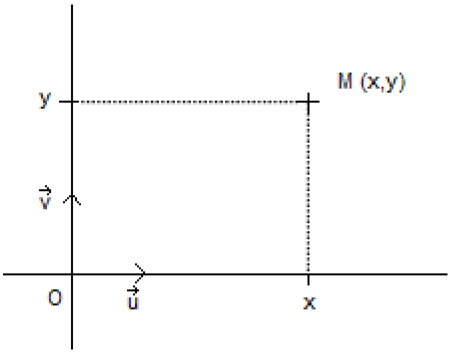
Chapitre 2:Nombres complexes

I – Définition et représentation

Définition :
Un nombre complexe est un nombre de la forme x+iy avec x et y deux réels et i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté ℂ. Les règles de calcul dans ℂ sont les mêmes que dans ℝ.

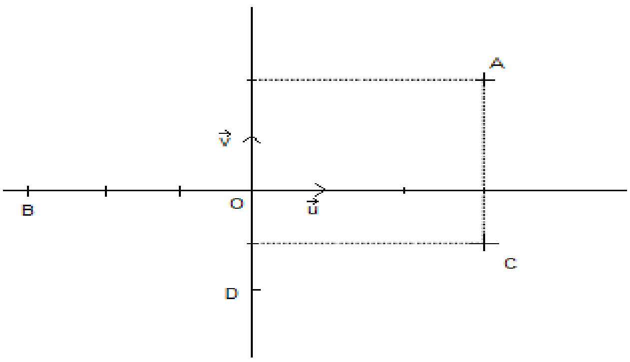
Théorème (admis) :
On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
A tout point M de coordonnées (x ; y), on associe de manière unique le nombre complexe x+iy.
Réciproquement, à tout nombre complexe x+iy on associe de manière unique le point M du plan de coordonnées (x ; y).



Vocabulaire :
Le plan muni du repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est appelé plan complexe.
Le nombre complexe x+iy est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On écrit $x+iy = z_M = z_{\overrightarrow{OM}}$.
Le point M est l'image du nombre complexe x+iy.
Si z = x+iy avec x et y réels alors :

- x est la partie réelle de z, notée Re(z)
- y est la partie imaginaire de z, notée Im(z)
- x+iy est la forme algébrique de z.

Tout point sur l'axe des abscisses est l'image d'un nombre complexe de la forme $x+i\times 0 = x \in \mathbb{R}$. Donc on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. L'axe des abscisses est l'axe réel.
Tout point sur l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre complexe de la forme $0+i\times y = iy$. L'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires purs.
Exemple :
$A(3+2i)$; $B(-3)$; $C(2-i)$; $D(-2i)$.

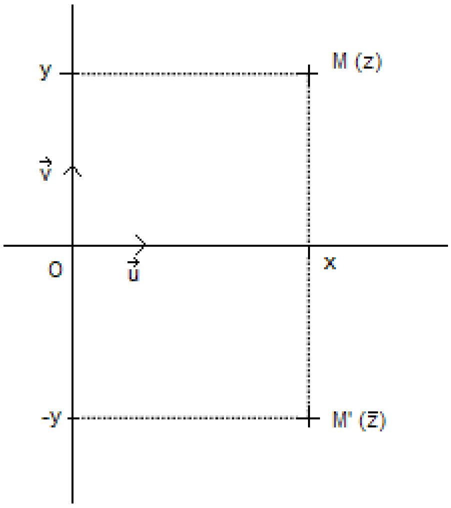


Théorème :

- Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Définition :

On considère un nombre complexe z de forme algébrique x+iy. Le nombre complexe x-iy, noté $\overline{z}$ est le conjugué de z.
M' ($\overline{z}$) est le symétrique de M (z) par rapport à l'axe des abscisses.



II – Calculer dans ℂ

1) Somme et produit

Définition :

On considère deux complexes z et z' de formes algébriques respectives x+iy et x'+iy'.

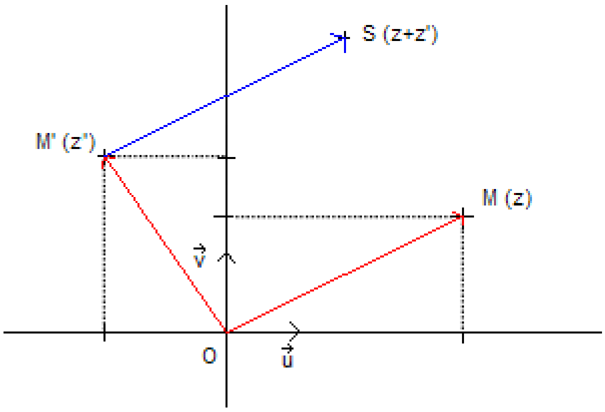
- La somme de z et de z' est le complexe z+z' = x+x'+i(y+y').
- Si k est un réel, alors le produit de k par z est le complexe kz = kx + iky.
- Le produit de z et de z' est le nombre complexe zz' = xx'-yy'+i(xy'+yx').

Exemples :

- -1 + 7i + 3 - 2i = 2 + 5i
- (-1 + 7i)(3 - 2i) = -3 + 2i + 24i - 14i² = 14 – 3 + 23i = 11 + 23i

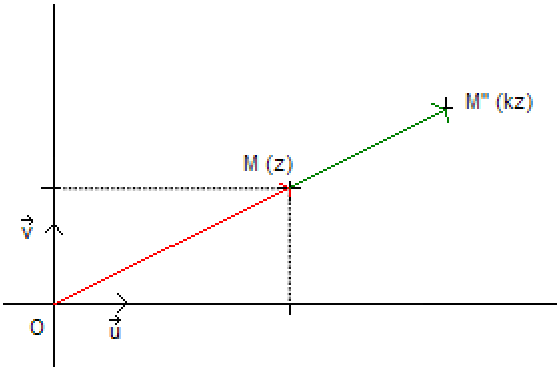
Remarques :

Dans le plan complexe, on considère M (z) et M' (z').
On définit le point S par $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Alors l'affixe de S est z + z'.

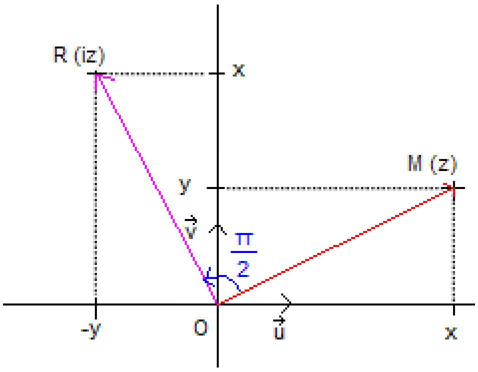


-

- Pour k réel non nul, M'' (kz) est l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k car : $\overrightarrow{OM''} = k\overrightarrow{OM}$.



- R (iz) est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OR} = x(-y) + yx = 0$ et



$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$; $OR = \sqrt{(-y)^2 + x^2}$ donc OM = OR.

Propriétés : Preuve 1
Avec les notations habituelles :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\vec{w}+\vec{t}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{t}}$; $z_{k\vec{w}} = kz_{\vec{w}}$
- Si I est le milieu de [AB] alors $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- Si G est le barycentre de $\{ (A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma) \}$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

2) Quotient

Définition :
On considère un nombre complexe z non nul d'écriture algébrique x+iy.
On cherche un complexe z' tel que zz' = 1.
On remarque que :

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 - i^2y^2 \qquad (x^2 + y^2 \neq 0 \; car \; z \; non \; nul) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Alors $z\frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = 1$ donc $z' = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Définition :

On considère z et z’ deux complexes avec z’ non nul

On pose $\frac{1}{z'} = \frac{x'-iy'}{x'^2+y'^2}$ et $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemple :

- $z = \sqrt{3}+2i$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3}+2i} = \frac{\sqrt{3}-2i}{\left(\sqrt{3}+2i\right)\left(\sqrt{3}-2i\right)} = \frac{\sqrt{3}-2i}{3-4i^2} = \frac{\sqrt{3}-2i}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$.
- $\frac{1+i}{\sqrt{3}+2i} = (1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i + \frac{\sqrt{3}}{7}i + \frac{2}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}\right)$.

3) Propriété du conjugué d’un complexe

Propriété :

Pour tous complexes z et z’ de formes algébriques z = x+iy et z’ = x’+iy’ :

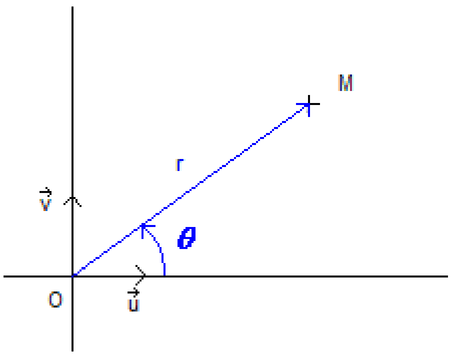
- $\overline{\overline{z}} = z$; $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2x$; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z) = 2iy$; $z\overline{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$; $si\ z'\ est\ non\ nul\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z\ est\ réel\ ssi\ z = \overline{z}$; $z\ est\ imaginaire\ pur\ ssi\ z = -\overline{z}$

III – Module et arguments

Définition :

On considère un nombre complexe z non nul affixe d’un point M dans le plan muni d’un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Si M a pour coordonnées polaires (r,θ), alors *r* est le module de *z* noté $|z|$ et θ est un argument de *z* noté *arg z.*



On a $|z| = r = OM$ et $arg\ z = \theta = (\vec{u},\overrightarrow{OM})\,(2\pi)$.

Remarques :

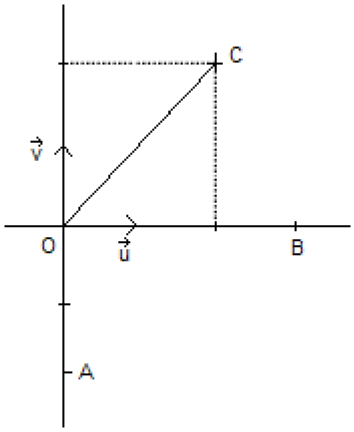
- Si *z = 0* alors *OM = 0* donc on pose $|0| = 0$ mais ***0* n’a pas d’argument.**
- Si *z* est réel, alors son module est sa valeur absolue.
- $|z_M| = \|\overrightarrow{OM}\|$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

Exemples :

$A(-2i)$; $B(3)$; $C(2+2i)$.

$|z_A| = |-2i| = 2$; $|z_B| = |3| = 3$; $|z_C| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\arg z_A = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$; $\arg z_B = \arg 3 = 0 \quad (2\pi)$; $\arg z_C = \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.



$M(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ et $\arg(\cos\theta + i\sin\theta) = \theta \quad (2\pi)$.
Donc M est un point du cercle trigonométrique.

Théorème :
Pour tout nombre complexe z non nul dont l'image M a pour coordonnées cartésiennes (x ; y) et pour coordonnées polaires (r ; θ), on a :

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Forme algébrique : $z = x + iy$
Forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$

Exemple :

Soit $z = \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$. Trouvons une forme trigonométrique de z.

- Calcul du module de z : $|z| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}} = \frac{2}{3}$.
- Alors $z = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. On a $\arg z = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

Théorème : Preuve 2
- Un nombre complexe est nul ssi son module est nul.
- Deux nombres complexes non nuls sont égaux ssi ils ont le même module et le même argument modulo 2π.

Propriétés : Preuve 3
Pour tous complexes z et z' non nuls :
- $|zz'| = |z|.|z'|$ *et* $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$
- Pour tout entier naturel n : $|z^n| = |z|^n$ *et* $\arg(z^n) = n.\arg z \ (2\pi)$

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *et* $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z\ (2\pi)$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'\ (2\pi)$

IV – Equations du second degré à coefficients réels

Théorème : Preuve 4

On considère *a*, *b* et *c* des réels avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. C'est le discriminant du trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ où *z* est un nombre complexe.

- Si $\Delta > 0$ alors le trinôme a deux racines réelles distinctes :
  $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors le trinôme a une racine réelle :
  $z = \frac{-b}{2a}$ (*racine double*)
- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme a deux racines complexes :
  $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ ou δ est un complexe dont le carré est Δ z_1 *et* z_2 sont complexes réels et conjugués.

Exemple :

On veut résoudre l'équation $3z^2 - z + 5 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

On calcule le discriminant $\Delta = 1 - 60 = -59 = \left(\sqrt{59}i\right)^2$. L'équation a deux solutions : $z_1 = \frac{1-i\sqrt{59}}{6}$ et $z_2 = \frac{1+i\sqrt{59}}{6}$.

V – Notation exponentielle d'un nombre complexe

Motivations :

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

- ➢ Pour tous θ et θ' réels : $\varphi(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.
  ➢ $\varphi(\theta)$ a pour module 1 et pour argument θ.
  $\varphi(\theta')$ a pour module 1 et pour argument θ'.
  Alors $\varphi(\theta).\varphi(\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$.
  Donc $\varphi(\theta).\varphi(\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.
  Donc $\varphi(\theta).\varphi(\theta') = \varphi(\theta+\theta')$.
- En supposant que l'on peut dériver φ sur $\mathbb{R}$ comme si elle était à valeurs réelles, pour tout réel θ : $\varphi'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = i.\varphi(\theta)$. Donc φ vérifie l'équation différentielle $f' = if$.
- Ces deux points nous poussent à adopter la notation suivante : $\varphi(\theta) = Ce^{i\theta}$ avec $\varphi(0) = 1$ donc $\varphi(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Définition :
Pour tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ, on pose :
$z = r(\cos\theta + i.\sin\theta) = re^{i\theta}$: notation exponentielle de z.

Exemples :

- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$.
- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ ou encore $e^{i\pi} + 1 = 0$: formule d'Euler.

Remarques :

- La notation exponentielle permet de retrouver les formules d'addition et de duplication vues en trigonométrie.
  En effet pour tous θ et θ' réels :
  - $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \quad \rightarrow \quad addition$
  - $e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2 \quad \rightarrow \quad duplication$
  - $\cos(\theta+\theta') = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i.\sin\theta)(\cos\theta' + i.\sin\theta')\right)$
    $= \cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta'$
- On a les égalités :
  - $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
  - $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
  - $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$
  - $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$

Exemples :

- $\dfrac{2-2i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.
- $e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$
  $e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin^2\theta$
  $= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$
  Donc $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.
  $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

VI – Application à la résolution de problèmes géométriques

1) Arguments et angles orientés

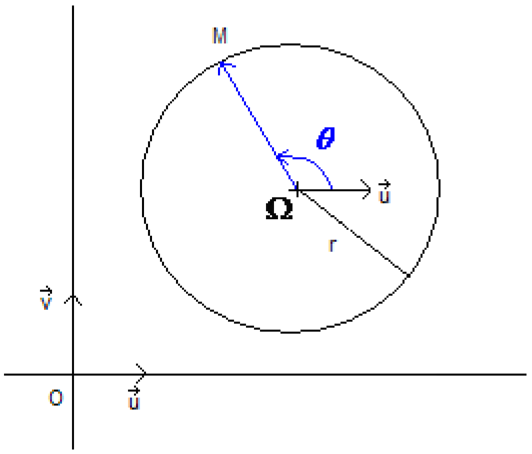
Propriété : Preuve 5
A, B et C sont des points du plan distincts deux à deux d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

- $\arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \quad (2\pi)$.

- $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) \quad (2\pi)$.

Remarques :

- A, B et C (distincts) sont alignés ssi $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = 0 \quad (\pi)$.
- A, B et C (distincts), (BC) et (AC) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.
- M (z) appartient au cercle de centre $\Omega\left(\omega\right)$ et de rayon r ssi $z = \omega + re^{i\theta} \quad avec \quad \theta \in [0;2\pi[$.
  En effet : $\Omega M = |z - \omega| = r$, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \arg(z - \omega) = \theta \quad (2\pi)$.
  Autrement dit $z - \omega = re^{i\theta} \quad i.e. \quad z = \omega + re^{i\theta}$.



Exemple :
$A(i)$; $B(2+i)$; $C\left(1 + i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$.
Alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg \dfrac{1 + i\left(\sqrt{3}+1\right) - i}{2 + i - i} = \arg \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

2) Transformations planes

Théorème (translation) : Preuve 6
On considère M (z), M' (z') et B (b).
L'égalité $z' = z + b$ équivaut à dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
$z' = z + b$ est l'écriture complexe de cette translation.

Théorème (homothétie) : Preuve 7
On considère M (z), M' (z'), $\Omega\left(\omega\right)$ et k un réel non nul.
L'égalité $z' - \omega = k\left(z - \omega\right)$ équivaut à dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
$z' - \omega = k\left(z - \omega\right)$ est l'écriture complexe de cette homothétie.

Exemple :
$\Omega(1+3i)$.
L'homothétie de rapport 2 et de centre Ω transforme M (z) en M' (z') tels que :

$z'-(1+3i)=2(z-(1+3i))$

i.e. $z'=1+3i+2z-2-6i$

i.e. $z'=2z-1-3i$

L'image de $K\,(7-i)$ est le point d'affixe $z'=2(7-i)-1-3i=14-2i-1-3i=13-5i$.

Théorème (rotation) : Preuve 8

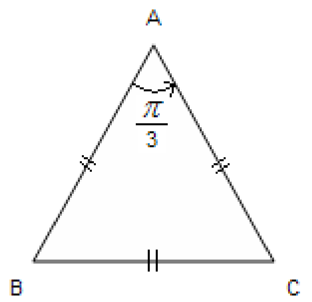
On considère M (z), M' (z'), $\Omega(\omega)$ et θ un réel.

L'égalité $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ équivaut à dire que M' est l'image de M dans la rotation de centre Ω et d'angle θ.

$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ est l'écriture complexe de cette rotation.

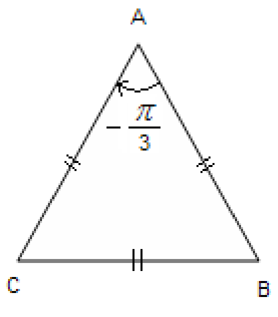
Conséquences :

- ABC est un triangle équilatéral ssi
  - B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ssi $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$.



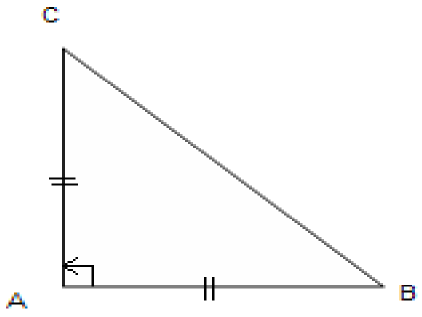
OU

  - B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, ssi $z_C-z_A=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$.



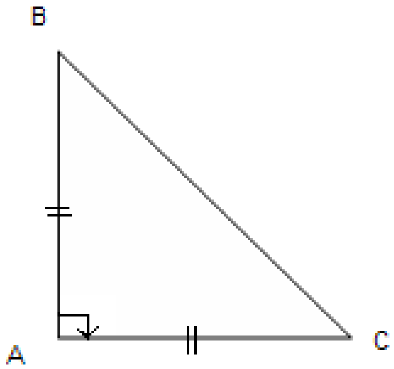
- ABC est rectangle et isocèle en A ssi

B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, ssi $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$.



- B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, ssi

$$z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A).$$



Très important et à retenir

Pour tout nombre complexe z,

- $|z|^2 = z \times \overline{z}$
- $|z|$ est toujours positif et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- Si z est un nombre réel, alors le module de z coïncide avec la valeur absolue de z .
- Si z est un imaginaire pur, alors le module de z est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.
- Si M est le point d'affixe z, alors $OM = |z|$.
- Si z est un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $|z| = r$.
- Pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta \; [2\pi]$.

Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier naturel n , on a :

1. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2. $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$
3. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
5. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

- Pour tout réel θ, on a la formule d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls de formes exponentielles $z = r\,e^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ et soit n un entier naturel non nul . Alors :

$\overline{z} = r\,e^{-i\theta}$

$-z = r\,e^{i(\theta+\pi)}$

$z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$z^n = r^n\,e^{in\theta}$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- Formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$

  $i^{4n+1} = i^{4n} \; i = 1 \; i = i$

  $i^{4n+2} = i^{4n} \; i^2 = 1 \; (-1) = -1$

  $i^{4n+3} = i^{4n} \; i^3 = 1 \; (-i) = -i$

Exercice d'application 1

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z+5i|=6$

Soit A le point d'affixe $z_A=-5i$. Alors , pour tout nombre complexe z,
$|z+5i|=|z-z_A|$. Donc : $|z+5i|=6 \Leftrightarrow |z-z_A|=6 \Leftrightarrow AM=6$. On en conclut que l'ensemble des points M répondant à la question est le cercle de centre A et de rayon 6 .

2) En déduire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|\boldsymbol{z}+5\boldsymbol{i}|\le 6$

$|\boldsymbol{z}+5\boldsymbol{i}|\le 6 \Leftrightarrow |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_A|\le 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{AM}\le 6$ l'ensemble des points M répondant à la question est le disque de centre A et de rayon 6 .

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\left|\dfrac{3z-i}{z+1-i}\right|=3$

Il faut tout d'abord éliminer le point A d'affixe $-1+i$, car pour cette valeur de z le quotient précédent n'existe pas . Ensuite, pour tout $z\neq -1+i$, on peut écrire :

$$\left|\frac{3z-i}{z+1-i}\right|=3 \Leftrightarrow \frac{|3z-i|}{|z+1-i|}=3 \Leftrightarrow |3z-i|=3|z+1-i| \Leftrightarrow 3\left|z-\frac{i}{3}\right|=3|z+1-i|$$

$$\Leftrightarrow \left|z-\frac{i}{3}\right|=|z+1-i|$$

En appelant B le point d'affixe $\dfrac{i}{3}$, la dernière égalité équivaut à : BM = AM . On en conclut que l'ensemble des points M cherché est la médiatrice Δ du segment [AB] privée éventuellement du point A qui a été exclu dès le début . Mais comme $A\notin\Delta$, l'ensemble des solutions est toute la droite Δ.

Exercice d'application 2

Soient $z=1+i$ et $z'=\sqrt{3}-i$.

1. Calculons $\arg(z)$, $\arg(z')$, $\arg(zz')$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)$:

- Comme $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, alors

  $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. D'où

  $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

- De même $|z'|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=2$. Alors :

  $z'=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos(-\dfrac{\pi}{6})+i\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right)$. D'où $\arg(z')=-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

- Il en découle que $\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et que

  $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')=\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

2. Les calculs précédents permettent alors de calculer le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$ et de $\frac{5\pi}{12}$. Pour cela, il suffit de déterminer les formes algébriques et trigonométriques de $z\times z'$ et de $\frac{z}{z'}$:

- Comme $|z\times z'| = |z|\times|z'| = 2\sqrt{2}$ et que $\arg(z\times z') = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$, alors la forme trigonométrique de $z\times z'$ est : $z\times z' = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. Mais sa forme algébrique est $z\times z' = (1+i)(\sqrt{3}-i) = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$. Par identification, on obtient alors : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

En suivant la même démarche, on a : $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ d'une part et $\frac{z}{z'} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ d'autre part . En identifiant, on conclut alors que $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

2) Calculons $(\sqrt{3}-i)^6$ en déterminant son module et un de ses arguments :

$$\left|(\sqrt{3}-i)^6\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|^6 = 2^6 = 64 \text{ et } \arg\left((\sqrt{3}-i)^6\right) = 6\arg(\sqrt{3}-i) = 6\times(-\frac{\pi}{6}) = \pi\ [2\pi]$$

Donc : $(\sqrt{3}-i)^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$.

3)

Soit Z un nombre complexe de module 1, montrer en utilisant l'écriture exponentielle que $Z+\frac{1}{Z}$ est un nombre réel.