CORRECTION EXERCICE 7

1. M, N confondus : $z = z^2 \Leftrightarrow z = 0, z = 1$; M, Q confondus : $z = z^3 \Leftrightarrow z = 0, z = 1, z = -1$; N, Q confondus : $z^2 = z^3 \Leftrightarrow z = 0, z = 1$. Deux des points sont confondus lorsque z = 0, −1 ou 1.

2. $MN = \left| z^2 - z \right|$, $MQ = \left| z^3 - z \right|$;

$MN = MQ \Leftrightarrow \left| z^2 - z \right| = \left| z^3 - z \right| \Leftrightarrow |z||z-1| = |z||z-1||z+1| \Leftrightarrow |z+1| = 1$.

Il s'agit du cercle de centre le point A d'affixe −1, de rayon 1.

3. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \arg\left(\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z}\right) = \arg\left(\dfrac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)}\right) = \arg(z+1)$.

MNQ est rectangle en M ssi

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \pm\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z+1) = \pm\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow z+1 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ et } y \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } y \neq 0$: il s'agit de la droite verticale passant par A *privéé de* A.

4. $z = -1 - i$: $z^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$; $z^3 = z^2.z = 2i(-1-i) = 2 - 2i$.

Le triangle MNQ est rectangle isocèle : isocèle car $|z+1| = |-1-i+1| = |-i| = 1$ et rectangle car $\mathrm{Re}(-1-i) = -1$.

CORRECTION EXERCICE8

1. $a^5 = e^{5.i\frac{2\pi}{5}} = e^{i2\pi} = 1$.

2. Les points I, A, B, C, D, sont les images successives les uns des autres par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$: I va sur A, A sur B, etc. On a donc égalité des distances (une rotation est une isométrie).

3. On développe et ça marche tout seul.

Comme $a^5 = 1$, a est une solution de l'équation $z^5 = 1$, soit de $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4) = 0$, mais comme a ne vaut pas 1, a est solution de $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$ et est donc tel que $1+a+a^2+a^3+a^4 = 0$.

5. $a^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $\bar{a}^2 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = e^{i2\pi - i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Même chose pour $a^4 = \bar{a}$.

6. Utilisons $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$ dans $1+a+a^2+a^3+a^4 = 0 \Leftrightarrow 1+a+a^2+\bar{a}^2+\bar{a} = 0$,

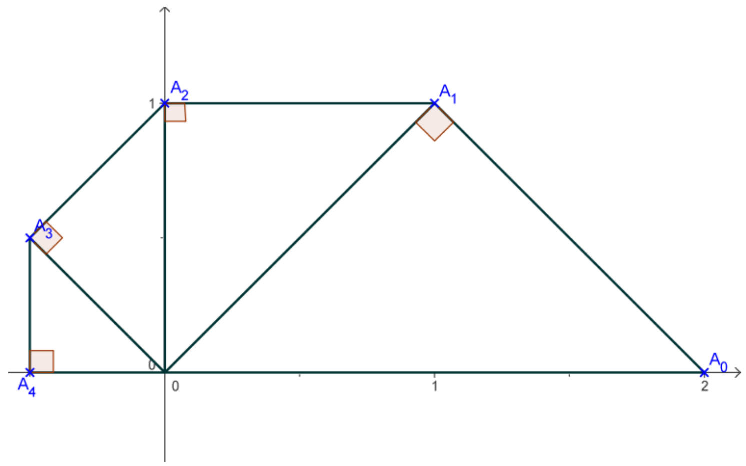
or $(a+\bar{a})^2 = a^2 + 2a\bar{a} + \bar{a}^2 = a^2 + 2 + \bar{a}^2$, on retrouve bien la même relation.

7. Les solutions sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

8. $(a+\bar{a}) = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, donc en rempalçant dans $(a+\bar{a})^2 + (a+\bar{a}) - 1 = 0$, on a $(2\cos\dfrac{2\pi}{5})^2 + (2\cos\dfrac{2\pi}{5}) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} - 1 = 0$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est donc une des deux solutions précédentes. Comme il est forcément positif ($\dfrac{2\pi}{5} = 72° < 90°$), il vaut $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

CORRECTION EXERCICE9

1. $z_1=\frac{1+i}{2}z_0=\frac{1+i}{2}\times 2 = 1+i$; z_2 = $z_2=\frac{1+i}{2}z_1=i$; $z_3=\frac{1+i}{2}z_2=\frac{-1+i}{2}$; $z_4=\frac{1+i}{2}z_3=-\frac{1}{2}$ donc z_4 est bien un nombre réel.



2. Pour tout entier n, $u_n=|z_n|$ donc $u_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\frac{1+i}{2}\right||z_n|=\frac{\sqrt{1+1}}{2}|z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. Ainsi, (u_n) est bien une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $u_n=u_0q^n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. A_n appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si

$$|z_n|\le 0{,}12 \Leftrightarrow u_n\le 0{,}1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le 0{,}05 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le \ln 0{,}05 \Leftrightarrow n\ge \frac{\ln 0{,}05}{\ln 1/\sqrt{2}}\approx 8{,}6 \Rightarrow n_0=9\,.$$

A partir du rang 9, tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.

4. a. $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i}{2}z_n-z_n}{\frac{1+i}{2}z_n}=\frac{\frac{1+i-2}{2}}{\frac{1+i}{2}}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{-1+i}{i(-i+1)}=\frac{1}{-i}=i\,.$

On en déduit que $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=|i|=1$, or $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=\frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$ donc $\frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$ =1 $\Leftrightarrow$ $A_{n+1}A_n=A_{n+1}O$ donc OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.

$\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$ or $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z}\right)=\left(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$: OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. Conclusion OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle et isocèle en A_{n+1}.

b. Dans le triangle OA_nA_{n+1} rectangle et isocèle en A_{n+1}, d'après le théorème de Pythagore, on a

$A_{n+1}A_n^{\ 2}=OA_n^{\ 2} \Leftrightarrow A_{n+1}A_n=\frac{OA_n}{\sqrt{2}}=\frac{u_n}{\sqrt{2}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$. Ainsi, $A_0A_1=\sqrt{2}$, $A_1A_2=1$, $A_2A_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(l_n) est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$l_n=\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ = 0 car si $-1<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ donc l_n = $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}-2\,.$

CORRECTION EXERCICE10

1. Le cercle de centre *A* et de rayon 1, est l'ensemble des points *P* tels que *AP* = 1.

$AP = |z_P - z_A| = \left|1+e^{2i\theta}-1\right| = \left|e^{2i\theta}\right| = 1$, donc *P* appartient à (C).

2. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AP}\right) = \arg\dfrac{z_P - z_A}{z_B - z_A} = \arg\dfrac{e^{2i\theta}}{2-1} = \arg e^{2i\theta} = 2\theta\ [2\pi]$.

Lorsque θ décrit l'intervalle]0 ; π [, on a 2 θ qui décrit]0 ; 2 π [, c'est-à-dire le cercle (C) privé du point *B*.

(C') est donc le cercle (C) privé du point B.

3. L'expression complexe de la rotation de centre *O* et d'angle -2θ est $z'-0 = e^{-2i\theta}(z-0) \Leftrightarrow z' = ze^{-2i\theta}$.

Ici on a, puisque $z_P = 1+e^{2i\theta}$, $z_P' = z_P e^{-2i\theta} = \left(1+e^{2i\theta}\right)e^{-2i\theta} = e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}e^{-2i\theta} = 1+e^{-2i\theta} = \overline{z}_P$.

$\overline{z}_P$ est l'affixe de *P'* symétrique de *P* par rapport à l'axe des abscisses, donc *P'* appartient aussi au cercle de centre *A* de rayon 1 qui est symétrique par rapport à cet axe.

4. a. L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon. Il suffit de déterminer l'image du centre *A* de (C). Soit *A'* ce point. L'expression complexe de *r* est : $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$. L'image de *A* est donc *A'* d'affixe $z_{A'} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. (C') est le cercle de centre *A'* et de rayon 1 : $z_P = 1+e^{2i\theta} = 1+e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$,

$z_{P'} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times \left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 1+e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{z}_P = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Les points *P* et *P'* sont symétriques par rapport à (*Ox*) (voir question 3.).

d. *P* et *O* sont sur le cercle de centre *A* et de rayon 1, donc *AP* = *AO* = 1. De plus $OP = |z_P| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc le triangle est équilatéral.

e. *Q* est le symétrique de *P* par rapport à *A*. *P* est sur le cercle (C).

On a donc $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AQ} \Rightarrow z_{\overrightarrow{PA}} = z_{\overrightarrow{AQ}} \Leftrightarrow z_A - z_P = z_Q - z_A \Leftrightarrow z_Q = 2z_A - z_P = 2-e^{i\frac{\pi}{3}}$. Vérifions si *P'* est le milieu de [*A'Q*], ou encore, si $\overrightarrow{A'P'} = \overrightarrow{P'Q}$: $z_{\overrightarrow{A'P'}} = z_{P'} - z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$,

$z_{\overrightarrow{P'Q}} = z_Q - z_{P'} = 2 - e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 - \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.