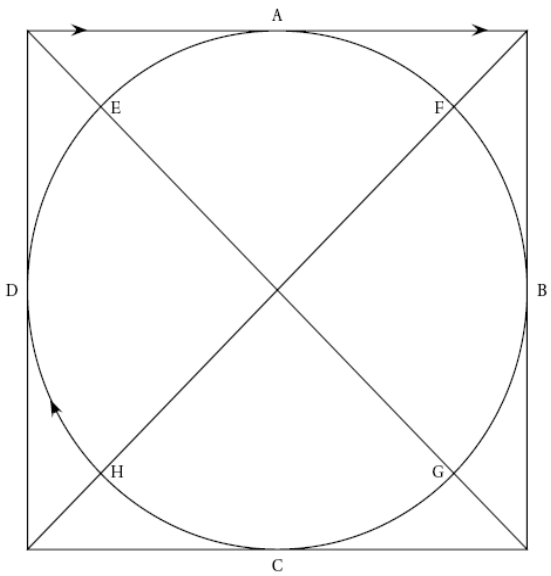
5 points

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.



Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

4. 58. Congruences,

5 points

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \bmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b \bmod 7$ et $c \equiv d \bmod 7$ alors $ac \equiv bd \bmod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On appelle *ordre* de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$.

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

Correction

1. a. On écrit que $a = b + 7k$, $c = d + 7k'$ d'où

$ac = (b + 7k)(d + 7k') = bd + 7(bk' + dk + 7kk') \Leftrightarrow ac \equiv bd[7]$.

b. Par récurrence : vrai pour $n = 1$. Supposons $a^n \equiv b^n \bmod 7$, alors $a^n \times a \equiv b^n \times b[7] \Leftrightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1}[7]$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

On cherche les restes de 2^n et 3^n modulo 7 :

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	1	2	4	1
3^n	3	2	6 ou −1	4 ou −3	5 ou −2	1

Donc pour 2 la première valeur de n est 3, pour 3 c'est 6.

3. a. Théorème de Fermat : si p premier ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ d'où avec $p = 7$: $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On a donc $6 = kq + r \Rightarrow a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = \left(a^k\right)^q a^r$; comme $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $\left(a^k\right)^q \equiv 1^q[7] \equiv 1[7]$ donc $a^r \equiv 1[7]$. Comme k est le plus petit entier tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $r = 0$ donc k divise 6, soit k=1, 2, 3 ou 6.

c.

a	$a^2 \bmod 7$	$a^3 \bmod 7$	$a^6 \bmod 7$
1 (k=1)	1	1	1
2 (k=3)	4	1	1
3 (k=6)	2	6	1
4 (k=3)	2	1	1
5 (k=6)	4	6	1
6 (k=2)	1	6	1

4. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$, et $2006 = 2 \times 1003 = 3 \times 668 + 2 = 6 \times 334 + 2$; on a donc

$2^{2006} = \left(2^3\right)^{668} \times 2^2 \equiv 4[7]$, $3^{2006} = \left(3^6\right)^{334} \times 3^2 \equiv 9[7] \equiv 2[7]$, $4^{2006} = \left(4^3\right)^{668} \times 4^2 \equiv 16[7] \equiv 2[7]$,

$5^{2006} = \left(5^6\right)^{334} \times 5^2 \equiv 25[7] \equiv 4[7]$ et $6^{2006} = \left(6^2\right)^{1003} \equiv 1[7]$

d'où enfin $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1[7] \equiv 13[7] \equiv 6[7]$.

4. 59. QCM,

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0\,(\text{modulo } 6)$ alors $x \equiv 0\,(\text{modulo } 3)$ ».

Proposition 3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\,;\,9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « Il existe un seul couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et PPCM(a, b) – PGCD$(a, b) = 1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Correction

Proposition 1 : Vrai.

On fait l'essai. Ca semble marcher.

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n} - 1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

Vérifions : $2^{2n} = \left(2^2\right)^n = 4^n \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$.

Proposition 2 : Faux.

$x^2 + x = x(x+1)$ est un multiple de 2 donc pour que ce soit un multiple de 6, il faut qu'un des deux termes x ou $x + 1$ soit un multiple de 3 ; on pourrait alors avoir $x+1 \equiv 0[3] \Leftrightarrow x \equiv 2[3]$. Par exemple 5 donne 25 + 5 = 30 qui est bien un multiple de 3.

Proposition 3 : Faux.

$12x - 5y = 3$ a comme solution particulière $x = 4$ et $y = 9$; on a alors

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12\times 4 - 5\times 9 = 3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4) - 5(y-9) = 0 \Leftrightarrow 12(x-4) = 5(y-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 5k \\ y - 9 = 12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 9 + 12k \end{cases}.$$

Proposition 4 : Vrai.

Posons $\begin{cases} a = a_1 k \\ b = b_1 k \end{cases}$ où k est PGCD(a, b) ; on a alors $a_1 b_1 k - k = 1 \Rightarrow k = 1$ sinon k diviserait 1. Notre équation devient alors : PPCM(a, b) – PGCD$(a, b) = 1$ devient donc $ab - 1 = 1 \Leftrightarrow ab = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : Vrai.

$M = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $N = \overline{bca} = 100b + 10c + a$ donc

$$M - N = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a = 9(11a - 10b - c)$$

est divisible par 27 si $11a - 10b - c$ est divisible par 3.

Sachant qu'on a $M = 100a + 10b + c = 27k \Leftrightarrow 10b + c = 27k - 100a$, on remplace :

$$11a - 10b - c = 11a - 27k + 100a = 111a - 27k\ ;$$

or 111 est un multiple de 3. Ok.

4. 60. Restes chinois,

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times 12v + 6\times 19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n\equiv n_0\ (19) \\ n\equiv n_0\ (12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n\equiv n_0\ (19) \\ n\equiv n_0\ (12) \end{cases}$ équivaut à $n\equiv n_0\ (12\times 19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par 228 = 12× 19. Quel est le reste r de cette division ?

Correction

Partie A : Question de cours, voir démonstrations arithmétique.

Partie B : $(S)\begin{cases} n\equiv 13(19) \\ n\equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv 13+19k \\ n\equiv 6+12k' \end{cases}$.

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13\times 12v + 6\times 19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N\equiv 13+19k$. Or $12v = 1-19u$ donc $N = 13(1-19u)+6\times 19u = 13+19\times(-7u)$; ok.

De même $N = 13\times 12v + 6\times 19u = 13\times 12v + 6(1-12v) = 6+12\times 7v$; ok.

2. a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0 = 13+19k_0 \\ n_0 = 6+12k'_0 \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n-n_0 = 19(k-k_0) \\ n-n_0 = 12(k'-k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv n_0\ (19) \\ n\equiv n_0\ (12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n-n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n-n_0$, ce qui équivaut à $n\equiv n_0\ (12\times 19)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5)+12(8)=1$; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N = 13+19\times(-7u)$, ce qui donne $N = 678$; de même on prend $v = 8$ et $N = 6+12\times(7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n\equiv n_0\ (12\times 19)\equiv 678(12\times 19)\equiv 678(228)\equiv 222(228)$.

4. 222.

4. 61. Fermat,

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4n-1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1}-1\equiv 0 \bmod p$ ».

Partie A : quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} -1$ est divisible par 29.
3. Pour $1\le n\le 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} -1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n -1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} -1$.

Partie B : divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n\ge 1$ tel que $4^n\equiv 1 \bmod p$.

2. Soit $n\ge 1$ un entier naturel tel que $4^n\equiv 1 \bmod p$ .Onnote b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b\equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

a. Démontrer que $4^r\equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.

b. Prouver l'équivalence : $4^n -1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

c. En déduire que b divise $p-1$.

4. 62. Eq. diophantienne,

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1 \text{ modulo } 2^n$.

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 7 \text{ modulo } 8$?

Partie B Étude du cas général où $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1 \text{ modulo } 2^n$.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s+1$ où q, r, s sont des entiers naturels.

a. Montrer que $x^2+y^2+z^2 \equiv 1 \text{ modulo } 4$.

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que x, y, z sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.

b. En déduire que $x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \text{ modulo } 8$.

c. Conclure.

4. 63. Similitude & suite,

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = i,\ b = 1 + 2i,\ c=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (Un) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} etU_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes dela suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p}+1)+U_{n-p}$.

La notation pgcd(a ; b) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,\,p)}$. Déterminer le nombre : pgcd(U_{2005} , U_{15}).

4. 64. QCM,

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \ (\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
B : L'équation (E) n'a aucune solution.
C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,89^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$.

C : $p \equiv 4(17)$.

B : p est un nombre premier.

D : $p \equiv 1(17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - ia}{1 - i}$.

C: $a - z = i(b - z)$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Correction

1. Testons la réponse D : si $x \equiv 2(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 4 - 2 + 4(6) \equiv 6(6) \equiv 0(6)$; si $x \equiv 5(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 25 - 5 + 4(6) \equiv 24(6) \equiv 0(6)$. Ok.

2. Simplifions par 2 : $12x + 17y = 1$ a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que −7 et 5 est pas mal : $12 \times -7 + 17 \times 5 = 1$. Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On a $n = 1\,789 = 4\ (17)$; par ailleurs $4^2 = 16 \equiv -1(17)$ donc $4^{2\times 1002+1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$. Réponse C.

4. 65. Restes de puissances,

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $((10)^n \equiv 1(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S(9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :

– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D(9)$.

b. Sachant que 2005 < 10000, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

4. 66. Eq. dioph.,

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).

3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

Correction

Partie A

1. $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

s'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;
s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;
comme N est impair, a et b n'ont pas la même parité.

2. Evident : $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = pq$.

3. Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

Partie B

1. a.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	−2 = 7	−2 = 7	0	4	1
X^2-1	−1 = 8	0	3	−1 = 8	6	6	−1 = 8	3	0

b. On a 250 507 = 27 834 . 9 + 1, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont ceux de $X^2 - 1$.

c. Comme $a^2 - 250\,507 = b^2$, les restes doivent être égaux modulo 9, on a $a^2 \equiv b^2 + 1(9)$;

*si on prend $b \equiv 0(9)$ alors $a^2 \equiv 1(9) \Rightarrow a \equiv 1(9)$ ou $a \equiv 8(9)$,

*si on prend $b \equiv 1(9)$ alors $a^2 \equiv 2(9)$, ce qui est impossible,

*si on prend $b \equiv 2(9)$ alors $a^2 \equiv 5(9)$, ce qui est impossible, etc.

2. On a $a^2 - 250\,507 = b^2$ d'où $a^2 = 250\,507 + b^2 \geq 250\,507 = (500,...)^2 \geq 501^2$ donc $a \geq 501$. Si on avait une solution du type (501 ; b), on aurait $251001 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 494$ or 494 n'est pas un carré parfait.

3. a. a est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501, lequel est congru à 6 mod 9 ; on peut donc prendre $503 \equiv 8(9)$ ou $505 \equiv 1(9)$.

b. Le plus simple est de faire quelques essais :

a	$a^2-250507$	$\sqrt{a^2 - ...}$
505	4518	67,2160695
514	13689	117
523	23022	151,730023
532	32517	180,324707
541	42174	205,363093
550	51993	228,019736
559	61974	248,945777
568	72117	268,546085
577	82422	287,09232

On a donc la première solution pour k = 1, ce qui donne la solution (514, 117).

Partie C

1. On a $250\ 507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397.631$.

2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

u	v	quotient	reste
631	397	1	234
397	234	1	163
234	163	1	71
163	71	2	21
71	21	3	8
21	8	2	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1

Le PGCD est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.

3. Cette écriture ne sera pas unique (mis à part p = 1, q = 250507, par exemple) si 397 n'est pas un nombre premier. Or 397 est premier, la décomposition est bien unique.

<u>4. 67. Bézout+Fermat</u>

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k, 68+109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1\,[\text{modulo } 227]$.

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

4. 68. Suite de restes,

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k} \equiv 2(\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0(\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28(\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Correction

1. On calcule $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$.

On peut conjecturer que $u_{2k} = \ldots 14$ et $u_{2k+1} = \ldots 64$.

2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n + 36$. Or $24u_n + 36 \equiv 0[4]$, donc

$$u_{n+2} \equiv (u_n + 24u_n + 36)[4] \equiv (u_n + 0)[4] \equiv u_n[4].$$

On en déduit par récurrence que $u_{2k} \equiv u_0[4]$ or $u_0 \equiv 2[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k} \equiv 2[4]$.

De même $u_{2k+1} \equiv u_1[4]$ or $u_1 = 64 \equiv 0[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3. a. Au rang 0 : $2u_0 = 28 = 52 + 3$: vrai.

Supposons que pour l'entier n, on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$ alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3.$$

La relation est donc vraie au rang $n + 1$.

b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3$ or $5^n \equiv 1[4] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25[100]$ en multipliant tout par 25 ; finalement $2u_n \equiv (25 + 3)[100] \equiv 28[100]$.

4. La relation précédente donne $u_n = 14 + 50k, k \in \mathbb{Z}$; mais comme $u_{2k} \equiv 2[4]$ et que $14 \equiv 2[4]$, il faut $50k \equiv 0[4]$ et donc lorsque k est pair $u_k \equiv 14[100]$, lorsque k est impair $u_k \equiv 14 + 50[100] \equiv 64[100]$.

5. On voit que le PGCD de 14 et 64 est 2 ; il faut donc montrer que c'est le cas. Comme on a $5u_n - u_{n+1} = 6$, la relation de Bézout montre que PGCD(u_{n+1} ; u_n) est un diviseur de 6. Or 3 divise 3 mais pas 5 donc 3 ne divise pas $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Conclusion : PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 2.

4. 69. PGCD dans suite

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2 ; b^2) = 1 ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k} ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \, \text{PGCD}(k^2 ; (k+1)^2)$.

b. Calculer PGCD (k ; $k + 1$).

c. Calculer PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}).

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k + 1$.

a. Démontrer que les entiers $2k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

4. 70. Fibonacci,

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si (a ; b) est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Correction

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab-b^2=1 \\ a^2+ab-b^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+b)-b\times b=1 \\ b(b-a)-a\times a=1 \end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v,\ v=-b$, dans le second $u=b-a,\ v=-a$.

2. a. $a = b$: $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow a^4=1 \Rightarrow a=1$ (a > 0).

b. (1 ; 1) est déjà fait, (2 ; 3) : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et (5 ; 8) : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir −1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;\,x)$ est une solution ssi (x ; y) est une solution :

$$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1\ ;$$

Même calcul pour $(y\,;\,y+x)$.

b. (2 ; 3) est solution donc $(3-2\,;\,2)=(1\,;\,2)$ et $(3\,;\,3+2)=(3\,;\,5)$ en sont ; (5 ; 8) est solution donc $(8-5\,;\,5)=(3\,;\,5)$ et $(8\,;\,5+8)=(8\,;\,13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;\,2)$, $(3\,;\,5)$ et $(8\,;\,13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;\,y+x)=(a_{n+1}\,;\,a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;\,a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : (1 ; 1) est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.

En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1 = 1$ et $u_0 = 1$ donc $d = 1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

4. 71. QCM

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x + 35y = 9$ est l'ensemble des couples : $(-144+70k\,;\,99-24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = iz + (1-i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

Correction

1. **Vrai** : 4 002 = 2 004×1+1 998 ; 2 004 = 1 998×1+6 ; 1 998 = 6×336. Le dernier reste non nul est bien 6.

2. **Vrai** : $2^{pq}-1=\left(2^p\right)^q-1=\left(2^p\right)^q-1$; or $a^m-1=(a-1)\left(a^{m-1}+a^{m-2}+\ldots+1\right)$.

3. **Faux** : contre-exemple : $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9.

4. **Faux** : les méthodes habituelles donnent les solutions $(35k - 144\,;\,99 - 24k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. **Faux** : soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{AM_1}=3\overrightarrow{AM}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM_1}\right)=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\times 3\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

6. **Vrai** : les points invariants vérifient $z=iz+(1-i)$, soit avec $z=x+iy$, $x+iy=ix-y+1-i$, soit $x+y-1+i(y-x+1)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$ qui est bien l'équation d'une droite.

4. 72. Congruences

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9+1^2$; $13= 9+2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 +9 = 2^n$ où $a\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n\geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 +9 = 3^n$ où $a\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n\geq 3$.

a. Montrer que si $n\geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p\geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 +9 = 5^n$ où $a\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

4. 73. Rep

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »

Pour tout entier naturel $p\geq 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+\ldots+10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p=\frac{10^p-1}{9}$. Peut-on être certain que 10^p-1 est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

4. 74. Fermat et Bézout,

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1\ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu-nv=d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$. Montrer ensuite que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Correction

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x+x^2+...+x^k)-(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$.

2. a. $n = dk$. Remplaçons x par a^d dans la relation précédente :

$$(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+...+a^{d(k-1)})=a^{dk}-1=a^n-1\ .$$

a^d-1 est en facteur dans a^n-1, c'en est bien un diviseur.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004=2^2.3.167$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^2-1=3,\ 2^3-1=7,\ 2^4-1=15,\ 2^6-1=63,\ 2^{12}-1=4095,...$ $2^{2004}-1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004}-1$.

3. a. Bézout dit : m' et n' sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v tels que $um'+vn'=1$ (ou $um'-vn'=1$). On multiplie tout par d : $udm'+vdn'=d$, soit $um+vn=d$ (ou $um-vn=d$).

b. Développons :

$$a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1 \Leftrightarrow a^{mu}-a^{nv+d}=0 \Leftrightarrow a^{mu}=a^{nv+d} \Leftrightarrow mu=nv+d \Leftrightarrow mu-nv=d\ .$$

Divisons la relation $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ par $D=a^d-1$: $(\dfrac{a^{mu}-1}{a^d-1})-(\dfrac{a^{nv}-1}{a^d-1})a^d=1$; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A-a^d.B=D$ où $A=\dfrac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ et $B=\dfrac{a^{nv}-1}{a^d-1}$. A et B sont donc premiers entre eux et D est le PGCD de A et B.

c. Le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est $d=3$. On a alors $1.63-1.60=3$ d'où en prenant $a = 2$: $A=2^{63}-1$, $B=2^{60}-1$ et $D=2^3-1=7$.

4. 75. Fermat

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k\equiv 1(p)$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k\equiv 1(p)$ et soit n un entier naturel.Montrer que, si k divise n, alors $2^n\equiv 1(p)$.

c. Soit b tel que $2^b\equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n\equiv 1(p)$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A=2^q-1$. On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q\equiv 1(p)$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1(2q)$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

4. 76. Restes chinois + plan

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u + 13v + 23w = 0$.

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w (\text{mod } 3)$.

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \le r \le 2$. Montrer que les éléments de E sont de la forme : $(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r)$.

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées (x, y, z) entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

4. 77. Eq. dioph

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'´equation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs. Montrer que si p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors p divise 14 et q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

4. 78. Bézout, France, sept 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1[2003]$.

c. Montrer que, pour tout entier relatif x, $123x \equiv 456[2003]$ si et seulement si $x \equiv 456k_0 [2003]$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456[2003]$.

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que : $1 \le n \le 2002$ et $123n \equiv 456[2003]$.

2. Soit a un entier tel que : $1 \le a \le 2002$.

a. Déterminer PGCD(a ; 2003). En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1[2003]$.

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que : $1 \le x \le 2002$ et $ax \equiv b[2003]$.

4. 79. Congruences,

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à −1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1=4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.

4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5. Existe-t-il quinze nombres premiers p_1, p_2, ..., p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier

$$A=p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{15}^4$$

soit un nombre premier ?

4. 80. Suite, Antilles,

1. a. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{6}$.

a. Que valent a_1 et b_1 ? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

b. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1}+b_{n+1}$. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas a_n+b_n.

d. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction

1. a. $\left(1+\sqrt{6}\right)^2=1+2\sqrt{6}+6=7+2\sqrt{6}$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4=\left(7+2\sqrt{6}\right)^2=73+28\sqrt{6}$,

$\left(1+\sqrt{6}\right)^6=\left(73+28\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)=847+342\sqrt{6}$ ..

b. $847=342\times2+163$; $342=163\times2+16$; $163=16\times10+3$; $16=3\times5+1$ donc 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{6}$.

a. $a_1=1, b_1=1$; $a_2=7, b_2=2$; $a_3=73, b_3=28$, etc.

b. $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6}=\left(a_n+b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)=a_n+6b_n+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{6}$ donc $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+6b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$.

c. $a_{n+1}+b_{n+1}=2a_n+7b_n=2\left(a_n+b_n\right)+5b_n$; comme $5b_n$ est divisible par 5, si 5 ne divise pas a_n+b_n, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1}+b_{n+1}$. Par ailleurs 5 ne divise pas $a_1+b_1=2$ donc par récurrence 5 ne divise pas a_n+b_n.

d. $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+6b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{n+1}-b_{n+1}=5b_n\\ 6b_{n+1}-a_{n+1}=5a_n\end{cases}$.

Comme il est clair que a_n et b_n sont entiers, $a_{n+1}-b_{n+1}$ et $6b_{n+1}-a_{n+1}$ sont divisibles par 5.

Si a_{n+1} et b_{n+1} ne sont pas premiers entre eux, il existe k tel que $a_{n+1}=k\alpha$, $b_{n+1}=k\beta$ (k ne peut être un multiple de 5 sinon il se mettrait en facteur dans a_n+b_n qui serait alors divisible par 5). Remplaçons :

$\begin{cases}a_{n+1}-b_{n+1}=5b_n\\ 6b_{n+1}-a_{n+1}=5a_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5b_n=k\left(\alpha-\beta\right)\\ 5a_n=k\left(6\beta-\alpha\right)\end{cases}$ d'où a_n et b_n ont un facteur commun ce qui est contradictoire.

Par ailleurs a_2 et b_2 sont premiers entre eux donc par récurrence a_n et b_n sont premiers entre eux.

4. 81. PGCD,

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3-11n+48$ est divisible par $n + 3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2-9n+16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\ ;\ b)=\text{PGCD}(bc-a\ ;\ b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

4. 82. Congruences,

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3, x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1, y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a. Calculer le PGCD de x^8 et x^9, puis celui de x^{2002} et x^{2003}. Que peut-on en déduire pour x^8 et x^9 d'une part, pour x^{2002} et x^{2003} d'autre part ?

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n. Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

4. 83. Repunit,

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111 \ldots 11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$). Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

Démontrer l'égalité : $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

4. 84. Eq. dioph.,

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

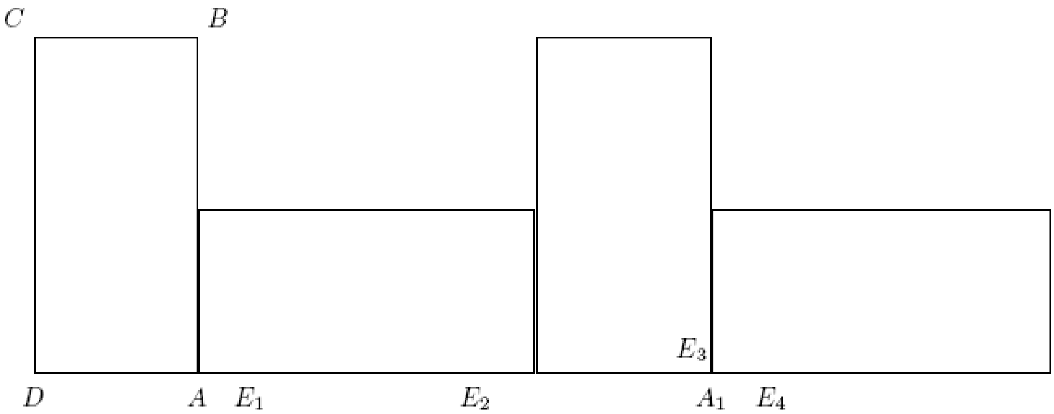
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a ; b)$$

(on pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux).

4. 85. Béout+rotation, France, sept. 2002

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



1. Faire une figure : construire $ABCD$, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(A) = N$ et $r'(B) = P$. Déterminer l'angle de r'.
b. Montrer que l'image de $ABCD$ par r' est $AMNP$.
c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles $ABCD$ et $AMNP$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$.
Sur la demi-droite $[DA)$, on définit ainsi la suite de points (A_k), $k > 1$, vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$.
Sur la même demi-droite, on considère la suite de points (E_n), $n > 1$, vérifiant, en cm, $DE_n = 6{,}55n$.
a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?
b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.
Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.
Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

4. 86. Bézout & suites

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :
a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.
b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

4. 87. Triplets pythag.,

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\text{(E)} : x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.
On suppose désormais que p est différent de 2 et que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation (E).
2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
a. Montrer que x et y sont de parités différentes.
b. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
c. En d éduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| ; 2uv\right)$ est solution de l'´equation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E), lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

4. 88. Bézout,

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$.

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

4. 89. PGCD,

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par : $\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$.

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. a. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application : Déterminer Δ pour $n = 2\,001$; déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

4. 90. Calendrier,

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $abba$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Montrer que si un nombre entier n n'a pas de diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors il n'en a pas de supérieur à $\sqrt{n}$.

1. b. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

c. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $abba$.

a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \text{ et } n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l' équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier n de (F) peut s' écrire sous la forme $2024 + 44k$ où k est un entier relatif.

3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

4. 91. Divisibilité,

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.

4. Dans cette question on suppose que n est impair.

a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b. Montrer que d divise n.

c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

4. 92. PGCD & PPCM

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD($a + b$; ab) = p, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$).

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, demême, que p divise b.

c. Démontrer que PGCD(a ; b) = p.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a\,;b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\,;ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

4. 93. PGCD,

4 points

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$. Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

4. 94. Similitude & Bézout

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M_0 d'affixe z_0 définie par $z_0=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour afflxe $z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1}=f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n-p)$ est multiple de 12.

4. a. On considère l'équation (E) : $12x-5y=3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

4. 95. Calendrier,

5 points

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0+6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\,;v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x-27y=2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;y_0)$ solution particulière de l'équation (E2) : $35x-27y=1$.

b. En déduire une solution particulière $(u_0\,;v_0)$ de (E_1).

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

d. Déterminer la solution $(u\,;v)$ permettant de déterminer J_1.

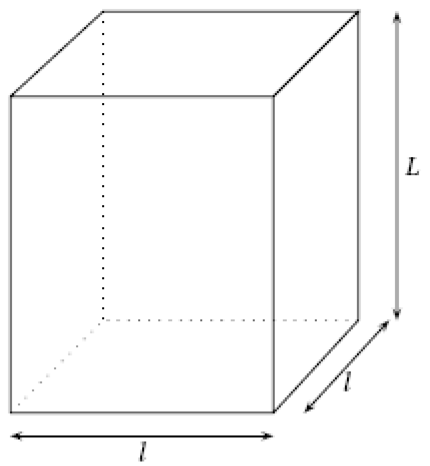
3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

4. 96. Bézout,

5 points



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l<L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

4. 97. Bézout,

4 points

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication :On remarquera que le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\ ;\ y)$ vérifie l'équation (E).

4. 98. Repunit,

4 points

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

4. 99. PGCD & PPCM,

5 points

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\text{PGCD}(x, y) = y - x$.

1. a. Calculer le PGCD(363, 484).

b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = (k+1)(y - x).$$

b. En déduire que pour tout couple (x, y) de S on a : $\text{PPCM}(x, y) = k(k+1)(y - x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $\text{PPCM}(x, y) = 228$.

4. 100. Bézout,

4 points

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 32n - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E'') $A_3 x + A_2 y = 3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

4. 101. Bézout & rotation

5 points

Les points $A_0 = O$; A_1 ; ... ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.

Les points $B_0 = O$; B_1 ; ... ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.

Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{21}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{15}$.

On définit la suite (M_n) de points par :

- M_0 est l'un des points $A_0, A_1, A_2, ..., A_{20}$;
- pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_A(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par :

- P_0 est l'un des points $B_0, B_1, B_2, ..., B_{14}$
- pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_B(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = O.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = O$.

a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = O$. En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$. On considère l'équation (E) : $7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

a. Déterminer une solution particulière $(a ; b)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

4. 102. PGCD,

4 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.

b. Démontrer que d est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCDde a et b.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

4. 103. Bézout,

5 points

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a. On suppose que l'équation (1) a aumoins une solution $(x_0 ; y_0)$.Montrer que d divise 60.

b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation.

On appellera S l'ensemble des couples (x ; y) solutions.

c. Énumérer tous les couples (x ; y) solutions de (2) et tels que : $-10 \leq x \leq 10$. Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées (x ; y) telles que : $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x ; y) de l'équation (2) appartiennent à E.

Comment peut-on caractériser S ?

4. 104. Bézout et plans

5 points

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes

(1) $2688x + 3024y = -3360$;

(2) $8x + 9y = -10$.

b. Vérifier que (1 ; −2) est une solution particulière de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$.

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. 105. Homothétie & multiples

5 points

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.

Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$.

Les coordonnées (x' ; y') de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples (x' ; y') de G× H tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est unmultiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples (x' ; y') qui conviennent.

En déduire les couples (x ; y) correspondant aux couples (x' ; y') trouvés.

Correction

1. a. $z' = 2(z-a) + (z-b) = 3z - 2a - b = 3z - 6 - i$.

b. $z = 3z + 2 - i \Leftrightarrow 2z = -2 + i \Leftrightarrow z = -1 + \frac{1}{2}i$. On a $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$ donc f est une homothétie de centre Ω et de rapport 3.

2. $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$, et $1 \leq y \leq 8$.

a. $1 \leq x \leq 8$ donc $3\times 1 + 2 \leq x' \leq 3\times 8 + 2 \Leftrightarrow 5 \leq x' \leq 26$

et $1 \leq y \leq 8$ donc $3\times 1 - 1 \leq y' \leq 3\times 8 - 1 \Leftrightarrow 2 \leq y' \leq 23$.

b. $x'-y'=3x+2-3y+1=3x-3y+3=3(x-y+1)$.

c. Si on prend deux entiers pairs ou impairs, la somme est paire, la différence également ; si on prend deux entiers de parité différente, la somme est impaire, la différence également.

d. $m=x'^2-y'^2=60k \Leftrightarrow (x'-y')(x'+y')=60k$; $x'+y'=3x+2+3y-1=3x+3y+1=3(x+y)+1$.

Si *x'* et *y'* sont de parité différente, $x'-y'$ et $x'+y'$ sont impairs et leur produit également ; ce ne peut être un multiple de 60. Donc *x'* et *y'* sont de parité identique ; comme $x'-y'$ est un multiple de 3 et pair, c'est un multiple de 6.

Si le nombre *x'* − *y'* est un multiple de 30, $x-y+1$ est un multiple de 10, or *x* et *y* sont plus petits que 8, c'est impossible.

e. Comme $x'-y'$ est un multiple de 6 et pas de 30, $x'-y'$ n'est pas divisible par 5 ; pour que $x'^2-y'^2$ soit un multiple non nul de 60, il faut donc que *x'* + *y'* soit divisible par 5 ; comme il est pair, c'est un multiple de 10.

On a alors $\begin{cases} x'-y'=6p \\ x'+y'=10q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'=6p+10q \\ 2y'=10q-6p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=5q+3p \\ y'=5q-3p \end{cases}$ avec *p* = 1 ou 2 et *q* = 1, 2, 3 ou 4, ce qui donne :

p	q	*x'*	*y'*	*x'*² − *y'*²	x	y
1	1	8	2	60	2	1
1	2	13	7	120	11/3	8/3
1	3	18	12	180	16/3	13/3
1	4	23	17	240	7	6
2	1	11	−1	120	3	0
2	2	16	4	240	14/3	5/3
2	3	21	9	360	19/3	10/3
2	4	26	14	480	8	5

et donc les solutions en *x* et *y* : $(2;1),(7;6),(8;5)$. On pouvait le faire rapidement avec Excel...

	y	1	2	3	4	5	6	7	8
	y'	2	5	8	11	14	17	20	23
x	*x'*								
1	5	21	0	-39	-96	-171	-264	-375	-504
2	8	60	39	0	-57	-132	-225	-336	-465
3	11	117	96	57	0	-75	-168	-279	-408
4	14	192	171	132	75	0	-93	-204	-333
5	17	285	264	225	168	93	0	-111	-240
6	20	396	375	336	279	204	111	0	-129
7	23	525	504	465	408	333	240	129	0
8	26	672	651	612	555	480	387	276	147

4. 106. Congruences,

5 points

1. a. Pour $1\le n\le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout *n*, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour *n* quelconque ?

e. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $u_n=1+3+3^2+...+3^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}3^i$, *n* entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $u_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$.

b. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c. Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Correction

1. a. $3^0=1\equiv 1[7]$, $3^1=3\equiv 3[7]$, $3^2=9\equiv 2[7]$, $3^3\equiv 3\times 2[7]\equiv 6[7]$, $3^4\equiv 4[7]$, $3^5\equiv 5[7]$, $3^6\equiv 1[7]$.

Tous les 6 termes on retourne au point de départ.

b. $3^{n+6}-3^n=3^n\left(3^6-1\right)$ or $3^6\equiv 1[7]$ donc 3^6-1 est divisible par 7.

c. Divisons 1000 par 6 : $1000=6\times 166+4$ donc $3^{1000}=\left(3^6\right)^{166}\times 3^4$; comme $3^6\equiv 1[7]$ et $3^4\equiv 4[7]$,on a $3^{1000}\equiv 4[7]$.

d. En divisant n par 6 on a une partie qui sera congrue à 1 et l'autre tombera dans les restes calculés au 1.a.

e. En aucun cas on ne peut trouver un reste nul donc pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. a. On a la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3, de premier terme 1 : $u_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$.

b. u_n est divisible par 7 lorsque $3^n\equiv 1[7]$, soit lorsque n est un multiple de 6.

c. $u_6=\frac{3^6-1}{2}=\frac{1}{2}\left(3^3-1\right)\left(3^3+1\right)=2^2\times 7\times 13$; tous les diviseurs sont donc

1, 13, 7, 91, 2, 26, 14, 182, 4, 52, 28, 364.

4. 107. PGCD & parité,

5 points

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair.Onpose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

b. Démontrer que si n est pair alors $81n^2 - 1$ est impair.

c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

4. 108. Bases,

5 points

On considère l'équation (1) : $20b - 9c = 2$ où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple $(b_0 ; c_0)$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b ; c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b ; c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre entier naturel P, déterminé par

$$P=\alpha_n r^n+\alpha_{n-1}r^{n-1}+\ldots+\alpha_1 r+\alpha_0$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0<\alpha_n<r$, $0\le\alpha_{n-1}<r$, ..., $0\le\alpha_1<r$, $0\le\alpha_0<r$

est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ».

Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).

Montrer que a+5 est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.

Donner l'écriture de P dans le système décimal.

4. 109. Bézout, 5 points

Le nombre n est un entier naturel non nul ; on pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Complétez le tableau ci-dessous. Quelle conjecture pouvez vous faire sur d ?

n	a	b	d
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3. On considère l'équation (E) : $7k - 4n = 3$, où n et k sont deux entiers naturels non nuls.
a. Déterminer une solution particulière de (E), puis tous les couples solutions de (E).
b. En déduire tous les couples d'entiers naturels $(n ; k)$ solutions tels que $4n + 3 = 7k$.
4. Déterminer, à l'aide des congruences, les entiers naturels n tels que $5n + 2$ soit divisible par 7.
5. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Correction

1.

n	a	b	d
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

Il semble que lorsque $n \equiv 1[7]$, $d = 7$ sinon $d = 1$.

2. $5a - 4b = 20n + 15 - 20n - 8 = 7$. d divise 7 donc $d = 1$ ou $d = 7$.

3. a. (E) : $7k - 4n = 3$: la solution $k = 1$, $n = 1$ est évidente. En appliquant la méthode habituelle on a :

$$\begin{cases} 7k - 4n = 3 \\ 7 \times 1 - 4 \times 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 7(k-1) - 4(n-1) = 0 \Rightarrow 7(k-1) = 4(n-1) \ ;$$

comme 4 ne divise pas 7 il divise $k-1$, de même comme 7 ne divise pas 4 il divise $n-1$ et finalement

$$\begin{cases} k - 1 = 4p \\ n - 1 = 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 4p \\ n = 1 + 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z}.$$

b. $(n ; k)$ entiers naturels : $\begin{cases} k = 1 + 4p \geq 0 \\ n = 1 + 7p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq -1/4 \\ p \geq -1/7 \end{cases} \Rightarrow p \geq 0$.

4. a. Avec un petit tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$5n$+2 mod 7	2	0	5	3	1	6	4

Donc $5n + 2$ est divisible par 7 lorsque $n \equiv 1[7]$.

5. D'après la question 3. on a $4n+3=7k$ lorsque $n \equiv 1[7]$, de même pour $5n+2=7k$. Lorsque $n \equiv 1[7]$, a et b sont divisibles par 7 qui est alors la valeur de d ; il faut donc $r = 1$.
Pour toutes les autres valeurs de r, ni a ni b ne sont divisibles par 7 et $d = 1$.

4. 110. Bézout & plan,

5 points

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation : $48x + 35y = 1$.

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

b. Déduire de 1. a. tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48 ; 35 ; 24) et le point A de coordonnées (−11 ; 35 ; −13).

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l' ensemble (P) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$.

b. Soit (D) la droite intersection de (P) avec le plan d'équation $z = 16$.

Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [−100 ; 100].

En déduire les coordonnées du point de (D), coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

4. 111. Bézout,

5 points

1. On considère l'équation (E) : $8x+ 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

4. 112. Bézout,

5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $A(12 ; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O ; \vec{j})$ tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (E) : $2x +3y = 78$.

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k ; 18 - 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \le x \le 21$ et $-5 \le y \le 14$?

4. 113. Th. de Wilson,

5 points

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.

Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n - 1)! + 1$ est-il pair ?
3. L'entier $(n - 1)! + 1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15 - 1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11 - 1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1< q < p$) qui divise $(p - 1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p - 1)! + 1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p - 1)! + 1$?

4. 114. Premiers,

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1\ ,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1\,.$$

1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous que b_3 est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (**1**) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (**1**) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (**1**).

c. Résoudre l'équation (**1**).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

4. 115. Congruences,

4 points

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?

b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire (en base 2) :

$$a = 1001001000,\ b = 1000100010000.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7 ?

4. 116. Eq. dioph.,

4 points

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Correction

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

On pose $\begin{cases} a = kd \\ b = kd' \end{cases}$ où d est le PGCD de a et b : $a+b = dk + dk' = d(k+k') = 1999(k+k') = 11994 \Rightarrow k+k' = 6$.

Les valeurs possibles de k et k' et celles de a et b sont donc :

k	k'	a	b
0	6	0	11994
1	5	1999	9995
2	4	3998	7996
3	3	5997	5997
4	2	7996	3998
5	1	9995	1999
6	0	11994	0

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

1. 3 est solution de (E) ssi $9 - 3S + 11994 = 0 \Leftrightarrow S = 4001$; la deuxième solution est alors 4001−3=3008.
2. 5 est solution de (E) ssi $25 - 5S + 11994 = 0 \Leftrightarrow 5S = 12019$, S n'est pas entier, ça ne colle pas.
3. (E) peut s'écrire également $11994 = Sn - n^2 = n(S-n)$ donc n divise 11994.

Comme $11994 = 6\times1999 = 2\times3\times1999$, n peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997 et 11994 d'où S peut prendre les valeurs 2005, 4001, 5999 et 11995.

n	$S-n$	S
1	11994	11995
2	5997	5999
3	3998	4001
6	1999	2005
1999	6	2005
3998	3	4001
5997	2	5999

11994	1	11995

Partie C

Evident… inutile de dépasser $\sqrt{1999} \approx 44,7$ …

4. 117. Diviseurs+pgcd,

n désigne un entier naturel.

1. Montrer que le pgcd de $n - 1$ et $n + 3$ est le même que celui de $n + 3$ et 4.

Quelles valeurs peut prendre le pgcd de $n - 1$ et $n + 3$?

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n - 1$ divise $n + 3$.

3. Montrer que pour tout n, les entiers $n - 1$ et $n^2 + 2n - 2$ sont premiers entre eux.

4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n - 1)(2n + 1)$ divise $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$.

4. 118. Bézout + ppcm,

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) :$18a + 23b = 2001$.

a. Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b. Déterminer une solution de (E).

c. Résoudre (E).

2. Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que $18d + 23m = 2001$, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

4. 119. Base et diviseurs, Bac C, Inde, 1979

Soit B un entier strictement supérieur à 3. Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base B

1. Montrer que $\overline{132}$ est divisible par B + 1 et B + 2

2. Pour quelles valeurs de B $\overline{132}$ est il divisible par 6 ?

3. Montrer que A = $\overline{1320}$ est divisible par 6.

4. 120. Bases+congruences,

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7 (on pourra remarquer que $851 \equiv 4[\bmod 7]$).

3. On considère le nombre B qui s'écrit $\overline{2103211}^4$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 4.

4. 121. Nombres de Farey et approximation d'un rationnel par un rationnel

Définition

On dira que deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont **consécutives** si $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ et s'il n'existe pas de fraction $\frac{a}{b}$ comprise dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{m}{n};\frac{m'}{n'}\right[$ telle que b soit inférieur au plus petit des deux dénominateurs n et n'.

Théorème

Deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont consécutives si et seulement si

$$nm' - mn' = 1 \quad (*)$$

Démonstration

• Démontrer d'abord que si la relation (*) est vérifiée, alors les deux fractions sont effectivement consécutives (comparer $\frac{a}{b} - \frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'} - \frac{m}{n}$, dans le cas où b est inférieur à min(n, n')).

• Inversement, soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions irréductibles ne vérifiant pas la condition(*). On suppose d'abord : $n \le n'$.

• Démontrer que l'équation $nx - my = 1$ a des solutions en nombres entiers, puis donner tous les couples d'entiers solutions à partir d'une solution (x_0, y_0).

• Démontrer qu'un des couples (m", n") solution est tel que $1 \leq n'' < n$.

• Conclure d'après la démonstration du sens direct que les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ ne sont pas consécutives.

• Procéder de façon similaire dans le cas $n' < n$, en considérant l'équation : $xm' - yn' = 1$.

Définition

Soit N un entier naturel non nul.

On appelle **suite de Farey** d'ordre N la suite finie des fractions irréductibles inférieures ou égales à 1, dont le dénominateur vaut au plus N, classées dans l'ordre croissant.

Exemple : la suite de Farey d'ordre 7 est : $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Il est alors immédiat que deux termes successifs d'une suite de Farey : $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$, sont consécutifs au sens ci-dessus.

Donc, d'après le Théorème : $nm' - mn' = 1$ (proposition 1).

Examinons maintenant comment une nouvelle fraction s'insère dans la précédente suite de Farey. Supposons que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m''}{n''}$ soient consécutifs dans une suite de Farey, et que dans une suite de Farey postérieure on ait comme termes consécutifs : $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$. ($m'$, n') est une solution de $nx - my = 1$; (m", n") est la solution suivante, donc $m'' = m + m'$, $n'' = n + n'$ (proposition 2).

Telle est la formule qui donne l'insertion d'une nouvelle fraction. Il faut donc rechercher les dénominateurs de fractions consécutives dont la somme est égale au nouvel ordre de Farey.

Par exemple, avant la suite de Farey d'ordre 7 ci-dessus, nous avions celle d'ordre 5 :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Les fractions consécutives dont la somme des dénominateurs fait 7 sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, entre lesquels va s'intercaler $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ qui vont donner naissance à $\frac{3}{7}$, etc.

On peut aussi montrer, plus généralement :

Si $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ sont trois termes successifs d'une suite de Farey, alors $\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}$.

Farey était un géologue britannique. Il introduisit en 1816 les suites qui portent son nom, en en énonçant les propriétés que nous venons de voir. Cauchy compléta ses preuves.

On peut aussi parler de l'approximation rationnelle d'un réel, par exemple sous l'aspect graphique, pour commencer. Les meilleures fractions approximantes sont les réduites de la fraction continuée. Le "Résultat" ci-dessus permet d'affirmer que deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ vérifient l'équation : $nm' - mn' = 1$ ou -1.