Cette fiche a été téléchargée sur le site http://sila.e-monsite.com

CORRIGES DE TRAVAUX DIRIGES DE MATH TERMINALES C,D,E.

Structure : Probabilités

JE RAPPELLE QUE $C_n^k = \binom{n}{k}$

PAR Hugues SILA

Exercice 1

Le nombre total de possibilités de rangement est *n*!

1. Supposons que A est en premier, B est derrière, il reste $(n-2)!$ répartitions possibles. Comme A peut être placé n'importe où dans la file avec B derrière lui, il y a $(n-1)$ places possibles pour A et donc la probabilité $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$ d'avoir A suivi de B ; c'est pareil pour B suivi de A, soit la probabilité finale $\frac{2}{n}$.

2. Même raisonnement ; au pire B est en dernier et A *r* places devant ; on peut placer A de $n-r$ manières, la probabilité finale est alors $2\frac{(n-r)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r)}{n(n-1)}$.

Exercice 2.

1. *A* et *B* incompatibles donc $A\cap B=\varnothing$ d'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$.

2. *A* et *B* indépendants : $P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)\Rightarrow\frac{4}{5}P(B)=\frac{3}{10}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}$.

3. *A* ne peut être réalisé que si *B* est réalisé : tous les événements de *A* sont dans *B*,

$P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$.

Exercice 3

1. On prend par exemple $B\cup C=E$, soit $P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)$,

$P(E)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ **et**

$$A\cap E=(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow P(A\cap E)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C)$$
$$=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

donc en remplaçant on obtient la formule.

2. Même chose, par récurrence (bof… et très pénible).

Exercice 4.

1. $E_1\cap E_2=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap(B\cup C)=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap C\right)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

2. $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$ **donc en appelant $K=B\cup C$, on a** $E_1\cup E_2=\left(A\cap\overline{K}\right)\cup(A\cap K)=A$.

3. On calcule $P(B\cup C)=0,4+0,3-0,1=0,6$, $P\left(\overline{B\cup C}\right)=0,4$; $P(E_1)+P(E_2)=P(A)=0,6$.

En utilisant la formule de l'exo 9, on a

$P(A\cup K)=P(A\cup B\cup C)=0,6+0,4+0,3-0,1-0,1-0,2+0,05=0,95$ **; par ailleurs**

$P(A\cup K)=P(A)+P(K)-P(A\cap K)\Rightarrow 0,95=0,6+0,6-P(E_2)\Rightarrow P(E_2)=0,25$

et enfin $P(E_1)=0,6-0,25=0,35$**.**

Exercice 5.

Il manque $P(5)=1-3\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$**.**

1. Il faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x = 5 ou 6 ; on a donc la probabilité $2\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **(on enlève 1/4 pour ne pas compter (6, 6) deux fois).**

2. Là c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$**.**

Exercice 6

. $P(A)=P_{C_1}(A)\times P(C_1)+P_{C_2}(A)\times P(C_2)+P_{C_3}(A)\times P(C_3)=0+1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ **;**

$P_A(C_2)=\frac{P(A\cap C_2)}{P(A)}=\frac{P_{C_2}(A)\times P(C_2)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$ **(ce qui était totalement évident…)**

2. Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C_2, donc $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ **(attention à l'indépendance, sinon on aurait quelque chose plus compliqué).**

Exercice 7

a. L'univers comporte $\binom{20}{6}$ **tirages simultanés de 6 objets parmi 20, il y a** $\binom{12}{6}$ **manières de tires les 6 doses, soit une probabilité de :** $\frac{\binom{12}{6}}{\binom{20}{6}}=\frac{\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6!}}{\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{6!}}\approx 0,024$ **, environ 2,4%.**

b. On cherche 1 – [Probabilité (0 dose herbicide) + (1 dose herbicide)], soit

$$P(0)=\frac{\binom{8}{6}}{\binom{20}{6}}=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{20}{6}}=\frac{\frac{8\times7}{2}}{\frac{20\times\ldots\times15}{6!}}\approx 0,0007=0,07\ \%\ .$$

$$P(1)=\frac{\binom{12}{1}\binom{8}{5}}{\binom{20}{6}}=\frac{12\times\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5!}}{\binom{20}{6}}=\frac{12\times8\times7}{\frac{20\times\ldots\times15}{6!}}\approx 0,0017\approx 0,17\ \%$$

Probabilité recherchée = 100 – (0,07+0,17) = 99,76 %.

PAR Hugues SILA

Exercice 8

a. Il y a $\binom{2}{14}=91$ **manières de tirer 2 boules simultanément parmi les 14 boules de la boîte,** $\binom{2}{4}=6$ **manières de tirer 2 rouges parmi les 4 rouges,** $\binom{2}{3}=3$ **manières de tirer 2 vertes parmi les 3 vertes et** $\binom{2}{7}=21$ **manières de tirer 2 jaunes parmi les 7 jaunes.**

Probabilité recherchée = $\frac{6+3+21}{91}=0,3297$ **soit 32,97%.**

b. Comme on tire deux boules, l'événement contraire de « 2 boules de même couleur » est « 2 boules de couleurs différentes ». La probabilité est donc $1-0,3297=0,6703$**.**

Exercices 9

a. $P(A)=\frac{1182}{1500}=0,788$**,** $P(B)=\frac{310}{1500}=0,2067$**,** $P(A\cap B)=\frac{190}{1500}=0,1267$**.**

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,868$**.**

b. Il y a 310 – 190 joueurs qui jouent uniquement au casino, soit $P(C)=\frac{120}{1500}=0,08$**.**

Exercice 10

a. On peut toujours utiliser une loi binomiale : $p=0,02$ **et** $n=2$**. La probabilité que l'on ait les deux pièces non conformes est** $\binom{2}{2}p^2\left(1-p\right)^0=0,02^2=0,0004$**.**

b. Evénements successifs : $P\left(C,\overline{C}\right)=P\left(C\right)p(\overline{C})=0,02\times0,98=0,0196$**.**

Exercice 11

a. Formule des probabilités totales :

$$P\left(f\right)=P\left(\left[H\cap f\right]\cup\left[F\cap f\right]\right)=P\left(H\right)P_H\left(f\right)+P\left(F\right)P_F\left(f\right)=\frac{12}{20}\times\frac{20}{100}+\frac{8}{12}\times\frac{40}{100}=0,28.$$

b. Probabilité recherchée = $\frac{0,6\times0,2}{0,6\times0,2+0,4\times0,4}=0,43$**.**

Exercice 12

a. A l'aide d'un arbre de probabilités à nouveau nous obtenons 0,25.0,05 + 0,35.0,04 + 0,40.0,02 = 0,0345.

b. $\frac{0,25\times0,05}{0,25\times0,05+0,35\times0,04+0,40\times0,02}=0,3623$**.**

Exercice 13

a. $P(chien)=0,36$ **donc** $P(chien\cap chat)=P_{chien}(chat)\times P\left(chien\right)=0,22\times0,36=0,079$**.**

b. $P(chat)=0,30$**,** $P_{chat}(chien)=\frac{P(chien\cap chat)}{P(chat)}=\frac{0,079}{0,30}=0,2633$**.**

PAR Hugues SILA

PAR Hugues SILA

Exercice 14

a. J'ai résolu cet exercice à l'aide d'un arbre de probabilités.

Probabilité recherchée= $\dfrac{0,3\times0,8}{0,3\times0,8+0,7\times0,1}=$ **77,42%**

b. Probabilité recherchée= $\dfrac{0,3\times\times0,2}{0,3\times0,2+0,7\times0,9}=$ **8,7%.**

Exercice 15

Question 1 : L'espérance mathématique du jeu est $\dfrac{4}{10}(60-30)+\dfrac{3}{10}(0-30)+\dfrac{3}{10}(20-30)=0$ **donc le jeu est C : équitable.**

Question 2 : Loi binomiale *n* = 4, $p=\dfrac{4}{10}$**,** $P(\text{au moins un oui})=1-P(0\text{ oui})=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^4=1-\dfrac{81}{625}=\dfrac{544}{625}$**, donc réponse B.**

Question 3 : Le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne : il y a $\binom{10}{2}=\dfrac{10\times9}{2}=45$ **tirages possibles ; la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à la probabilité de tirer *oui* et *non* ou *oui* et *blanc* ou *non* et *blanc*, soit** $\dfrac{4\times3+4\times3+3\times3}{45}=\dfrac{33}{45}=\dfrac{11}{15}$**, réponse C.**

Exercice 16

a. Vrai : On trouve facilement $P(N)=\dfrac{2}{3}$**,** $P(U/N)=\dfrac{1}{6}$ **et** $P(U/\bar{N})=\dfrac{2}{6}$**. Reprenons les probabilités totales :**

$P(U)=P(U/N).P(N)+P(U/\bar{N}).P(\bar{N})=\dfrac{1}{6}.\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{6}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$.

b. Vrai : épreuves indépendantes répétées donc loi binomiale : les paramètres sont *n* pour le nombre de tirages et *p* :

*** si on choisit un dé normal** $p=\dfrac{1}{6}$**, on a alors** $P(\text{tirer 6 } n \text{ fois})=\binom{n}{n}p^n(1-p)^0=\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ **;**

*** si on choisit le dé truqué** $p=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$**, on a alors** $P(\text{tirer 6 } n \text{ fois})=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$**.**

En refaisant le même raisonnement qu'au a. on obtient : $P(\text{tirer 6 } n \text{ fois})=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$**.**

c. Vrai : $p_n=P(\bar{N}/S_n)=\dfrac{P(\bar{N}\cap S_n)}{P(S_n)}=\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{\left(\dfrac{4}{6}\right)^n}{2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{4}{6}\right)^n}=\dfrac{4^n}{2+4^n}=\dfrac{1}{2\dfrac{1}{4^n}+1}$.

d. Faux : p_n **tend vers 1 quand *n* tend vers l'infini, ce qui semble logique.**

Exercice 17

Faux : L'urne contient $1+1+2^1+...+2^{k-1}+...+2^{n-1}=1+\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n$ **boules (somme des termes d'une suite géométrique).**

b. Faux : Si *k*>0, $P(X=k)=\dfrac{2^{k-1}}{2^n}=2^{k-n-1}$ **; si *k*=0,** $P(X=0)=\dfrac{1}{2^n}=2^{-n}$ **(la réponse proposée était forcément fausse puisque** $2^{n-k+1}>1$**).**

c. Vrai : On teste la formule pour *n*=2 : $\sum_{k=1}^{2}k2^{k-1}=1.2^0+2.2^1=5;(2-1)2^2+1=5$**. Récurrence :**

$$\sum_{k=1}^{n+1}k2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}+(n+1)2^n=(n-1)2^n+1+(n+1)2^n=2n2^n+1=n2^{n+1}+1$$ **;**

remplaçons maintenant *n* par *n*+1 dans la formule :

$$\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=(n-1)2^n+1\Rightarrow\sum_{k=1}^{n+1}k2^{k-1}=(n+1-1)2^{n+1}+1=n2^{n+1}+1$$ **; ok.**

d. Faux : $E(X)=0.2^{-n}+1.2^{-n}+2.2^{-n+1}+...+k.2^{-n+k-1}+...+n.2^{-n+n-1}=2^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}\right)$ **d'où**

$E(X)=2^{-n}\left((n-1)2^n+1\right)=(n-1)+2^{-n}$.

EXERCICE 18

a. Faux : $\mathrm{P}(B\cap U)=P(U\text{ et }2\text{ blanches})=P(B/U).P(U)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{n+2}{2}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}}=\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$.

b. Faux : Utilisons les probabilités totales : $P(B)=P(B\cap U)+P(B\cap V)=P(B/U)P(U)+P(B/V)P(V)$.

Or $P(B/V)=\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+2}{2}}=\dfrac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$, $P(B)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$**, soit** $P(B)=\dfrac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}$.

c. Vrai : $P(U/B)=\dfrac{P(B\cap U)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{2}{2(n+2)(n+1)}}{\dfrac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}}=\dfrac{2}{n^2-n+2}$.

d. Faux : $P(U/B)\le 0,1\Leftrightarrow\dfrac{2}{n^2-n+2}\le 0,1\Leftrightarrow n^2-n+2\ge 20\Leftrightarrow n^2-n-18\ge 0$ **; Δ=1+72, soit** $\sqrt{\Delta}\approx 8,5$ **d'où** $n_1\approx 4,75\,;n_2\approx -3,75$ **; le trinôme est positif si** $n\ge n_1$**, il faut donc que** $n\ge 5$**. De toutes manières on pouvait tester 4 qui donne** $P(U/B)=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$ **qui est trop gros.**

EXERCICE 19

PAR Hugues SILA

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	V	F

a. $B_1 \cap \overline{B}_2$ **se traduit par : « tirer une blanche en 1 et tirer une rouge ou une verte en 2 ». Comme les tirages sont indépendants le mieux est encore de faire le calcul :** $p(B_k)=\frac{1}{3}$, $p(\overline{B}_k)=\frac{2}{3}$**, et la même chose pour les autres couleurs :**

$p(B_1 \cap \overline{B}_2)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$, $1-p(V_1 \cap \overline{V}_2)-p(R_1 \cap \overline{R}_2)=1-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}$.

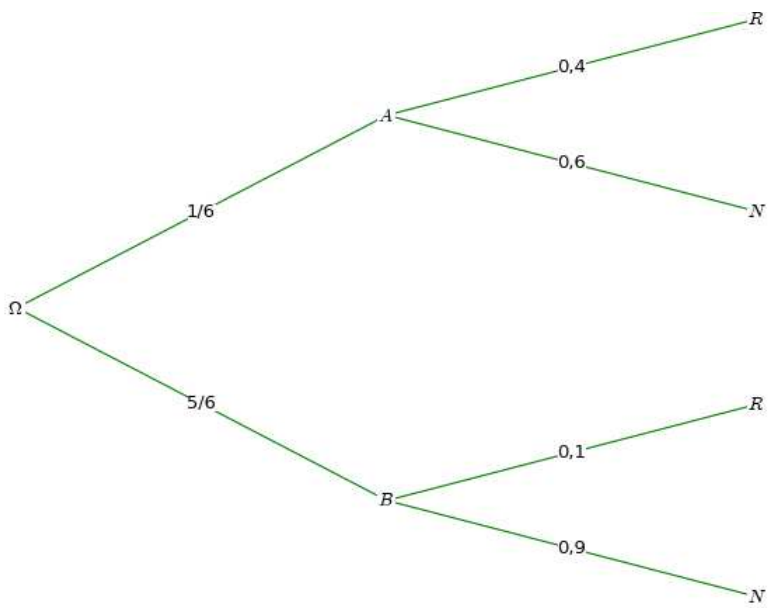
b. A_2 **est l'événement « tirer une boule d'une couleur en 1 et d'une couleur différente en 2 », soit**
$p(A_2)=p(B_1 \cap \overline{B}_2)+p(V_1 \cap \overline{V}_2)+p(R_1 \cap \overline{R}_2)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

c. Pour A_n **il faut tirer** $n-1$ **fois la même couleur, soit pour chaque couleur** $\frac{1}{3^{n-1}}$ **puis tirer une couleur différente, soit** $\frac{2}{3}$ **; comme il y a 3 couleurs, ça nous fait** $p(A_n)=3\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\frac{2}{3}=\frac{2}{3^{n-1}}$.

d. La somme $p(A_2)+p(A_3)+\ldots+p(A_n)$ **est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme** $p(A_2)=\frac{2}{3}$ **et de raison** $\frac{1}{3}$ **donc elle vaut** $\frac{2}{3}\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3^{n-1}}$ **(de 2 à** n **il y a** $n-1$ **termes) qui tend vers 1 à l'infini. On pouvait s'en douter dans la mesure où on est sûr de finir par tirer une boule de couleur différente…**

EXERCICE 20

Partie A



1. A **et** B **forment une partition de l'univers** Ω **; d'après la formule des probabilités totales, on a**
$p(R)=p(A\cap R)+p(B\cap R)=p_A(R)\times p(A)+p_B(R)\times p(B)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{60}$.

Par conséquent, $p(R)=0{,}15$.

PAR Hugues SILA

2. Calculons $p_R(A)$ et $p_R(B)$: $p_R(A)=\dfrac{p(A\cap R)}{p(R)}=\dfrac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}}=\dfrac{4}{9}$ **et** $p_R(B)=\dfrac{p(B\cap R)}{p(R)}=\dfrac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}}=\dfrac{5}{9}$**. Donc, si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de *A* est inférieure à celle qu'elle provienne de *B*.**

Partie B

L'épreuve décrite dans la partie A est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir une boule rouge ».

On a $p=0,15$ **et *n* = 2 :** $p(X=k)=\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}(0,15)^k(1-0,15)^{2-k}$**.**

1. $p(G=2x)=p(X=2)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}(0,15)^2=0,0225$ **;** $p(G=x-2)=p(X=1)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}(0,15)^1(0,85)^1=0,255$ **;**

$p(G=-4)=p(X=0)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}(0,85)^2=0,7225$**.**

2. $E(G)=0,0225\times(2x)+0,255\times(x-2)+0,7225\times(-4)=0,3x-3,4$**.**

3. $E(G)\geq 0 \Leftrightarrow 0,3x-3,4\geq 0 \Leftrightarrow 0,3x\geq 3,4 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{3,4}{0,3} \Leftrightarrow x\geq 11,33$ **. Or *x* est un entier naturel, donc** $E(G)\geq 0$ **lorsque *x* est supérieur ou égal à 12.**

EXERCICE 21

Partie A

1. $p(\mathrm{G})=p(\mathrm{B})\times p(\textit{dé}<6)+p(\mathrm{N})\times p(\textit{dé}=6)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{30}$**.**

2. $p_{\mathrm{P}}(\mathrm{B})=\dfrac{p(\text{Blanc et Perdu})}{p(\mathrm{P})}=\dfrac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{6}}{1-\frac{7}{30}}=\dfrac{1}{60}\times\dfrac{30}{23}=\dfrac{1}{46}$**.**

3. Loi binomiale : $n=4$**,** $p=\dfrac{7}{30}$ **; il en gagne 2 avec la probabilité** $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\left(\dfrac{7}{30}\right)^2\left(\dfrac{23}{30}\right)^2\approx 0,192$**.**

4. Loi binomiale : *n* quelconque, $p=\dfrac{7}{30}$ **;** $p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$ **; on a alors**

$p(X\geq 1)\geq 0,99 \Leftrightarrow 1-\left(\dfrac{23}{30}\right)^n\geq 0,99 \Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{23}{30}\right)\leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n\geq \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\dfrac{23}{30}\right)}=17,3$

d'où $n=18$**.**

Partie B

1. a. ***X* prend les valeurs −1 et 4 ;** $p(X=-1)=p(\mathrm{P})=\dfrac{23}{30}$**,** $p(X=4)=p(\mathrm{G})=\dfrac{7}{30}$**.**

$E(X)=-\dfrac{23}{30}+4\dfrac{7}{30}=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$**.**

PAR Hugues SILA

b. L'organisateur en semble pas très matheux…

2. Il faut recalculer $p(\text{G})=p(\text{B})\times p(\,dé<6\,)+p(\text{N})\times p(\,dé=6\,)=\frac{1}{n+1}\times\frac{5}{6}+\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{6}=\frac{5+n}{6(n+1)}$ **d'où**

$E(X)=-1\times\left(1-\frac{5+n}{6(n+1)}\right)+4\times\frac{5+n}{6(n+1)}=\frac{-(6n+6-5-n)+20+4n}{6(n+1)}=\frac{-n+19}{6(n+1)}$ **qui sera positif lorsque** $n\le 19$ **.**

EXERCICE 22.

1. a. $p_{D_1}(G)$ **: s'il tire un 1, il gagne s'il tire une voyelle, soit 4 chances sur 10,** $p_{D_1}(G)=\frac{4}{10}$ **.**

$p_{D_2}(G)$ **: s'il tire un 2, il gagne s'il tire 2 voyelles, soit** $\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2}=6$ **chances sur** $\binom{10}{2}=\frac{10.9}{2}=45$ **,**

$p_{D_2}(G)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$ **;**

$p_{D_3}(G)$ **: s'il tire un 3, il gagne s'il tire 3 voyelles, soit** $\binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{3.2}=4$ **chances sur** $\binom{10}{3}=\frac{10.9.8}{3.2}=120$ **,**

$p_{D_3}(G)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$ **.**

b. On applique les probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(G)&=p(\,D_1\cap G\,)+p(\,D_2\cap G\,)+p(\,D_3\cap G\,)\\&=p_{D_1}(G).p(D_1)+p_{D_2}(G).p(D_2)+p_{D_3}(G).p(D_3)=\frac{4}{10}.\frac{1}{6}+\frac{2}{15}.\frac{2}{6}+\frac{1}{30}.\frac{3}{6}=\frac{23}{180}.\end{aligned}$$

2. Ce coup-ci on cherche $p_G(D_1)=\frac{p(G\cap D_1)}{p(G)}=\frac{p_{D_1}(G).p(D_1)}{p(G)}=\frac{\frac{4}{10}.\frac{1}{6}}{\frac{23}{180}}=\frac{180}{23}.\frac{4}{60}=\frac{12}{23}$ **.**

3. Un joueur fait six parties : loi binomiale avec *n* = 6 et $p=\frac{23}{180}$ **. On cherche**

$$p(k=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{23}{180}\right)^2\left(1-\frac{23}{180}\right)^4\approx 0{,}14\,.$$

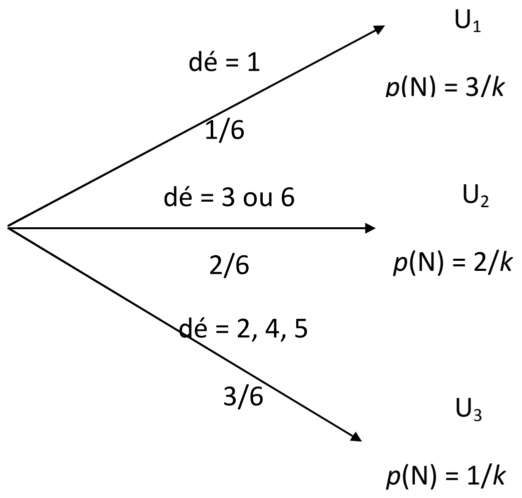
On remplace 6 par *n* et *k* par 0 : $p(k\ge 1)=1-p(k=0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{23}{180}\right)^0\left(1-\frac{23}{180}\right)^n=1-\left(\frac{157}{180}\right)^n$ **; il faut donc**

résoudre $1-\left(\frac{157}{180}\right)^n\ge 0{,}9\Leftrightarrow\left(\frac{157}{180}\right)^n\le 0{,}1\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(157/180)}\approx 16{,}8$ **soit 17 parties minimum.**

EXERCICE 23

On fait un arbre qui donne toutes les réponses immédiatement :

PAR Hugues SILA



PAR Hugues SILA

1. a. Pour avoir une boule noire il faut calculer la probabilité d'avoir tiré 1 avec le dé et une noire dans U_1, etc., soit sous forme de probabilité conditionnelle :

$$p(N) = p[(A\cap N)\cup(B\cap N)\cup(C\cap N)] = p(A)p_{U_1}(N) + p(B)p_{U_2}(N) + p(C)p_{U_3}(N).$$

Ceci donne évidemment $p(N) = \frac{1}{6}.\frac{3}{k} + \frac{2}{6}.\frac{2}{k} + \frac{3}{6}.\frac{1}{k} = \frac{10}{6k} = \frac{5}{3k}$.

b. On cherche ici $P_N(dé = 1) = \frac{p(A\cap N)}{p(N)} = \frac{1/2k}{5/3k} = \frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k < 10 \Leftrightarrow k < \frac{10}{3}$ **; comme *k* est entier et supérieur ou égal à 3, il reste *k* = 3.**

d. $\frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow 3k = 150 \Leftrightarrow k = 50$.

2. Le nombre de fois où on tire une boule noire sur les 20 parties suit une Loi binomiale de paramètres *n* = 20 et $p = \frac{1}{30}$.

La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est donc

$$p(X\geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{1}{30}\right)^0\left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} \approx 0,492.$$

EXERCICE 24

On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne : il y a $\binom{6}{2} = \frac{6.5}{2} = 15$ **tirages possibles.**

« On n'a obtenu aucune boule noire » revient à dire que l'on a tiré deux rouges parmi 4, il y a $\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$ **et la probabilité est** $p(A_0) = \frac{6}{15}$ **;**

de même « on a obtenu une seule boule noire » revient à dire qu'on a tiré une noire parmi 2 et une rouge parmi 4, il y a $\binom{2}{1}.\binom{4}{1}=8$ manières de procéder, ce qui donne $p(\mathrm{A}_1)=\frac{8}{15}$; comme la seule possibilité restante est de tirer 2 noires, on a $p(\mathrm{A}_2)=1-p(\overline{\mathrm{A}}_2)=1-\left(\frac{6}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{1}{15}$.

2. a. Lors de ce deuxième tirage on a $\binom{4}{2}=6$ tirages possibles.

Si on a tiré 0 noire au 1er tirage, on a tiré 2 rouges ; il reste donc 2 rouges et 2 noires dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 2, soit $p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0)=\frac{\binom{2}{2}}{6}=\frac{1}{6}$;

si on a tiré 1 noire au 1er tirage, on a tiré également 1 rouge ; il reste donc 3 rouges et 1 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 3, soit $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0)=\frac{\binom{3}{2}}{6}=\frac{3}{6}$;

si on a tiré 2 noires au 1er tirage, on a tiré 0 rouge ; il reste donc 4 rouges et 0 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 4, soit $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_0)=\frac{\binom{4}{2}}{6}=\frac{6}{6}=1$ (en fait c'était évident…puisqu'il n'y a plus que des rouges).

b. avec les probabilités totales on a $p(\mathrm{B}_0)=p(\mathrm{B}_0\cap\mathrm{A}_0)+p(\mathrm{B}_0\cap\mathrm{A}_1)+p(\mathrm{B}_0\cap\mathrm{A}_2)$, soit

$$p(\mathrm{B}_0)=p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0)p(\mathrm{A}_0)+p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0)p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_0)p(\mathrm{A}_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+\frac{6}{6}.\frac{1}{15}=\frac{6}{15}.$$

c. De la même manière on a

$$p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{6}=\frac{4}{6},\ p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{6}=\frac{3}{6},\ p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_1)=0\ ;$$

$$p(\mathrm{B}_1)=p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_0)+p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_2)=\frac{4}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{8}{15}\ ;$$

$$p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2)=\frac{\binom{2}{2}}{6}=\frac{1}{6},\ p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_2)=0,\ p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_2)=0\ ;$$

$$p(\mathrm{B}_2)=p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2)p(\mathrm{A}_0)+p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_2)p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_2)p(\mathrm{A}_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+0.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage, on connaît donc B_1. Nous cherchons alors

$$p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_1)=\frac{p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1)}{p(\mathrm{B}_1)}=\frac{p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_1)}{p(\mathrm{B}_1)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{8}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{2}.$$

3. $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{A}_0\cap\mathrm{B}_2)+p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1)=p(\mathrm{A}_0)p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2)+p(\mathrm{A}_1)p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)$**, soit** $p(\mathrm{R})=\frac{6}{15}.\frac{1}{6}+\frac{8}{15}.\frac{3}{6}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

PAR Hugues SILA

PAR Hugues SILA

EXERCIE 25

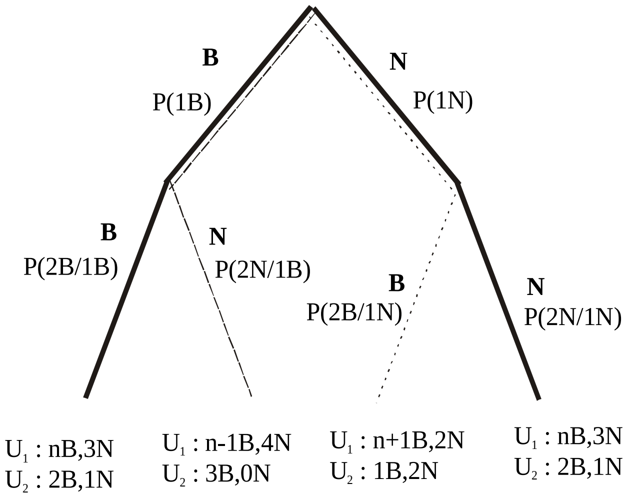
<u>Correction</u>

1.a. Arbre pondéré :

Evénement A : chemin ————

Evénement B : chemin ....

Evénement C : chemin _ _ _ _ _ _ _ _ _



$p(1\text{B})=\dfrac{n}{n+3}$; $p(1\text{N})=\dfrac{3}{n+3}$.

p(2B/1B) = $\dfrac{3}{4}$ **; p(2N/1B) =** $\dfrac{1}{4}$ **; p(2B/1N) =** $\dfrac{1}{2}$ **; p(2N/2B) =** $\dfrac{1}{2}$

2. a. La probabilité p(A) se calcule en parcourant l'arbre : $p(\text{A})=\dfrac{n}{n+3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{n+3}\times\dfrac{1}{2}$**, soit** $p(A)=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$**.**

2. b. $\lim\limits_{n\to+\infty} p(\text{A})=\dfrac{3}{4}$**.**

3. La probabilité p(B) se calcule en parcourant l'arbre : $p(B)=\dfrac{3}{n+3}\times\dfrac{1}{2}$**,** $p(B)=\dfrac{3}{2(n+3)}$**.**

4. a. Le joueur doit être certain de pouvoir, dans le meilleur des cas, récupérer au moins sa mise d'où 2n > 20, soit n > 10.

4. b. Le dernier événement non encore considéré (C) est : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient 3 boules blanches".

La probabilité p(C) se calcule en parcourant l'arbre : $p(\text{C})=\dfrac{n}{n+3}\times\dfrac{1}{4}$**,** $p(\text{C})=\dfrac{n}{4(n+3)}$

La variable aléatoire X peut prendre 3 valeurs : 2n – 20 (événement A) ; n – 20 (événement B) ; –20 (événement C).

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{2(n+3)}$	$\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$	$\frac{n}{4(n+3)}$

4. c. Espérance mathématique : E(x) = $E(X)=\frac{(2n-20)\times 3}{2(n+3)}+(n-20)\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)-\frac{20n}{4(n+3)}$**, soit**

$$E(X)=\frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}.$$

4. d. E(X) > 0 donne $3n^2 - 62n - 240 > 0$, soit $(3n + 10)(n - 24) > 0$ et $n\in[25\,;+\infty[$ **puisque *n* est entier.**

EXERCICE 26

a. Pour avoir dix boules de même couleur dans chaque urne il faut avoir 10 noires dans A et 10 Blanches dans B ou le contraire.

Le nombre de répartitions est de $\binom{20}{10}$**, le nombre de choix permettant 10 noires dans A et 10 blanches dans B est** $\binom{10}{10}\binom{10}{10}=1$ **; la probabilité est donc** $2\times\frac{1}{\binom{20}{10}}=\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11}\approx 10^{-5}$**.**

b. 5 boules blanches et 5 boules noires dans A : $\binom{10}{5}\binom{10}{5}$**, soit une probabilité d'environ 0,34.**

2. a. *x*=6 : il faut tirer une blanche de A et la mettre dans B puis tirer une blanche de B et la mettre dans A, soit $\frac{6}{10}\times\frac{5}{11}$ **ou bien tirer une noire de A et la mettre dans B puis tirer une noire de B et la mettre dans A, soit** $\frac{4}{10}\times\frac{7}{11}$ **; au total cela fait** $\frac{30}{110}+\frac{28}{110}=\frac{58}{110}$**.**

b. Même raisonnement :

$$P(M)=\frac{x}{10}\times\frac{10-x+1}{11}+\frac{10-x}{10}\times\frac{x+1}{11}=\frac{1}{110}\left(11x-x^2+9x-x^2+10\right)=\frac{1}{55}\left(-x^2+10x+5\right).$$

c. On veut savoir quand $P(M)\geq 1-P(M)\Leftrightarrow p(M)\geq\frac{1}{2}$**, soit** $-x^2+10x+5\geq\frac{55}{2}\Leftrightarrow -x^2+10x-\frac{45}{2}\geq 0$ **d'où après résolution :** $3{,}42\leq x\leq 6{,}58$**. Il faut donc qu'il y ait 4, 5 ou 6 boules blanches dans l'urne A.**

EXERCICE 27

1. a. $p(A)=\frac{1}{6}$ **;** $p(\overline{A})=\frac{5}{6}$ **;** $p(B/A)=\frac{4}{7}$ **;** $p(B/\overline{A})=\frac{17}{35}$

D'après la loi des probabilités totales on a : $p(B) = p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B) = \frac{4}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{17}{35}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$**.**

b. $p_B(A)\times p(B) = p(A\cap B)$ **d'où** $p_B(A) = \frac{(4/7)\times(1/6)}{1/2}=\frac{4}{21}$**.**

c. De même on a : $p(\overline{A}/\overline{B})\times p(\overline{B}) = p(\overline{A}\cap\overline{B})$ **d'où** $p(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{(18/35)\times(5/6)}{1/2}=\frac{6}{7}$

PAR Hugues SILA

2. Ensemble des valeurs de *X* : {1 ; 2 ; 3 ; 4} :

k	1	2	3	4
p(*X* = *k*)	$\frac{4\times 6!}{7!}=\frac{4}{7}$	$\frac{3\times 4\times 5!}{7!}=\frac{2}{7}$	$\frac{4\times 3\times 2\times 4!}{7!}=\frac{4}{35}$	$\frac{3!\times 4!}{7!}=\frac{1}{35}$

E(X) = 1× $\frac{4}{7}$ **+ 2×** $\frac{2}{7}$ **+ 3×** $\frac{4}{35}$ **+ 4×** $\frac{1}{35}$ **=** $\frac{8}{35}$

E(X²) = 1× $\frac{4}{7}$ **+ 2²×** $\frac{2}{7}$ **+ 3²×** $\frac{4}{35}$ **+ 4²×** $\frac{1}{35}$ **=** $\frac{20}{7}$ **; var(X)=** $\frac{20}{7}-\left(\frac{8}{35}\right)^2$ **;** $\sigma(X)\approx 1,69$ **.**

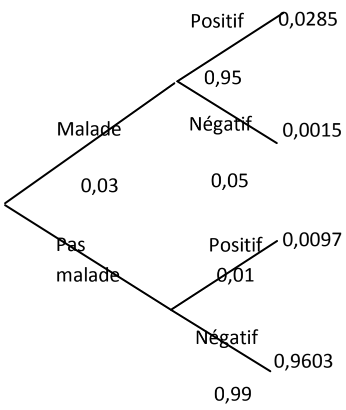
Exercice 28

Il y a *n*+10 boules ; il y a donc C_{10}^{n+10} **tirages possibles ; on tire 5 noires avec la probabilité**

$$p_n=\frac{\binom{10}{5}\binom{n}{5}}{\binom{n+10}{10}}=\frac{\frac{10!}{5!5!}\frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{(n+10)!}{10!n!}}=K\frac{n!n!}{(n-5)!(n+10)!}=K\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n+10)(n+9)...(n+2)(n+1)},$$

donc $p_n\approx K\frac{n^5}{n^{10}}\approx K\frac{1}{n^5}$ **qui est décroissante et tend vers 0.**

Exercice 29



1. Voir ci-contre.

2. On note *M* l'individu est malade et *T* le test est positif :

a. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0,03\times 0,95=0,0285$ **.**

b. $P(\overline{M}\cap\overline{T})=P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(\overline{T})=0,97\times 0,99=0,9603$ **.**

c. $P(T)=P(\overline{M}\cap T)+P(M\cap T)=0,0097+0,0285=0,0382$ **.**

d. $P(\overline{T})=P(\overline{M}\cap\overline{T})+P(M\cap\overline{T})=0,0015+0,9603=0,9618$ **.**

PAR Hugues SILA

3. a. $P_T(\overline{M}) = \dfrac{P(T \cap \overline{M})}{P(T)} = \dfrac{0,0097}{0,0382} \approx 0,25$ **: c'est énorme…**

b. $P_{\overline{T}}(M) = \dfrac{P(\overline{T} \cap M)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,0015}{0,9618} \approx 0,00155$ **: ouf… on a très peu de chances d'être malade sachant que le test est négatif, c'est rassurant.**

Exercice 30

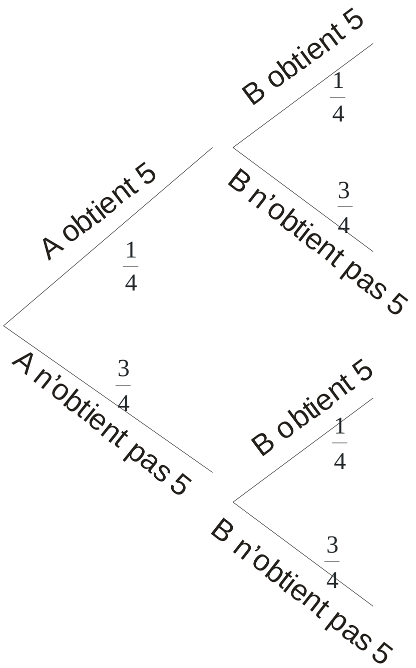
1. Il y a 4 possibilités pour le premier jeton ET 4 possibilités pour le second, soit 4×4 = 16 éventualités.

Pour gagner une partie, la somme doit être égale à 5. C'est-à-dire avoir l'un des couples suivants (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1), soit 4 des 16 éventualités. p(G) = 1/4.

2. a. Pour une partie donnée la situation peut être représentée par un arbre.

Pour calculer $p(C_1)$, on a : $p(C_1) = 1 - [p(A_1) + p(B_1)]$ = $1 - \dfrac{3}{16} - \dfrac{3}{16} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$ **ou encore, en utilisant l'arbre :**

$p(C_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{9}{16} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.



On rejoue.

A gagne $p(A_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

B gagne $p(B_1) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}$

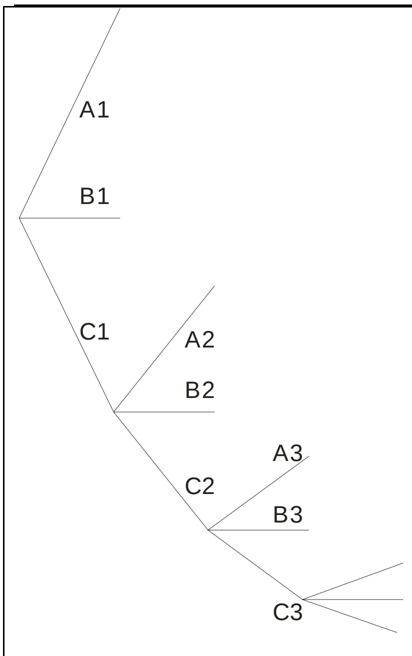
On rejoue

2.b.

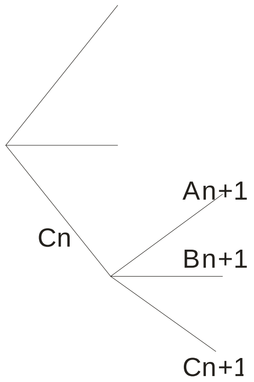
	On peut représenter les parties avec un nouvel arbre dont les branches se terminent lorsque l'un ou l'autre des joueurs A et B a gagné. Dans le cas contraire, une nouvelle ramification se crée.

PAR Hugues SILA

PAR Hugues SILA



(fig 1)



(fig 2)

Pour chaque branche, la probabilité que l'on rejoue sachant que personne n'a gagné au tour précédent est de $\frac{5}{8}$. On a donc $p(C_{n+1}) = \frac{5}{8} \times p(C_n)$. C'est une suite géométrique de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme $\frac{5}{8}$, on obtient $p(C_n)=\left(\frac{5}{8}\right)^n$ **.**

2.c. De la même façon on a (fig.2) $p(A_{n+1})=\frac{3}{16}\times p(C_n)=\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^n$ **d'où** $p(A_n)=\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$ **.**

2.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}=0$ **car** $\frac{5}{8}<1$ **.**

2.e.

$$\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}<0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}<\frac{\frac{1}{100}}{\frac{3}{16}} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}<\frac{16}{300} \Leftrightarrow (n-1)\ln\frac{5}{8}<\ln\frac{16}{300}$$

$$\Leftrightarrow n-1>\frac{\ln\frac{16}{300}}{\ln\frac{5}{8}}\approx 6,2 \Leftrightarrow n>7,2.$$

(On change de sens car $\ln\frac{5}{8}<1$)

On déduit que le plus petit entier naturel *n* tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01 est *n* = 8.

Exercice 31

1. Il y a $\binom{10}{4}=210$ **tirages distincts possibles.**

2. a. $p(B)=\dfrac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{3}}{210}=\dfrac{8}{210}=\dfrac{4}{105}$.

b. ***A*** **n'est réalisé que lorsque les 4 jetons portent le numéro 0, il n'y a qu'une possibilité.** $p(A)=\dfrac{1}{210}$.

Il y a 6 jetons blancs. La probabilité est donc : $p(C)=\dfrac{\binom{6}{4}}{210}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$.

Les jetons peuvent être, soit tous blancs, soit tous rouges. Or il n'y a que 4 jetons rouges, donc une seule possibilité qu'ils soient tous rouges : $p(D)=p(C)+\dfrac{1}{210}=\dfrac{16}{210}=\dfrac{8}{105}$.

Au moins un jeton porte un numéro différent des autres. Le contraire est "tous les jetons ont le même numéro", qui n'est réalisé que pour le numéro 0. $p(E)=1-p(A)=\dfrac{209}{210}$.

c. ***C*** **est réalisé, c'est-à-dire tous les jetons sont blancs. On rappelle que 4 d'entre eux ont le numéro 0 et deux d'entre eux, le numéro 2.**

Pour que ***B*** **soit réalisé, la probabilité est donc de** $p_C(B)=\dfrac{p(B\cap C)}{p(C)}=\dfrac{p(B)}{p(C)}=\dfrac{\frac{4}{105}}{\frac{1}{14}}=\dfrac{8}{15}$**, en effet on a**

$p(B\cap C)=p(B)$ **car on ne peut former 2000 qu'avec des jetons blancs.**

3. Pour 7000 : $p(G=75)=\dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}}{210}=\dfrac{12}{210}=\dfrac{2}{35}$ **; pour 2000 :** $p(G=25)=p(B)=\dfrac{4}{105}$ **; pour 0000 :**

$p(G=-15)=\dfrac{1}{210}$ **; les autres :** $p(G=-5)=1-\left(\dfrac{2}{35}+\dfrac{4}{105}+\dfrac{1}{210}\right)=1-\dfrac{12+8+1}{210}=\dfrac{189}{210}$.

G	**−15**	**−5**	**25**	**75**	
***p*(G = *x*$_i$)**	$\dfrac{1}{210}$	$\dfrac{189}{210}$	$\dfrac{4}{105}=\dfrac{8}{210}$	$\dfrac{2}{35}=\dfrac{12}{210}$	**1**
***p*$_i$ *x*$_i$**	$\dfrac{-15}{210}$	$\dfrac{-5\times189}{210}$	$\dfrac{25\times8}{210}$	$\dfrac{75\times12}{210}$	$\dfrac{2}{3}$

E(G)=$\dfrac{-15-945+200+900}{210}=\dfrac{140}{210}=\dfrac{2}{3}\approx0,66$ **. Le joueur peut espérer gagner 0,66 centimes d'Euros par jeu : celui-ci lui est légèrement favorable.**

<u>EXERCICE 32</u>

1. Comme ***A*** **et** ***B*** **sont indépendants on a** $p(A\cap B)=p(A)p(B)=0,02\times0,1$ **; on en déduit donc que**
$p(\text{C})=1-p(A\cup B)=1-\left[\,p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=1-0,02-0,1+(0,02\times0,1)=0,882$.

PAR Hugues SILA

2. Il y a 0,02 – 0,002 = 0,018 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut *a* ; de même il y a 0,1 – 0,002 = 0,098 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut *b* ; on a donc $p(D)=0,018+0,098=0,116$.

3. *X* suit une loi binomiale $B(5\,;0,882)$ **;**

$$p(E)=p(X\geq 4)=p(X=4)+p(X=5)=\binom{5}{4}0,882^4 0,118^1+\binom{5}{5}0,882^5 0,118^0\approx 0,891.$$

EXERCICE 33

PAR Hugues SILA

1. a. Il y a deux possibilités pour chaque chiffre, soit 2^4=16.

b. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. La loi de X est une loi binomiale $B\left(4,\frac{1}{2}\right)$**. Son espérance est** $np=4.\frac{1}{2}=2$.

2. $P(\mathrm{E}_n)=32\times 10^{-3}$.

a. $P(\mathrm{E}_4)=1-\sum_{n=0}^{3}P(\mathrm{E}_n)=1-4\times 32\times 10^{-3}\approx 0,872$.

b. Si E_0 s'est produit, l'imprimante n'a marqué que des 0, il fallait donc que l'appareil envoie la séquence 0000 : $P_{\mathrm{E}_0}(\mathrm{C})=\frac{1}{16}$**. On en déduit** $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}_0)=P_{\mathrm{E}_0}(\mathrm{C})\times P(\mathrm{E}_0)=\frac{1}{16}\times 0,032=0,002$.

c. On résume les résultats dans un tableau.

n	Séquences correctes	$P_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{C})$	$P(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}_n)$
0	**0000**	$\frac{1}{16}$	**0,002**
1	**0000, 1000**	$\frac{2}{16}$	**0,004**
2	**0000, 1000, 0100, 1100**	$\frac{4}{16}$	**0,008**
3	**0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 0110, 1010, 1110**	$\frac{8}{16}$	**0,0016**
4	**0000, …., 1111**	$\frac{16}{16}$	**0,872**

$$P(\mathrm{C})=\sum_{n=0}^{4}P(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}_n)=0,002+0,004+0,008+0,016+0,872=0,902.$$

d. On cherche $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_2)=\frac{P(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}_2)}{P(\mathrm{C})}=\frac{0,008}{0,902}\approx 0,0089$.

EXERCICE 34

1. Comme 2 clefs n'ouvrent pas sur les 5, $P(\mathrm{D}_1)=\frac{2}{5}$.

2. Il reste alors 4 clefs dont 1 n'ouvre pas : $P_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{D}_2)=\frac{1}{4}$. $P(\mathrm{D}_1\cap\mathrm{D}_2)=P(\mathrm{D}_1)P_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{D}_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

3. On cherche $P\left(\overline{\mathrm{D}_1}\cap\overline{\mathrm{D}_2}\cap\mathrm{D}_3\right)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}$.

4. a. & b.

(O, N)=(3, 2)	**Ouvre (2, 2)**	**N'ouvre pas (2, 1)**	**Ouvre (1, 1)**	**N'ouvre pas (1, 0)**	**Ouvre (0, 0)**
Probabilité	**3/5**	**2/4**	**2/3**	**1/2**	**1/1**
(O, N)=(3, 2)	**Ouvre (2, 2)**	**Ouvre (1, 2)**	**Ouvre (0, 2)**	**N'ouvre pas (0, 1)**	**N'ouvre pas (0, 0)**
Probabilité	**3/5**	**2/4**	**1/3**	**2/2**	**1/1**

Soit les probabilités : $P(2\,;4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{12}{120}$ **et** $P(4\,;5)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{12}{120}$.

EXERCICE 34

PAR Hugues SILA

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. Nombre de possibilités : $\binom{11}{3}=\frac{11.10.9}{3.2.1}=165$.

a. E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes » : on tire 3 parmi les bleues ou 3 parmi les rouges, soit

$$P(\mathrm{E}_1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{165}=\frac{6.3.2}{165}=\frac{36}{165}.$$

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur » : on tire une boule parmi chaque couleur :

$$P(\mathrm{E}_2)=\frac{\binom{6}{3}+\binom{3}{3}}{165}=\frac{20+1}{165}=\frac{21}{165}.$$

b. *X* peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3 : $P(X=k)=\dfrac{\binom{6}{k}\binom{5}{3-k}}{165}$.

Les calculs donnent : $E(X)=0.\frac{10}{165}+1.\frac{60}{165}+2.\frac{75}{165}+3.\frac{20}{165}=\frac{270}{165}\approx 1{,}64$.

2. Il s'agit pour les bleues comme pour les rouges de lois binomiales donnant la probabilité de tirer *m* boules d'une couleur donnée sur *k* tirages ; pour les bleues : $B\left(k, \frac{6}{11}\right)$, $P(k \text{ bleues}) = \left(\frac{6}{11}\right)^k$ **, et pour les rouges :** $B\left(k, \frac{3}{11}\right)$, $P(k \text{ rouges}) = \left(\frac{3}{11}\right)^k$ **; il faut donc résoudre** $\left(\frac{6}{11}\right)^k \geq 1000\left(\frac{3}{11}\right)^k \Leftrightarrow 2^k \geq 1000 \Leftrightarrow k \geq 10$ **.**

EXERCICE36

Nombre de possibilités : $\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$ **.**

a. $p(A) = \frac{\binom{5}{3}}{120} = \frac{1}{12}$, $p(B) = \frac{\binom{5}{3}+\binom{3}{3}}{120} = \frac{11}{120}$, $p(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ **.**

b. *X* peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3 : $p(X=1) = p(B) = \frac{11}{120}$ **;** $p(X=3) = p(C) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ **et** $p(X=2) = 1 - p(X=1) - p(X=3) = 1 - \frac{11}{120} - \frac{30}{120} = \frac{79}{120}$ **.**

$E(X) = 1.\frac{11}{120} + 2.\frac{79}{120} + 3.\frac{30}{120} = \frac{259}{120} \approx 2{,}16$ **.**

2. a. Nombre de tirages possibles : $\binom{n+5}{2} = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$**. Nombre de tirages possibles pour *D* :** $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ **. Après simplification on a** $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ **.**

b. *E* = 2 rouges ou 2 jaunes ou 2 vertes, soit $\binom{n}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 3 + 1 = \frac{n^2 - n + 8}{2}$ **d'où**

$$p(E) = \frac{n^2 - n + 8}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2 - n + 8}{n^2 + 9n + 20}.$$

On a $p(E) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n + 8}{n^2 + 9n + 20} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n^2 - 2n + 16 \geq n^2 + 9n + 20 \Leftrightarrow n^2 - 11n - 4 \geq 0$ **. Après résolution on a** $n \geq 11{,}35$ **, soit *n* = 12.**

EXERCICE 37

1. Nombre de tirages possibles : $\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$ **.**

2. a. Pour faire 2000 il faut tirer 1 blanc n°2 parmi 2 et 3 blancs n°0 parmi 4, soit 8 possibilités. La probabilité de l'évènement *B* est $p(B) = \frac{8}{210} = \frac{4}{105}$ **.**

b. *A* : 4 blancs 0 parmi 4 : $p(A) = \frac{1}{210}$ **; *C* : 4 blancs parmi 6, soit** $p(C) = \frac{\binom{6}{4}}{210} = \frac{\binom{6}{2}}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$ **;**

***D* : 4 blancs parmi 6 ou 4 rouges parmi 4, soit** $p(D) = \frac{15}{210} + \frac{1}{210} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$ **;**

PAR Hugues SILA

E **: événement contraire : tous les jetons ont le même numéro, soit *A* ;** $p(E)=1-p(A)=\frac{209}{210}$ **.**

c. Le fait que *C* soit réalisé limite les tirages possibles à 15 ; on a alors $p_C(B)=\frac{8}{15}$ **.**

3.

G	-25	-5	20	50	75
p_G	$\frac{1}{210}$	$\frac{210-1-8-12-4}{210}=\frac{185}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{3\times 4}{210}=\frac{12}{210}$	$\frac{1\times 4}{210}=\frac{4}{210}$

$E(G)=-25\frac{1}{210}-5\frac{185}{210}+20\frac{8}{210}+50\frac{12}{210}+75\frac{4}{210}=\frac{110}{210}\approx 0,52$ **.**

<u>EXERCICE 38</u>

1. a. A un sommet comme A, B, C ou D la fourmi a $\frac{1}{3}$ **d'aller sur un autre sommet ; en S elle a** $\frac{1}{4}$ **d'aller sur un autre sommet.**

On a donc la probabilité de revenir en A : $P(\text{ABA, ADA,ASA})=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{36}$ **.**

La probabilité d'aller en B : $P(\text{ASB})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ **.**

La probabilité d'aller en C : $P(\text{ABC, ADC, ASC})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$ **.**

La probabilité d'aller en D : $P(\text{ASD})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ **.**

b. $p_1=\frac{1}{3}$ **.** $p_{n+1}=P(\text{aller en S})\times P(\text{pas en S au pas } n)=\frac{1}{3}P(\overline{S_n})=\frac{1}{3}(1-p_n)$ **.**

2. a. $p_1=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^1\right)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$ **, ok.**

$p_{n+1}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ **. ok également.**

b. Comme $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$ **, le terme** $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ **tend vers 0 donc**

EXERCICE 39

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant *t* est égale à $P(X\le t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ **.**

1. $P(X>6)=1-P(X\le 6)=1-\int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-\left[e^{-\lambda x}\right]_0^6=e^{-\lambda 6}$ **; on résoud :**

$$e^{-6\lambda}=0,3\Leftrightarrow -6\lambda=\ln 0,3\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 0,3}{-6}=0,20066213...\approx 0,2\,.$$

PAR Hugues SILA

2. $P(X \leq t) = \int_0^t 0,2e^{-0,2x}dx = 1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,2} = 3,47$ **, soit environ trois ans et demi.**

3. La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $P(X > 2) = 1 - \left(1 - e^{-0,2\times 2}\right) = e^{-0,4}$ **.**

4. On cherche $P_{(X>2)}(X > 6) = \frac{P\left[(X>2)\cap(X>6)\right]}{P(X>2)} = \frac{P(X>6)}{P(X>2)} = \frac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,4}} = e^{0,4-1,2} = e^{-0,8} \approx 0,45$ **.**

5. ***Y*** **le nombre de robots sans pannes au cours des deux premières années suit une loi binomiale de paramètres** ***n*** **= 10,** $p = e^{-0,4}$ **; on cherche donc**

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(e^{-0,4}\right)^0 \left(1 - e^{-0,4}\right)^{10} \approx 0,9999.$$

C'est du bon matériel…

PAR Hugues SILA