Mathématiques
Salle 32

Cours de Mathématiques classe de Troisième

HATTON Julien HATTON Valentine

27 avril 2016

Table des matières

Chapitre I

Le calcul numérique

A Le calcul fractionnaire

1 Addition et soustraction

Propriété : Somme et différence de deux nombres fractionnaires

On écrit :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

avec $c \neq 0$.

On ne peut additionner que des nombres ayant le même dénominateur.

Méthode : Somme et différences de deux fractions

1. Choisir le dénominateur commun.
2. Réduire les deux fractions au même dénominateur.
3. Additionner ou soustraire les « nouveaux » numérateurs, mais surtout pas les dénominateurs.

Exemple.

$$\begin{aligned}\frac{1_{\times 3}}{2_{\times 3}}+\frac{2_{\times 2}}{3_{\times 2}} &= \frac{3}{6}+\frac{4}{6}\\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

Exercice 1 : Somme et différence

1. Déterminer le plus petit multiple commun à ces couples de nombres :

   (a) 6 et 9 (b) 5 et 10 (c) 12 et 18 (d) 20 et 25

2. Calculer les expressions suivantes :

   (a) $\frac{5}{6} + \frac{5}{24} =$ (b) $\frac{7}{20} - \frac{7}{30} =$ (c) $\frac{13}{24} - \frac{7}{30} =$

2 Multiplier ou diviser deux fractions

Propriété : Produit de deux nombres fractionnaires

On écrit :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

avec b et d non-nuls.

Exemple. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Propriété : Quotient de deux nombres fractionnaires

On écrit :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

avec b,c et d non-nuls.
Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemple. $\frac{2}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$

Exercice 2 : Produit et quotient

Calculer les expressions suivantes :

1. $\frac{5}{6} \times \frac{24}{15} =$
2. $\frac{25}{36} \times \frac{24}{15} =$
3. $\frac{25}{18} \div \frac{35}{24} =$
4. $\frac{4}{\frac{8}{7}} =$

B Puissance d'un nombre relatif

1 Exposant entier positif

Définition : Puissance d'un nombre

a **exposant** n ou a **puissance** n s'écrit :

$$a^n = a \times a \times a \times a ... \times a$$

avec n facteurs.

Exemple. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; $(-5)^2 = 25$;$5^2 = 25$; $(-5)^3 = -125$;$-5^2 = -25$;

Propriété : Puissance et signe

Un **nombre négatif** élevé à une **puissance impaire** est **négatif**.
Un nombre élevé à une **puissance paire** est **toujours positif**.

Remarque. Attention au rôle des parenthèses, ne pas confondre $(-5)^2$ le carré de -5 et -5^2 qui est l'opposé du carré de 5.

Exercice 3 : Puissance et signe

Calculer :

1. $3^3 =$
2. $(-3)^3 =$
3. $(-3)^4 =$
4. $-10^4 =$
5. $(-7)^2 =$
6. $-9^2 =$

2 Exposant entier négatif

Définition : L'inverse d'un nombre

a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemple. L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$; L'inverse de $2^3 = \frac{2^3}{1}$ est $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Exercice 4 : Notion d'inverse

Compléter :

a. $5^{-3} = \dfrac{1}{5^{\cdots}}$

b. $\dfrac{1}{4^{-2}} = 4^{\cdots}$

c. $5^3 = \dfrac{1}{5^{\cdots}}$

d. $6^{-2} = \dfrac{1}{6^{\cdots}}$

e. $\dfrac{1}{2^{-4}} = 2^{\cdots}$

f. $9^{-3} = \dfrac{1}{9^{\cdots}}$

3 Règles de calcul

Propriété : Produits, quotients et puissances

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Exemple. $5^2 \times 5^3 = 5^5$; $\dfrac{5^2}{5^3} = 5^{-1}$; $(5^3)^2 = 5^6$.

Exercice 5 : Puissances

Compléter :

a. $2^2 \times 2^3 = 2^{\cdots}$

b. $2^2 \div 2^3 = 2^{\cdots}$

c. $2^2 \div 2^3 = \dfrac{1}{2^{\cdots}}$

d. $3^{-2} \times 3^3 = 3^{\cdots}$

e. $(-3)^{-2} \times 3^3 = 3^{\cdots}$

f. $8^3 = 2^{\cdots}$

Propriété : Puissance d'un produit, d'un quotient

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple. $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$;$0{,}1^{14} \times 10^{14} = (0{,}1 \times 10)^2 = 1$; $0{,}8^2 = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} = 0{,}64$.

Exercice 6 : Produits et quotients

Calculer astucieusement :

a. $2^3 \times 0{,}5^3$

b. $\frac{10^3}{5^3}$

c. $\frac{2^{-3} \times 5^{-3}}{10^{-3}}$

d. $0{,}4^2$

e. 30^3

f. $0{,}02^4$

C Notation scientifique

Remarque. 120 ;12×10^1 ;$1{,}2 \times 10^2$;$0{,}12 \times 10^3$ sont les écritures d'un même nombre.

Définition : L'écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est **la seule écriture de la forme $a \times 10^n$** avec :

- a un nombre n'ayant qu'**un chiffre avant la virgule différent de zéro**,
- n un nombre entier.

Exemple. L'écriture scientifique de 120 est $1{,}2 \times 10^2$, celle de $0{,}0028$ est $2{,}8 \times 10^{-3}$.
Remarque. Les nombres ayant une distance à zéro supérieure à 1 ont un exposant positif :

- Masse de la Terre : $5{,}972 \times 10^{24} kg$
- Masse d'un électron : $9{,}1 \times 10^{-31} kg$

Exercice 7 : Notation scientifique

1. Donner l'écriture scientifique de ces nombres :
   (a) Masse de Mars : $639 \times 10^{21}\,kg$.
   (b) Masse d'un proton (constituant du noyau atomique) : $16\,726 \times 10^{-31}\,kg$.
2. En chimie, on regroupe les molécules et les atomes en paquets contenant un très grand nombre d'entités. Ces paquets, appelés moles, contiennent tous le même nombre d'entités, et ont une dimension humainement appréciable.
   Ainsi, $12g$ est la masse d'une mole de carbone (graphite).
   Un atome de carbone pesant $1{,}993 \times 10^{-26}\,kg$, calculer le nombre d'atomes dans une mole.

Exercices

Ex 8 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{10}{3}+\frac{5}{6}$
- $5\times\frac{4}{16}$
- $\frac{10}{7}\div 5$

Ex 9 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{12}{12}+\frac{3}{10}$
- $\frac{8}{21}\times\frac{23}{16}$
- $\frac{14}{5}\times\frac{12}{16}$

Ex 10 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{16}{12}-\frac{15}{16}$
- $\frac{6}{6}-\frac{3}{9}$
- $\frac{12}{20}+\frac{9}{24}$

Ex 11 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{14}{6}\times\frac{24}{10}$
- $\frac{4}{10}\div\frac{2}{10}$
- $\frac{19}{12}+\frac{24}{6}$

Ex 12 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{11}{12}+\frac{1}{18}$
- $\frac{21}{20}\div\frac{42}{25}$
- $\frac{19}{14}+\frac{23}{35}$

Ex 13 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\left(\frac{18}{14}-\frac{6}{21}\right)\div\frac{18}{35}$
- $\frac{16}{9}\div\frac{15}{18}+\frac{10}{10}$
- $\frac{15}{21}\times\frac{14}{25}\times\frac{5}{9}$

Ex 14 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{11}{5}\times\frac{15}{22}\times\frac{10}{7}$
- $\left(\frac{13}{21}-\frac{4}{7}\right)\div\frac{13}{14}$
- $\left(\frac{7}{20}-\frac{20}{2}\right)\times\frac{16}{15}$

Ex 15 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\frac{6}{15}\times\frac{10}{8}\div\frac{16}{14}$
- $\left(\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\right)\times\frac{12}{6}$
- $\frac{4}{5}+\frac{17}{14}\times\frac{21}{34}$

Ex 16 Calculs

Simplifier les expressions suivantes :

- $7^3\times 7^{-4}$
- $\frac{6^3}{6^6}$
- $\left(3^{-3}\right)^2\times 3^5$

Ex 17 Calculs

Simplifier les expressions suivantes :

- $\dfrac{3^{-2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}}$
- $\left(5^3\right)^4\times 25^{-6}$
- $5^{-3}\times 0{,}2^{-4}$

Ex 18 Calculs

Simplifier les expressions suivantes :

- $0{,}8^2$
- $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{5^{-2}}$
- $\dfrac{8^{-1}}{8^{-3}}$

Ex 19 Calculs

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat en écriture scientifique :

- $2\times10^2\times11\times10^4$
- $\dfrac{1\times10^{-4}\times11\times10^3}{5\times10^3}$
- $\dfrac{4\times10^4\times6\times10^2}{12\times10^{-4}}$

Ex 20 Calculs

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat en écriture scientifique :

- $11\times10^{-1}\times10\times10^{-1}$
- $\dfrac{2\times10^{-2}\times3\times10^{-1}}{5\times10^4\times9\times10^2}$
- $\dfrac{1{,}2\times10^3}{100\times10^{-3}}$

Ex 21 Calculs

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat en écriture scientifique :

- $\dfrac{11\times10^{-2}}{10\times10^{-4}}$
- $\dfrac{3\times10^2\times9\times10^1}{12\times10^1}$
- $\dfrac{9\times10^1\times5\times10^{-2}}{9\times10^0\times12\times10^{-1}}$

Ex 22 Groupe Est, sept 2003

Montrer que les deux expressions numériques A et B ci-dessous sont égales à $\dfrac{1}{2}$. Les calculs devront être détaillés.

$A=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{10}$

$B=\dfrac{4\times10^{-10}\times3\times10^5\times10^{-1}}{6\times(10^{-2})^5\times2^2\times10^4}$

Ex 23 Nord, sept 2003

Soient $A=\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{5}{4}\right)\div\dfrac{7}{5}$

et $B=\dfrac{6\times10^8\times1{,}6\times10^{13}}{0{,}4\times10^{14}}$.

1. Calculer A en détaillant les calculs et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer B en utilisant les règles de calcul sur les puissances de dix et donner son écriture scientifique.

Ex 24 Groupe Ouest, sept 2003

On a : $A=\dfrac{1-\dfrac{5}{6}}{1+\dfrac{1}{6}}$; $B=\dfrac{4\times10^{-12}\times2{,}5}{7\times10^{-11}}$.

Démontrer que A et B sont deux écritures du même nombre $\dfrac{1}{7}$.

Ex 25 Polynésie, sept 2003

$A=\dfrac{5}{4}+\dfrac{11}{4}\times\dfrac{20}{33}$; $B=\dfrac{1}{12}\div\left(2-\dfrac{7}{3}\right)$.

1. Calculer A et B en détaillant les calculs.
   Donner le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.
2. $C=15\times(10^7)^2\times3\times10^{-9}$.
   Calculer C et donner le résultat sous la forme $a\times10^n$ et avec la notation scientifique.

Ex 26 Antilles-Guyane, sept 2007

1. $A=\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}\div\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}\right)$.
   Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. $B=\dfrac{21\times10^{-4}\times500\times(10^2)^3}{0{,}7\times10^8}$.
   Donner l'écriture décimale puis l'écriture scientifique de B.

Ex 27 Amérique du Sud, nov 2007

1. On pose $A = \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \times \left(5 + \frac{1}{2}\right)$.
   Calculer A. Présenter le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. On pose $B = \dfrac{15 \times 10^{-3} \times 7 \times 10^{7}}{5 \times 10^{2}}$.
   Calculer B. Présenter le résultat sous la forme scientifique.

Ex 28 Fraction d'une quantité(1)

Dans une classe de troisième, on compte 28 élèves. Les trois quarts d'entre eux sont partis en voyage en Angleterre. Combien d'élèves restent-ils ?

Ex 29 Fraction d'une quantité(2)

Une boîte de chocolats est encore remplie au $\frac{2}{3}$. Cela représente 12 friandises.
Combien de chocolats contenait la boîte au départ ?

Ex 30 Fraction d'une quantité(3)

Dans une classe de troisième, deux tiers des élèves ont commandé le pack complet « photo de classe » et un quart du reste de la classe ne prend que les photographies d'identité.

photo de classe	photographie d'identité
8€	2€

Pour cette classe de 24 élèves, quelle somme le foyer doit-il payer d'avance au photographe ?

Ex 31 Grenoble, juin 1996

Quatre enfants se partagent une tablette de chocolat. Le premier prend le tiers de la tablette et le second le quart.
Le troisième prend $\frac{2}{5}$ de ce qui reste après que le premier et le deuxième se soient servis.

1. Lequel de ces calculs permet de trouver la part du troisième ?
   - ☐ $A = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$
   - ☐ $B = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5}$
   - ☐ $C = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \div \frac{2}{5}$
   - ☐ $D = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5}$
2. Effectuer le calcul choisi.

Ex 32 Asie, juin 2014

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 mètre. À chaque rebond elle rebondit des $\frac{3}{4}$ de la hauteur d'où elle est tombée. Quelle hauteur atteint la balle au cinquième rebond ? Arrondir au cm près.

Ex 33 La légende du jeu d'échec

Le roi Belkib promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Lorsque le sage Sissa, fils du Brahmine Dahir, lui présenta le jeu d'échecs, le souverain, demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.

Sissa demanda au prince de déposer un grain de blé sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case. Le prince accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre.

Sachant que les plus petits grains de blé actuels ont une masse de 30mg, calculer la masse de blé des deux dernières cases.

Chapitre II

Le théorème de Thalès

L'orbite de la Lune autour de la Terre est inclinée de 5 degrés par rapport au plan de l'orbite terrestre autour du Soleil (l'écliptique). C'est pourquoi, au moment de la nouvelle lune, la Lune passe habituellement au-dessus (au nord) ou en dessous (au sud) du Soleil. Une éclipse solaire peut se produire uniquement lorsque la nouvelle lune se trouve près d'un des points (appelés nœuds) où l'orbite lunaire croise l'écliptique.

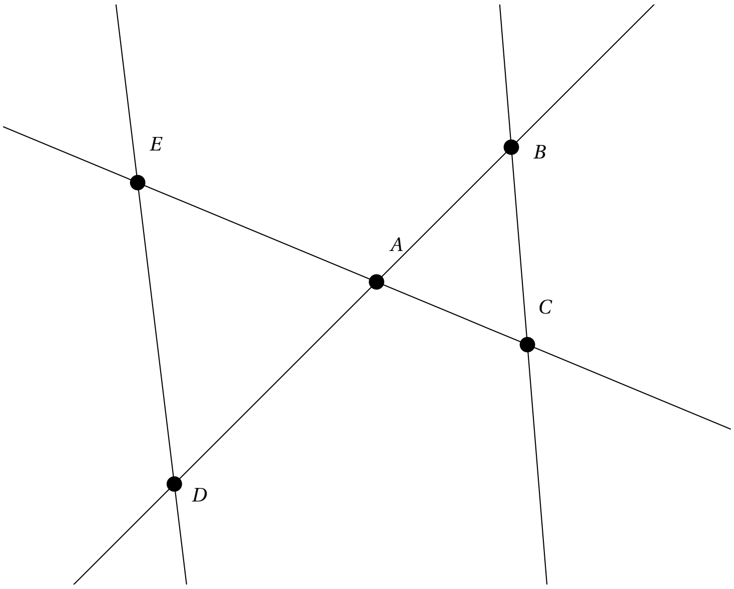
Comme il a été précisé plus haut, l'orbite lunaire est aussi elliptique. La distance Terre-Lune peut varier de 6% par rapport à sa valeur moyenne. C'est pourquoi la taille apparente de la Lune varie suivant sa distance par rapport à la Terre, et c'est la cause qui conduit à la différence entre les éclipses totales et les éclipses annulaires. La distance de la Terre au Soleil varie suivant l'année, mais ceci a un plus faible impact. En moyenne, la Lune parait légèrement plus petite que le Soleil, ainsi la majorité (près de 60%) des éclipses centrales sont annulaires. C'est seulement quand la Lune est plus près de la Terre que la moyenne (près de son périgée) que l'éclipse totale se produit.

wikipedia.org

Pour toute question ...
boiteprof@gmail.com

Activités d'introduction

Activité 1 Raisonner par contraposition



On sait que $AD = 1{,}9cm$, $AB = 1{,}2cm$, $AC = 1{,}4cm$ et $AE = 2{,}1cm$.

1. On suppose dans un premier temps que $(BC)//(ED)$.
   En ne tenant pas compte de la valeur donnée dans l'énoncé, calculer la longueur AD.
2. Que remarques-tu ?
3. Conclure quant au parallélisme des deux droites.

A Agrandissement et réduction

Définition : Agrandissement et réduction

L'agrandissement ou la réduction d'une figure est la figure obtenue en multipliant toutes les longueurs par un même nombre k.

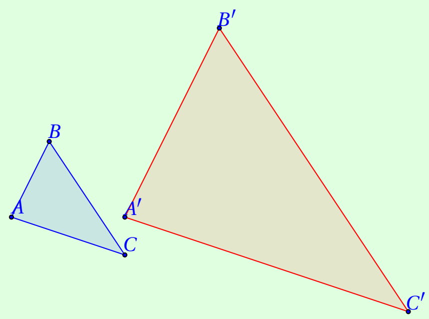
$$k = \frac{\textbf{longueur figure obtenue}}{\textbf{longueur figure de départ}}$$

k est le coefficient ou rapport d'agrandissement (ou de réduction).

Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement, si $0 < k < 1$, il s'agit d'une réduction.

Remarque. Il y a proportionnalité entre les longueurs des deux figures.

Agrandissement ou réduction

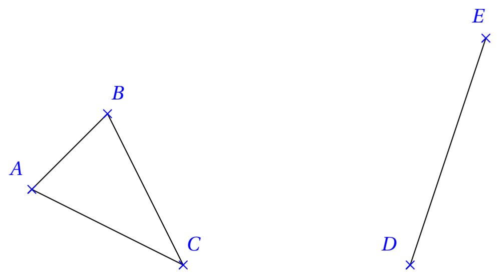


- Le triangle ABC est une réduction de A'B'C' de coefficient $k_R = 0{,}4$.
- Le triangle A'B'C' est un agrandissement de ABC de coefficient $k_A = 2{,}5$.

Propriété : Conservations

L'agrandissement ou la réduction **conserve**
- la mesure des angles,
- la perpendicularité,
- le parallélisme,
- la nature.

Exercice 1 : Agrandissement et réduction



Le triangle DEF isocèle en F est l'agrandissement de ABC. En mesurant à la règle et grâce aux propriétés connues, terminer la construction du triangle DEF.

Exercice 2 : Utiliser la conservation

Soit le triangle ABC avec $AB = 4cm$, $AC = 3{,}2cm$ et $BC = 2{,}4cm$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?
En déduire la nature de MNO un agrandissement de ABC de rapport $k = 1{,}5$, construire ce triangle.

B Le théorème de Thalès

1 Le théorème

Ce théorème est utile pour déterminer une longueur.

Théorème Le théorème de Thalès

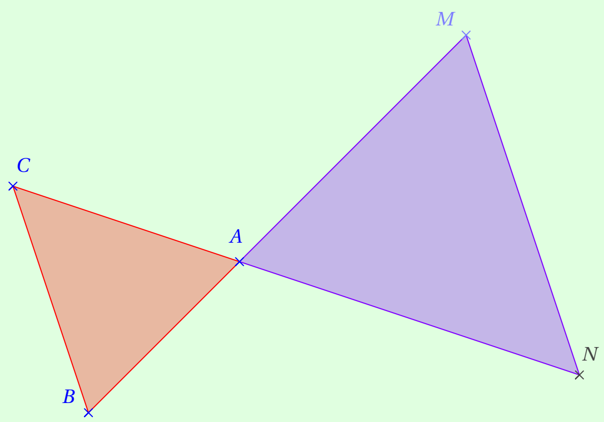
Si (BM) et (CN) sont sécantes en A **et si** $(BC)//(MN)$, **alors**

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{NM}{BC}$$

Remarque. L'énoncé est le même que celui de la classe de quatrième.

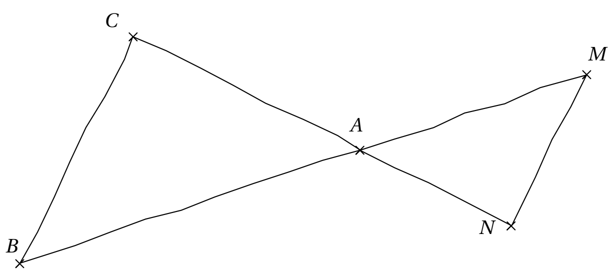
⚠ Les deux conditions doivent être réunies pour utiliser le théorème de Thalès.

Nouvelle configuration de Thalès



Cette configuration, dite papillon, s'ajoute à celle que vous connaissez déjà.

Exemple. Sur la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
$AM = 3cm$, $AN = 2cm$, $MN = 2{,}5cm$ et $AB = 4cm$.



On veut calculer AC.

Comme (BM) et (CN) sont sécantes en A et comme (MN) et (BC) sont parallèles, **alors d'après le théorème de Thalès**,

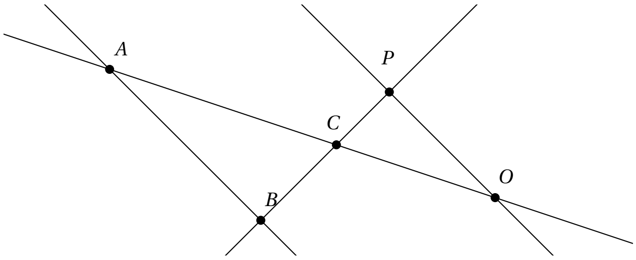
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

ce qui donne

$$\frac{4}{3} = \frac{AC}{2} = \frac{BC}{2{,}5}$$

$$AC = \frac{4 \times 2}{3} \simeq 2{,}7cm$$

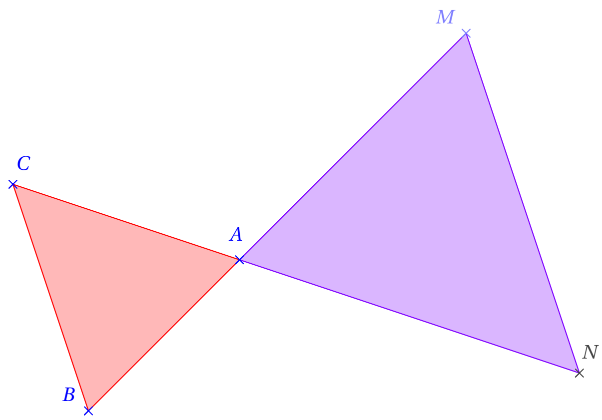
Exercice 3 : Calculer une longueur



Sur la figure ci-dessus, les droites (AB) et (PO) sont parallèles. Calculer les longueurs AB et CO sachant que $AC = 3{,}2cm$, $BC = 1{,}4cm$, $CP = 1{,}0cm$ et $PO = 2{,}0cm$

2 Conséquence

Remarque.
Sur la figure suivante,



Si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés dans cet ordre et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, alors (MN) n'est pas parallèle à (BC).

En effet, les deux triangles n'ont pas des longueurs liées par une relation de proportionnalité.

L'alignement des points suppose une configuration de Thalès, si les droites sont parallèles alors il y a égalité des rapports de longueurs, d'après le théorème de Thalès.

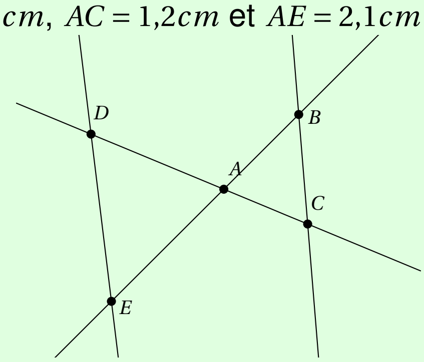
Cependant on montre ici que deux rapports sont différents, d'après ce même théorème, **on en déduit que les droites ne sont pas parallèles**.

Propriété : Droites non parallèles

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés dans cet ordre, alors **d'après le théorème de Thalès**, (MN) n'est pas parallèle à (BC).

Méthode : Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

On sait que $AD = 1{,}9cm$, $AB = 1{,}4cm$, $AC = 1{,}2cm$ et $AE = 2{,}1cm$.



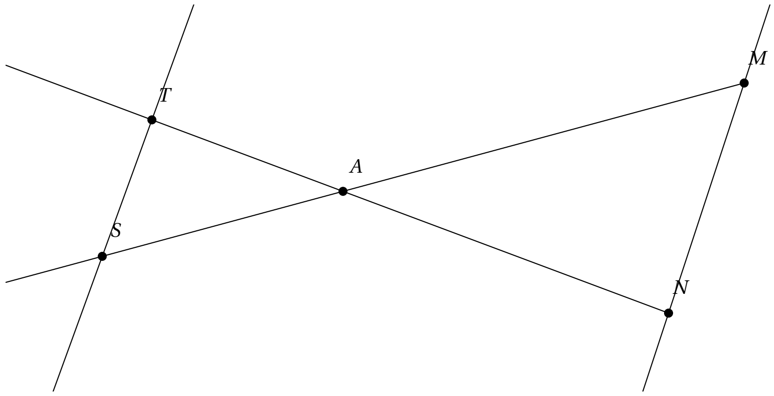
Et on veut montrer que (BC) n'est pas parallèle à (DE). On commence par vérifier l'inégalité :

$$\frac{AD}{AC} \neq \frac{AE}{AB}$$

D'une part $AD \times AB = 1{,}9 \times 1{,}4 = 2{,}66$
D'autre part $AE \times AC = 2{,}1 \times 1{,}2 = 2{,}52$
Donc : $\frac{AD}{AC} \neq \frac{AE}{AB}$

Comme D, A, C d'une part et E, A, B d'autre part sont alignés dans cet ordre, et comme $\frac{AD}{AC} \neq \frac{AE}{AB}$ alors, d'après le théorème de Thalès, (BC) n'est pas parallèle à (DE).

Exercice 4 : Presque parallèles mais ...



Sur la figure ci-dessus, $TA = 2{,}7cm$, $SA = 3{,}3cm$, $AM = 5{,}5cm$, $AN = 4{,}6cm$ et $MN = 3{,}2cm$. Montrer que les droites (TS) et (MN) ne sont pas parallèles.

C La réciproque du théorème de Thalès

Ce théorème sert à montrer que deux droites sont parallèles.

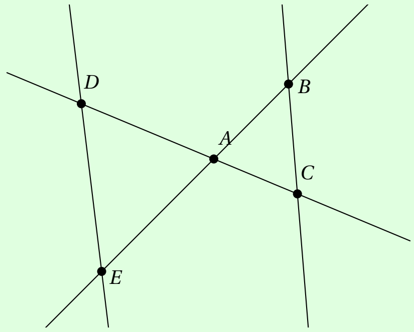
Théorème La réciproque du théorème de Thalès

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés dans cet ordre, alors (MN) est parallèle à (BC).

Deux conditions doivent être réunies, importance notamment de l'ordre d'alignement des points.

Méthode : Montrer que deux droites sont parallèles

On sait que $AD = 1{,}8cm$, $AB = 1{,}4cm$, $AC = 1{,}2cm$ et $AE = 2{,}1cm$.



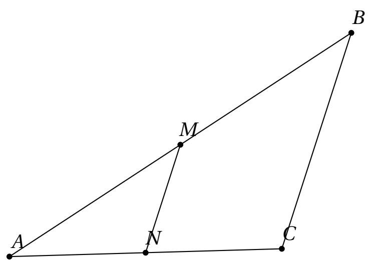
Et on veut montrer que $(BC)//(DE)$. On commence par vérifier l'égalité :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{D'une part } AD \times AB = 1{,}8 \times 1{,}4 = 2{,}52 \\ \text{D'autre part } AE \times AC = 2{,}1 \times 1{,}2 = 2{,}52\end{array}\right\} \text{Donc : } \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

Comme D, A, C d'une part et E, A, B d'autre part sont alignés dans cet ordre, et comme $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ alors, **d'après la réciproque du théorème de Thalès**, $(BC)//(DE)$.

Exercice 5 : Droites parallèles

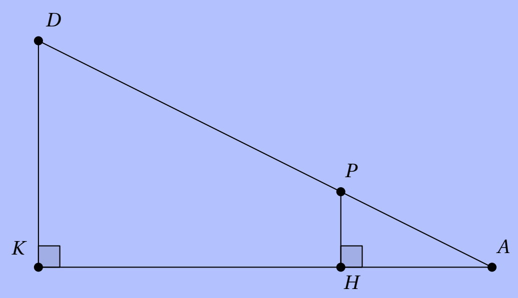


Sur la figure, $AC = 6cm$, $AB = 9cm$, $BC = 5cm$, $AM = 5{,}25cm$ et $AN = 3{,}5cm$.

1. Montrer que (BC) est parallèle à (MN).
2. Calculer la longueur MN.

Exercices

Ex 6 Métropole, juin 2015



Dans la figure ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle :

- les points D, P et A sont alignés ;
- les points K, H et A sont alignés ;
- $DA = 60cm$;
- $DK = 11cm$;
- $DP = 45cm$.

1. Calculer KA au millimètre près.
2. Calculer HP.

Ex 7

Le triangle ABC est tel que $AC = 5{,}25cm$, $AB = 5cm$ et $BC = 7{,}25cm$. Prouver que ce triangle est rectangle.

Révisions

Ex 8 Calculs fractionnaire

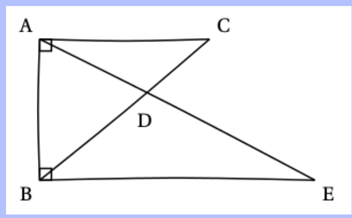
Calculer les expressions suivantes :

- $\dfrac{7}{10} + \dfrac{8}{15}$
- $\dfrac{8}{21} \times \dfrac{35}{16}$
- $\dfrac{13}{20} - \dfrac{17}{35}$
- $\dfrac{\dfrac{11}{15}}{\dfrac{33}{10}}$

Révisions

Ex 9 Métropole, sept 2013

Voici une figure codée réalisée à main levée :

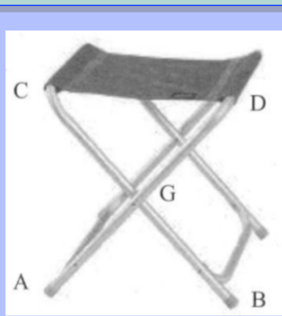


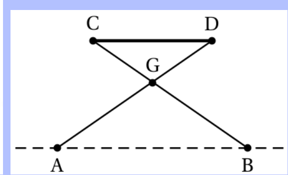
On sait que

- La droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB).
- La droite (EB) est perpendiculaire à la droite (AB).
- Les droites (AE) et (BC) se coupent en D.
- $AC = 2{,}4cm$; $AB = 3{,}2cm$; $BD = 2{,}5cm$ et $DC = 1{,}5cm$.

1. Réaliser la figure en vraie grandeur sur la copie.
2. Déterminer l'aire du triangle ABE.

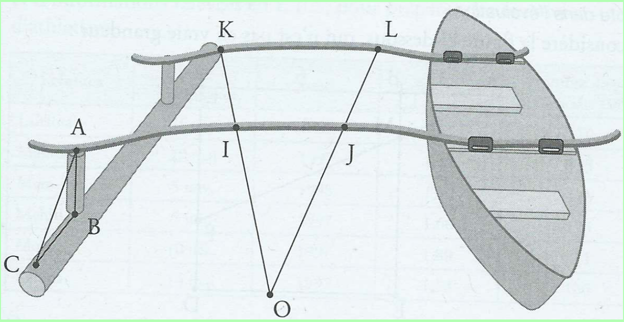
Ex 10 Am du Nord, juin 2012





On a modélisé géométriquement un tabouret pliant par les segments $[CB]$ et $[AD]$ pour l'armature métallique et le segment [CD] pour l'assise en toile.
On a $CG = DG = 30cm$, $AG = BG = 45cm$ et $AB = 51cm$.
Pour des raisons de confort, l'assise $[CD]$ est parallèle au sol représenté par la droite (AB).
Déterminer la longueur CD de l'assise.
Vous laisserez apparentes toutes vos recherches. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.

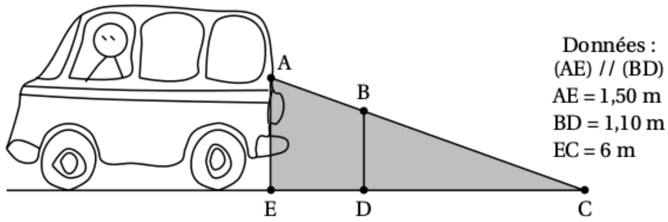
Ex 11 Polynésie, juin 2012



1. Pour vérifier que les deux bras du balancier sont parallèles entre eux, il place sur ceux-ci deux bois rectilignes schématisés sur le dessin ci-dessus par les segments $[OK]$ et $[OL]$ avec $I \in [OK]$ et $J \in [OL]$.
   La mesure des longueurs OI, OJ, OK et OL donne les résultats suivants :
   $OI = 1{,}50m$, $OJ = 1{,}65m$, $OK = 2{,}00m$, $OL = 2{,}20m$.
   Les deux bras sont-ils parallèles ? Justifie ta réponse.
2. Pour vérifier que la pièce [AB] est perpendiculaire au balancier il mesure les longueurs AB, AC et CB et obtient :
   $AB = 15cm$, $AC = 25cm$, $CB = 20cm$
   Peut-il affirmer que la pièce $[AB]$ est perpendiculaire au balancier ? Justifie ta réponse.

Ex 12 Nouv-Cal, déc 2013

En se retournant lors d'une marche arrière, le conducteur d'une camionnette voit le sol à 6 mètres derrière son camion. Sur le schéma, la zone grisée correspond à ce que le conducteur ne voit pas lorsqu'il regarde en arrière.



1. Calculer DC.
2. En déduire que $ED = 1{,}60m$.
3. Une fillette mesure $1{,}10m$. Elle passe à $1{,}40m$ derrière la camionnette.
   Le conducteur peut-il la voir ? Expliquer.

Ex 13

Construire BCD le triangle tel que $BC = 2{,}5cm$, $CD = 6{,}5cm$ et $BD = 6{,}0cm$. Quelle est la nature de ce triangle ? Démontrer votre affirmation.

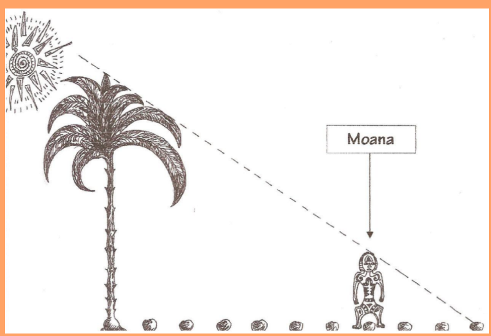
Révisions

Ex 14 Polynésie, juin 2013

Document 1 : Extrait de la liste alphabétique des élèves de la 3^e4 et d'informations relevées en E.P.S. pour préparer des épreuves d'athlétisme.

Prénoms	Date de naissance	Année	Taille en m	Nombre de pas réalisés sur 100 m
Lahaina	26-oct.	1997	1,81	110
Manuarii	20-mai	1997	1,62	123
Maro-Tea	5-nov.	1998	1,56	128
Mehiti	5-juin	1997	1,60	125
Moana	10-déc.	1997	1,80	111
Rahina	14-mai	1997	1,53	130

Document 2 : Dans le croquis ci-dessous, le tiki représente Moana, élève de 3^e4. Moana a d'abord posé sur le sol, à partir du cocotier, des noix de coco régulièrement espacées à chacun de ses pas, puis il s'est ensuite placé exactement comme indiqué sur le croquis, au niveau de la 7^e noix de coco.



A l'aide d'informations qui proviennent des documents précédents, calcule la hauteur du cocotier en expliquant clairement ta démarche.
Dans cet exercice, tout essai, toute idée exposée et toute démarche, même non aboutis ou mal formulés seront pris en compte pour l'évaluation.

Ex 15

Calculer les expressions suivantes :

$A = \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right) \times \frac{9}{5} + \frac{3}{5}$

$B = 5 \times (2-8) - 6 \times [13 + 2 \times (17-21)]$

$C = \frac{10 - 2 \times 7}{5(8-13) + 20}$

Révisions

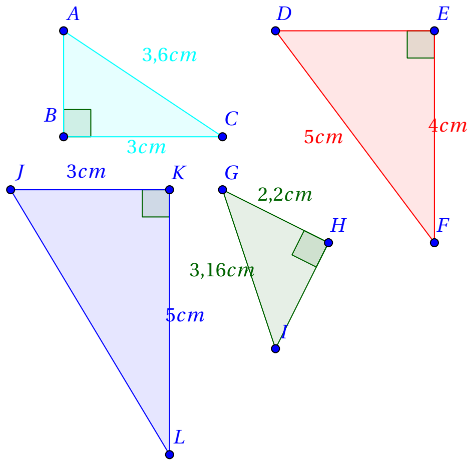
Ex 16

Construire EFG le triangle tel que $EF = 6cm$, $FG = 6{,}9cm$ et $EG = 9{,}1cm$. Quelle est la nature de ce triangle ? Démontrer votre affirmation.

Révisions

Ex 17

Dans chaque cas, calculer la longueur manquante :



Révisions

Ex 18 Constantes physiques

Écrire ces nombres en écriture scientifique :

a) $m_n = 167 \times 10^{-29} kg$

b) $c = 2\,998 \times 10^5 m/s$

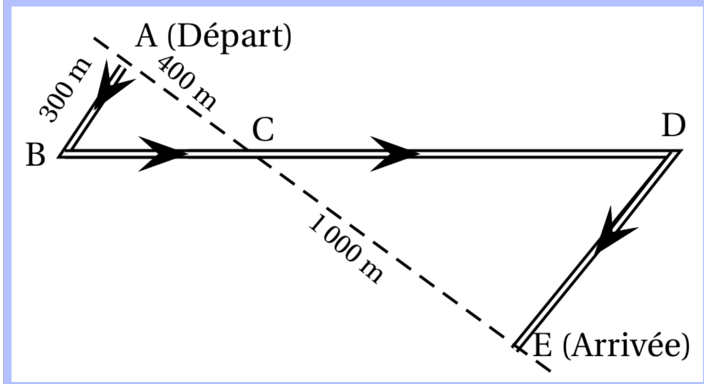
c) $\hbar = 0{,}000\,662 \times 10^{-30} J.s$

d) $\mathcal{N}_A = 602\,000 \times 10^{18}$

e) $D_{Terre-Soleil} = 149\,000\,000 km$

Révisions

Ex 19 Métropole, juin 2012



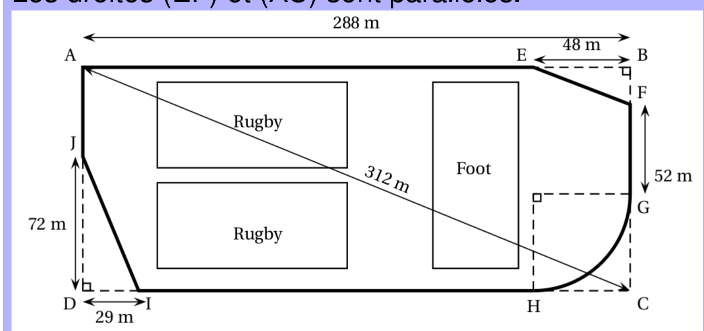
Des élèves participent à une course à pied. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis.
Il est représenté par la figure ci-dessus. On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.

Calculer la longueur réelle du parcours ABCDE.
Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Ex 20 Asie, juin 2013

Dans cet exercice, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.
La ville BONVIVRE possède une plaine de jeux bordée d'une piste cyclable. La piste cyclable a la forme d'un rectangle ABCD dont on a « enlevé trois des coins ». Le chemin de G à H est un arc de cercle ; les chemins de E à F et de I à J sont des segments. Les droites (EF) et (AC) sont parallèles.



Quelle est la longueur de la piste cyclable ? Justifier la réponse.

Ex 21

Calculer les expression suivantes :

a) $\left(2^3\right)^2 \times 2^{-4} =$

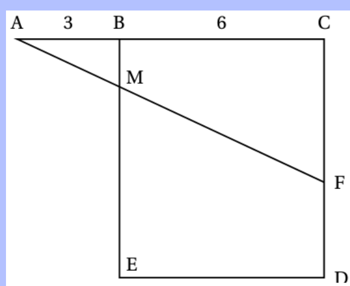
b) $10^{-18} \times 10^{19} \div 2$

c) $\dfrac{\left(5^8\right)^2}{5^{15}}$

Révisions

Ex 22 Centres étr, juin 2013

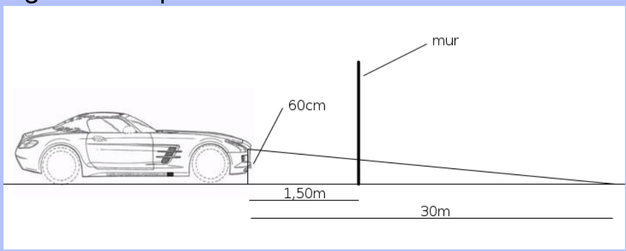
Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation. On considère la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur.



BCDE est un carré de 6cm de côté. Les points A, B et C sont alignés et AB=3cm. F est un point du segment [CD]. La droite (AF) coupe le segment [BE] en M.
Déterminer la longueur CF par calcul ou par construction pour que les longueurs BM et FD soient égales.

Ex 23 Métropole, juin 2014

D'après le code de la route (Article R313 - 3) : Les feux de croisement d'une voiture permettent d'éclairer efficacement la route, la nuit par temps clair, sur une distance minimale de $30m$.
Afin de contrôler régulièrement la portée des feux de sa voiture, Jacques veut tracer un repère sur le mur au fond de son garage.
La figure n'est pas à l'échelle.



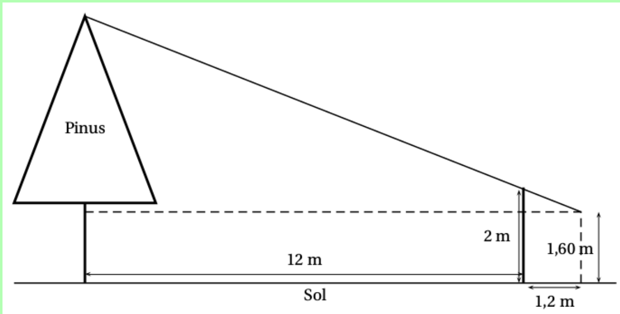
Les feux de croisement sont à $60cm$ du sol.
À quelle hauteur doit-il placer le repère sur son mur pour pouvoir régler correctement ses phares ?
Indication : faire un schéma pour faire apparaître une configuration de Thalès et des points nommés.

Ex 24 Polynésie, sept 2013

Teiki se promène en montagne et aimerait connaître la hauteur d'un Pinus (ou Pin des Caraibes) situé devant lui. Pour cela, il utilise un bâton et prend quelques mesures au sol. Il procède de la façon suivante :

- Il pique le bâton en terre, verticalement, à 12 mètres du Pinus.
- La partie visible (hors du sol) du bâton mesure $2m$.
- Teiki se place derrière le bâton, de façon à ce que son œil, situé à $1{,}60m$ au dessus du sol, voie en alignement le sommet de l'arbre et l'extrémité du bâton.
- Teiki marque sa position au sol, puis mesure la distance entre sa position et le bâton. Il trouve alors $1{,}2m$.

On peut représenter cette situation à l'aide du schéma ci-dessous :



Quelle est la hauteur du Pinus au-dessus du sol ?

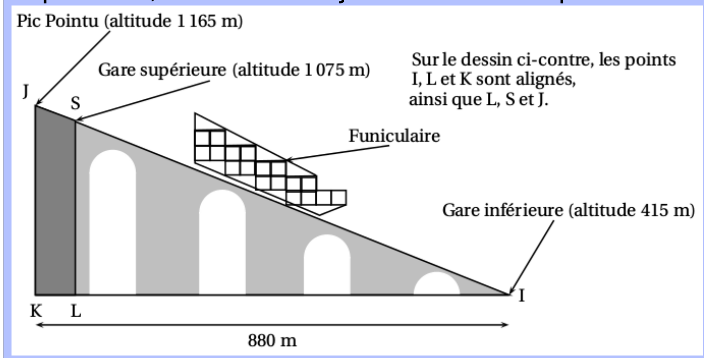
Ex 25

1. $A = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)$.
   Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. $B = \frac{3{,}5 \times 10^{-4} \times 50 \times (10^2)^3}{0{,}7 \times 10^8}$.
   Donner l'écriture décimale puis l'écriture scientifique de B.

Révisions

Ex 26 Am du Sud (secours) 2013

M. Cotharbet décide de monter au Pic Pointu en prenant le funiculaire [a] entre la gare inférieure et la gare supérieure, la suite du trajet s'effectuant à pied.



1. À l'aide des altitudes fournies, déterminer les longueurs SL et JK.
2. (a) Montrer que la longueur du trajet SI entre les deux gares est $1017,5m$.

   (b) *Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{SIL}$. On arrondira à un degré près.*
3. Le funiculaire se déplace à la vitesse moyenne constante de $10km.h^{-1}$, aussi bien à la montée qu'à la descente. Calculer la durée du trajet aller entre les deux gares. On donnera le résultat en min et s.
4. Entre la gare supérieure et le sommet, M. Cotharbet effectue le trajet en marchant.

   Quelle distance aura-t-il parcourue à pied ?

a. Un funiculaire est une remontée mécanique équipée de véhicules circulant sur des rails en pente.

Chapitre III

Le calcul littéral

Activités d'introduction

Activité 1 Les Identités remarquables

1. De quel mathématicien parle-t-on ici ?

2. Sous quel règne a-t-il vécu ?

3. Qu'a-t-il introduit dans les mathématiques ? Dans quel but ?

4. Compléter le tableau suivant :

Produits	Sommes

5. Retrouver ces identités en développant les trois produits.

Activité 2 Programme avec AlgoBox

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par deux.
- Soustraire 3 au résultat.
- Calculer le carré du résultat.

Sans oublier de déclarer les nouvelles variables, établir un algorithme exécutant ce programme de calcul.

A Développer, factoriser et réduire

1 Distributivité du produit

Approche numérique

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 2 \\ \times & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 4 \\ 3 & 2 & . \\ \hline 3 & 8 & 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 32 \times 12 &= (30+2) \times (10+2) \\ &= 300+60+20+4 \\ &= 384 \end{aligned}$$

La distributivité de la multiplication est utilisé lorsqu'on pose une multiplication à la main.

Propriété : Distributivité du produit

Soient a, b, c, d quatre nombres relatifs, on peut écrire :

$a(b+c) = ab + ac$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Remarque. La formes développées est une somme, la forme factorisée est un produit.

On désigne par produit ou somme la dernière opération réalisée si les lettres étaient remplacées par des nombres il s'agit l'opération la moins prioritaire.

Définition : Réduire une expression

Réduire une expression littérale, c'est **additionner les termes ayant une partie littérale commune**.

Exercice 1 : Développer

Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $2(x+3)$
b) $3(2x+3)$
c) $x(x+3)$
d) $t(2t-5)$
e) $(2-3x)(x+3)$
f) $(5y+2)(-2x+3)$

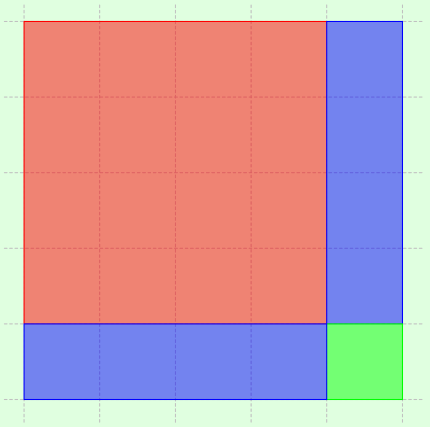
Exercice 2 : Développer

Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $(x+y)(x-y)$ b) $(u+v)(u+v)$ c) $(u-v)^2$

2 Les identités remarquables

Aspect géométrique



On remarque deux rectangles de même aire donnant **le double produit** dans l'identité remarquable. Ici $5^2=(1+4)^2=1^2+2\times1\times4+4^2$.

Exercice 3 : Aspect algébrique

Développer et réduire $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(a-b)(a+b)$.[a]

a. Indication : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

Définition : Les identités remarquables

On peut écrire trois identités remarquables :

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ « carré d'une somme »
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ « carré d'une différence »
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ « produit de la somme par la différence »

⚠ Ces trois identités sont à apprendre par cœur, notamment pour pouvoir factoriser

Méthode : Développer en utilisant une identité remarquable

On veut développer $(2x+3)^2$

1. **Repérer l'identité remarquable**, ici « le carré d'une somme » :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. **Identifier** a et b : $a = 2x$ et $b = 3$
3. Remplacer a et b dans la forme développée :

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Exemple. On développe $(3-t)^2$.
On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Dans cette exemple, $a = 3$ et $b = t$. $a^2 - 2ab + b^2$ devient alors $3^2 - 2 \times 3 \times t + t^2$.
On écrit donc $(3-t)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times t + t^2 = 9 - 6t + t^2$.

Exercice 4 : Développer

Développer les expressions suivantes :

a) $(t+5)^2$
b) $(t-5)^2$
c) $(t+5)(t-5)$
d) $(2t-3)^2$
e) $(4x+6)^2$
f) $(1-2x)(1+2x)$

Méthode : Factoriser en utilisant une identité remarquable

On veut factoriser $x^2 - 4x + 4$.

1. **Repérer l'identité remarquable** : trois termes, double produit négatif, nous rappelle le « carré d'une différence » : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
2. **Identifier** a et b : $a = x$ et $b = 2$.
3. Remplacer a et b dans la forme factorisée : $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Exercice 5 : Factoriser

Factoriser les expressions suivantes :

a) x^2+6x+9
b) $4t^2-9$
c) y^2-4y+4
d) $4x^2-20x+25$
e) $9u^2+12u+4$
f) $9-4x^2$

B L'égalité et l'équation

1 Propriété de l'égalité, résolution d'équations

Propriété : Égalité, somme et différence

Si $a=b$ alors $a+c=b+c$ et $a-c=b-c$.
On obtient une nouvelle égalité en additionnant ou soustrayant le même nombre à chaque membre de l'égalité.

Cette propriété sert à la résolution des équations.

Propriété : Égalité de type $x+a=b$

- Si $x+a=b$ alors $x=b-a$.
- Si $x-a=b$ alors $x=b+a$.

Méthode : Résolution d'une équation

- Résoudre :

$$x+2=4$$

On ajoute -2 à chaque membre de l'équation :

$$x=2$$

- Résoudre :

$$2x+2=x-5$$

On ajoute $-x$ à chaque membre de l'équation :

$$x+2=-5$$

On ajoute -2 à chaque membre de l'équation :

$$x=-7$$

En général, il s'agit des premières étapes.

Exercice 6 : Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

a) $x+2=5$

b) $x-3=-1$

c) $-u+3=9$

d) $3e=2e+3$

e) $2y+3=y-4$

f) $5y-2=6y+1$

Propriété : Égalité, produit et quotient

Si $a=b$ alors $a\times c=b\times c$ et $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$,c non-nul.
On obtient une nouvelle égalité en multipliant ou en divisant par le même nombre chaque membre de l'égalité.

Cette propriété sert à la résolution des équations.

Propriété : Égalité de type $ax = b$

- Si $ax = b$ alors $x = \dfrac{b}{a}$.
- Si $\dfrac{x}{a} = b$ alors $x = b \times a$.

Méthode : Résolution d'une équation

- Résoudre :
$$-6x = 2$$
On divise chaque membre par -6
$$x = -\frac{1}{3}$$
- Résoudre :
$$\frac{x}{5} = 3$$
On multiplie chaque membre par 5
$$x = 15$$

En général, il s'agit des dernières étapes.

Exercice 7 : Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x = 6$

b) $3x = 5$

c) $\dfrac{a}{2} = 3$

d) $\dfrac{-5}{x} = 2$

e) $-5x = 15$

f) $\dfrac{3}{5}y = 6$

Méthode : Résoudre en deux étapes

On veut résoudre :

$$5x - 2 = 33$$

1. On commence par ajouter +2 à chaque membres :

$$5x - 2 + 2 = 33 + 2$$

$$5x = 35$$

2. On divise ensuite chaque membre par 5 :

$$5x \div 5 = 35 \div 5$$

$$x = 7$$

On préfère commencer par additionner ou soustraire car se sont des opérations qui n'ont pas la priorité sur la multiplication et la division.

Si on souhaite cependant commencer par la multiplication, on doit multiplier chaque terme de chaque membre...

Exemple.

$$\frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{2}$$

On multiplie par 6 (on élimine ainsi toutes les fractions) :

$$2x + 12 = 3x$$

On soustrait $2x$ à chaque membre :

$$12 = x$$

Exercice 8 : Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x + 3 = 6$

b) $3x - 1 = 5$

c) $\frac{a}{2} - 2 = 3$

d) $\frac{-5}{x} + 5 = 2$

e) $-5x + 3 = 15 - 2x$

f) $\frac{3}{5}y + 2 = \frac{y}{10} + 6$

2 Équation produit nul

Propriété : Produit nul

Un produit est nul si l'**un de ses facteurs au moins est nul**.

Remarque. « Nul » signifie « égal à zéro » .

Méthode : Résoudre une équation produit nul

Résoudre :

$$(3x+2)(x-3)=0$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs au moins est nul :

$$\begin{array}{rcl} 3x+2=0 & \text{ou} & x-3=0 \\ 3x=-2 & \text{ou} & x=3 \\ x=-\dfrac{2}{3} & & \end{array}$$

Les deux solutions sont : $-\dfrac{2}{3}$ et 3.

Exercice 9 : Équations produit nul

Résoudre les équations suivantes :

a) $(t+5)(t-3)=0$

b) $(x+2)(2x-3)=0$

c) $(t+5)(t-5)=0$

d) $(2t-3)^2=0$

e) $(4x+6)(x-2)=0$

f) $(1-3x)(1+2x)=0$

Exercices

Ex 10

Calculer astucieusement :
15×11 ; 17×101 ; 12×18 ; 101×99 ; 1001×1001 ;

Ex 11

Développer les expressions suivantes :
$A = 2(2x+3)$; $B = x(x-3)$; $C = -5(3x+8)$;
$D = 2y(-2y+3)$; $E = -7(2x-3)+5(3-3x)$.

Ex 12

Développer les expressions suivantes :
$A = 4x(2x+3)$; $B = -3x(x-3)$; $C = -5(3x-8)$;
$D = -2y^2(-3y-2)$.

Ex 13

Factoriser les expressions suivantes :
$A = 2x+8$; $B = x^2+3x$; $C = -10x+25$; $D = 4e^2+6e$;
$E = -7(2x-3)+5x(2x-3)$.

Ex 14

Développer chaque expression :
$A = (x+3)(-x+7)$; $B = (2x-3)(-x+3)$;
$C = \left(\frac{1}{3}x+2\right)(3x-6)$; $D = (5x-10)\left(-2+\frac{3}{5}x\right)$;
$E = \left(\frac{1}{10}x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{15}-\frac{3}{20}x\right)$.

Ex 15 Apprendre les identités

Compléter chaque identité.

a) $(a+b)^2 = a^2+2\times a\times b+ \ldots\ldots$

b) $(a-b)^2 = a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \times b+b^2$

c) $(a+b)(a-b) = \ldots\ldots -b^2$

d) $(a\ldots b)^2 = a^2-2\times a\times b+b^2$

e) $(\ldots\ldots b)^2 = a^2+2\times a\times b+b^2$

f) $(a+b)\ldots\ldots\ldots\ldots = a^2-b^2$

g) $(a-b)^2 = a^2-2\times a\times b \ldots\ldots\ldots$

h) $(a+b)^2 = a^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +b^2$

Ex 16 Utiliser les identités

Compléter chaque égalité :

a) $(x+3)^2 = x^2+2\times x\times \ldots +9$

b) $(x+\ldots)^2 = x^2+2\times x\times \ldots +4$

c) $(2x-4)^2 = \ldots\ldots^2-2\times 2x\times 4+\ldots\ldots$

d) $(3y-5)(3y\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots -25$

e) $(3+5x)^2 = 9+\ldots\ldots\ldots +25x^2$

f) $(1-8x)^2 = 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 = 49x^2+\ldots\ldots\ldots +25$

Ex 17 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- y^2-9
- y^2-36
- $16a^2-16a+4$
- $9y^2+48y+64$

Ex 18 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(9y-5)^2$
- $(8a+12)^2$
- $(7b+12)^2$
- $(9y+8)^2$

Ex 19 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(9-10x)^2$
- $(2a+6)^2$
- $(7x-11)^2$
- $(6+\frac{1}{3}b)^2$

Ex 20 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $64y^2+32y+4$
- $4b^2-40b+100$
- $36b^2-84b+49$
- $100a^2+180a+81$

Ex 21 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $100y^2+180y+81$
- $25a^2-50a+25$
- $25b^2+50b+25$
- $100y^2+120y+36$

Ex 22 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(6x-3)^2$
- $(\frac{1}{2}y-1)^2$
- $(7a-12)(7a+12)$
- $(3a+3)^2$

Ex 23 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(a-11)(a+11)$
- $(8a+11)^2$
- $(\frac{1}{2}a+8)^2$
- $(5b-2)(5b+2)$

Ex 24 Calculs

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat en écriture scientifique :

- $\dfrac{3\times10^{-1}\times2\times10^{3}}{4\times10^{-3}}$
- $\dfrac{10\times10^{2}\times9\times10^{0}}{9\times10^{-4}}$
- $\dfrac{8\times10^{-3}}{1\times10^{1}}$

Révisions

Ex 25 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(5+9y)^2$
- $(10b+6)(10b-6)$
- $(3-x)^2$
- $(4a-11)^2$

Ex 26 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $25a^2+20a+4$
- $64y^2-9$
- $25b^2+10b+1$
- $36x^2-25$

Ex 27 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(12+12a)^2$
- $(9x+2)(9x-2)$
- $(\frac{2}{3}x-4)^2$
- $(b-5)^2$

Ex 28 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

$\frac{14}{6}-\frac{24}{10}$ $\frac{4}{10}-\frac{2}{10}$ $\frac{19}{12}+\frac{24}{6}$ $\frac{20}{30}\div\frac{3}{25}$ $\frac{10}{20}\times\frac{24}{15}$ $\frac{18}{8}+\frac{10}{14}$

Révisions

Ex 29 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $16a^2-64a+64$
- $4y^2+12y+9$
- $25y^2+10y+1$
- $49y^2+42y+9$

Ex 30 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(6+\frac{1}{2}a)^2$
- $(7+\frac{1}{2}a)^2$
- $(\frac{1}{3}x+4)^2$
- $(6y+1)^2$

Ex 31 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(11y-6)^2$
- $(2x+7)(2x-7)$
- $(1-\frac{2}{3}x)^2$
- $(2y+11)^2$

Ex 32 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $25a^2+70a+49$
- $64b^2-81$
- $9x^2-54x+81$
- $25b^2+50b+25$

Ex 33 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $4x^2-64$
- $36y^2+72y+36$
- $16y^2-16y+4$
- $9y^2+24y+16$

Ex 34 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(1-9x)^2$
- $(11a-9)(11a+9)$
- $(2y+5)^2$
- $(6-7a)^2$

Ex 35 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(3y+2)(3y-2)$
- $(y+3)^2$
- $(3+10x)^2$
- $(x+3)^2$

Ex 36 Résolution

Résoudre ces équations.

a) $2x=3$

b) $5+x=3$

c) $k-4=2$

d) $6x-4=8$

Ex 37 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $x+3=4$
- $11x+13=-8$
- $-7x=3$

Ex 38 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $11x=2$
- $1=9x+15$
- $3=-3(-10x+5)$

Ex 39 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $11+12x=-2$
- $-11x-12=-5x+12$
- $5x=-11$

Ex 40 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $-9=-8x+5$
- $-3(4x+14)=4$
- $8x-9=-4$

Ex 41 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $7=4x-15$
- $-12x-12=8x-12$
- $-1=-11x-2$

Ex 42 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $8+11x=12$
- $-11x-5=-9-5x$
- $4x-14=9$

Ex 43 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

a) $4f+3=5f-8$

b) $4(x+8)=2$

c) $5(2x+8)=10(3x-2)$

d) $\dfrac{2x}{5}+3=\dfrac{4x}{15}-2$

Ex 44 Liban, juin 2009

QCM : Indiquer la bonne réponse.
Pour $x=3$, alors l'expression $A=-2x^2$ est égale à :

a) 18

b) -18

c) 36

Ex 45 Am du Nord, juin 2009

QCM : Indiquer la bonne réponse.
Pour $x=-2$, alors l'expression $5x^2+2x-3$ est égale à :

a) 13

b) -27

c) 17

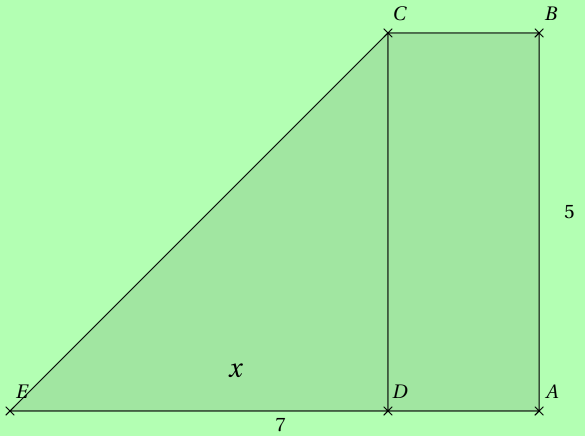
Ex 46 Centres étr, juin 2009

a) Développer $(x-1)^2$.
Justifier que $99^2=9801$ en utilisant le développement précédent.

b) Développer $(x-1)(x+1)$.
Justifier que $99\times101=9999$ en utilisant le développement précédent.

Ex 47 Géométrie et calcul littéral

Les unités de longueur sont en cm.



x est la longueur DE et $EA=7$.
On a $0<x<7$.
Pour quelle valeur de x, l'aire du rectangle ABCD est-elle égale à celle du triangle DCE ?

Ex 48 Extrait du brevet

On considère l'expression :

$$E = (x-3)^2 - (x-1)(x-2)$$

a) Développer et réduire E.

b) Comment peut-on déduire, sans calculatrice, le résultat de $99997^2 - 99999 \times 99998$?

c) Factoriser l'expression :

$$F = (4x+1)^2 - (4x+1)(7x-6)$$

d) Résoudre l'équation :

$$(4x+1)(7-3x) = 0$$

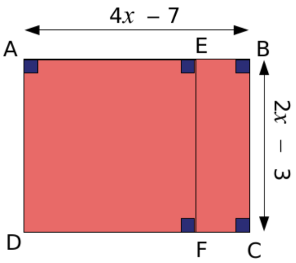
Ex 49 Extrait du brevet

On considère l'expression :

$$D = (4x-7)(2x-3) - (2x-3)^2$$

a) Développe et réduis D.

b) Factorise D.



c) Sur la figure ci-dessus, ABCD est un rectangle et AEFD est un carré. On suppose, dans cette question, que x est un nombre supérieur à 2.

Pour quelle(s) valeur(s) de x ($x > 2$), la différence entre l'aire du rectangle et l'aire du carré est-elle égale à $12cm^2$?

Pour aller plus loin

Ex 50

Sachant qu'un nombre pair s'écrit $2n$ avec n un nombre entier, démontrer que le carré d'un nombre impair est également impair.

Pour aller plus loin

Ex 51 AlgoBox

Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE m
  TANT_QUE (n<m) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    AFFICHER n
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Pour aller plus loin

Ex 52 XCAS

Justifier la réponse du logiciel de calcul formel :

```
2 developper(2*x*(4*x+1)-3*(x+1)*(4*x+1))
```

$$-4x^2-13x-3$$

```
3 factoriser(2*x*(4*x+1)-3*(x+1)*(4*x+1))
```

$$-(x+3)(4x+1)$$

a) Résoudre :

$$2x(4x+1) - 3(x+1)(4x+1) = 0$$

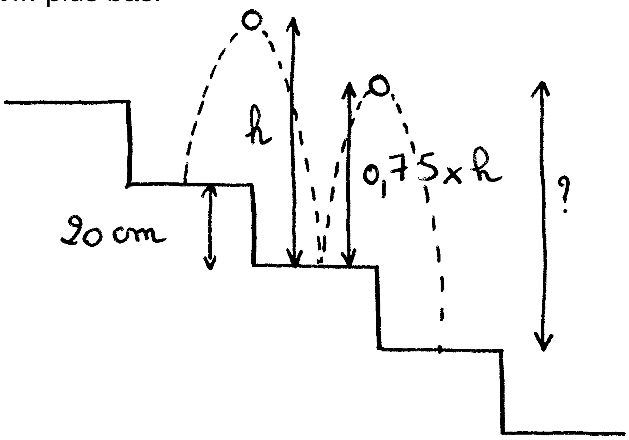
b) Résoudre :

$$2x(4x+1) - 3(x+1)(4x+1) = -3$$

Pour aller plus loin

Ex 53 AlgoBox

On souhaite simuler les rebonds d'une balle lâchée dans des escaliers. Cette balle rebondit à 75% de la hauteur initiale, puis tombe sur la marche suivante $20cm$ plus bas.



En utilisant le schéma ci-dessus, élaborer un programme permettant de connaître la hauteur du treizième rebond de cette balle.

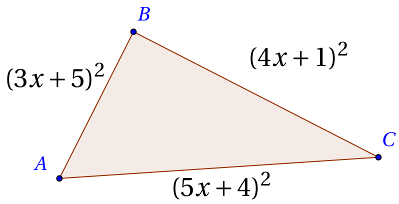
Code Indication Python

```
hinit=float(input('Hauteur initiale de la
balle :'))
hmarche=float(input('Hauteur de chaque
marche :'))
n=int(input('numero du rebond :'))
h=hinit
for n in range (0,n):
    h=h*0.75+hmarche
    n=n+1
print(h)
```

Pour aller plus loin

Ex 54

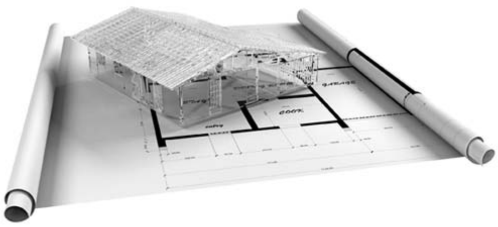
Déterminer la valeur de x pour laquelle le triangle ci-dessous est rectangle.



Pour aller plus loin

Chapitre IV

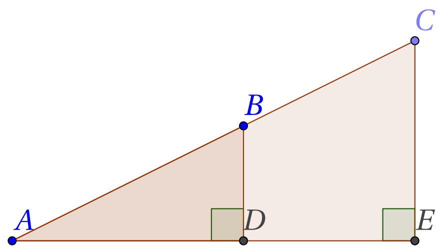
Trigonométrie dans le triangle rectangle



Activités d'introduction

Activité 1 Cosinus, sinus, tangente

Dans cette activité, on désigne les côtés relatifs à l'angle au sommet A.
On considère la figure ci-contre :



1. Montrer que $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{EC}$.[a]
2. Compléter : comme $AD \times AC = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$ alors dans les triangles rectangles :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \cos(\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots})$$

Le rapport $\frac{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ s'appelle le .... de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ et se conserve pour une même valeur de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

3. Compléter : comme $BD \times AC = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$ alors dans les triangles rectangles :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \sin(\widehat{DAB})$$

Le rapport $\frac{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ s'appelle le sinus de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ et se conserve pour une même valeur de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

4. Compléter : comme $AD \times EC = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$ alors dans les triangles rectangles :

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \tan(\widehat{DAB})$$

Le rapport $\frac{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{côté } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ s'appelle la tangente de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ et se conserve pour une même valeur de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

a. penser aux droites parallèles

Activité 2 Propriétés et trigonométrie

Remplir le tableau suivant en utilisant un tableur :

Mesure de l'angle x en °	0	10	20	30	45	60	70	80	90
$\cos(x)$									
$\sin(x)$									
$\tan(x)$									
$(\cos(x))^2+(\sin(x))^2$									
$\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$									

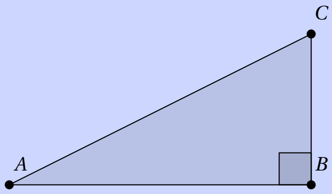
Compléter :

1. Le cosinus et le sinus d'un .... sont des .... compris entre ... et ... .
2. D'après les exemples précédents, $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=$ .. alors que $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est une autre écriture de ....

A Le triangle rectangle

Définition : Côtés d'un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en B. Considérons l'angle $\widehat{BAC}$.



- [BC] est **le côté opposé à $\widehat{BAC}$**.
- [AB] est **le côté adjacent à $\widehat{BAC}$**.
- [AC] est **l'hypoténuse du triangle ABC**. Aucun lien avec l'angle.

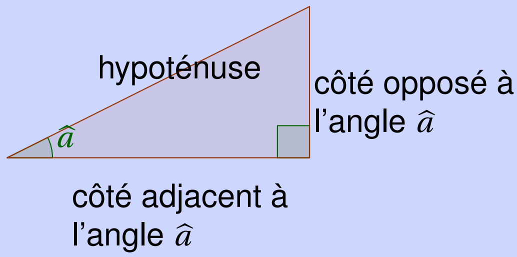
Quel que soit l'angle considéré, l'hypoténuse est toujours le même dans un triangle rectangle. Par contre, les côtés adjacent et opposé le sont par rapport à un angle donné.

Exercice 1 : Triangle rectangle

Soit ABC rectangle en B. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$? Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{CAB}$? Répondre par deux phrases.

B Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Définition : Cosinus d'un angle aigu



Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse :

$$cos(\widehat{a}) = \frac{\textbf{côté adjacent}}{\textbf{hypoténuse}}$$

Exercice 2 : Autour du cosinus

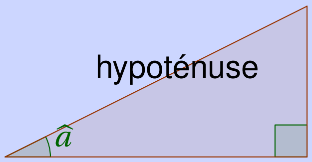
a) À la calculatrice, calculer la valeur du cosinus d'un angle de $30°$.

b) Toujours à la calculatrice, calculer la mesure d'un angle dont le cosinus vaut $0{,}5$.

c) Dans le triangle rectangle ABC tel que $AB = 29cm$, $AC = 21cm$ et $BC = 20cm$, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en utilisant le cosinus.

d) Dans le triangle DEF rectangle en E tel que $DF = 55cm$ et $\widehat{FDE} = 30°$, calculer la longueur DE.

Définition : Sinus d'un angle aigu



Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse :

$$sin(\widehat{a}) = \frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypoténuse}}$$

Exercice 3 : Autour du sinus

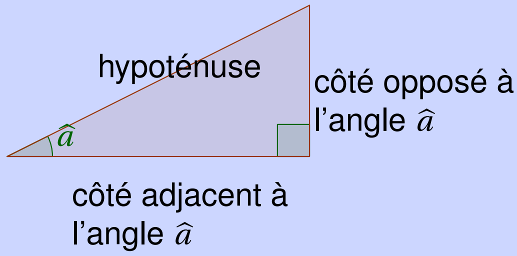
a) À la calculatrice, calculer la valeur du sinus d'un angle de $30°$.

b) Toujours à la calculatrice, calculer la mesure d'un angle dont le sinus vaut $0{,}71$.

c) Dans le triangle rectangle ABC tel que $AB = 29cm$, $AC = 21cm$ et $BC = 20cm$, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en utilisant le sinus.

d) Dans le triangle DEF rectangle en E tel que $DF = 55cm$ et $\widehat{FDE} = 30°$, calculer la longueur EF.

Définition : Tangente d'un angle aigu



Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle :

$$tan(\widehat{a}) = \frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{côté adjacent}}$$

Exercice 4 : Autour de la tangente

a) À la calculatrice, calculer la valeur de la tangente d'un angle de $30°$.

b) Toujours à la calculatrice, calculer la mesure d'un angle dont de la tangente vaut $0{,}71$.

c) Dans le triangle rectangle ABC tel que $AB = 29cm$, $AC = 21cm$ et $BC = 20cm$, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en utilisant de la tangente.

d) Dans le triangle DEF rectangle en E tel que $EF = 27{,}5cm$ et $\widehat{FDE} = 30°$, calculer la longueur DE.

Remarque. SOH-CAH-TOA est un moyen mnémotechnique, par exemple, SOH devient S=O/H rappelant $sin(\widehat{a}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$. On parle bien ici des longueurs des côtés que l'on désigne par les extrémités, sans crochets ni parenthèses.

Exercice 5 : Choisir...

a) Dans le triangle ABC rectangle en C tel que $AC = 21cm$ et $BC = 20cm$, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

b) Dans le triangle DEF rectangle en F tel que $DE = 29cm$ et $EF = 20cm$, calculer la mesure de l'angle $\widehat{EDF}$.

c) Dans le triangle GHI rectangle en H tel que $GH = 2m$ et $\widehat{HGI} = 20°$, calculer la longueur GI.

d) Dans le triangle JKL rectangle en K tel que $JL = 45cm$ et $\widehat{LJK} = 40°$, calculer la longueur KL.

C Propriétés

Propriété : Cosinus et sinus d'un angle aigu

Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des **nombres compris entre 0 et 1**.

L'hypoténuse est le plus grand côté du triangle rectangle, c'est ce qui explique que le cosinus et le sinus soient inférieurs à 1. Rapports de deux longueurs de signe positif, sinus, cosinus et tangente sont des nombres positifs.

Propriété : Tangente d'un angle aigu

La tangente d'un angle aigu est un **nombre positif**.

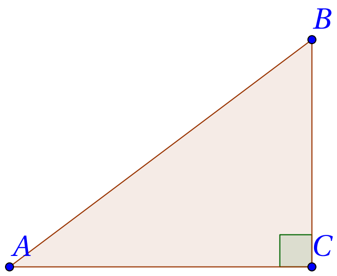
Remarque. La calculatrice donne une valeur approchée du cosinus, sinus et tangente.

D Relations trigonométriques

Conjecture. Si on tape $(\cos(27))^2 + (sin(27))^2$ à la calculatrice, on obtient 1. En essayant avec d'autres valeurs, le résultat reste le même. on suppose, en généralisant $(\cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$.

Démonstration. On veut montrer $(\cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$.

On considère pour la suite le triangle ABC rectangle en C ci-dessous :



Exprimons $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC})$.

$$\begin{aligned} cos^2(\widehat{ABC}) + sin^2(\widehat{ABC}) &= \frac{BC^2}{BA^2} + \frac{CA^2}{BA^2} \\ &= \frac{BC^2 + CA^2}{BA^2} \\ &= \frac{BA^2}{BA^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

Propriété : Relation entre sinus et cosinus

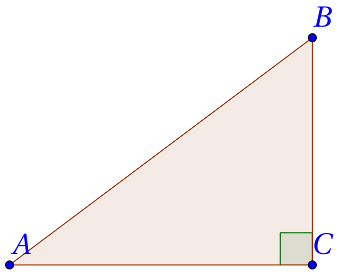
Si on note x la mesure d'un angle aigu en degrés alors on a :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Conjecture. En comparant $\tan(35)$ et $\dfrac{\sin(35)}{\cos(35)}$, on obtient le même résultat sur la calculatrice. On suppose alors que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Démonstration. On veut montrer que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

On considère pour la suite le triangle ABC rectangle en C ci-dessous :



Exprimons maintenant $\tan(\widehat{ABC})$.

$$\begin{aligned}
\tan(\widehat{ABC}) &= \frac{CA}{CB} \\
&= \frac{\frac{CA}{BA}}{\frac{CB}{BA}} \\
&= \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}
\end{aligned}$$

$\square$

Propriété : Relations trigonométrique expression de la tangente

Si on note x la mesure d'un angle aigu en degrés alors on a :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Exercices

Ex 6 Avec la calculatrice

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ dans les cas suivants :

a) $sin(\widehat{ABC}) = 0{,}5$.
b) $cos(\widehat{ABC}) = 0{,}5$.
c) $tan(\widehat{ABC}) = 0{,}5$.
d) $tan(\widehat{ABC}) = 2$.
e) $cos(\widehat{ABC}) = \frac{5}{7}$.
f) $tan(\widehat{ABC}) = \frac{10}{7}$.

Ex 7 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AB = 5cm$ et $AC = 4cm$, calculer la mesure de $\widehat{CAB}$.

Ex 8 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x - 6 = 0$
b) $5x - 9 = 6$
c) $2x + 3 = 5x - 2$
d) $(x+3)(3x-5) = 0$
e) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Révisions

Ex 9 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AB = 5cm$ et $BC = 4cm$, calculer la mesure de $\widehat{CAB}$.

Ex 10 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $BC = 5cm$ et $AC = 4cm$, calculer la mesure de $\widehat{CAB}$.

Ex 11

Un élève doit calculer l'expression suivante :

$$A = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)$$

Voici ce qu'il écrit, commenter et refaire le calcul.

$$A = \frac{5_{\times 2}}{2_{\times 2}} + \frac{5}{4} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{10}{4} + \frac{5}{4} \div \left(\frac{2_{\times 2}}{3_{\times 2}} - \frac{3_{\times 3}}{2_{\times 3}}\right)$$

$$= \frac{15}{4} \div \left(\frac{4}{6} - \frac{9}{6}\right)$$

$$= \frac{15}{4} \div \frac{5}{6}$$

$$= \frac{15}{4} \times \frac{6}{5}$$

$$= \frac{\cancel{5} \times 3 \times \cancel{2} \times 3}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times 1}$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}}$$

Révisions

Ex 12 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AB = 5cm$ et $\widehat{CAB} = 35°$, calculer la longueur BC.

Ex 13

Construire un triangle ABC rectangle en B tel que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{7}$.

Ex 14

Il y a deux erreurs dans ce qu'a écrit cet élève. Corriger, commenter et refaire ces calculs sans erreur.

$$(2x+3)^2 = 2x^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$$

$$= 2x^2 + 12x + 9$$

$$(5x-3)^2 = 25x^2 - 15x + 9$$

Révisions

Ex 15 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AB = 5cm$ et $\widehat{CAB} = 55°$, calculer la longueur AC.

Ex 16 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AC = 7cm$ et $\widehat{CAB} = 35°$, calculer la longueur BC.

Ex 17

a) Écrire les trois identités remarquables.

b) Écrire les cinq règles de calcul avec les puissances.

Révisions

Ex 18

Construire un triangle ABC rectangle en B tel que $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{5}{8}$.

Ex 19

Construire un triangle ABC rectangle en B tel que $\tan(\widehat{BAC}) = \frac{5}{4}$.

Ex 20 Développer

Développer les expressions suivantes : $2(3x-2)$; $5x(1-x)$; $(x-3)(2-5x)$; $(3x-5)^2$.

Révisions

Ex 21 Programme de calcul

On donne le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre.
- Calculer son triple.
- Soustraire 2 au résultat.
- Calculer le carré de cette différence.
- Soustraire 16 à ce produit.
- Écrire le résultat final.

a) Applique ce programme à 1 puis à $-\frac{1}{3}$.

b) Pour quel(s) nombre(s) de départ obtient-on un résultat nul ?

Révisions

Ex 22 Factoriser

Factoriser les expressions suivantes : $5x+25$; x^2-5x ; $3x^2+6x$; $4x^2-12x+9$.

Révisions

Ex 23 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AC = 2cm$ et $\widehat{CAB} = 55°$, calculer la longueur AB.

Ex 24

Soit $A = 2x(x+5) - 8(x+5)$.

a) Développer et réduire A.

b) Factoriser A.

c) Résoudre $A = 0$.

Révisions

Ex 25

Déterminer la valeur de $\sin(\alpha)$ et de $\tan(\alpha)$ sachant que l'angle α aigu est tel que : $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

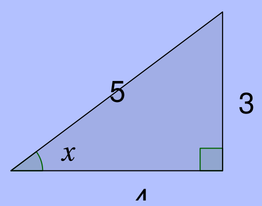
Ex 26

Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$ et de $\tan(\alpha)$ sachant que l'angle α aigu est tel que : $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ex 27 Nouv-Cal, déc 2009

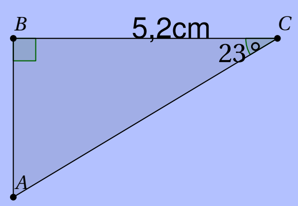
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question posée, une seule réponse est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

a) $\frac{3}{5}$ est égal à :



$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$

b) Avec les données de cette figure, l'arrondi au mm près de AB est :



$4{,}8cm$	$2{,}2cm$	$2cm$

c) Si $\tan x = 54$ alors la valeur approchée de x arrondie au degré près est égale à :

1°	88°	89°

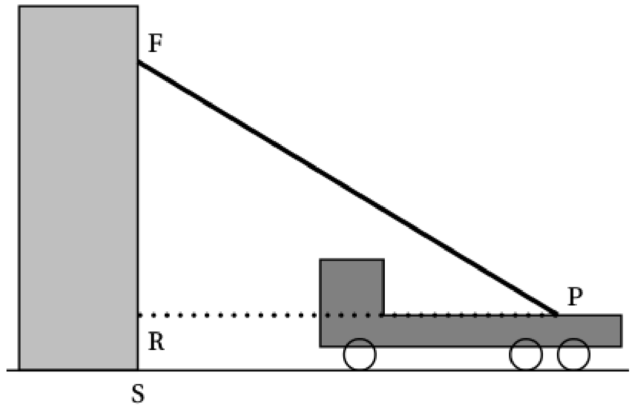
Ex 28 Mettre en équation

Un père et son fils ont 25 ans d'écart. Dans 17 ans, l'âge du père sera le double de celui du fils. Quel est l'âge actuel du fils ?

Révisions

Ex 29 Asie, juin 2010

Lors d'une intervention, les pompiers doivent atteindre une fenêtre F située à 18 mètres au-dessus du sol en utilisant leur grande échelle $[PF]$. Ils doivent prévoir les réglages de l'échelle. Le pied P de l'échelle est situé sur le camion à $1{,}5m$ du sol et à $10m$ de l'immeuble.



Le dessin n'est pas réalisé à l'échelle, $RP = 10m$, $RS = 1{,}5m$, $FS = 18m$.

1. D'après les informations ci-dessus, déterminer la longueur RF.
2. Déterminer l'angle que fait l'échelle avec l'horizontale, c'est-à-dire $\widehat{FPR}$, arrondi à l'unité.
3. L'échelle a une longueur maximale de 25 mètres. Sera-t-elle assez longue pour atteindre la fenêtre F ?

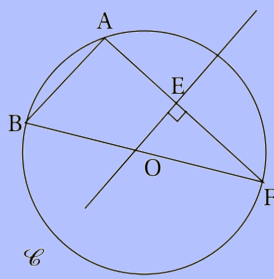
Ex 30 Cent étr, juin 2005

Sur le croquis ci-contre

— $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $BF = 40mm$.

— A est un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $AB = 14mm$.

— La perpendiculaire à la droite (AF) passant par O coupe le segment [AF] en E.



1. Quelle est la nature du triangle ABF ? Justifier votre réponse.
2. Calculer la valeur arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{AFB}$.
3. Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur EF.

Ex 31

1. Développer en utilisant les identités remarquables :
   $(3x-4)^2$; $(2x+9)(2x-9)$; $(5x+8)^2$.
2. Factoriser en utilisant les identités remarquables :
   $25x^2-16$; $100x^2-20x+1$; $4x^2+12x+9$.
3. Calculer astucieusement :
   105^2-95^2 ; 101^2 ; 98^2 ; 101×99.

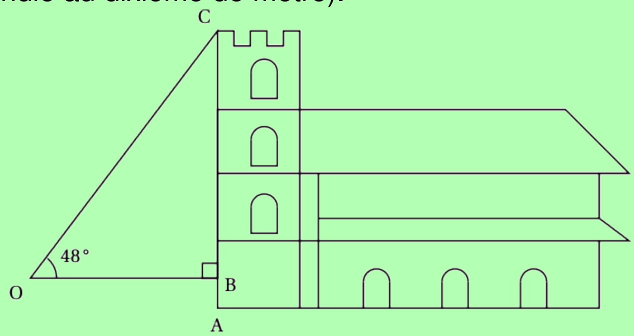
Révisions

Ex 32 Nouv-Cal, déc 2010

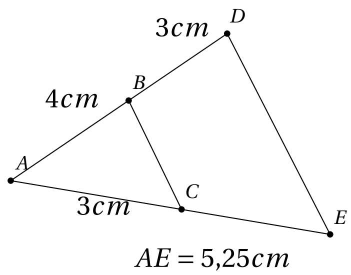
La construction de la cathédrale de Mata Utu à Wallis, date de 1951 et s'est faite sans suivre de plan. Tout s'est fait avec les qualités visuelles et manuelles des ouvriers. C'est pourquoi aucune donnée « numérique » ne reste de cette construction (hauteur, longueur, ...).

Un jour, le jeune Paulo a voulu calculer la hauteur de la cathédrale. Il fait alors une figure la représentant vue de côté (voir ci-dessous) en nommant les points O, A, B et C qui vont lui permettre de faire le calcul. Grâce à un instrument de mesure placé en O à $1{,}80m$ du sol, il mesure l'angle COB qui fait $48°$.

Ensuite, il trouve $OB = 15m$ (on suppose que les murs de la cathédrale sont bien perpendiculaires au sol). Calculer alors la hauteur CA de la cathédrale (arrondie au dixième de mètre).



Ex 33

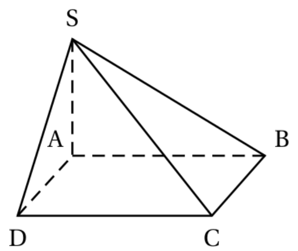


D'après les indications figurant sur l'énoncé, démontrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Révisions

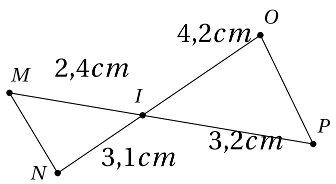
Ex 34 Cent étr, juin 2006

La pyramide SABCD ci-dessous a pour base le rectangle ABCD et pour hauteur le segment [SA]. L'unité de longueur est le centimètre.
On donne $AB = 8{,}2$ et $SA = 4$ et $\widehat{ASD} = 30°$.



1. Donner, sans les justifier, la nature du triangle SAB et celle du triangle SAD.
2. Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{SBA}$.
3. Calculer la valeur exacte de SD. En donner la valeur arrondie au millimètre.

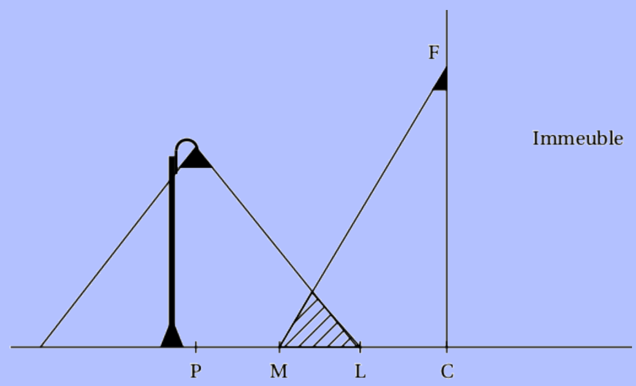
Ex 35



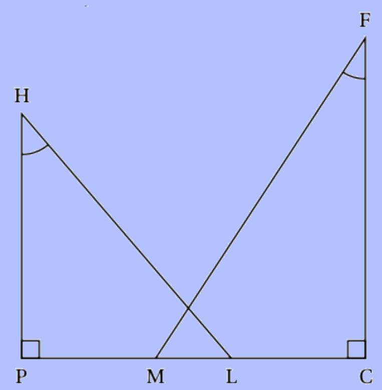
(MN) et (OP) sont-elles parallèles ?
D'après les indications figurant sur l'énoncé, démontrer votre affirmation.

Révisions

Ex 36 Métropole, sept 2014



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-dessus qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :

On dispose des données suivantes : $PC = 5{,}5m$; $CF = 5m$; $HP = 4m$; $\widehat{MFC} = 33°$; $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à 3,4 m.
2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.
3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus.
   Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Ex 37

Développer, réduire puis factoriser les expressions suivantes :

a) $(3t+5)^2+6t+11$

b) $(x+2)^2+4(x+2)+4$

Révisions

Ex 38

Démontrer les deux expressions suivantes :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \text{ et } \tan x = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

où x est la mesure d'un angle aigu.

Pour aller plus loin

Ex 39 Factorisation

1. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $A=(3x+5)^2+6x+11$
   (b) $B=4(2x+1)^2-8x-3$
2. Résoudre les équations $A=0$ et $B=0$.

Révisions

Ex 40 Factorisation

1. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $C=(2x+1)^2+6(2x+1)+9$
   (b) $D=(3x-7)^2-(2x+5)^2$
2. Résoudre les équations $C=0$ et $D=0$.

Pour aller plus loin

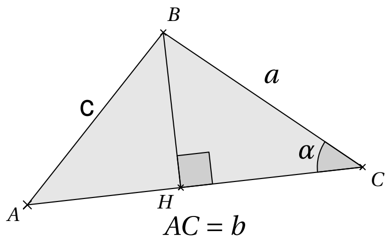
Ex 41 La loi des cosinus ou théorème d'Al-Kashi

Elle généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles. Bien qu'un résultat similaire (avec des longueurs seulement) fût déjà connu d'Euclide, le nom francisé du mathématicien perse Ghiyath al-Kashi (1380 - 1429) apparut dans les années 1990 dans les manuels scolaires édités en France, les appellations théorème de Pythagore généralisé ou loi des cosinus étant utilisées jusque-là.

wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus

Formule d'Al-Kashi :

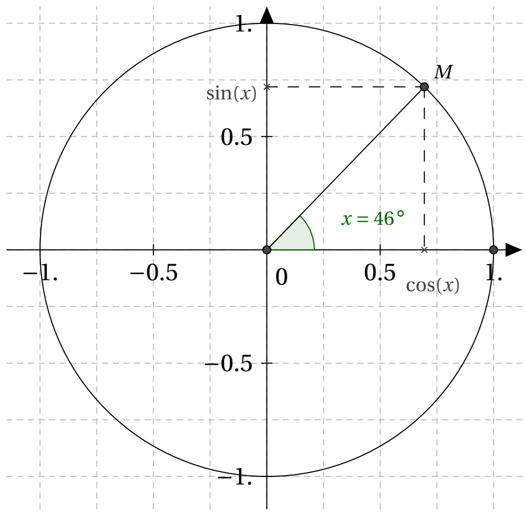
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\alpha)$$



1. Tester la formule avec quelques triangles quelconques.
2. Exprimer la longueur HC en fonction de α et a.
3. Exprimer la longueur AH en fonction de α, b et a.
4. En travaillant successivement dans le triangle ABH puis CBH exprimer BH^2 de deux manières différentes.
5. Utiliser l'égalité des deux expressions de BH^2 pour démontrer la formule d'Al-Kashi.

Pour aller plus loin

Ex 42

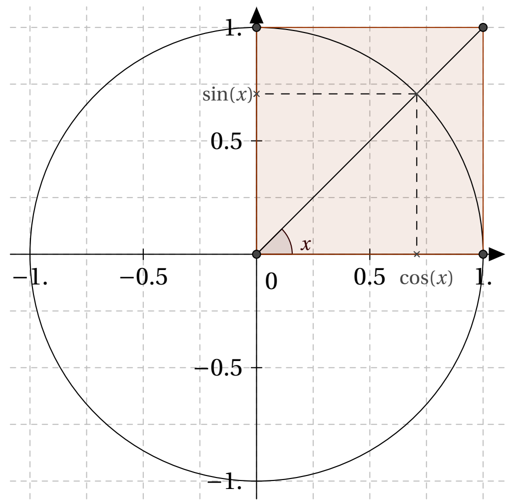


Ceci est un cercle trigonométrique.

1. Quel est son rayon ?
2. Démontrer qu'il est possible de lire le cosinus de l'angle x par projection du point M sur l'axe des abscisses.
3. Démontrer qu'il est possible de lire le sinus de l'angle x par projection du point M sur l'axe des ordonnées.
4. Donner un encadrement du cosinus et du sinus d'un angle dont la mesure est comprise entre $0°$ et $360°$.
5. Déterminer une valeur approchée de $\cos(60°)$.

Pour aller plus loin

Ex 43



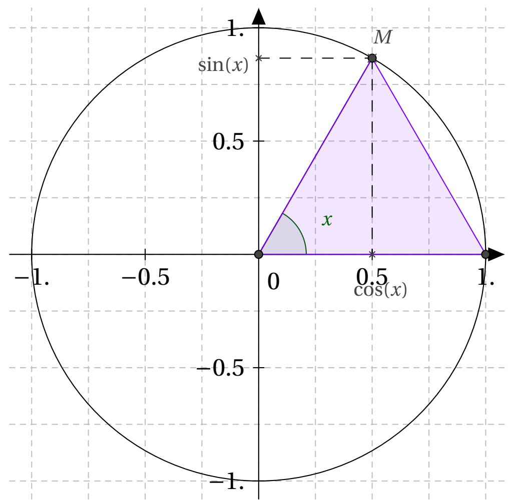
Le polygone coloré est un carré.

Démontrer que dans ce cas, $\cos(x) = \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Que vaut alors x ?

Indication : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ voir le chapitre « Racine carrée ».

Pour aller plus loin

Ex 44



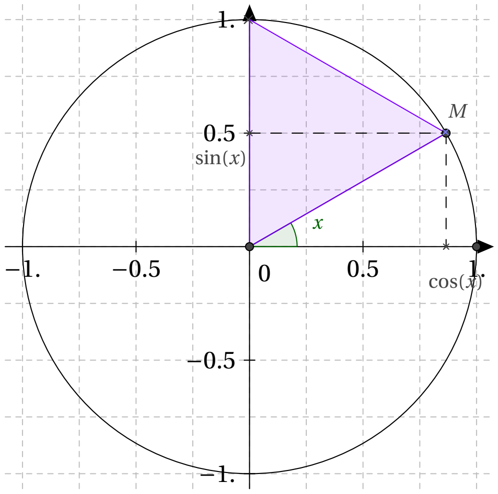
Le polygone coloré est un triangle équilatéral.

Démontrer que dans ce cas, $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ et en déduire que $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Que vaut alors x ?

Pour aller plus loin

Ex 45



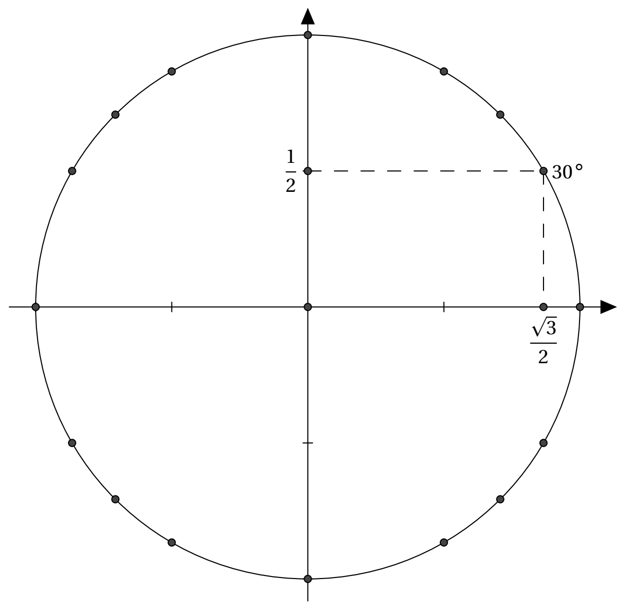
Le polygone coloré est un triangle équilatéral.

Démontrer que dans ce cas, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire que $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$.

Que vaut alors x ?

Pour aller plus loin

Ex 46



Pour chaque point figurant sur le cercle trigonométrique, écrire la mesure de l'angle correspondant. Par projection sur les axes du repères et par des considérations géométriques (symétrie), écrire les valeurs exactes des cosinus et sinus.
Construire et compléter un tableau récapitulatif.

Pour aller plus loin

Chapitre V

Arithmétique

Activités d'introduction

Activité 1 Liste des diviseurs d'un nombre

1. Donner la liste des diviseurs de 48, pour cela compléter :

$$\begin{aligned} 48 &= 1\times \ \ldots. \\ &= 2\times \ \ldots. \\ &= 3\times \ \ldots. \\ &= 4\times \ \ldots. \\ &= 5\times \ \ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

2. Donner la liste des diviseurs de 60 et de 100.
3. Quel est le plus grand diviseur commun à 60 et 100 ? Ce nombre s'appelle le $PGCD(60;100)$.

Activité 2 Décomposition en facteurs premiers

Il est possible de décomposer un nombre en facteurs premiers [a]. Comme par exemple $54 = 9\times 6 = 3\times 3\times 3\times 2$.
Décomposer de la même manière 12 ; 49 ; 312 puis déterminer une méthode permettant de déterminer le plus grand diviseur commun du couple de nombres 48 et 72.

a. Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

Activité 3 Simplifier une fraction

1. Déterminer $PGCD(312;456)$.
2. Proposer une réduction de la fraction $\dfrac{312}{456}$.

A Divisibilité

Définition : La division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de a par b signifie déterminer le quotient q et le reste r tel que :

$$a = b \times q + r$$

Exercice 1 : La division euclidienne

Effectuer :
1. Division euclidienne posée de 368 par 24.
2. Division posée décimale au centième près de 368 par 24.
3. Division euclidienne de 368 par 24 à l'aide la calculatrice.

Non corrigé

Définition : Divisibilité

a **est divisible par** b si la division euclidienne de a par b a un **reste nul** :

$$a = b \times q$$

Remarque. On peut également vérifier la divisibilité d'un nombre en utilisant les **critères de divisibilité** vus lors des classes antérieures.

Exercice 2 : Divisibilité

636 est-il divisible par 12 ? Justifier

Exercices d'application directe

Ex 3 Diviseur, multiple

a) Donne deux multiples de 12.

b) Donne deux diviseurs de 12.

c) Décompose le nombre 12 en facteurs premiers.

Ex 4 Divisible ?

1513 est-il divisible par 89 ? Justifier.

Ex 5 Critère de divisibilité

Sans calculatrice, répondre en justifiant.

a) 1382 est-il divisible par 2 ?

b) 582 est-il divisible par 3 ?

c) 3582 est-il divisible par 9 ?

d) 1580 est-il divisible par 5 ?

Ex 6

Dans un carton on peut ranger 12 boites de chaussures.
On doit expédier 148 boites de chaussures. Combien de cartons sont à prévoir ?

B Le PGCD de deux nombres

1 Le PGCD

Définition : PGCD de deux nombres entiers positifs

Le $PGCD$ de deux nombres entiers positifs est **le plus grand diviseur commun de ces deux nombres**. Le $PGCD$ de a et b deux nombres entiers positifs se note $PGCD(a;b)$.

Remarque. 125 et 50 :$125 = 5 \times 5 \times 5$ et $50 = 5 \times 5 \times 2$, le plus grand commun diviseur de 125 et 50 est **25**.

Exercice 7 : Utilisation du PGCD, exercice type

a) Simplifier au maximum $\frac{50}{125}$;

b) On dispose de 125 tiges de rose et 50 tiges de garniture. Combien de bouquets identiques peut-on concevoir au maximum et sans reste ?

Propriété : PGCD et nombres entiers

On considère deux nombres a et b entiers et positifs,

- $PGCD($**a ;b**$) = PGCD($**b ;a**$)$
- $PGCD($**a ;a**$) =$ **a**
- si b **divise** a alors $PGCD(a;b) = b$.

Exemple.

- $PGCD(5;15) = PGCD(15;5) = 5$.
- $PGCD(67;67) = 67$.

Exercice 8 : Déterminer le PGCD

Déterminer sans calcul le PGCD des couples de nombres suivants :

a) (13 ;52)

b) (163 ;163)

c) (18 ;15)

....

....

....

Définition : Nombres premiers entre eux

Deux nombres sont premiers entre eux **si le plus grand diviseur commun à ces deux nombres est 1**.

Exemple. PGCD(16 ;21) :

- 16 : 1 ;2 ;4 ;8 ;16
- 21 : 1 ;3 ;7 ;21

Hormis 1 pas de diviseur commun. On écrit alors que PGCD(16 ;21)=1. On en déduit que 16 et 21 sont premiers entre eux.

Exercices d'application directe

Ex 9

Déterminer le PGCD des couples de nombres suivants :

a) (100 ;20)

b) (50 ;20)

c) (125 ;75)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ex 10

On veut partager équitablement 230 bonbons et 414 chocolats en un maximum de lots identiques et sans reste.
Combien de lots pourrons nous élaborer ? Quelle sera la constitution de ces lots ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2 Algorithme des soustractions successives

Voici deux codes sources de l'algorithme des soustractions successives mis en application pour calculer le PGCD de 125 et 50 :

Code Soustractions successives AlgoBox

```
VARIABLES
  a EST_ DU_ TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  TANT_QUE (b!=0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (a>b) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR a-b
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        b PREND_LA_VALEUR b-a
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER a
FIN_ALGORITHME
```

Compilation PGCD(125 ;50) AlgoBox

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 125
Entrer b : 50
25
***Algorithme terminé***
```

Code Soustractions successives Python

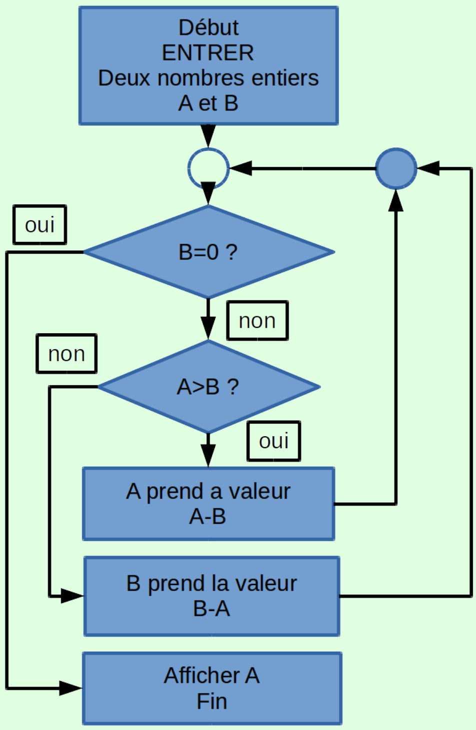
```
from math import
a=int(input("a="))
b=int(input("b="))
while b != 0:
  if a>b:
    a=a-b
  else:
    b=b-a
print(a)
```

Compilation PGCD(125 ;50) Python

```
> > > ================= RESTART ===============
> > >
a=125
b=50
25
```

Et voici l'organigramme représentant cet algorithme :

Algorithme des soustractions successives



Conjecture. Pourquoi cet algorithme permet-il de calculer le PGCD de deux nombres ?
Il faut montrer que $PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$ avec $a > b$.

Démonstration. Comme $n = PGCD(a;b)$ divise a et b avec $a > b$, alors $\frac{a}{n}$ et $\frac{b}{n}$ sont deux entiers positifs avec $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$.

$\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$ est également un entier car il est la différence de deux entiers positifs.

Comme $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$ est un entier positif, alors $PGCD(a;b)$ divise $a-b$.

$PGCD(a;b)$ est le plus grand diviseur commun du couple $(a;b)$, il sera donc celui du couple $(b;a-b)$ couple formé de nombres inférieurs ou égaux à a.

Donc $PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$. □

Propriété : PGCD et soustraction

Si $a > b$ alors :

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$$

Remarque. Pour calculer $PGCD(125;50)$, on écrit alors

$$PGCD(125;50) = PGCD(50;75) = PGCD(50;25) = PGCD(25;25) = 25$$

Exemple. Calculons $PGCD(125;50)$ par l'algorithme des soustractions successives :
$125 - 50 = 75$
$75 - 50 = 25$
$50 - 25 = 25$
$25 - 25 = 0$
On en déduit que le PGCD du couple est 25.

Exercice 11 : Calcul du PGCD

De la même manière, calculer PGCD(693 ;189).

. . . .
. . . .
. . . .

Exercices d'application directe

Ex 12 Calculer le PGCD

En utilisant l'algorithme des soustractions successives, calculer $PGCD(132;55)$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ex 13 Résoudre

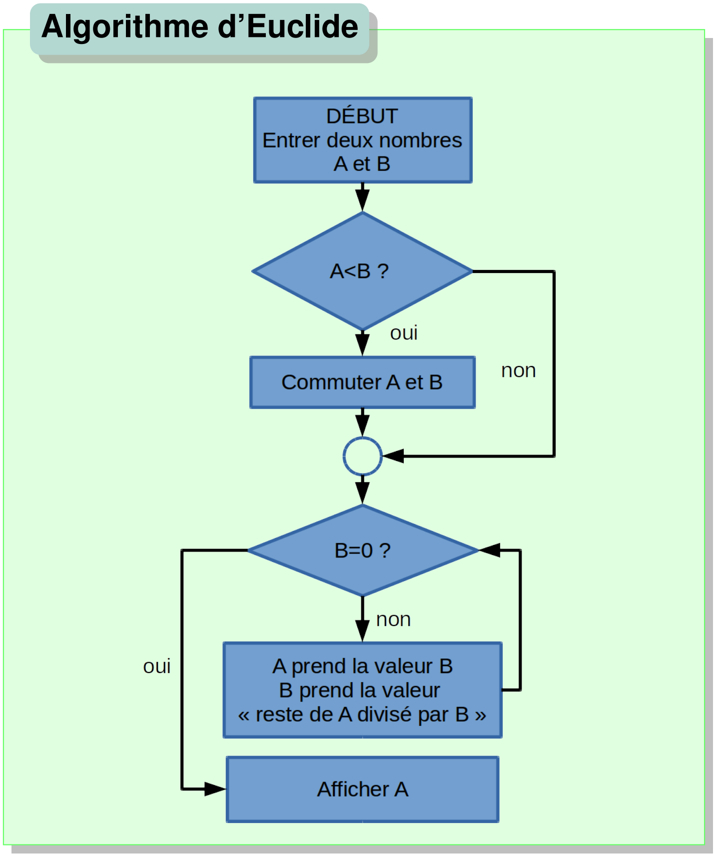
On dispose d'un lot de 64 porte-clefs et 160 stylos à répartir en un maximum de lots identiques et sans reste.
Déterminer le nombre et la composition des lots.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3 L'algorithme d'Euclide

L'algorithme des soustractions successives peut s'avérer être long à appliquer. On imagine le cas de multiples soustractions, jusqu'à obtenir un résultat trop petit pour une nouvelle soustraction. C'est le mécanisme de la division euclidienne, où le reste doit être inférieur au dividende.

Voici l'organigramme représentant cet algorithme :



Et voici le code de l'algorithme d'Euclide (ou des divisions euclidiennes successives) mis en application pour calculer le PGCD de 125 et 50.

Code Algorithme d'Euclide Python

```
from math import*
a=int(input("a ="))
b=int(input("b ="))
if a<b:
  n=b
  b=a
  a=n #ces trois lignes servent à intervertir a et b
while b != 0 :
  n=b
  b=a%b #reste de la division euclidienne de a par b
  a=n
print(a)
```

Évidemment, la compilation de ce code donne le même résultat qu'avec l'algorithme des soustractions successives.

Compilation PGCD(125 ;50) Python

```
> > > ================== RESTART ================
> > >
a=125
b=50
25
```

Exercice 14 : Simplification de code

Code Algorithme d'Euclide et Python

```
from math import*
a=int(input("a ="))
b=int(input("b ="))
while b != 0 :
  n=b
  b=a%b
  a=n
print(a)
```

Expliquer pourquoi ce code permet le calcul de PGCD(a ;b) malgré l'absence de comparaison de a et b.

Pourquoi cet algorithme permet-il de calculer le PGCD de deux nombres ?

Hypothèse. Soient a, b, q, r tels que $a = bq + r$.

Conjecture. Si $a = bq + r$ alors $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

Démonstration. Comme $n = PGCD(a;b)$ divise a et b avec $a > b$, alors $\frac{a}{n}$ et $\frac{bq}{n}$ sont deux entiers positifs avec $\frac{a}{n} > \frac{bq}{n}$.

Or $\frac{r}{n} = \frac{a-bq}{n} = \frac{a}{n} - \frac{bq}{n}$ est également un entier par soustraction de deux entiers positifs donc n divise r.

Comme $n = PGCD(a;b)$ le plus grand diviseur commun du couple $(a;b)$, il sera donc celui du couple $(b;r)$.

Donc $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$. □

Propriété : PGCD et division euclidienne

Si $a = bq + r$ alors :

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$$

Exemple. Calcul de PGCD(125 ;50) : $PGCD(125;50) = PGCD(50;25) = 25$. ou encore :

$$\begin{array}{r|l c r|l} 125 & 50 & & 50 & 25 \\ \cline{2-2}\cline{5-5} 25 & 2 & ; & 0 & 2 \end{array}$$

on en déduit que $PGCD(125;50) = 25$ (le dernier reste non-nul).

Exercice 15 : Calculer le PGCD de deux nombres entiers

En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer PGCD(235 ;1895).

Exercices d'application directe

Ex 16

Calculer le PGCD de ces couples de nombres en utilisant l'algorithme d'Euclide :

a) (325 ;1150)

b) (2352 ;546)

c) (3164 ;10927)

Ex 17 Ant-Guyane, juin 2009

1. Déterminer le PGCD de 1 394 et de 255.
2. Un artisan dispose de 1 394 graines d'açaï et de 255 graines de palmier pêche. Il veut réaliser des colliers identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de graines d'açaï et le même nombre de graines de palmier pêche.
   (a) Combien peut-il réaliser au maximum de colliers en utilisant toutes ses graines ?
   (b) Dans ce cas, combien chaque collier contient-il de graines d'açaï et de graines de palmier pêche ?

4 Simplifier une fraction

Le but est de rendre irréductible une fraction.

Définition : Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si **son dénominateur et son numérateur sont premiers entre eux**.

Exemple. $\frac{16}{21}$ est irréductibles.

Exercice 18 : Réduire une fraction

Réduire la fraction suivante : $\frac{325}{1150}$.

Exercices d'application directe

Ex 19 Réduire une fraction

Réduire les fractions suivantes :

$$\frac{2352}{546} ; \frac{3164}{10927} ; \frac{31122}{623645}.$$

Ex 20

Calculer l'expression suivante :

$A = \dfrac{790}{474} + \dfrac{945}{1620}$

Exercices

Ex 21 Am du Nord, juin 2009

1. Déterminer le PGCD de 186 et 155 en expliquant la méthode utilisée (faire apparaître les calculs intermédiaires).
2. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats. Les colis sont constitués ainsi :
   - Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
   - Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
   - Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

   (a) Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?

   (b) Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

Ex 22 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\dfrac{24}{32} - \dfrac{9}{24}$
- $\dfrac{11}{16} - \dfrac{17}{4}$
- $\dfrac{21}{4} \times \dfrac{20}{15}$

Révisions

Ex 23 Disque

Calculer le périmètre et l'aire d'un disque de 5cm de rayon.

Révisions

Ex 24 Aire d'un parallélogramme

Soit un parallélogramme ABCD tel que $AB = 5cm$, $AD = 6cm$ et $\widehat{BAD} = 60°$.
Calculer l'aire de ce parallélogramme.

Révisions

Ex 25 Aire d'un triangle

Soit un triangle ABC tel que $AB = 5cm$, $AC = 6{,}5cm$ et $\widehat{BAC} = 45°$.
Calculer l'aire de ce triangle.

Révisions

Rappel

Pour éliminer (ou « déplacer ») un terme : ici a

- $x + a = b$ devient $x = b - a$ en soustrayant a à chaque membre de l'égalité.
- $x - a = b$ devient $x = b + a$ en additionnant a à chaque membre de l'égalité.

Pour changer un coefficient (et obtenir x) :

- $ax = b$ devient $x = \frac{b}{a}$ en divisant par a chaque membre de l'égalité.
- $\frac{x}{a} = b$ devient $x = b \times a$ en multipliant par a chaque membre de l'égalité.

Ex 26 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $2x + 9 = -5x + 9$
- $-3x - 7 = 2x + 7$

Révisions

Ex 27 Simplification de fractions

Calculer $A = \frac{3135}{1881} - \frac{4277}{3666}$.

Ex 28 Simplification de fractions

Calculer $B = \dfrac{2002}{5005} + \dfrac{4968}{16560}$.

Ex 29 Paris, juin 2006

Pierre a gagné 84 sucettes et 147 bonbons à un jeu. Étant très généreux, et ayant surtout très peur du dentiste, il décide de les partager avec des amis. Pour ne pas faire de jaloux, chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbons.

Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (Pierre étant inclus dans ces personnes !) ? Expliquer votre raisonnement.

Ex 30 Antilles-Guyane, sept 2007

1. $A = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4} \div \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2}\right)$.
   Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. $B = \dfrac{2{,}1 \times 10^{-4} \times 500 \times (10^2)^3}{0{,}7 \times 10^8}$.
   Donner l'écriture décimale puis l'écriture scientifique de B.

Révisions

Ex 31 Développer

Développer les expressions suivantes :

- $3x(2x-7)$
- $(x-8)(3-5x)$

Révisions

Ex 32 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

- $\dfrac{x}{14}=-6$
- $-8x-6=-2$

Révisions

Ex 33 Polynésie, juin 2011

1. Déterminer le PGCD de 260 et de 90 en détaillant les calculs intermédiaires.
2. Pour réaliser un « tifaifai », (genre de couvre-lit), Tina doit découper des carrés dans un tissu de soie blanc rectangulaire de 260 cm de long sur 90 cm de large. Tout le tissu doit être utilisé. Chaque carré doit avoir le plus grand côté possible. Montrer que la longueur du côté d'un carré est 10 cm. Combien de carrés pourra-t-elle obtenir ?
3. Sur certains carrés, elle veut faire imprimer un « tiki » et sur d'autres un « tipanier ». La société « Arii porinetia » lui propose le devis suivant créé à l'aide d'un tableur :

E8 $f(x)$ Σ =

	A	B	C	D
1	impression du motif	prix unitaire en F	quantité	prix total en F
2	tiki	75	117	8775
3	tipanier	80	117	9360
4				
5	total			

Pour obtenir le prix total des impressions des carrés, quelle formule doit-on saisir dans la cellule D5 ? Parmi les 4 formules proposées, recopier sur votre copie la bonne formule :

- D2+D3
- =SOMME(D2 :D3)
- =9360+8775
- =SOMME(D2 :D5)

Ex 34 Am du Nord, juin 2013

Tom doit calculer $3{,}5^2$.
« Pas la peine de prendre la calculatrice », lui dit Julie, tu n'as qu'à effectuer le produit de 3 par 4 et rajouter $0{,}25$.

1. Effectuer le calcul proposé par Julie et vérifier que le résultat obtenu est bien le carré de $3{,}5$.
2. Proposer une façon simple de calculer $7{,}5^2$ et donner le résultat.
3. Julie propose la conjecture suivante :

$$(n+0{,}5)^2 = n(n+1)+0{,}25$$

n est un nombre entier positif. Prouver que la conjecture de Julie est vraie (quel que soit le nombre n).

Révisions

Ex 35 Nouv Cal, déc 2012

La biologiste de l'Aquarium du Pacifique aménage une salle dédiée à trois espèces de petits poissons notées A, B et C. Voici le tableau donnant le nombre de poissons de chaque espèce dont elle dispose :

Espèces de poissons	A	B	C
Effectifs	154	105	126

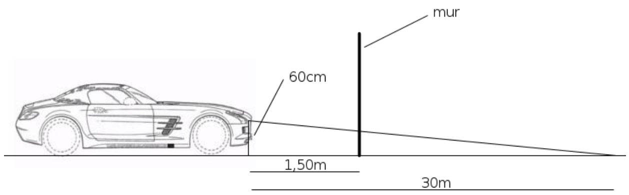
a) Calculer le PGCD des nombres 154 et 105, par l'algorithme de votre choix et en détaillant les étapes.

b) Combien faudrait-il de bassins au minimum pour qu'ils contiennent exactement le même nombre de poissons de chacune des espèces A, B et C ?

c) Donner pour chaque espèce, le nombre de poissons qu'il y aurait alors dans un bassin.

Ex 36 Métropole, juin 2014

D'après le code de la route (Article R313 - 3) : Les feux de croisement d'une voiture permettent d'éclairer efficacement la route, la nuit par temps clair, sur une distance minimale de $30m$.
Afin de contrôler régulièrement la portée des feux de sa voiture, Jacques veut tracer un repère sur le mur au fond de son garage.
La figure n'est pas à l'échelle.



Les feux de croisement sont à $60cm$ du sol.
À quelle hauteur doit-il placer le repère sur son mur pour pouvoir régler correctement ses phares ?
Indication : faire un schéma pour faire apparaître une configuration de Thalès et des points nommés.

Révisions

Ex 37 Pondichéry, avril 2012

Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante : « Découpe dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte. »

1. Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier votre réponse.
2. Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier votre réponse.
3. On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.
   (a) Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
   (b) Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?

Ex 38 Am du Sud, nov 2013

Un pâtissier a préparé 840 financiers et 1 176 macarons. Il souhaite faire des lots, tous identiques, en mélangeant financiers et macarons. Il veut utiliser tous les financiers et tous les macarons.

1. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi les nombres 840 et 1176 ne sont pas premiers entre eux.
2. Le pâtissier peut-il faire 21 lots ? Si oui, calculer le nombre de financiers et le nombre de macarons dans chaque lot.
3. Quel est le nombre maximum de lots qu'il peut faire ? Quelle sera alors la composition de chacun des lots ?

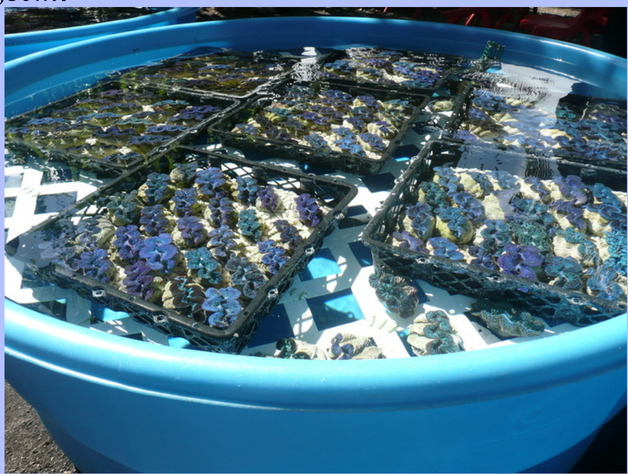
Ex 39 Appliquer le cours

Dans le triangle ABC, rectangle en C, $AC = 2cm$ et $\widehat{CAB} = 55°$, calculer la longueur AB.

Révisions

Ex 40 D'après Polynésie 2013

Dans les bassins d'eau de mer filtrée d'une ferme aquacole de bénitiers destinés à l'aquariophilie, on compte 9 bacs contenant chacun 35 bénitiers de $12{,}5cm$ et 15 bacs contenant chacun 27 bénitiers de $17{,}5cm$.



$http://www.tahiti-infos.com$

L'exploitant souhaite répartir la totalité des bénitiers en un maximum de lots de même composition.
Comment devra-t-il répartir les bénitiers ?

Ex 41

Résoudre l'équation :

$$2x(x+3)-(x+3)^2=0$$

Pour aller plus loin

Ex 42

Résoudre l'équation :

$$(3x-2)^2-(2x+6)^2=0$$

Pour aller plus loin

Ex 43

Résoudre l'équation :

$$(x-3)^2-(x+3)^2=0$$

Pour aller plus loin

Ex 44 Démontrer

Démontrer que la somme de trois nombres entiers consécutifs est divisible par trois.

Pour aller plus loin

Ex 45 Démontrer

Démontrer que la somme de deux nombres impaires consécutifs est divisible par quatre.

Pour aller plus loin

Chapitre VI

Géométrie dans l'espace

L'Atomium est un monument de Bruxelles, en Belgique, construit à l'occasion de l'Exposition universelle de 1958 et représentant la maille conventionnelle du cristal de fer [maille α] agrandie 165 milliards de fois. [Dans cette maille, les atomes de la diagonale du cube se touchent.]

Les sphères ont un diamètre de 18 mètres et pèsent chacune environ 250 tonnes. Symboliquement, l'Atomium incarne l'audace d'une époque qui a voulu confronter le destin de l'Humanité avec les découvertes scientifiques.

Adresse : Avenue de l'Atomium, 1020 Bruxelles, Belgique
Début de la construction : 1956
Date d'ouverture : 1958 Hauteur : $102m$
Style architectural : Mouvement moderne
Architecte : André Waterkeyn

Wikipédia

Ex 1 Crystallographie

Sachant que la diagonale d d'un cube est telle que $d = \sqrt{3} \times c$ où c est le côté du cube, calculer le côté de la maille α du fer métallique.
On considère les atomes de fer comme des boules en contact dans la maille cristalline.
Sachant que le rayon atomique du fer est de $126pm$, vérifier l'échelle de cette monumentale maquette.

Révisions

Activités d'introduction

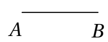
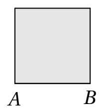
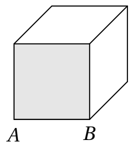
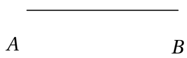
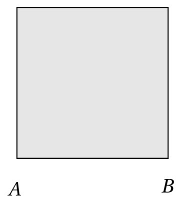
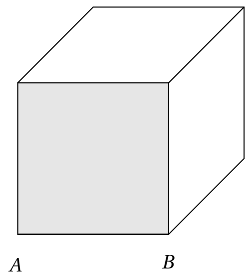
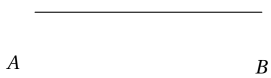
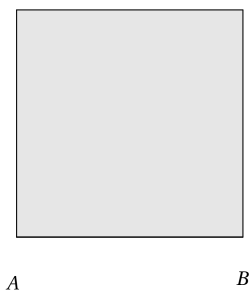
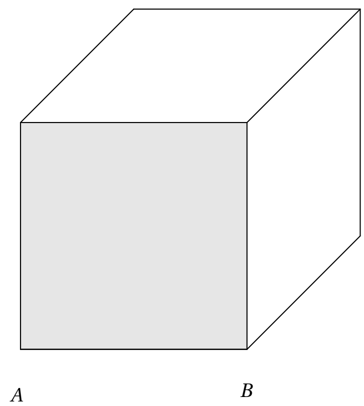
Activité 1 Vocabulaire

Classer les différents ballons, balles, boules utilisés dans ces sports :

	sphère	boule
Pétanque		
Ping-pong		
Football		
Basket		
Bowling		
Billard		
Tennis		
Lancer de marteau		

Activité 2 Agrandissement, quel effet sur le volume ?

Dans le tableau, AB est la longueur successive d'un segment [AB], d'un côté d'un carré, d'une arête d'un cube. D'après la mesure de AB, calculer l'aire de chaque carré, le volume de chaque cube. Compléter le tableau suivant :

Longueur L	Aire $\mathscr{A}$	Volume $\mathscr{V}$
		
		
		

Compléter :

Lorque les longueurs d'un solide sont multipliées par un facteur k, alors son aire est .... par ..... et son volume par .....

A Sphères et boules

1 Vocabulaire

Définition : Sphère

Une sphère de centre O et de rayon R est l'**ensemble des points** situés à une distance R du point O.

Remarque. Une sphère est creuse, il s'agit d'une surface.

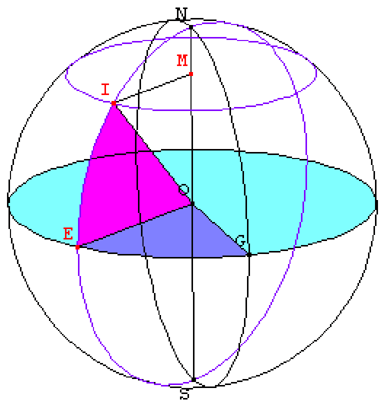
Définition : Boule

Une boule de centre O et de rayon R est l'**ensemble des points** situés à une distance inférieure ou égale à R du point O.

Remarque. Une boule est pleine.

L'astre terrestre est une boule. Comme nous ne vivons qu'à la surface de cette boule, on parle aussi de la sphère terrestre. Sur la figure ci-contre, E est sur la sphère de centre O et de rayon OG, mais M, plus proche de O fait partie de la boule de centre O et de rayon $r = ON = OG$. Les points N et S sont diamétralement opposés, ils symbolisent le pôle Nord et le pôle Sud de la planète Terre. Les cercles de centre O et de rayon r sont les grands cercles de la sphère : Équateur et méridiens terrestres.

Il est cependant possible de parler du volume intérieur d'une sphère, comme dans le cas d'une citerne.



Définition : Grand cercle

Un grand cercle est un cercle tracé à la surface d'une sphère qui a le même diamètre qu'elle.

Exercices d'application directe

Ex 2 La Terre

La Terre est une boule d'un rayon de $6400 km$.

1. Déterminer la longueur de l'équateur.
2. Déterminer la longueur d'un méridien.

. . . .

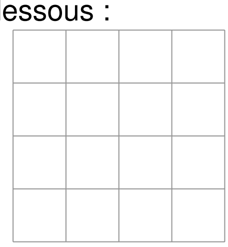
. . . .

. . . .

. . . .

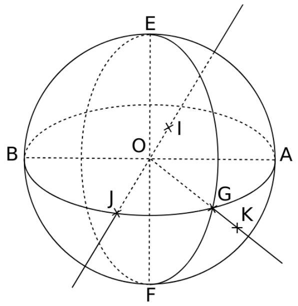
Ex 3

Représenter une sphère en perspective cavalière sur le quadrillage ci-dessous :



Ex 4 Travailler les définitions

La figure ci-dessous représente une boule de diamètre [AB].



1. Complète :
   Points appartenant la sphère : ....

   Points appartenant la boule : ....

   Points n'appartenant ni à la sphère, ni à la boule : ....

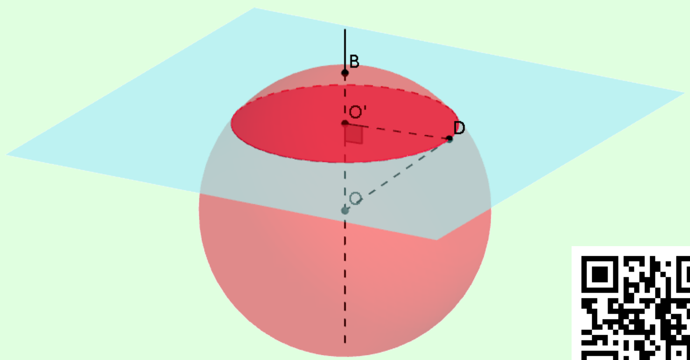
2. Place sur la figure le point H, diamétralement opposé à G et un point L sur la demi-droite [OG) qui appartienne à la boule de rayon OA.

2 Section d'une sphère par un plan

Définition : Section d'un solide par un plan

On appelle section d'un solide par un plan **l'intersection de ce solide et de ce plan**.

Section d'une sphère par un plan



Définition : Section d'une sphère, d'une boule par un plan

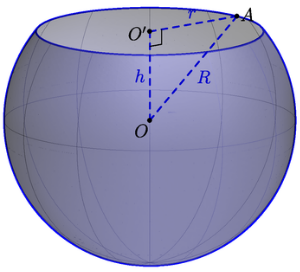
La section d'une sphère de centre O par un plan est **un cercle** de centre O'.
La section d'une boule par un plan est un disque.

Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.

Dans le cas limite où le point O' est confondu avec B sur la figure ci-dessus, l'intersection de la sphère par le plan est un point. Si le plan s'éloigne encore du centre, il n'existe plus d'intersection entre ces deux objets.

Sur ces deux figures, on remarque la nature des triangles OO'D et OO'A. Ces deux triangles rectangles nous permettront des calculs faisant intervenir la trigonométrie et le théorème de Pythagore.

Remarque.

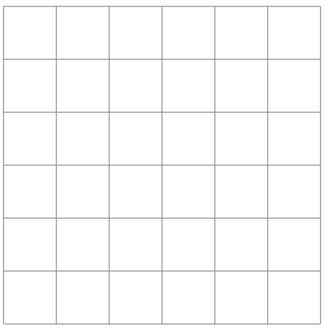


On dit qu'un plan sépare une sphère en deux calottes sphériques, dont voici un exemple ci-contre.

Le plan équatorial sépare la planète en deux calottes identiques, des hémisphères. On parle alors de l'hémisphère nord et de l'hémisphère sud.

Exercice 5 : Représenter une sphère

Sur le quadrillage ci-dessous représenter une sphère en perspective cavalière, de centre O et un de ses diamètre : [AB].
Ensuite, représenter la section de la sphère par un plan passant par M, milieu de [OA], et perpendiculaire à ce diamètre.

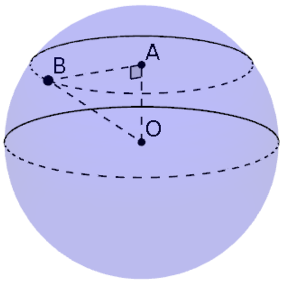


Exercice 6 : Section d'une sphère

Un aquarium est une calotte sphérique. Le diamètre de son ouverture est de 18cm alors que le rayon de la sphère est de 15cm.
Calculer la distance entre le centre de la sphère et l'ouverture.

Exercices d'application directe

Ex 7



Une sphère de 3cm de rayon est coupée par un plan passant à deux centimètres de son centre.
Calculer le rayon de l'intersection formée.

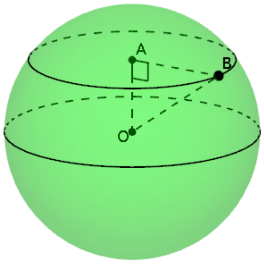
Ex 8

L'empreinte d'une boule de pétanque de 74mm de diamètre dans de l'argile mesure 44mm de diamètre.
Calculer la profondeur de cette empreinte.

Schéma

Ex 9

La section de la sphère de $4cm$ de rayon ci-dessous a un diamètre de $4{,}5cm$.



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

3 Aire et volume

Définition : Aire et volume

L'aire d'une sphère de rayon R est égale à :

$$\mathscr{A} = 4\pi R^2$$

Le volume d'une boule de rayon R est égal à :

$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercices d'application directe

Ex 10

a. Calculer le volume d'une boule de $8cm$ de diamètre.

b. Calculer la surface de la planète Terre en km^2.

Ex 11

Un petit-pois a un diamètre de 7mm, calcule son volume.

Ex 12 Aire et volume

On considère une boule de pétanque de $72mm$ de diamètre et d'une masse de $690g$.

Sachant qu'un m^3 de l'acier utilisé a une masse de $7\,900kg$, montrer qu'une boule de pétanque n'en est pas une...

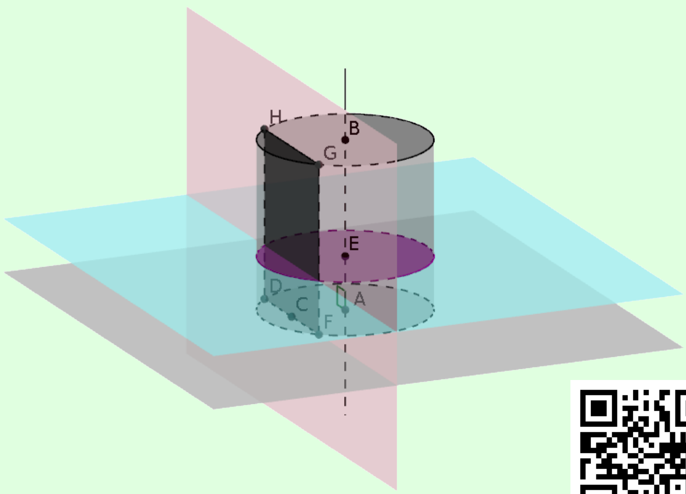
B Cylindre et parallélépipède rectangle

1 Section d'un cylindre de révolution

Propriété : Section d'un cylindre par un plan

La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle superposable aux bases du cylindre.
La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe est un rectangle.

Sections d'un cylindre



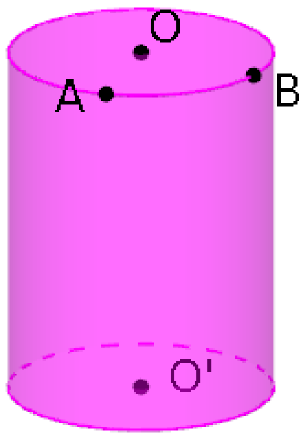
Remarque. On remarque sur la figure ci-dessus la nature du triangle ADF. En effet, ADF est isocèle en A et de hauteur [AC]. ACF est un triangle rectangle. Là encore, des calculs de trigonométrie sont possibles.

Exercice 13 : Section d'un cylindre

Un cylindre de 5cm de rayon et de 4cm de hauteur est coupé par un plan parallèle à son axe et à une distance de 4cm de cet axe.
Représenter en vraie grandeur la section de ce cylindre par ce plan.

Exercices d'application directe

Ex 14



Représenter sur le cylindre ci-dessus, la section de ce cylindre par un plan parallèle à son axe et passant par les points A et B.

Ex 15

On coupe un cylindre de 3cm de rayon et de 4cm de hauteur à 2cm de son axe.
Donne les caractéristiques de cette section.

Schéma

Ex 16

On considère un cylindre de 3cm de diamètre et 5cm de hauteur.
La section de ce cylindre par un plan parallèle à son axe et un rectangle de 2cm par 5cm.
Quelle est la distance séparant l'axe de la section ?

Schéma

. . . .

. . . .

2 Aire et volume d'un cylindre de révolution

Définition : Aire et volume

L'aire latérale d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h est égale à :

$$\mathscr{A}_{\text{latérale}} = 2\pi R h$$

Le volume d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h est égal à :

$$\mathcal{V} = \pi R^2 h$$

Exercices d'application directe

Ex 17

Un verre a une forme d'un cylindre de révolution. Son diamètre est de 7cm et sa hauteur est de 9cm.
Il doit contenir 20cL de jus d'orange.
Quelle hauteur de jus d'orange cela représente-il ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ex 18

Calculer l'aire totale d'un cylindre de révolution de 10cm de hauteur et 4cm de rayon.
Le patron de ce cylindre tient-il sur une feuille de papier A4 ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ex 19 Cocktail Bora Bora sans alcool

Un verre a une forme d'un cylindre de révolution. Son diamètre est de 7cm et sa hauteur est de 9cm.
Voici une recette de cocktail :

- 3/5 de jus d'ananas
- 1/3 de jus de fruits de la passion
- 2 cl de jus de citron
- 2 cl de grenadine

Vérifier que cette recette de cocktail ne conduise pas à un verre qui déborde.

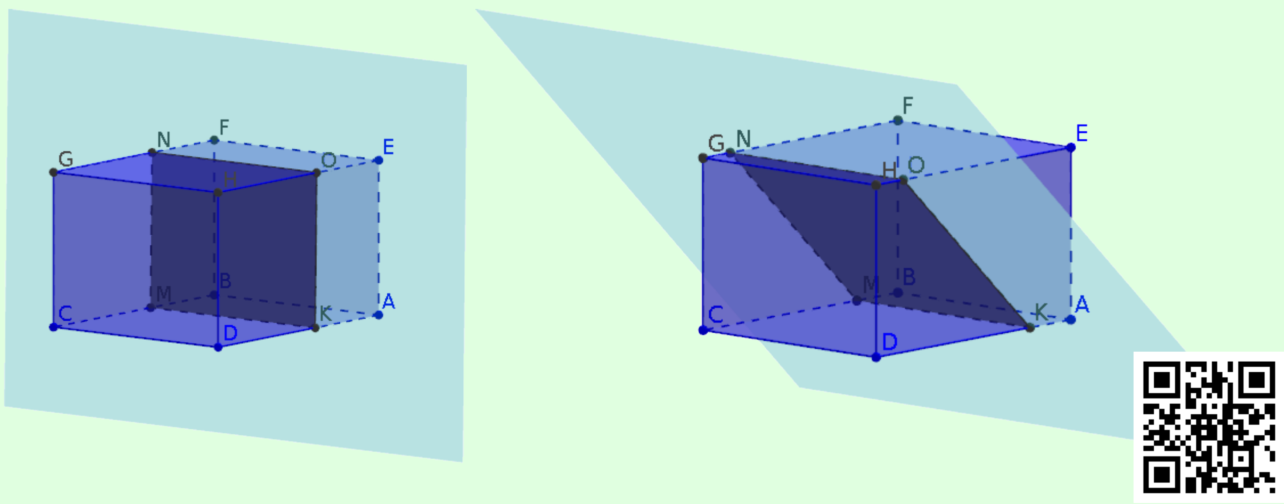
.... | ....
.... | ....
.... | ....
....
....

C Section et volume d'un parallélépipède rectangle

Propriété : Section d'un pavé droit par un plan

Si un plan est **parallèle à une face** d'un parallélépipède rectangle alors la section est **superposable à cette face**.
Si le plan est **parallèle à une arête** d'un parallélépipède rectangle alors la section est un rectangle dont la **largeur (ou la longueur) est celle de l'arête** .

Section d'un pavé droit



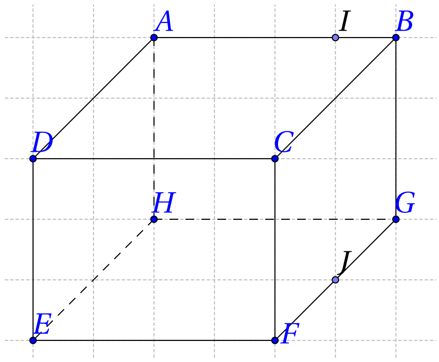
Exemple. Sur la figure ci-dessus, l'une des sections est superposable à ADHE, l'autre est un rectangle dont l'une des mesure est DH.

Remarque. Dans le cas d'un cube, la section peut donc être un carré ou un rectangle.

Exercice 20 : Plans et pavé droit

1. Représenter en rouge la section du pavé droit par le plan parallèle à la face ADEH passant par le point I.

2. Représenter en vert la section du pavé droit par le plan parallèle à la droite (DC) passant par le point J et par le point B.



Définition : Volume d'un pavé droit

Le volume d'un pavé droit de longueur L, largeur l et hauteur h est égal à :

$$\mathcal{V} = l \times L \times h$$

Exercices d'application directe

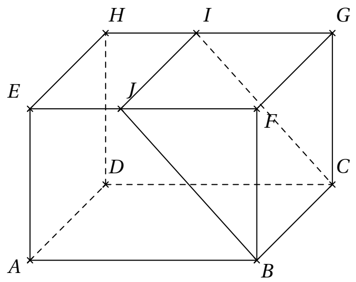
Ex 21 Aquariophilie

Un aquarium parallélépipédique mesure $1{,}40m$ par $50cm$ pour une hauteur de $55cm$. Pour de petits poissons ($< 7cm$), une règle d'aquariophilie existe :

« $1cm$ de poisson par litre »

Par exemple, trois poissons rouges de $5cm$ nécessitent un aquarium de $15L$.
Le Néon bleu (Paracheirodon innesi) peut mesurer jusqu'à $4cm$. Combien de poisson pouvons nous acheter pour cet aquarium.

Ex 22



ABCDEFGH est un pavé droit tel que $AB = 5cm$ et $AD = AE = 3cm$. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [EF].
Donner les caractéristiques du polygone IJBC.

D Pyramide et cône

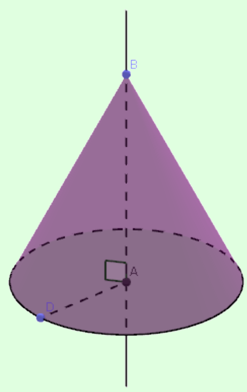
1 Volume d'un cône ou d'une pyramide

Définition : Volume

Le volume d'un cône de révolution ou d'une pyramide de base d'aire $\mathscr{B}$ et de hauteur h est égal à :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

Cône de révolution



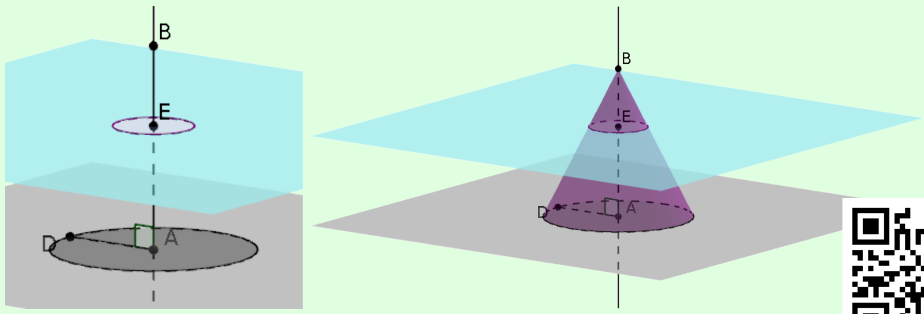
Ici, $\mathscr{B} = \pi \times AD^2$ et $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times AB$.

2 Section d’une pyramide et d’un cône

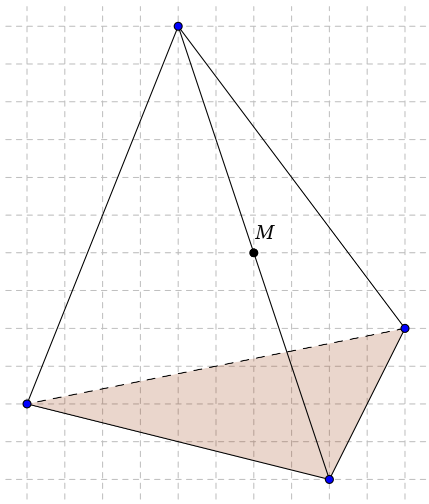
Propriété : Section d’une pyramide et d’un cône

La section d’une pyramide ou d’un cône par un plan parallèle à sa base est une réduction de sa base.
Le solide ainsi obtenue est une réduction du solide de départ.

Section d’un cône



Exercice 23 : Section d’une pyramide par un plan



Représenter la section de cette pyramide par le plan parallèle à la base colorée passant par le point M.

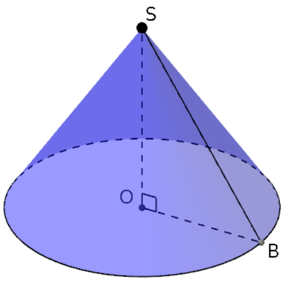
Non corrigé

Exercices d’application directe

Ex 24

Une pyramide régulière à base carrée de 4cm de côté a une hauteur de 5cm.
Calculer son volume.

Schéma



Ex 25

Un cône de révolution possède une génératrice de 4cm et son axe et sa génératrice forment un angle de $25°$.
Calculer le volume de ce cône.

E Aires et volumes, effet de l'agrandissement

Propriété : Aires et volumes, effet de l'agrandissement

Si on agrandit un solide d'un facteur k, son aire est multipliée par k^2, le volume du solide est multiplié par k^3.

Exercice 26 : Effet de l'agrandissement sur le volume

Certains verres à cocktail ont une forme conique. Voici les indications d'un fournisseur :
« Verres à cocktail en plastique avec pied de couleur, détachable. Hauteur [a] : $15cm$, largeur : $9cm$. Contenance : $18{,}5cl$ - rainure à $10cl$. Plusieurs coloris de pieds disponibles. Qualité extra Cristal, réutilisable, produit fabriqué en Union Européenne. »
Déterminer la position de la rainure.

a. pied et cône

Exercices d'application directe

Ex 27

Pour réaliser des économies, une commune a décidé de remplacer les trois conteneurs de $3m^3$ par un seul dont les dimensions sont 45% plus grandes.
Pourra-t-on y stocker la même quantité de verre ? Les habitants du villages sont sceptiques, peux-tu répondre à leur questions ?

....

....

....

....

....

Ex 28

Un verre a une forme conique. Chaque verre possède une contenance de 65mL. Suite à un problème de livraison, on n'a pas de quoi remplir l'ensemble des verres, on peut en remplir seulement la moitié.
Votre collègue vous dit alors de les remplir au trois-quarts de la hauteur.
Au final, il vous reste une bonne quantité de boisson. Pourquoi ?

....

....

....

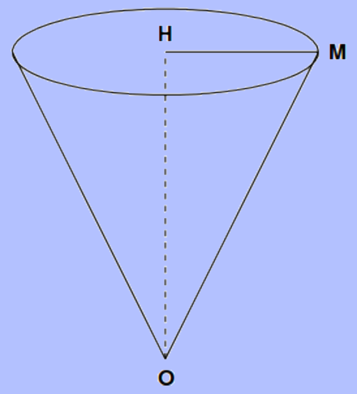
....

....

Exercices

Ex 29 Métropole, sept 2009

La figure ci-dessous représente un cône de révolution d'axe (OH).



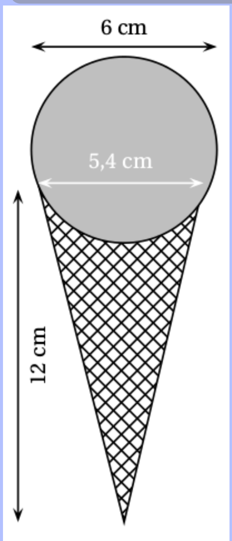
OH = 5 cm, l'angle $\widehat{HOM}$ mesure $30°$.

1. Dessiner le triangle HOM en vraie grandeur.
2. Dessiner la base du cône en vraie grandeur.
3. Calculer la longueur HM. Donner le résultat arrondi au mm.
4. On verse de l'eau dans le cône jusqu'au quart de sa hauteur.

   Quel pourcentage du volume total du cône est occupé par l'eau ?

Construction

Ex 30 Centres étr, juin 2011



Michel achète une glace au chocolat. Elle a la forme d'une boule posée sur un cône comme sur la figure ci-contre. Michel, qui est gourmand, se demande s'il ne serait pas plus intéressant de remplir le cône à ras bord avec de la glace plutôt que de poser une boule sur le cône. Aide-le à répondre à cette épineuse question gourmande.

Ex 31 Utiliser les identités remarquables

Compléter chaque égalité :

a) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times \,..\, + 9$

b) $(x + \,..\,)^2 = x^2 + 2 \times x \times \,..\, + 4$

c) $(2x-4)^2 = \,....\,^2 - 2 \times 2x \times 4 + \,....$

d) $(3y-5)(3y\,.....) = \,.......\, - 25$

e) $(3+5x)^2 = 9 + \,.......\, + 25x^2$

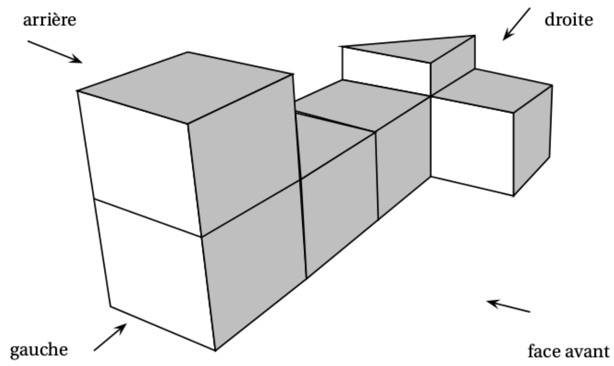
f) $(1-8x)^2 = 1\,.......................$

g) $(\,...........\,)^2 = 49x^2 + \,.......\, + 25$

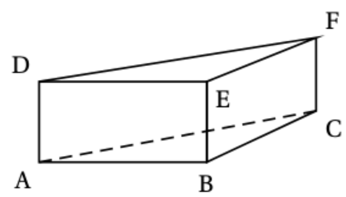
Révisions

Ex 32 Am du Nord, juin 2011

On a empilé et collé 6 cubes de $4cm$ d'arête et un prisme droit de façon à obtenir le solide représenté ci-dessous. La hauteur du prisme est égale à la moitié de l'arête des cubes.



1. Dessiner en vraie grandeur une vue de l'arrière du solide. (sur une feuille séparée)
2. Calculer le volume en cm^3 du solide.
3. Étude du prisme droit.
   (a) On nomme ce prisme ABCDEF, comme sur la figure ci-dessous.



   Quelle est la nature de la base de ce prisme droit ? Justifier la réponse.

   (b) Vérifier par des calculs que la longueur $AC = 4\sqrt{2}cm$.

   (c) En déduire la valeur exacte de l'aire de la face ACFD. Donner l'arrondi au mm^2 près.

Ex 33 Développer, identités

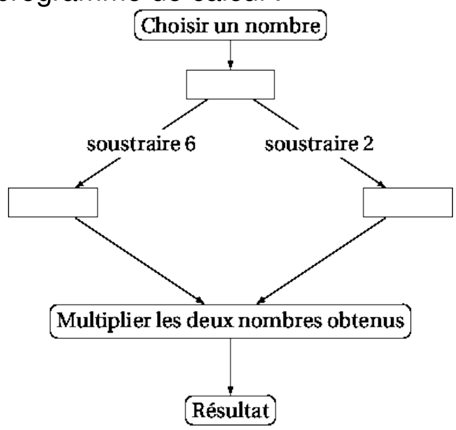
Développer en utilisant les identités remarquables

- $(5+9y)^2$
- $(10b+6)(10b-6)$
- $(3-x)^2$
- $(4a-11)^2$

Révisions

Ex 34 Métropole, juin 2014

Voici un programme de calcul :



1. Montrer que si on choisit 8 comme nombre de départ, le programme donne 12 comme résultat.
2. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

   Proposition 1 Le programme peut donner un résultat négatif ;

   Proposition 2 Si on choisit $\frac{1}{2}$ comme nombre de départ, le programme donne $\frac{33}{4}$ comme résultat ;

   Proposition 3 Le programme donne 0 comme résultat pour exactement deux nombres ;

Révisions

Rappel

Pour éliminer (ou « déplacer ») un terme : ici a

- $x+a=b$ devient $x=b-a$ en soustrayant a à chaque membre de l'égalité.
- $x-a=b$ devient $x=b+a$ en additionnant a à chaque membre de l'égalité.

Pour changer un coefficient (et obtenir x) :

- $ax=b$ devient $x=\frac{b}{a}$ en divisant par a chaque membre de l'égalité.
- $\frac{x}{a}=b$ devient $x=b\times a$ en multipliant par a chaque membre de l'égalité.

Ex 35 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :

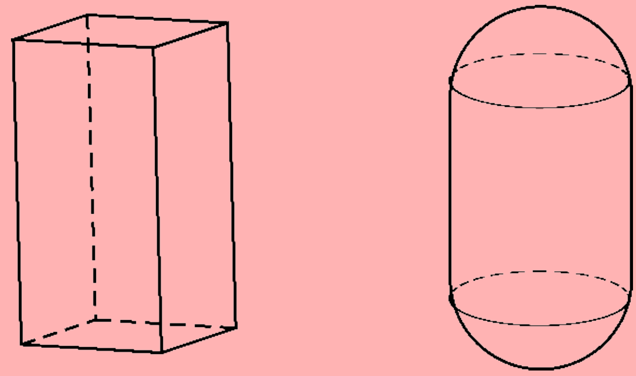
- $6x-2=-3+2x$
- $-11-15x=-4$
- $-\frac{x}{9}-12=-2$

Révisions

Ex 36 Polynésie, juin 2013

Sur un parking, une commune veut regrouper 6 conteneurs à déchets du même modèle A ou B. Les deux modèles sont fabriqués dans le même matériau qui a partout la même épaisseur.

le conteneur A — le conteneur B

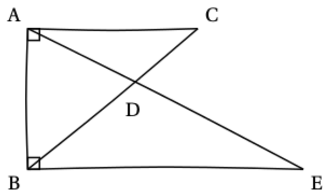


- le conteneur A est un pavé droit à base carrée de côté $1m$, et de hauteur $2m$.
- le conteneur B est constitué de deux demi-sphères de rayon $0{,}58m$ et d'un cylindre de même rayon et de hauteur $1{,}15m$.

1. (a) Vérifie que les 2 conteneurs ont pratiquement le même volume.
   (b) Quels peuvent être les avantages du conteneur A ?
2. On souhaite savoir quel est le conteneur le plus économique à fabriquer.
   (a) Calcule l'aire totale des 6 faces du conteneur A.
   (b) Vérifie que, pour le conteneur B, l'aire totale, arrondie à $0{,}1m^2$ près, est $8{,}4m^2$.
   (c) Quel est le conteneur le plus économique à fabriquer ? Justifie ta réponse.

Ex 37 Métropole, sept 2013

Voici une figure codée réalisée à main levée :



On sait que

- La droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB).
- La droite (EB) est perpendiculaire à la droite (AB).
- Les droites (AE) et (BC) se coupent en D.
- $AC = 2{,}4cm$; $AB = 3{,}2cm$; $BD = 2{,}5cm$ et $DC = 1{,}5cm$.

1. Réaliser la figure en vraie grandeur sur la copie.
2. Déterminer l'aire du triangle ABE.

Révisions

Ex 38 Calculs

Calculer les expressions suivantes :

- $\dfrac{5}{6} - \dfrac{4}{9}$
- $\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{15}$
- $\dfrac{19}{12} + \dfrac{18}{9}$

Révisions

Ex 39 Factoriser, identités

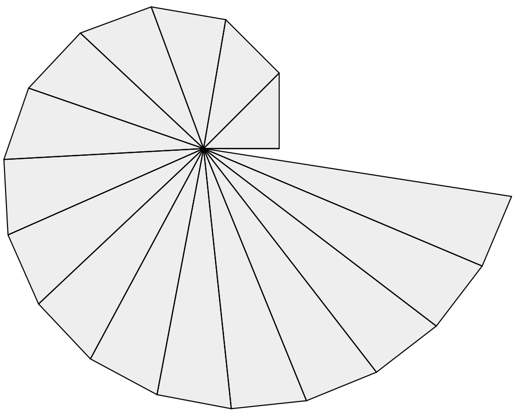
Factoriser en utilisant les identités remarquables

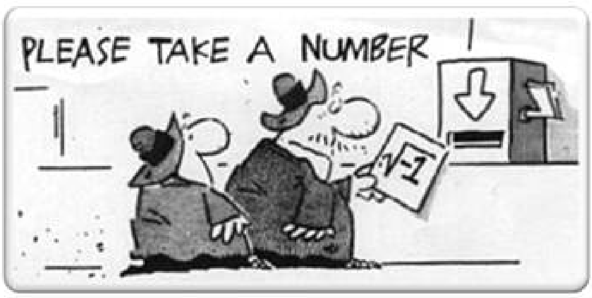
- $9a^2+18a+9$
- $b^2+12b+36$
- $64x^2+32x+4$
- $25y^2+90y+81$

Révisions

Chapitre VII

Racine carrée





A Racine carrée d'un nombre positif

Exercice 1 :

En utilisant la calculatrice, compléter le tableau suivant :

Nombres : x	4	49	121
Racine de x : $\sqrt{x}$			
Carré de la racine : $(\sqrt{x})^2$			

Non corrigé

Définition : Racine carrée d'un nombre

Soit a un nombre positif.
On appelle **racine carrée de a** (notée $\sqrt{a}$) le nombre positif dont le carré vaut a.

Exemple. $3^2 = 9$ donc la racine carrée de 9 est 3. On note alors $\sqrt{9} = 3$.

Exercice 2 : Appliquer la définition

À l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

Nombres	16	25	81	100	49	121	-4	4
Racines								

Non corrigé

Propriété : Racine carrée et nombre négatif

Pour tout nombre $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = a$ et $(\sqrt{a})^2 = a$. Puisqu'un carré est toujours positif, **un nombre négatif n'a pas de racine carrée**.

Exercice 3 : Éviter la confusion

Remplir le tableau suivant :

a	$2a$	a^2	$\frac{a}{2}$	$\sqrt{a}$
	8			
		256		
			$\frac{1}{2}$	

Non corrigé

B Comment résoudre une équation du type $x^2 = a$?

Propriété : Solutions de $x^2 = a$

Soit a un nombre positif ou nul, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
L'équation $x^2 = 0$ n'admet qu'une solution : $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$.

Hypothèse. Le nombre a étant positif, on l'écrit sous la forme $\sqrt{a}^2$. On montre alors que $x^2 = \sqrt{a}^2$ possède deux solutions.

Démonstration. On pose l'équation :

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & (\sqrt{a})^2 \\ x^2 - (\sqrt{a})^2 & = & 0 \end{array}$$

On reconnaît l'identité remarquable « produit de la somme par la différence ».

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

Un produit est nul si l'un des facteurs au moins est nul.

$$\begin{array}{ccc} x - \sqrt{a} = 0 & \text{ou} & x + \sqrt{a} = 0 \\ x = \sqrt{a} & \text{ou} & x = -\sqrt{a} \end{array}$$

Une équation du type $x^2 = a$ possède bien deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. □

Remarque. $x^2 = a$ avec a négatif n'admet aucune solution puisque $\sqrt{a}$ n'existe pas.

Méthode : Résoudre une équation

On veut résoudre l'équation $x^2 = 25$.

1. On calcule la racine de 25 : 5.
2. Comme les solutions sont $+\sqrt{25}$ et $-\sqrt{25}$ alors on écrit : les solutions sont $x = 5$ et $x = -5$.

Exemple. On résout $x^2 = 36$:

$$\begin{array}{ccc} & x^2 = 36 & \\ x = \sqrt{36} & \text{ou} & x = -\sqrt{36} \\ x = 6 & \text{ou} & x = -6 \end{array}$$

Exercice 4 : Résoudre une équation

Résoudre les équations suivantes :

a) $y^2 - 4 = 0$ b) $x^2 = 9$ c) $4x^2 + 12 = 0$ d) $(2x-3)^2 = 16$

Non corrigé

C Calculs faisant intervenir la racine carrée

Propriété : Racine carrée et opérations

Soit a et b deux nombres tels que $a > 0$ et $b \geqslant 0$ on peut alors écrire :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exercice 5 : Racines et opérations

Écrire sous la forme d'une seule racine puis calculer :

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ c) $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}$ e) $\sqrt{\dfrac{1}{18}} \times \sqrt{72}$

b) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ f) $\sqrt{\dfrac{8^2}{2^4}}$

Non corrigé

Remarque. Il faut connaître les carrés usuels : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144.

⚠ On ne parle pas ici de somme ou de différence qu'on ne peut pas regrouper ou séparer dans une racine :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

Il est possible de simplifier l'écriture d'une racine, comme par exemple $\sqrt{8}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{2\times 4}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{4}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\sqrt{450} &= \sqrt{2\times 225}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{225}\\ &= 15\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exercice 6 : Simplification de racine

1. Écrire ces racines sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un nombre entier :

   (a) $\sqrt{8}$ (b) $\sqrt{50}$ (c) $\sqrt{32}$

2. Simplifier l'écriture de ces expressions.

   (a) $\sqrt{8}+\sqrt{50}+\sqrt{32}$
   (b) $2\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt{32}$
   (c) $3\sqrt{125}-\sqrt{20}+2\sqrt{45}$

Non corrigé

Exercice 7 : Valeur exacte

ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 3\sqrt{5}cm$, $BC = 4\sqrt{5}cm$. Donner la valeur exacte de la longueur AC sous la forme $a\sqrt{5}$.

Non corrigé

Exercices

Ex 8 Racine carrée

Recopier et compléter :

a) $(...)^2 = 16$

b) $(...)^2 = 25$

c) $\sqrt{25} = ...$

d) $(-...)^2 = 36$

e) $\sqrt{9} = ...$

f) $\sqrt{(-3)^2} = ...$

g) $(0,1)^2 = ...$

h) $\sqrt{100} = ...$

i) $(0,8)^2 = ...$

j) $\sqrt{0,36} = ...$

Ex 9

Calculer la racine carrée des nombres suivants :
0 ; 4 ; 1 ; 100 ; 49 ; 25 ; 64 ; 36 ; 121 ; 9.

Ex 10 Racine carrée

Recopier et compléter :

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 16 \\ x^2 .... & = & 0 \\ x^2 ...(...)^2 & = & 0 \\ (x+...)(x-...) & = & 0 \end{array}$$

Or un produit est nul si ...

$x + ... = 0$ ou $x - ... = 0$

$x = ...$ ou $x = ...$

Ex 11 Résoudre

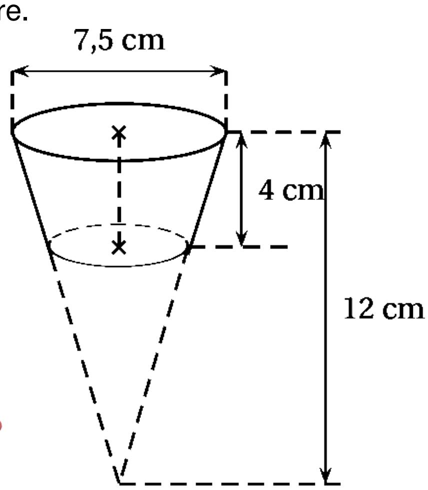
Résoudre les équations suivantes :
$x^2 = 4$; $x^2 - 9 = 0$; $4x^2 = 4$; $9x^2 - 16 = 0$.

Ex 12 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :
$x^2 = \frac{1}{4}$; $x^2 - \frac{16}{9} = 0$; $4t^2 = \frac{9}{4}$; $(x+1)^2 = 4$.

Ex 13 Asie, juin 2013

Un moule à muffins est constitué de 9 cavités. Toutes les cavités sont identiques. Chaque cavité a la forme d'un tronc de cône (cône coupé par un plan parallèle à sa base) représenté ci-contre. Les dimensions sont indiquées sur la figure.



1. Montrer que le volume d'une cavité est d'environ $125 cm^3$.
2. Léa a préparé 1 litre de pâte. Elle veut remplir chaque cavité du moule au $\frac{3}{4}$ de son volume.
   A-t-elle suffisamment de pâte pour les 9 cavités du moule ? Justifier la réponse.

Révisions

Ex 14 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :
$x^2 = 5$; $x^2 - \frac{10}{9} = 0$; $4t^2 - 6 = 0$; $(x+2)^2 = 3$.

Ex 15 Résoudre

Résoudre les équations suivantes :
$(x-1)^2 = 9$; $(x-4)^2 - 4 = -4$; $(2x-3)^2 - 2 = 10$; $\left(\frac{5}{3}x + 4\right)^2 + 4 = 10$.

Ex 16

Calculer la racine carrée des nombres suivants :
$\frac{1}{4}$; $\frac{9}{25}$; $\frac{36}{49}$; $\frac{16}{81}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{49}{64}$.

Ex 17

Calculer la racine carrée des nombres suivants en les écrivant sous la forme d'un quotient ou d'un produit :
400 ; 0,49 ; 3600 ; 0,04 ; 0,0081.

Ex 18

Sans calculatrice, calculer chacun de ces nombres :
$\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{18}\times\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$.

Ex 19

Sans calculatrice, calculer chacun de ces nombres :
$\left(\sqrt{5^2}\right)$; $\sqrt{8}\times\sqrt{8}$; $(-\sqrt{48})^2$; $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$.

Ex 20

Calculer les expressions suivantes :
$\sqrt{16+9}$; $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $\sqrt{100-36}$; $\sqrt{100}-\sqrt{36}$.
Compléter : $\sqrt{a+b}...\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b}...\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Ex 21

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers.
$A=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}$; $B=\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; $C=-5\sqrt{10}+4\sqrt{10}$; $D=3\sqrt{7}+\sqrt{7}$.

Ex 22

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers.
$A=2\sqrt{5}+4\sqrt{4\times 5}$; $B=\sqrt{3}-2\sqrt{9\times 3}$;
$C=-5\sqrt{10}+4\sqrt{40}$; $D=3\sqrt{7}-\sqrt{25\times 7}$.

Ex 23

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers.
$A=2\sqrt{125}+4\sqrt{45}$; $B=\sqrt{27}-2\sqrt{12}$;
$C=-5\sqrt{40}+4\sqrt{160}$; $D=3\sqrt{28}+\sqrt{63}$.

Ex 24 Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A.

a) Calcule la valeur exacte de la longueur du côté [BC] sachant que $AB=5cm$ et $AC=7cm$.

b) Calcule la valeur exacte de la longueur du côté [AB] sachant que $AC=6m$ et $BC=11m$.

Révisions

Ex 25

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}+c$ où a, b et c sont des nombres entiers.
$A=\sqrt{5}(3\sqrt{5}-4)$; $B=(3\sqrt{2}-4)^2$;
$C=(2-\sqrt{6})(3\sqrt{6}-4)$; $D=(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)$;

Ex 26 Triangle rectangle

Soit MNO un triangle rectangle en M. Les valeurs suivantes sont exactes et exprimées en cm : $MN=\sqrt{45}$, $NO=5\sqrt{5}$.
Calculer le périmètre exacte de ce triangle rectangle.

Révisions

Ex 27 Triangle rectangle

Soit un cercle de centre O et de rayon $5cm$. Le point A est un point de ce cercle, le point B est tel que le segment [AB] est un diamètre du cercle. Le point M appartient au cercle tel que $AM=4cm$.

a) Construis la figure.

b) Calcule la valeur exacte de BM. Rappelle les propriétés utiles.

Révisions

Ex 28 Ant-Guyane, sept 2007

$C=\sqrt{75}-6\sqrt{48}+11\sqrt{3}$. Écrire C sous la forme $a\sqrt{3}$.

Ex 29 Polynésie, sept 2007

Écrire C sous la forme $a\sqrt{6}$ où a est un nombre entier relatif : $C = \sqrt{96} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{150}$.

Ex 30 Am du Sud

On pose $C = 2\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 3\sqrt{200}$.
Calculer C. Présenter le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier.

Ex 31 Am du Sud, nov 2010

On donne les nombres suivants :

$A = \dfrac{927}{486 - 13 \times 8}$;
$B = \dfrac{3 \times 10^5 - 6 \times 10^3}{3 \times 10^{11}}$;

$C = \sqrt{\dfrac{442 - 7^2 \times 2{,}5}{5}}$;
$D = \sqrt{6} - \sqrt{5}$;
$E = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$.

1. Calculer A et donner un arrondi au centième près.
2. Donner l'écriture scientifique de B.
3. Calculer C.
4. Comparer les nombres D et E.

Ex 32 Am du Sud, nov 2010

On donne les expressions suivantes :
$A = (3\sqrt{2} + 5)^2$; $B = (\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)$
Pour les questions suivantes, vous indiquerez au moins une étapes de calcul.

1. Écrire A sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres entiers.
2. Calculer B.

Ex 33 Am du Nord, juin 2010

1. Écrire la fraction $\dfrac{84}{126}$ sous forme irréductible en détaillant les calculs.
2. Donner l'écriture scientifique du nombre $\dfrac{6 \times 10^{12} \times 35 \times 10^{-4}}{14 \times 10^3}$ (avec au moins une étapes de calcul).
3. Écrire l'expression $\sqrt{20} - \sqrt{15^2 \times 5} + 2\sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier relatif. (indiquer toutes les étapes de calcul).
4. Développer l'expression $(2x - 3)^2$.
5. Donner la valeur décimale arrondie au dixième du nombre $\sqrt{5 + 3} - 6\sqrt{11}$.
6. Donner la forme factorisée de l'expression $(7x + 2)^2 - 25$.

Ex 34 Nouv-Cal, déc 2009

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre ;
- Lui ajouter 3 ;
- Multiplier cette somme par 4 ;
- Enlever 12 au résultat obtenu.

1. Montrer que si le nombre choisi au départ est 2, on obtient comme résultat 8.
2. Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :
   - Le nombre choisi est $\dfrac{1}{3}$.
   - Le nombre choisi est $\sqrt{5}$.
3. (a) À votre avis, comment peut-on passer, en une seule étape, du nombre choisi au départ au résultat final ?
   (b) Démontrer votre réponse.
   Dans cette question, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.

Ex 35 Pondichéry, avril 2006

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont données en cm.
La mesure du côté du carré est $3+\sqrt{3}$. Les dimensions du rectangle sont $\sqrt{72}+3\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.
Vérifier que l'aire des deux polygones sont égales.

Ex 36 Repère orthonormé, Pythagore

1. Dans un repère orthonormé $(Ox;Oy)$ d'unité $1cm$, placer les points suivants : $A(-3;4)$; $B(5;4)$ et $C(-2;-3)$.
2. Calculer les longueurs exactes AB, AC et BC.

Révisions

Ex 37 Groupe Est, sept 2003

1. Dans un repère orthonormé $(Ox;Oy)$ d'unité $1cm$, placer les points suivants :

$$A(-4;-2) \text{ ; } B(-1;-5) \text{ et } C(4;0).$$

2. Montrer que $AC = 2\sqrt{17}$.

Ex 38 Métro, juin 2014

Dans ce questionnaire à choix multiples, pour chaque question, des réponses sont proposées, une seule est exacte. Pour chacune des questions, écrire le numéro de la question et recopier la bonne réponse. Aucune justification n'est attendue.

Question 1 Quand on double le rayon d'une boule, son volume est multiplié par :

a) 2 | b) 4 | c) 6 | d) 8

Question 2 Une vitesse égale à $36km.h^{-1}$ correspond à :

a) $10m.s^{-1}$
b) $60m.s^{-1}$
c) $100m.s^{-1}$
d) $360m.s^{-1}$

Question 3 Quand on divise $\sqrt{525}$ par 5, on obtient :

a) $21\sqrt{5}$
b) $5\sqrt{21}$
c) $\sqrt{21}$
d) $\sqrt{105}$

Question 4 On donne : $1To$(téraoctet) = 10^{12} octets et $1Go$(gigaoctet) = 10^9 octets. On partage un disque dur de $1{,}5To$ en dossiers de $60Go$ chacun. Le nombre de dossier obtenus est égal à :

a) 25
b) $1\,000$
c) 4×10^{22}
d) $2{,}5\times10^{19}$.

Un point méthode pour l'exercice suivant

On veut factoriser un polynôme du second degré :

$$2x^2+2x-12$$

Ce polynôme n'est visiblement pas une identité remarquable mais on va tout de même utiliser les identités remarquables...

On commence par factoriser par 2 car il est plus simple de travailler avec un polynôme dont le coefficient du carré de x est 1.

$$2x^2+2x-12 = 2(x^2+x-6)$$

On identifie les deux premiers termes comme le début d'une identité remarquable : a^2 et $2ab$.

$$\begin{aligned}2x^2+2x-12 &= 2(x^2+x-6)\\ &= 2(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}-6)\end{aligned}$$

On ajoute et on retranche b^2 pour former une identité.

$$\begin{aligned}
2x^2+2x-12 &= 2(x^2+x-6)\\
&= 2(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}-6)\\
&= 2(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-6)\\
&= 2((x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6)\\
&= 2((x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4})
\end{aligned}$$

On reconnaît encore une identité remarquable a^2-b^2 avec $b=\frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned}
2x^2+2x-12 &= 2(x^2+x-6)\\
&= 2(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}-6)\\
&= 2\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\right)\\
&= 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-6\right)\\
&= 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)\\
&= 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)\\
&= 2\left(\left(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\right)\\
&= 2(x-2)(x+3)
\end{aligned}$$

Cette forme est utile par exemple pour résoudre $2x^2+2x-12=0$ par exemple.

Ex 39

Résoudre :

$x^2+8x+7=0$; $x^2-10x+9=0$; $3x^2-6x-9=0$.

Pour aller plus loin

Chapitre VIII

Notion de fonction

Ce qui ressemble à une onde est en réalité la surface (« courbe en 3D ») représentative de la fonction f telle que $f(x;y) = 2 \times \dfrac{cos(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}$, les deux sphères représentées ne sont pas les surfaces représentatives de fonctions mais un ensemble de points satisfaisants une équations du type $x^2+y^2+(z-z_0)^2 = r^2$.

Activités d'introduction

Activité 1 La fonction, un procédé

Prenons le cas de ce programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Calculer son double.
- Ajouter trois au résultat.
- Calculer le carré du résultat.

1. Tester ce programme avec le nombre 3.
   (a) Combien de résultats différents obtient-on ?
   (b) Ce programme peut-être vu comme une fonction. Compléter :
   Une .... est un procédé qui à un nombre en associe ..... autre. Ce dernier nombre est appelé image.
2. Tester ce programme avec le nombre -6.
   (a) Que peut-on constater ?
   On dit que -6 est un antécédent de ce nombre.
   (b) Recopier et compléter :
   Un nombre peut avoir ....., ... ou .... antécédents par une fonction, mais un nombre ne peut avoir ...... , ... image par une fonction.
3. Donner une expression à ce programme. Le nombre de départ s'appelant x et la fonction f :

$$f : x \longmapsto \text{................}$$

   Se lit
   - f qui à x associe ....
   ou encore
   - f telle que $f(x) =$ ....

Activité 2 La fonction, un procédé (Algorithmique)

Prenons le cas de ce programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Calculer son double.
- Ajouter trois au résultat.
- Calculer le carré du résultat.

À l'aide d'un ordinateur, avec le logiciel de votre choix : LibreOffice Calc, AlgoBox ou encore IDLE Python, coder ce programme de calcul.
Compléter le tableau de valeurs suivant :

Nombres de départ	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Résultats									

Compléter :
Par une fonction, un nombre ne possède qu'une seule ....
Par une fonction, un nombre possède un, plusieurs ou encore aucun ....

Activité 3 Tableau de valeurs et représentation graphique LibreOffice Calc

Utiliser le logiciel LibreOffice Calc pour tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f : x \mapsto (x-3)^2 - 9$ pour x allant de -3 à 10.

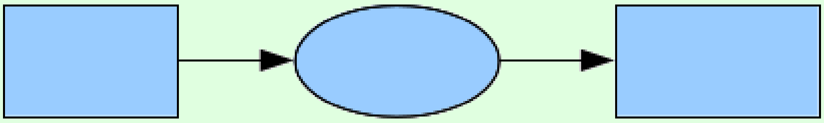
A Généralités sur les fonctions

1 Notion de fonction

Définition : Fonction

Une fonction est **un procédé qui à un nombre en associe un autre** et un seul.

La fonction, un procédé



$f : x \mapsto f(x)$

Exemple. $f : x \mapsto x^2$ est la fonction qui à x associe x^2, on note également f la fonction telle que $f(x) = x^2$. $f(-5) = 25$.

Exercice 1 :

Définir la fonction de x traduisant chaque situation.
ex : La fonction f qui au côté d'un carré associe son périmètre est telle que $f(x) = 4x$.

a) g, l'aire d'un carré en fonction de son côté.

b) h, l'aire d'un rectangle de 3cm de largeur en fonction de sa longueur en cm.

c) i, le périmètre d'un disque en fonction de son rayon.

d) j, l'aire d'un rectangle dont la longueur est le triple de la largeur.

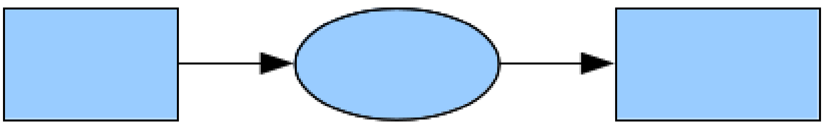
Non corrigé

2 Image et antécédent

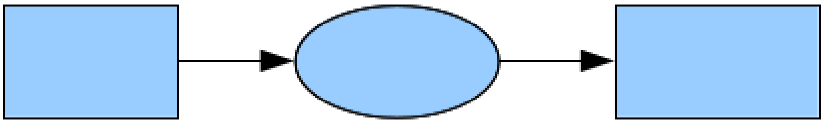
Définition : Image et antécédent

$f(x)$ est **l'image unique** de x par la fonction f. x est **l'un des antécédents** de $f(x)$ par la fonction f.

- l'image d'un nombre par une fonction :



- antécédent(s) d'un nombre par une fonction :



Soit $f : x \mapsto x^2$, $f(-5) = 25$ donc 25 est l'image de -5 par f, alors que -5 est un antécédent de 25 par f, le nombre 5 l'est aussi.

Exercice 2 : Image, antécédents et notation

Écrire une égalité traduisant chaque phrase.

a) 4 a pour image 5 par la fonction f.

b) L'image de 19 par la fonction j est -4.

c) 4 a pour antécédent 5 par la fonction f.

d) - 3 a pour image 1 par la fonction g.

e) - 3 a pour antécédent 0 par la fonction g.

f) L'image de - 3 par la fonction k est - 13.

Non corrigé

Propriété : Image et antécédent(s) par une fonction

Un nombre peut avoir **plusieurs antécédents** par une fonction, mais un nombre ne peut avoir qu'**une seule image** par une fonction.

Exercice 3 : Images et antécédents, tableau de valeurs

x	-5	-3	0	1	3
$f(x)$	5	1	-2	1	5

Compléter :

D'après le tableau,

- Les antécédents de 1 par la fonction f sont ....
- L'image de 0 par f est ....
- Les antécédents de .. par la fonction f sont -5 et 3.
- L'image de .... par f est 5.

Non corrigé

Remarque. La recherche de l'image d'un nombre par une fonction se fait par un calcul : on remplace x (ou une autre lettre) par le nombre.

La recherche d'un antécédent se fait par la résolution d'une équation (recherche du nombre qui a donné le résultat). Si $f(x) = y$,

- alors y est l'image de x par f.
- alors x est un antécédent de y par f.

Méthode : Recherche de l'image de 5 par la fonction $f : x \mapsto 2(x-3)$

On calcule $f(5)$:
$f(5) = 2(5-3) = 2 \times 2 = 4$
L'image de 5 par la fonction f est 4.

Méthode : Recherche des antécédents de 10 par la fonction $f : x \mapsto 2(x-3)$

On recherche x tel que $f(x) = 10$.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & = & 10 \\ 2(x-3) & = & 10 \\ 2x-6 & = & 10 \\ 2x & = & 16 \\ x & = & 8 \end{array}$$

L'antécédent de 10 par la fonction f est 8. On peut remarquer que **dans ce cas**, il n'y en a qu'un.

Exercice 4 : Image et antécédents, calculs

Soit f la fonction telle que $f(x) = x^2 - 4$.

a) Calculer l'image de 4 par la fonction f.

b) Calculer les antécédents de -4 par la fonction f.

c) Calculer l'image de 10 par la fonction f.

d) Calculer les antécédents de -8 par la fonction f.

e) Calculer les antécédents de 12 par la fonction f.

Non corrigé

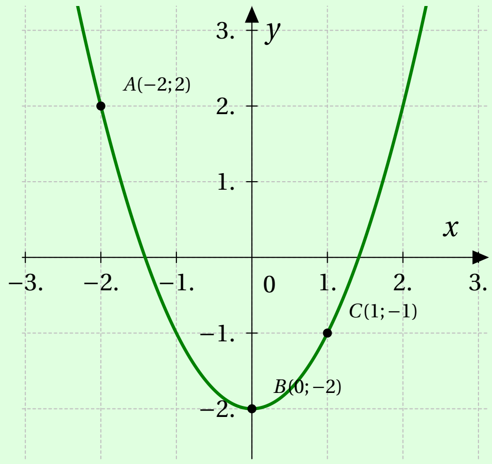
B Représentation graphique

Définition : Représentation graphique d'une fonction

La représentation graphique de la fonction f est l'**ensemble des points de coordonnées** $(x; f(x))$.

Remarque. Cet ensemble de points est appelé également courbe représentative de f.

Représentation graphique

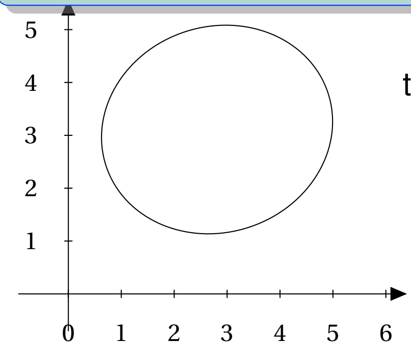


On représente ici g telle que $g(x) = x^2 - 2$.
On remarque que :

$$g(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

ce qui veut dire que le point $A(-2;2)$ appartient à la courbe représentative de g.

Exercice 5 : Courbe et fonction

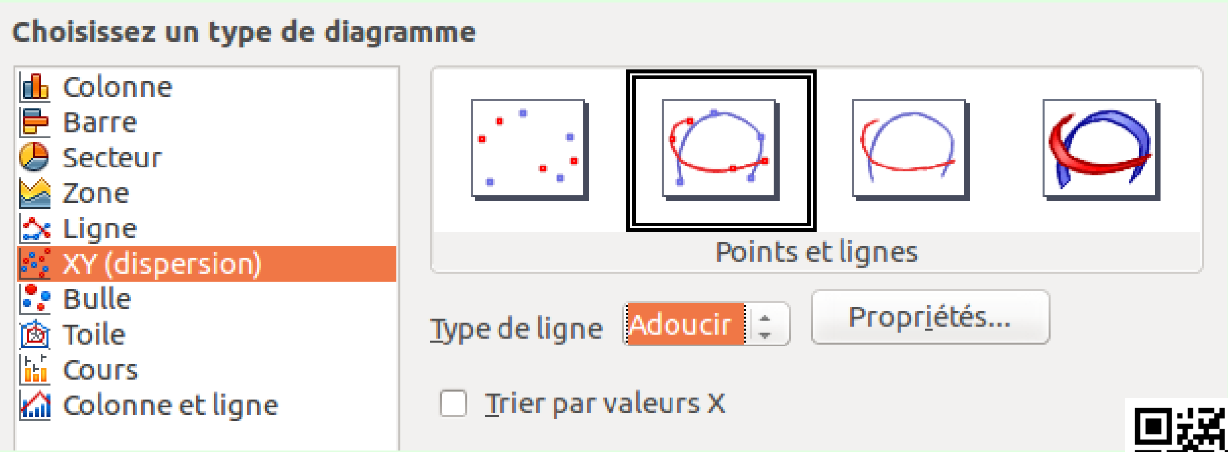


Expliquer pourquoi la courbe ci-contre ne représente pas une fonction.

Non corrigé

Méthode : Tracer la courbe représentative d'une fonction avec un tableur

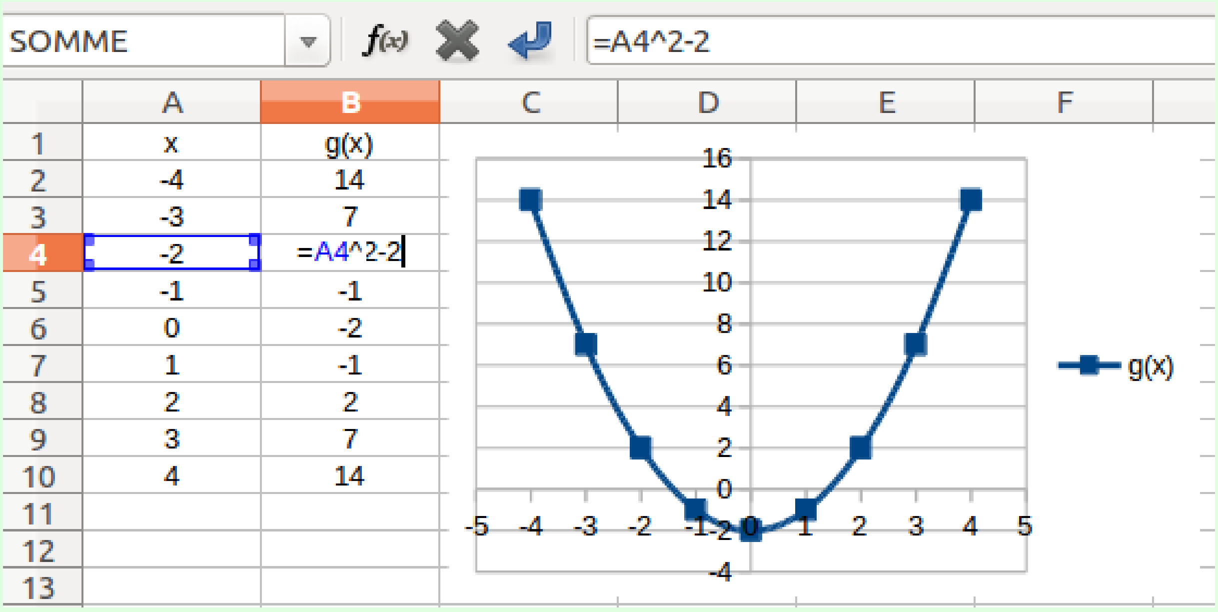
- Sélectionner les deux colonnes. Par défaut, le graphique tracé représente les données de la deuxième colonne en ordonnée et de la première en abscisse.
- Cliquer sur l'icône « diagramme » 
- Choisir XY et paramétrer les options de la courbe : points et lignes, adoucir...



- Cliquer sur terminer.

Avec le tableur

On veut tracer la courbe représentative de la fonction g, telle que $g(x) = x^2 - 2$.



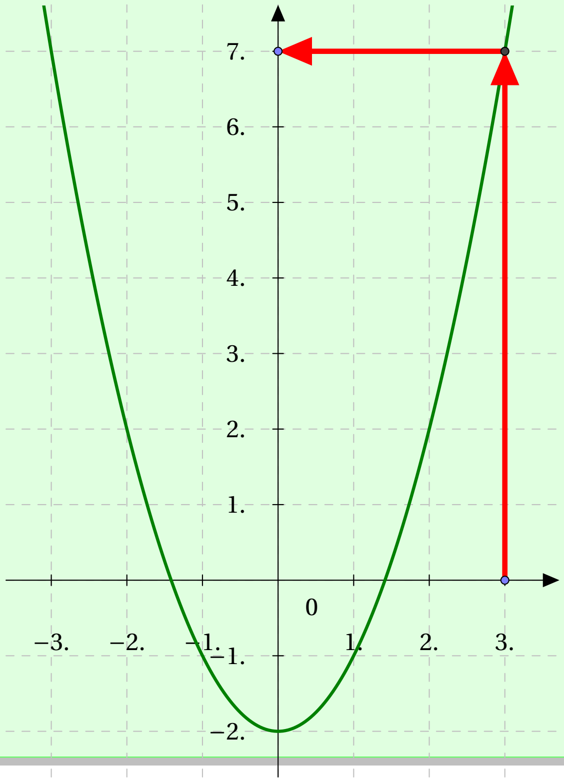
	A	B
1	x	g(x)
2	-4	14
3	-3	7
4	-2	=A4^2-2
5	-1	-1
6	0	-2
7	1	-1
8	2	2
9	3	7
10	4	14
11		
12		
13		

Exercice 6 : Utiliser un tableur

À l'aide d'un tableur, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2x - 3$ pour x compris entre -2,5 et 5.

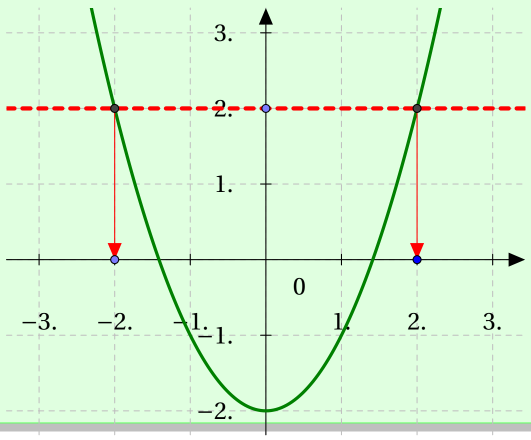
Non corrigé

Méthode : Recherche graphique de l'image d'un nombre par une fonction



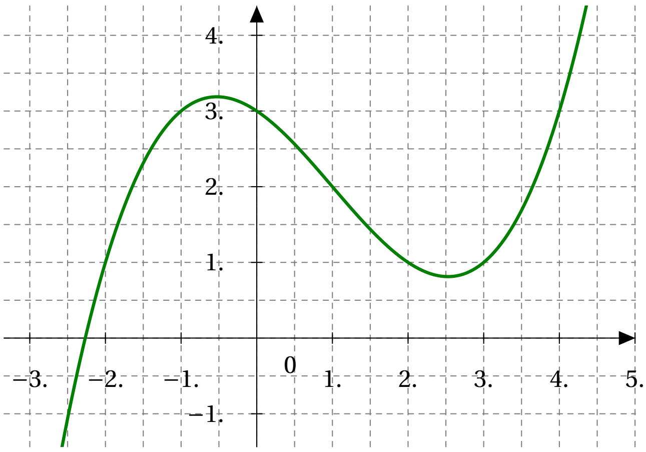
Rechercher l'image d'un nombre par exemple 3 par une fonction, c'est en réalité chercher le point de la courbe dont l'abscisse est 3 puis déterminer son ordonnée. Cette ordonnée est l'image de 7. L'image de 3 par g est 7.

Méthode : Recherche graphique d'antécédents d'un nombre par une fonction



Rechercher des antécédents d'un nombre par exemple 2 revient à déterminer l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est 2. Les antécédents de 2 par la fonction sont 2 et -2. On remarque ici que tout nombre inférieur à -2 n'a pas d'antécédents par cette fonction.

Exercice 7 : Graphiquement



Par la fonction f dont la courbe est tracée ci-dessus, déterminer :

a) L'image de 2.

b) L'image de 1.

c) Les antécédents de 1.

d) L'image de 4.

e) Les antécédents de -1.

f) Les antécédents de 3.

Non corrigé

Exercices

Ex 8

Définir la fonction de x traduisant chaque situation.

a) g, l'aire d'un triangle dont la base est de 6cm en fonction de sa hauteur en cm.

b) h, l'aire d'un rectangle de 5cm de largeur en fonction de sa longueur en cm.

c) i, le périmètre d'un demi-disque en fonction de son rayon.

d) j, l'aire d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur.

Ex 9 Image, antécédents et notation

Écrire une égalité traduisant chaque phrase.

a) 2 a pour image 5 par la fonction f.

b) L'image de 2 par la fonction g est -4.

c) 4 a pour image 3 par la fonction h.

d) L'image de 10 par la fonction i est -4.

e) 4 a pour antécédent 5 par la fonction j.

f) - 2 a pour image 0 par la fonction k.

g) 4 a pour antécédent 6 par la fonction l.

h) - 4 a pour antécédent 0 par la fonction m.

i) L'image de - 3 par la fonction n est - 13.

Ex 10 Images et antécédents

x	-12	-7	3	4	7	15
$f(x)$	5	3	-2	-7	4	3

1. Déterminer :
   $g(3)$; $g(4)$; $g(-7)$; $g(-12)$.
2. Déterminer x tel que :
   $g(x) = -2$; $g(x) = 4$; $g(x) = 3$.

Ex 11 Images et antécédents

x	-10	-5	-3	0	1	2	7	10
$f(x)$	-5	0	1	2	5	2	1	0

1. Donner le ou les image(s) de 1 par la fonction f.
2. Compléter : $f(0) = ...$ et $f(...) = -5$.
3. Donner le ou les antécédent(s) de 2 par f.

Ex 12 Tracer une courbe

Après avoir complété ce tableau de valeur, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -0{,}2x^3 + 2$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

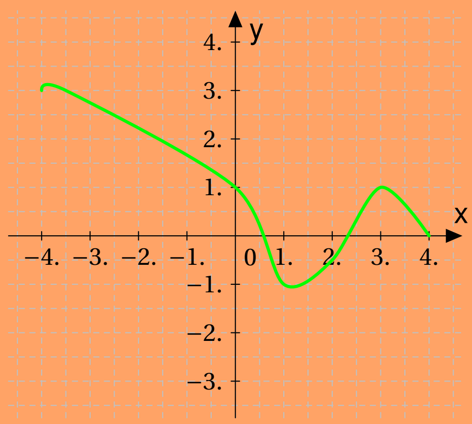
Ex 13 Polynésie, sept 2003

$A = \frac{5}{4} + \frac{11}{4} \times \frac{20}{33}$; $B = \frac{1}{12} \div \left(2 - \frac{7}{3}\right)$.

1. Calculer A et B en détaillant les calculs.
   Donner le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.
2. $C = 15 \times (10^7)^2 \times 3 \times 10^{-9}$.
   Calculer C et donner le résultat sous la forme $a \times 10^n$ et avec la notation scientifique.

Révisions

Ex 14



Voici la copie d'un élèves. Il a répondu à des questions portant sur la représentation graphique de la fonction f ci-dessus.

Corriger la copie de cet élève en commentant les erreurs commises.

1) L'image de 1 par la fonction f est 0.

2) L'antécédent de 1 par la fonction f est 0.

3) -2 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

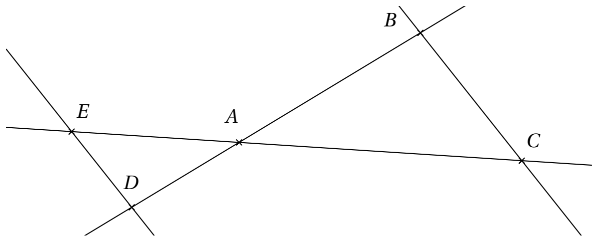
4) Le nombre 0 possède trois antécédents par la fonction f.

5) L'antécédent de 2 par la fonction f est -2.

6) $f(-0,5) = 2$.

7) $f(2) = -0,5$.

Ex 15



Sur la figure ci-dessus, les droites (BC) et (DE) sont parallèles. On sait également que $AB = 3cm$, $AC = 3{,}75cm$, $ED = 1{,}3cm$ et $EA = 2{,}2cm$.

Le but de cet exercice est de calculer les longueurs DA et BC.

Voici ce qu'a écrit un élève, trouver les erreurs et refaire cet exercice en les corrigeant.

Comme E, A, C d'une part et comme D, A, B d'autre part sont alignés dans cet ordre, alors d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{ED}{BC}$$

$$\frac{3}{AD} = \frac{3{,}75}{2{,}2} = \frac{1{,}3}{BC}$$

On en déduit que :

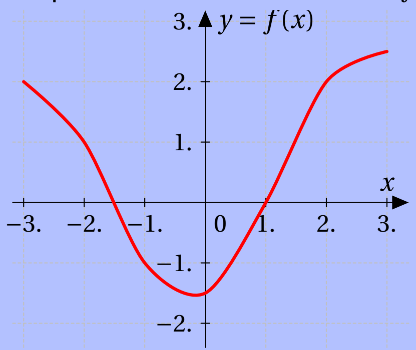
$$AD = \frac{3 \times 2{,}2}{3{,}75} \qquad BC = \frac{2{,}2 \times 1{,}3}{3{,}75}$$

$$AD \simeq 1{,}76 \text{ cm} \qquad BC \simeq 0{,}76 \text{ cm}$$

Révisions

Ex 16 Images et antécédents

Ci-dessus la représentation de la fonction f.



1. Donner une valeur approchée de l'image de -2 par f.
2. Donner si possible le(s) antécédent(s) de 1 par f.
3. Donner si possible le(s) antécédent(s) de -2 par f.
4. Donner si possible le(s) antécédent(s) de $2{,}5$ par f.
5. Compléter :
   $f(1) = ...,\ f(...) = 2$ et $f(...) = 2$

Ex 17 Image et antécédents, calculs

Soit f la fonction telle que $f(x) = x^2 + 4$.

a) Calculer l'image de 4 par la fonction f.

b) Calculer les antécédents de 4 par la fonction f.

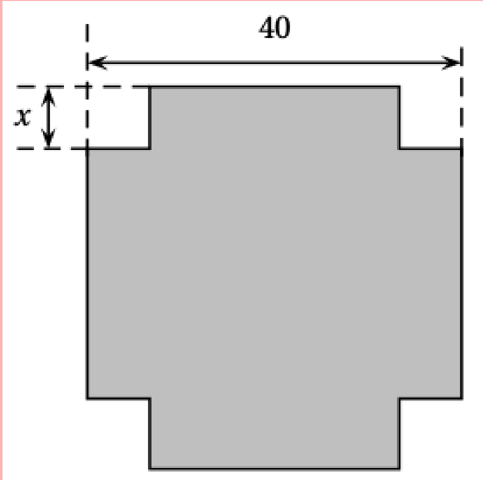
c) Calculer l'image de 10 par la fonction f.

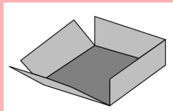
d) Calculer les antécédents de 8 par la fonction f.

e) Calculer les antécédents de 2 par la fonction f.

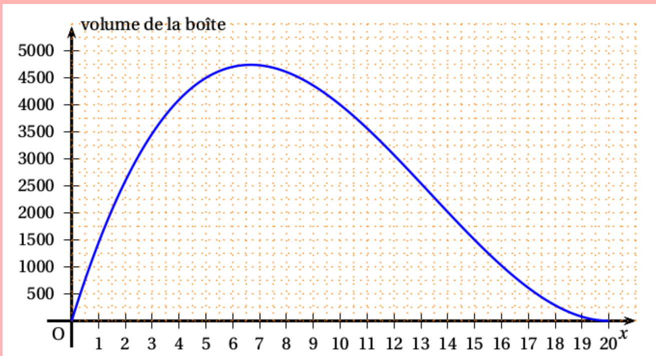
Ex 18 Am du Nord, juin 2013

On dispose d'un carré de métal de $40cm$ de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté x et on relève les bords par pliage.



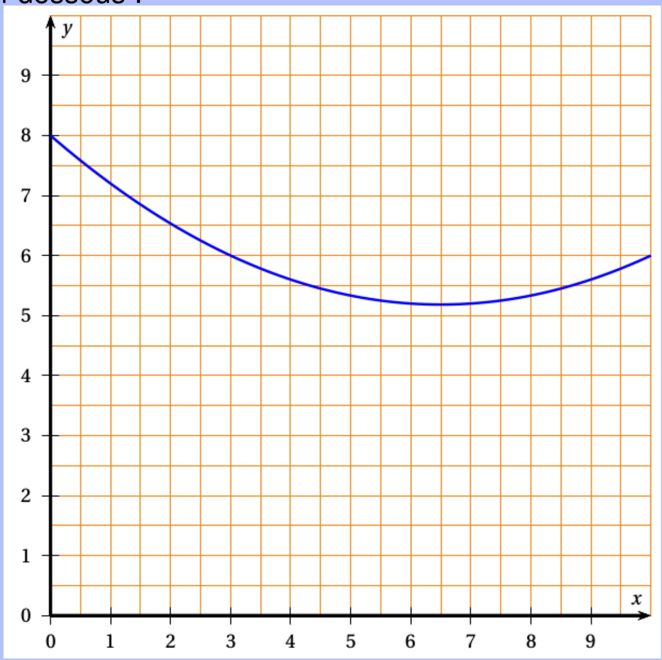


1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. On donne $x = 5cm$. Calculez le volume de la boîte.
3. Le graphique suivant donne le volume de la boîte en fonction de la longueur x.
   On répondra aux questions à l'aide du graphique ci-dessous.
   (a) Pour quelle valeur de x, le volume de la boîte est-il maximum ?
   (b) On souhaite que le volume de la boîte soit $2000cm^3$.
   Quelles sont les valeurs possibles de x ?



Ex 19 Polynésie, juin 2013

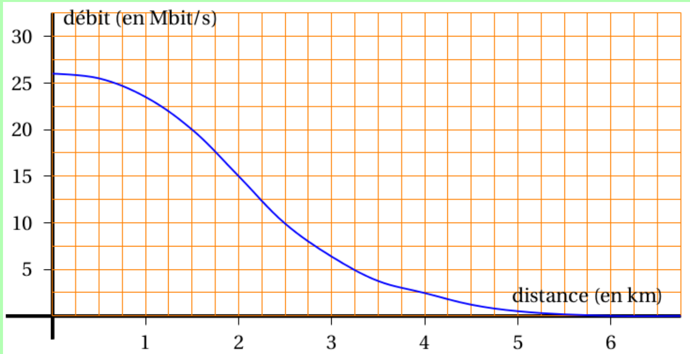
Pour cet exercice, on utilise uniquement la courbe donnée ci-dessous qui représente une fonction f. En laissant apparaître les tracés utiles sur le graphique ci-dessous :



1. Donne une valeur approchée de $f(2)$.
2. Donne l'(ou les) antécédent(s) de 5 par la fonction f.
3. Place, sur la courbe de la fonction f un point S qui te semble avoir la plus petite ordonnée.
4. Par lecture graphique, donne des valeurs approchées des coordonnées de ton point S.

Ex 20 Asie, juin 2013

Le débit d'une connexion internet varie en fonction de la distance du modem par rapport au central téléphonique le plus proche. On a représenté ci-dessous la fonction qui, à la distance du modem au central téléphonique (en kilomètres), associe son débit théorique (en mégabits par seconde).



1. Marie habite à $2{,}5 km$ d'un central téléphonique. Quel débit de connexion obtient-elle ?
2. Paul obtient un débit de $20 Mbits/s$. À quelle distance du central téléphonique habite-t-il ?
3. Pour pouvoir recevoir la télévision par internet, le débit doit être au moins de $15 Mbits/s$.
   À quelle distance maximum du central doit-on habiter pour pouvoir recevoir la télévision par internet ?

Ex 21 Métropole, sept 2012

La copie d'écran ci-dessous montre le travail qu'a effectué Camille à l'aide d'un tableur à propos des fonctions g et h définies par : $g(x) = 5x^2 + x - 7$ et $h(x) = 2x - 7$.

Elle a recopié vers la droite les formules qu'elle avait saisies dans les cellules B2 et B3.

B2 $f(x)$ Σ = =5*B1^2+B1-7

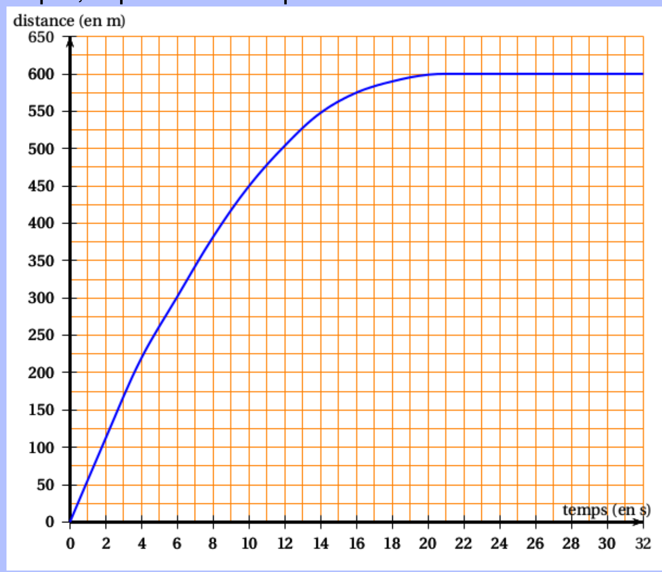
	A	B	C	D	E	F
1	x	-2	-1	0	1	2
2	g(x)=5x²+x-7	11	-3	-7	-1	15
3	h(x)=2x-7	-11	-9	-7	-5	-3
4						

1. Donner un nombre qui a pour image -1 par la fonction g.
2. Écrire les calculs montrant que : $g(-2) = 11$.
3. Quelle formule Camille a-t-elle saisie dans la cellule B3 ?
4. (a) Déduire du tableau une solution de l'équation $5x^2 + x - 7 = 2x - 7$.

   (b) Cette équation a-t-elle une autre solution que celle trouvée grâce au tableur ?

Ex 22 Métropole, juin 2012

En phase d'atterrissage, à partir du moment où les roues touchent le sol, l'avion utilise ses freins jusqu'à l'arrêt complet. Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue par l'avion sur la piste (en mètres) en fonction du temps (en secondes) à partir du moment où les roues touchent le sol. En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :



1. Quelle distance l'avion aura-t-il parcourue $10s$ après avoir touché le sol ?
2. Expliquer pourquoi au bout de $22s$ et au bout de $26s$ la distance parcourue depuis le début de l'atterrissage est la même.
3. À partir du moment où les roues touchent le sol, combien de temps met l'avion pour s'arrêter ?

Ex 23 Asie, juin 2014

Une corde de guitare est soumise à une tension T, exprimée en Newton (N), qui permet d'obtenir un son quand la corde est pincée. Ce son plus ou moins aigu est caractérisé par une fréquence f exprimée en Hertz (Hz).

La fonction qui à une tension T associe sa fréquence est définie par la relation : $f(T) = 20\sqrt{T}$. On donne ci-dessous la représentation graphique de cette fonction.

1. Déterminer graphiquement une valeur approchée de la tension à appliquer sur la corde pour obtenir un « La3 ».
2. Déterminer par le calcul la note obtenue si on pince la corde avec une tension de $220N$ environ.
3. La corde casse lorsque la tension est supérieure à $900N$. Quelle fréquence maximale peut-elle émettre avant de casser ?

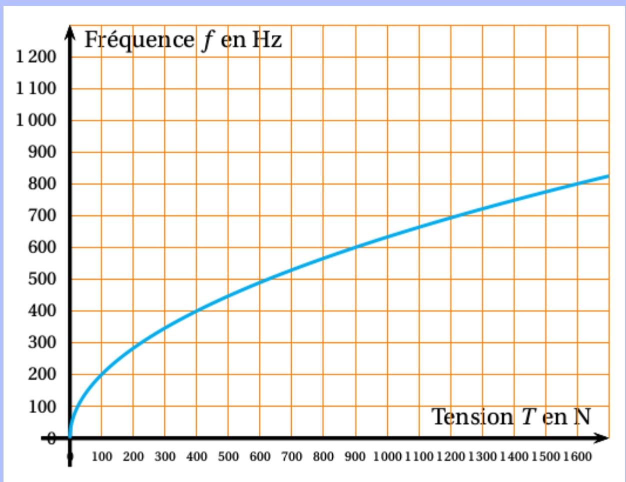


Tableau des fréquences (en Hertz) de différentes notes de musique

Notes	Do2	Ré2	Mi2	Fa2	Sol2	La2	Si2	Do3	Ré3	Mi3	Fa3	Sol3	La3	Si3
Fréquences (en Hz)	132	148,5	165	176	198	220	247,5	264	297	330	352	396	440	495

Ex 24 Am, nov 2013

Dans cet exercice, on considère le rectangle ABCD ci-contre tel que son périmètre soit égal à $31cm$.

1. (a) Si un tel rectangle a pour longueur $10cm$, quelle est sa largeur ?

   (b) Proposer une autre longueur et trouver la largeur correspondante.

   (c) On appelle x la longueur AB.
   En utilisant le fait que le périmètre de ABCD est de $31cm$, exprimer la longueur BC en fonction de x.

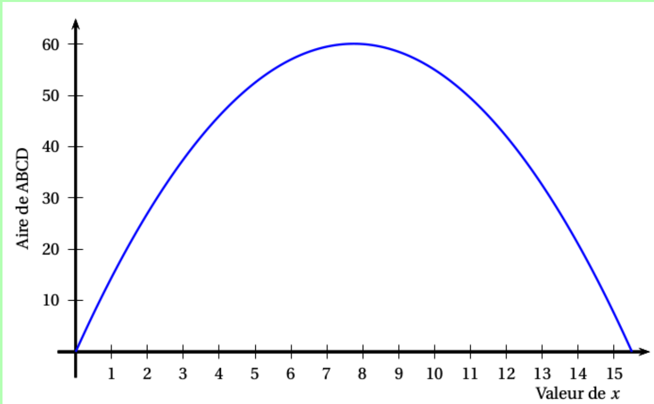
   (d) En déduire l'aire du rectangle ABCD en fonction de x.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = x(15{,}5 - x)$.

   (a) Calculer f(4).

   (b) Vérifiez par le calcul qu'un antécédent de 52,5 est 5.

3. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté l'aire du rectangle ABCD en fonction de la valeur de x.



   À l'aide de ce graphique, répondre aux questions suivantes en donnant des valeurs approchées :

   (a) Quelle est l'aire du rectangle ABCD lorsque x vaut $3cm$?

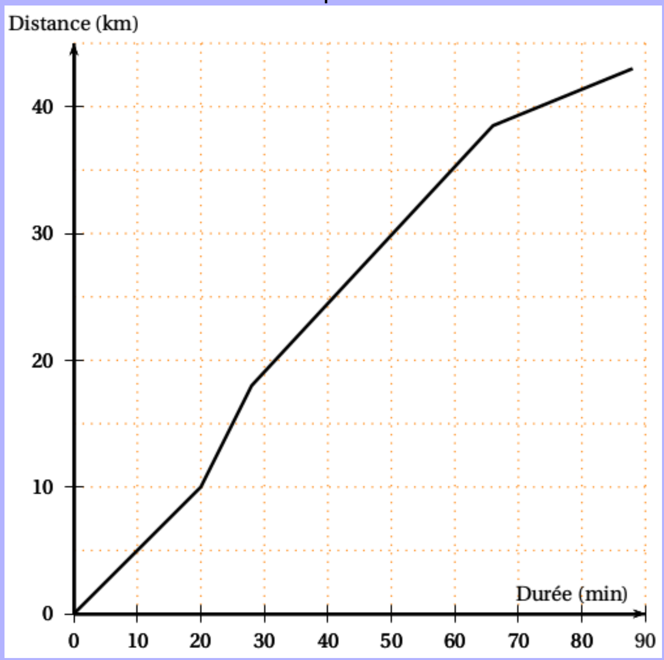
   (b) Pour quelles valeurs de x obtient-on une aire égale à $40cm^2$?

   (c) Quelle est l'aire maximale de ce rectangle ? Pour quelle valeur de x est-elle obtenue ?

4. Que peut-on dire du rectangle ABCD lorsqu'AB vaut $7{,}75cm$?

Ex 25 Métropole, sept 2014

Cédric s'entraîne pour l'épreuve de vélo d'un triathlon. La courbe ci-dessous représente la distance en kilomètres en fonction du temps écoulé en minutes.

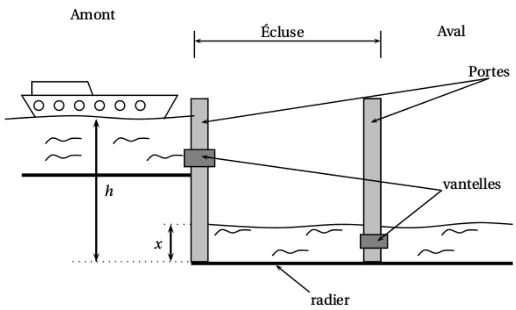


Pour les trois premières questions, les réponses seront données grâce à des lectures graphiques. Aucune justification n'est attendue sur la copie.

1. Quelle distance Cédric a-t-il parcourue au bout de 20 minutes ?
2. Combien de temps a mis Cédric pour faire les 30 premiers kilomètres ?
3. Le circuit de Cédric comprend une montée, une descente et deux portions plates. Reconstituer dans l'ordre le trajet parcouru par Cédric.
4. Calculer la vitesse moyenne de Cédric (exprimée en km/h) sur la première des quatre parties du trajet.

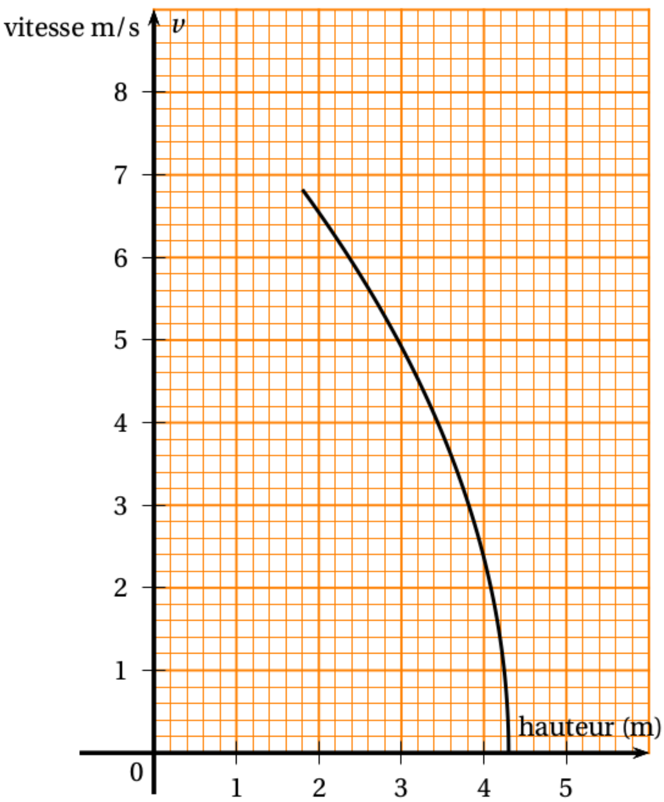
Ex 26 Am du Nord, juin 2014

On étudie plus précisément le remplissage d'une écluse pour faire passer une péniche de l'amont vers l'aval. Principe : Il s'agit de faire monter le niveau de l'eau dans l'écluse jusqu'au niveau du canal en amont afin que l'on puisse ensuite faire passer la péniche dans l'écluse. Ensuite, l'écluse se vide et le niveau descend à celui du canal en aval. La péniche peut sortir de l'écluse et poursuivre dans le canal en aval.



Toutes les mesures de longueur sont exprimées en mètres.
On notera h la hauteur du niveau de l'eau en amont et x la hauteur du niveau de l'eau dans l'écluse.
Ces hauteurs sont mesurées à partir du radier (fond) de l'écluse. (voir schéma ci-dessus). Lorsque la péniche se présente à l'écluse, on a : $h = 4{,}3m$ et $x = 1{,}8m$.
La vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle (vanne) est donnée par la formule suivante : $v = \sqrt{2g(h-x)}$ où $g = 9{,}81 m.s^{-2}$ (accélération g en mètre par seconde au carré noté $m.s^{-2}$) et v est la vitesse (en mètre par seconde noté $m.s^{-1}$)

1. Calculer l'arrondi à l'unité de la vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle à l'instant de son ouverture. (On considère l'ouverture comme étant instantanée).
2. Pour quelle valeur de x, la vitesse d'écoulement de l'eau sera-t-elle nulle ? Qu'en déduit-on pour le niveau de l'eau dans l'écluse dans ce cas ?
3. Le graphique ci-dessous représente la vitesse d'écoulement de l'eau par la vantelle en fonction du niveau x de l'eau dans l'écluse. Déterminer, par lecture graphique, la vitesse d'écoulement lorsque la hauteur de l'eau dans l'écluse est de $3{,}4m$.



Chapitre IX

Angles inscrits et polygones réguliers

Le Pentagone (en anglais The Pentagon) est un bâtiment qui se trouve à Arlington en Virginie, près de Washington, la capitale fédérale des États-Unis. Cet édifice abrite le quartier général du département de la Défense. En 2009, plus de 26 000 personnes y travaillent, parmi lesquelles des civils et des militaires. Son nom provient de la forme de son plan, un pentagone.

Cet immeuble de cinq étages, inauguré le 15 janvier 1943 est le plus vaste immeuble de bureaux du monde, avec ses 28 kilomètres de couloirs. Constitué de cinq anneaux concentriques, il a été construit avec du béton renforcé par une armature d'acier.

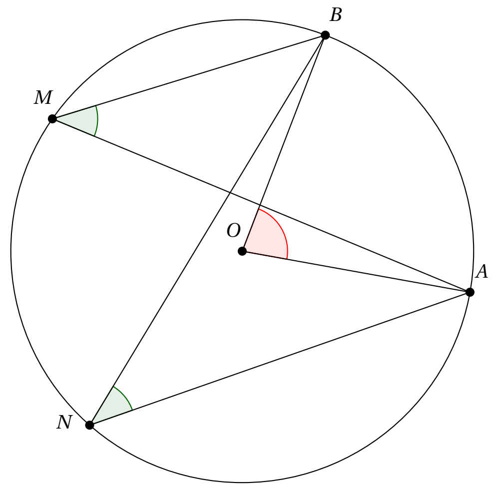
https://fr.wikipedia.org/wiki/Pentagone

Activités d'introduction

Activité 1 Mesure des angles inscrits et de l'angle au centre

Dans cette activité, on utilise le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra.

1. Tracer un cercle de centre O et de rayon [OB]. Penser à renommer les points.
2. Placer les points A, N et M sur le cercle.
3. Tracer et définir les angles comme sur la figure ci-dessous.



Recopier la mesure de chaque angle.

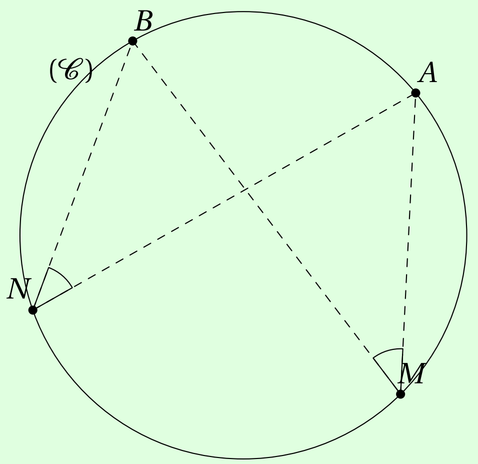
4. Recopier et compléter :

Deux angles .... dans le même cercle interceptant .... semblent avoir .... La mesure de l'angle .... semble être .... de celle des angles inscrits.

A Angle inscrit et angle au centre

1 Vocabulaire

Arcs et angles inscrits



Définition : Les angles inscrits

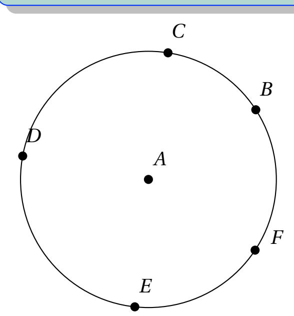
A, B, M, N sont quatre points du cercle (𝒞).
On dit que $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AMB}$ sont des **angles inscrits dans le cercle (𝒞)**.

Remarque. Dans ces deux cas, on dit que les angles interceptent le petit arc $\overset{\frown}{AB}$. (AB avec un arc au dessus, pas un « chapeau »). Par défaut $\overset{\frown}{AB}$ est le petit arc mais il faut préciser grand arc $\overset{\frown}{AB}$ pour parler du reste du cercle.

Définition : Angle au centre

Un angle au centre a pour sommet le centre du cercle.
Dans notre cas, l'angle au centre est $\widehat{AOB}$.

Exercice 1 : Angles et arcs interceptés



1. Écrire le noms des angles inscrits interceptant l'arc $\overset{\frown}{DE}$.
2. Écrire le nom de l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{EF}$.
3. Écrire le nom de l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{DF}$.

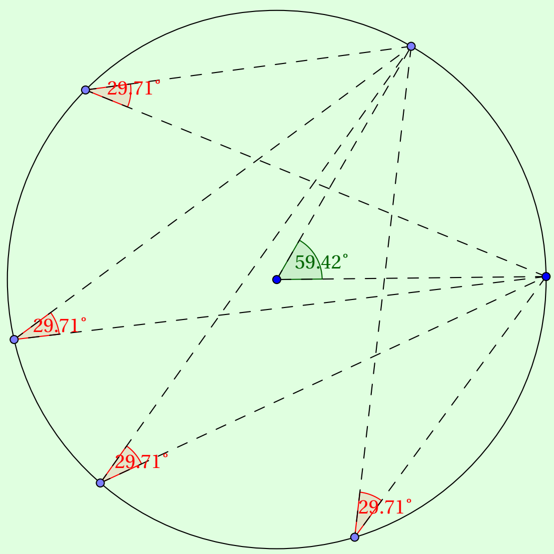
Non corrigé

2 Angles interceptant le même arc

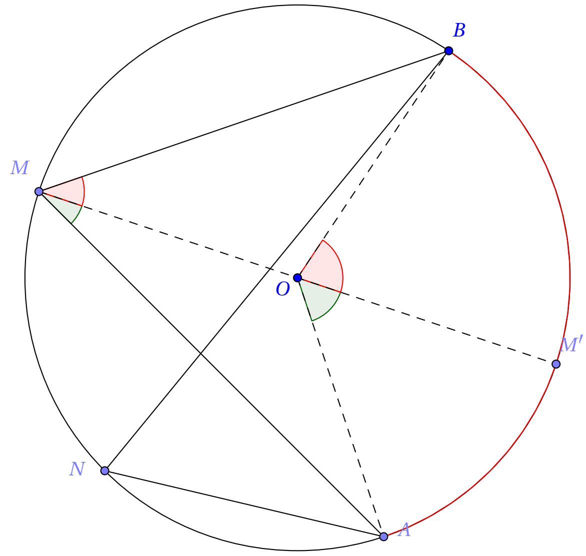
Théorème ... de l'angle au centre

Dans un même cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre vaut deux fois la mesure des angles inscrits.

Mesures des angles



Hypothèse. À l'aide de GeoGebra :



Démonstration. Intéressons-nous à la paire d'angles rouges.
Dans OBM isocèle en O, la somme des mesures des angles est de $180\,°$:
$\widehat{OMB}+\widehat{MOB}+\widehat{OBM}=180\,°$
et les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure :
$\widehat{OMB}=\widehat{OBM}$.

Donc $2 \times \widehat{OMB} = 180° - \widehat{MOB}$.
Comme $\widehat{MOM'}$ est un angle plat alors
$\widehat{MOB} + \widehat{BOM'} = \widehat{MOM'} = 180°$.
Donc $\widehat{MOB} = 180° - \widehat{BOM'}$.
Au final

$$\begin{aligned} 2 \times \widehat{OMB} &= 180° - (180° - \widehat{BOM'}) \\ &= 180° - 180° + \widehat{BOM'} \\ &= \widehat{BOM'} \\ \widehat{OMB} &= \tfrac{1}{2} \times \widehat{BOM'} \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement pour la paire d'angles verts, on en déduit que :

$$\widehat{OMA} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOM'}$$

Or

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \frac{1}{2} \times (\widehat{AOM'} + \widehat{M'OB}) = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$$

En conclusion :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$$

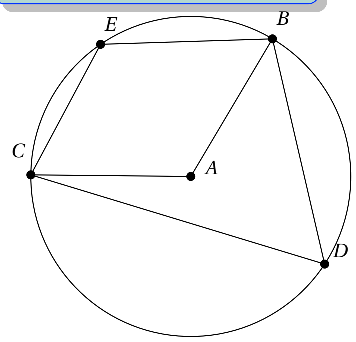
□

Remarque. Les angles inscrits interceptant le même arc ont tous pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc, on en déduit que tous ont la même mesure.

Théorème ... des angles inscrits

Deux angles inscrits **dans le même cercle** interceptant le **même arc** ont la **même mesure**.

Exercice 2 : Calculs



L'angle $\widehat{CDB}$ mesure $60°$. Calculer la mesure de $\widehat{CAB}$, $\widehat{CEB}$.

Non corrigé

B Les polygones réguliers

1 Qu'est-ce qu'un polygone régulier ?

Définition : Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone dont **tous les cotés ont même longueur** et dont **tous les angles ont même mesure**.

Exemple.

Le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier sont des polygones réguliers.

Le rectangle n'est pas régulier car il possède des angles de même mesure mais des cotés de longueurs différentes. Pour le losange c'est le contraire.

Exercice 3 : Utiliser la définition

Justifier qu'un carré est un polygone régulier. Même question avec le triangle équilatéral.

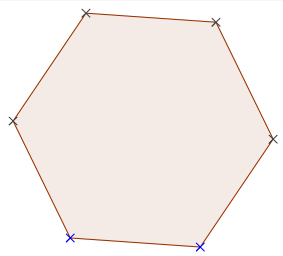
Non corrigé

2 Les propriétés

Propriété : Montrer que des points sont sur un cercle

Si un polygone est régulier alors **son centre est le centre du cercle circonscrit** au polygone.

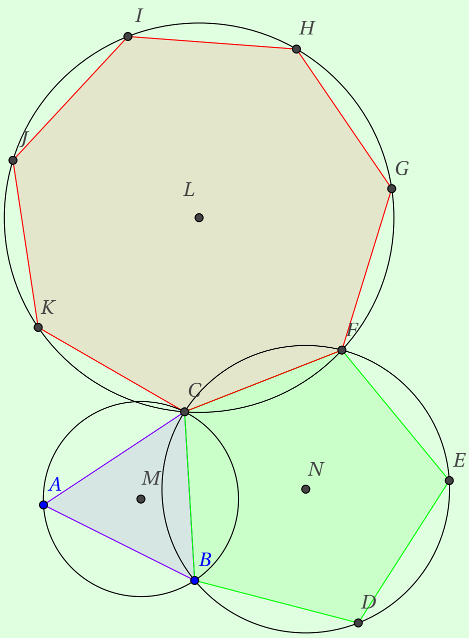
Exercice 4 : Construction



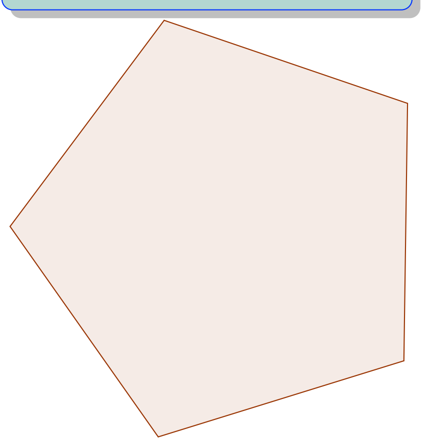
Tracer le cercle circonscrit à l'hexagone régulier ci-dessus.

Non corrigé

Polygones réguliers



Exercice 5 : Construction



Tracer le cercle circonscrit au pentagone régulier ci-dessus.

Non corrigé

Propriété : Montrer qu'un polygone est régulier

Si un polygone est **inscrit dans un cercle** et que **ses cotés ont tous la même longueur** alors ce polygone est régulier.

Exercice 6 : Constructions

Construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier, au compas et à la règle non-graduée.

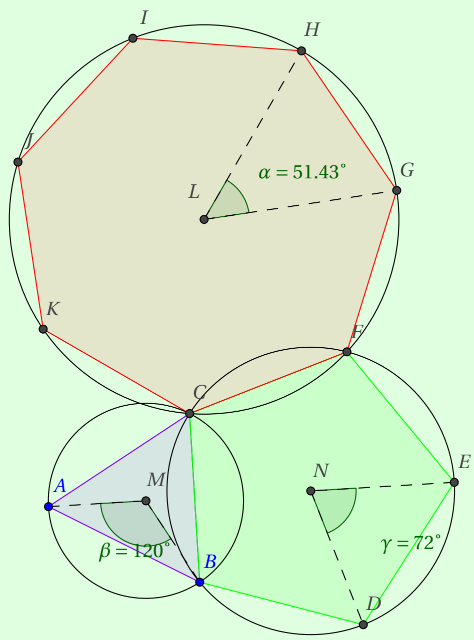
Non corrigé

3 Propriété du polygone régulier à n cotés

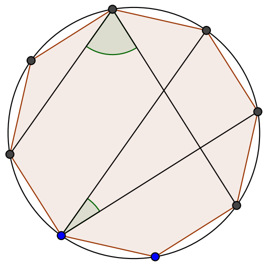
Propriété : Polygone régulier à n cotés

Si on considère un polygone régulier à n cotés (n entier positif), les angles au centre du polygone formés par deux sommets consécutifs ont une valeur de $\frac{360°}{n}$.

Polygones réguliers et angles au centre



Exercice 7 : Construction

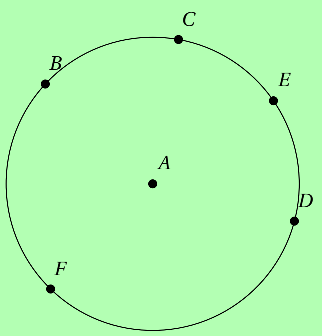


Ci-contre, un octogone régulier.
Calculer la mesure des deux angles marqués en vert.

Non corrigé

Exercices

Ex 8 Entrainement



B, C, D, E, F appartiennent au cercle de centre A. $\widehat{CBD} = 50°$ et $\widehat{FAD} = 130°$.
Déterminer la mesure des angles suivants :
$\widehat{CAD}$ $\widehat{CFD}$ $\widehat{CED}$ $\widehat{CDA}$ $\widehat{ADF}$ $\widehat{DCF}$ $\widehat{FAC}$ $\widehat{FBD}$ $\widehat{FBC}$

Ex 9 Polygone régulier

1. Tracer le triangle ABC équilatéral de côté 7cm.
2. Tracer son cercle circonscrit de centre O.
3. Montrer que la mesure de $\widehat{AOB}$ est de $120°$.
4. Tracer le cercle inscrit dans ABC.
   (a) Calculer le rayon du cercle inscrit dans ABC
   (b) Calculer le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Ex 10 Polygone régulier

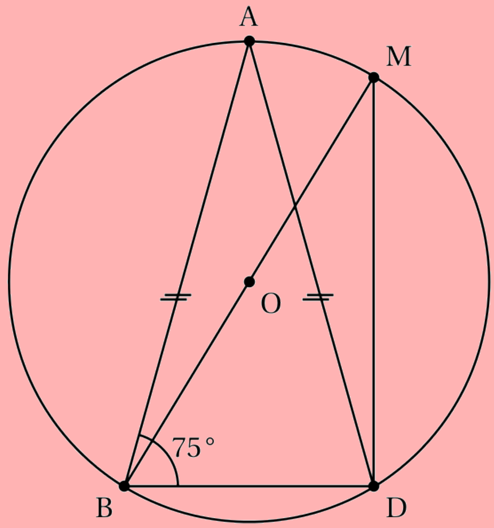
Tracer l'hexagone régulier ABCDEF de centre O et de 5cm de côté.

Ex 11 Polygone régulier

Tracer le pentagone régulier ABCDE de centre O et de 5cm de côté.

Ex 12 Pondichéry, avril 2011

On considère la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur. On ne demande pas de refaire la figure.



- ABD est un triangle isocèle en A tel que $\widehat{ABD} = 75°$;
- $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABD ;
- O est le centre du cercle $\mathscr{C}$.
- [BM] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

1. Quelle est la nature du triangle BMD ? Justifier la réponse.
2. (a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.
   (b) Citer un angle inscrit qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{BMD}$.
   (c) Justifier que l'angle $\widehat{BMD}$ mesure $30°$.
3. On donne : $BD = 5{,}6cm$ et $BM = 11{,}2cm$.
   Calculer la longueur DM. On arrondira le résultat au dixième près.

Ex 13 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables
- $36y^2 - 36y + 9$
- $64y^2 + 160y + 100$
- $4y^2 - 4y + 1$
- $36a^2 + 48a + 16$

Révisions

Ex 14 Polygone régulier

1. Tracer le triangle ABC équilatéral de côté $5cm$.
2. Tracer son cercle circonscrit de centre O.
3. Montrer que la mesure de $\widehat{AOB}$ est de $120°$.

Ex 15 Développer, identités

Développer en utilisant les identités remarquables

- $(\frac{2}{5}a-10)^2$
- $(12x+11)(12x-11)$
- $(\frac{2}{3}a+9)^2$
- $(11x-1)^2$
- $(12x+12)(12x-12)$

Révisions

Ex 16 Démonstration

Soit un cercle de centre O et de rayon $OA = 5cm$.

1. B est un point du cercle se situant à 5cm du point A.[AB] est l'un des côtés d'un polygone régulier inscrit dans le cercle. Combien de côtés possède ce polygone ?
2. B' est un point du cercle se situant à $5\sqrt{3}cm$ du point A. [AB'] est l'un des côtés d'un polygone régulier inscrit dans le cercle. Montrer que ce polygone est un triangle équilatéral.
3. Montrer que les côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon r ont pour longueur $2r\,sin\left(\frac{180}{n}\right)$.

Ex 17 Factoriser, identités

Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $100x^2+160x+64$
- $100a^2+20a+1$
- $9a^2-49$
- $100x^2+40x+4$

Révisions

Ex 18 Développer, identités

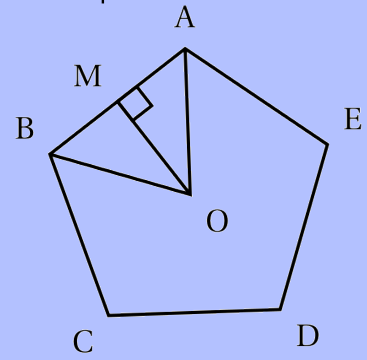
Développer en utilisant les identités remarquables

- $(\frac{2}{3}a-1)^2$
- $(12-\frac{1}{2}x)^2$
- $(12x-12)^2$
- $(4x-4)^2$
- $(\frac{2}{3}y-6)^2$

Révisions

Ex 19 Extrait de brevet

Le Pentagone est un bâtiment hébergeant le ministère de la défense des Etats-Unis. Il a la forme d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon OA= 238 m. Il est représenté par le schéma ci-dessous.



1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. La hauteur issue de O dans le triangle AOB coupe le côté [AB] au point M.
   (a) Justifier que (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB].
   (b) Prouver que [AM] mesure environ $140m$.
   (c) En déduire une valeur approchée du périmètre du Pentagone.

Ex 20 Développer, identités

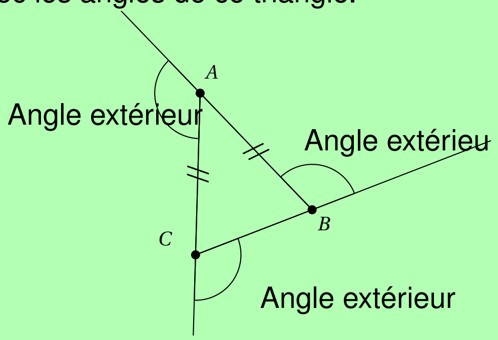
Développer en utilisant les identités remarquables

- $(9-9a)^2$
- $(4a+4)^2$
- $(\frac{2}{5}y+2)(\frac{2}{5}y-2)$
- $(7x-11)(7x+11)$
- $(\frac{1}{3}y+10)^2$

Révisions

Ex 21 Polynésie, juin 2014

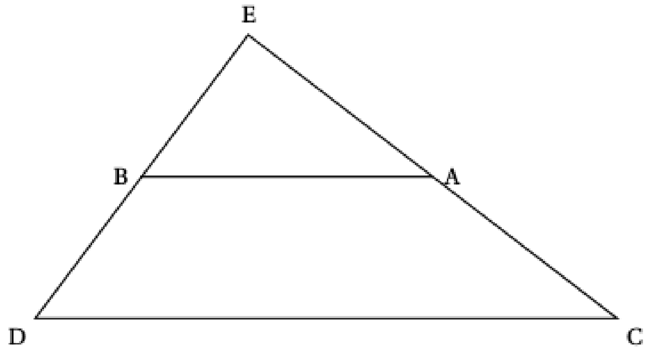
Dans tout cet exercice, on travaille avec des triangles ABC isocèles en A tels que : $BC = 5cm$. La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ peut varier.
On va alors s'intéresser aux angles extérieurs de ces triangles, c'est-à-dire, comme l'indique la figure ci-après, aux angles qui sont supplémentaires et adjacents avec les angles de ce triangle.



1. Dans cette question uniquement, on suppose que $ABC = 40°$.
   (a) Construire le triangle ABC en vraie grandeur. Aucune justification n'est attendue pour cette construction.
   (b) Calculer la mesure de chacun de ses 3 angles extérieurs.
   (c) Vérifier que la somme des mesures de ces 3 angles extérieurs est égale à $360°$.
2. Est-il possible de construire un triangle ABC isocèle en A tel que la somme des mesures de ses trois angles extérieurs soit différente de $360°$?

Ex 22 Nouv-Cal, mars 2009

La figure qui suit n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire. L'unité est le centimètre. Le point B appartient au segment [DE] et le point A au segment [CE].
On donne : $ED = 9$; $EB = 5{,}4$; $EC = 12$; $EA = 7{,}2$; $CD = 15$.



1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Calculer la longueur du segment [AB].
3. Montrer que les droites (CE) et (DE) sont perpendiculaires.
4. (a) Calculer la valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{ECD}$.
   (b) En déduire, sans faire de calcul, celle de l'angle $\widehat{EAB}$. Justifier.

Révisions

Chapitre X

Inéquations-systèmes d'équations

Activités d'introduction

Activité 1 Système d'équation et interprétation graphique

Ma tirelire contient uniquement des pièces de 1 et 2 euros (question de principe...). J'ai au total 105 euros et 78 pièces au total. Et je voudrais justement connaître le nombre de pièces de chaque sorte. On note x le nombre de pièces de 1 € et y le nombre de pièces de 2 €.

a. Le problème peut-être résolu par deux équations faisant intervenir x et y , l'une fait intervenir le nombre total de pièce et l'autre la valeur totale. Établir ces deux équations. Et compléter le système suivant :

$$\begin{cases} ...x & + & ...y & = & ... \\ ...x & + & ...y & = & ... \end{cases}$$

b. En utilisant GeoGebra, tracer ces deux droites en écrivant les équations dans la barre de saisie.

c. Qu'observez-vous ?

d. Obtenir les coordonnées et vérifier qu'elles sont solutions des deux équations obtenues précédemment.

A Inéquations

1 Résolution d'une inéquation

Propriété : Comparaisons et opérations

Lorsque c est strictement négatif ($c<0$), les nombres $a\times c$ et $b\times c$ mais également $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont dans l'**ordre inverse** de a et b.

Exemple. On résoud $-2x+5\leqslant 6$:

$$\begin{array}{rcl} -2x+5 & \leqslant & 6 \\ -2x & \leqslant & 1 \\ x & \geqslant & -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Exercice 1 : Résoudre une inéquation

Résoudre :

- $3x+2<4$
- $-3x+2<4$

Exemple. On veut encadrer l'expression $4t-8$ sachant que $-4\leqslant t\leqslant 10$:

$$\begin{array}{rcccl} -4 & \leqslant & t & \leqslant & 10 \\ -16 & \leqslant & 4t & \leqslant & 40 \\ -24 & \leqslant & 4t-8 & \leqslant & 32 \end{array}$$

Dans ce cas nous n'avons jamais eu à multiplier par un nombre négatif, pas besoin de changer le sens de comparaison.

Exercice 2 : Encadrer une expression

Encadrer l'expression $2x+3$ lorsque :

- $2<x<5$
- $-2<x\leqslant 5$

Encadrer l'expression $\dfrac{-x+3}{4}$ lorsque :

- $0<x<5$
- $-5\leqslant x\leqslant 10$

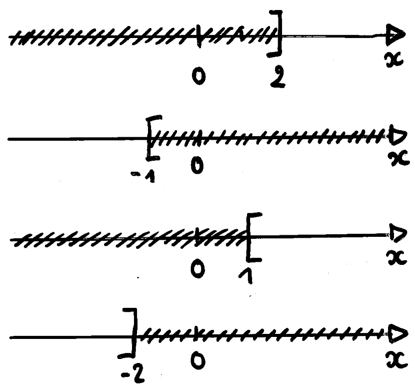
2 Représentation des solutions

Propriété : droite graduée et solutions d'inéquations

Dans la **représentation des solutions** sur une droite graduée :

- si un crochet est tourné vers les solutions alors le nombre correspondant fait partie des solutions ;
- si le crochet n'est pas tourné vers les solutions alors le nombre correspondant ne fait pas partie des solutions ;
- à côté des crochets :
  - on hachure les nombres ne faisant pas partie des solutions,
  - ou bien on représente en rouge les nombres solutions de l'inéquation.

Exercice 3 : Représenter des solutions



Écrire les inégalités correspondantes à chaque droite graduée.

B Système de deux équations.

1 Définitions

Définition : système d'équations

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ est un système de deux équations de degré 1 (pas de x^2 ou de y^2) à deux inconnues : x et y.

Exemple. $\begin{cases} x & + & y & = & 4 \\ -2x & + & y & = & 5 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues. $x+y=4$ est une équation du premier degré à deux inconnues.

Propriété : Couple de solutions

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues x et y c'est déterminer les valeurs numériques de x et y simultanément solutions du système. On parle alors d'un **couple de solutions**.

Exemple. Le couple $\left(\frac{-1}{3}; \frac{13}{3}\right)$ est solution du système

$$\begin{cases} x & + & y & = & 4 \\ -2x & + & y & = & 5 \end{cases}$$

car ce couple vérifie se système :
D'une part $\frac{-1}{3} + \frac{13}{3} = 4$, d'autre part $-2 \times \frac{-1}{3} + \frac{13}{3} = 5$.

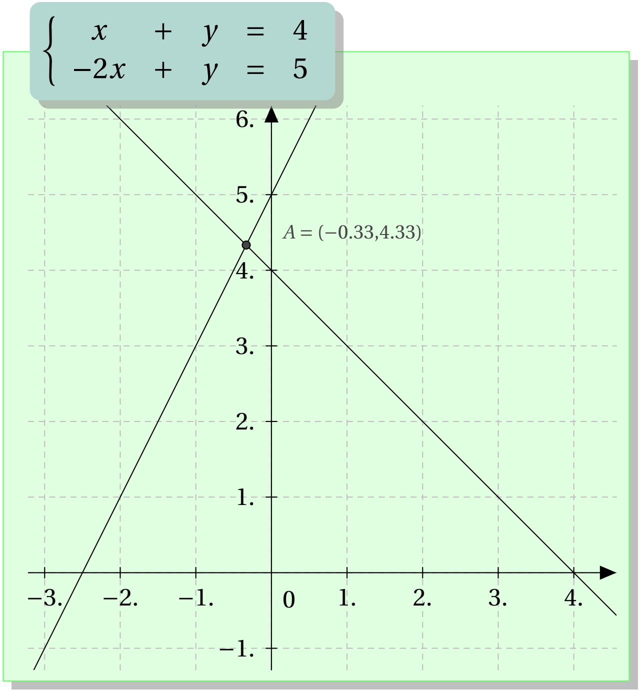
Exercice 4 : Solution ?

Montrer que le couple $\left(\frac{5}{3};3\right)$ est solution du système $\begin{cases} 3x & - & y & = & 2 \\ -x & + & y & = & \frac{4}{3} \end{cases}$.

2 Interprétation graphique d'un système.

$\begin{cases} x & + & y & = & 4 \\ -2x & + & y & = & 5 \end{cases}$ est composé de deux équations qui peuvent être écrites dans la barre de saisie du logiciel GeoGebra.

On obtient ce graphique :



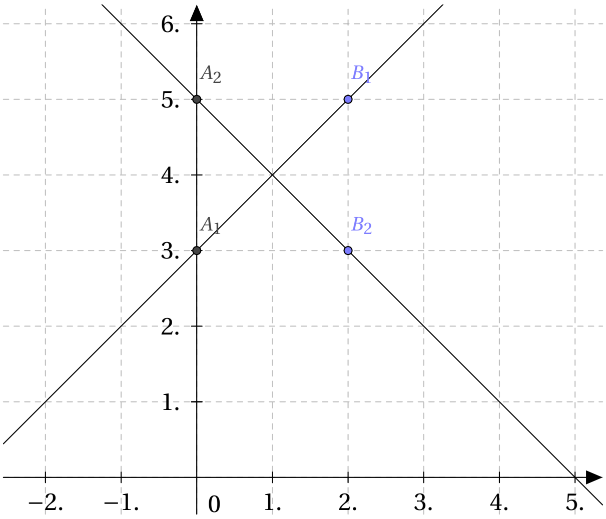
Remarque. Le couple (x ;y) de solutions est les coordonnées du point A d'intersection des deux droites. En manipulant chaque équation on obtient d'ailleurs $\left\{\begin{array}{rcrcr} y & = & -x & + & 4 \\ y & = & 2x & + & 5 \end{array}\right.$: ces deux équations sont celles de deux droites affines, notions détaillées dans un prochain chapitre. Cependant, en calculant les images de 0 et de -2 par exemple, il est possible de tracer ces deux droites et de trouver le point d'intersection.

Exemple. On souhaite résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -3 \\ x & + & y & = & 5 \end{array}\right.$. Ce système peut-être écrit $\left\{\begin{array}{rcr} y & = & x \\ y & = & -x \end{array}\right.$ en isolant dans chaque cas y.

- En prenant $x=0$ on obtient : $\left\{\begin{array}{rcrcl} y & = & 0 & + & 3=3 \\ y & = & -0 & + & 5=5 \end{array}\right.$
  On obtient alors les points $A_1(0;3)$ et $A_2(0;5)$.

- En prenant $x=2$ on obtient : $\left\{\begin{array}{rcrcl} y & = & 2 & + & 3=5 \\ y & = & -2 & + & 5=3 \end{array}\right.$
  On obtient alors les points $B_1(2;5)$ et $B_2(2;3)$.

On trace alors les deux droites :



Le point d'intersection a pour coordonnées (1 ;4) solution du système.

Exercice 5 : Résolution graphique

Résoudre graphiquement $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 7 \end{cases}$.

3 Résoudre un système par combinaison

Définition : Résolution par combinaison

Cette **méthode** consiste à manipuler les différentes lignes du système, en les ajoutant, les soustrayant, les multipliant par un nombre, pour **éliminer une inconnue** et résoudre le système.

Exemple. On veut résoudre : $\begin{cases} 5x - 2y = -24 & (E_1) \\ 2x + 4y = 24 & (E_2) \end{cases}$.

On choisit l'inconnue la plus facile à éliminer : ici, «y» grâce aux coefficients -2 et 4 sont multiples l'un de l'autre.

Pour pouvoir éliminer y, il faut avoir des coefficients égaux ou opposés. Pour cela, on multiplie E_1 par 2.

Il faut multiplier les deux membres de l'équation.

$$\begin{cases} 10x - 4y = -48 & (2 \times E_1) \\ 2x + 4y = 24 & (E_2) \end{cases}$$

On élimine une inconnue dans une équation. On garde E_2 pour pouvoir calculer la valeur de y une fois que nous aurons déterminé celle de x.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 12x & + & 0y & = & -24 & (2\times E_1+E_2) \\ 2x & + & 4y & = & 24 & (E_2) \end{array}\right.$$

L'équation du haut est facile à résoudre : $x=-2$, il nous reste à déterminer y. Le système devient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} & & x & = & -2 & (2\times E_1+E_2) \\ 2\times(-2) & + & 4y & = & 24 & (E_2) \end{array}\right.$$

E_2 nous permet d'affirmer que $y=7$.

Conclusion : Le couple $(-2;7)$ est solution du système.

À la main

$$\left\{\begin{array}{l} 5x-2y=-24 \quad \times 2 \\ 2x+4y=24 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 10x-4y=-48 \\ + \; 2x+4y=24 \end{array}\right.$$

$12x = -24$

$\boxed{x=-2}$

On connait x,

$2x+4y=24$

devient $2\times(-2)+4y=24$

$-4+4y=24$

$4y=28$

$\boxed{y=7}$

$(-2;7)$ est solution du système.

Exercice 6 : Résolution par combinaison

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 9 \\ x & - & 9y & = & -1 \end{array}\right.$$

4 Résoudre par double combinaison

Exemple. On souhaite résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 3y & = & -7(E_1) \\ 6x & - & 5y & = & -8(E_2) \end{array}\right.$$

par double combinaison.

- Trouver x (éliminer y) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 15y & = & -35(E_1 \times 5) \\ 18x & - & 15y & = & -24(E_2 \times 3) \end{array}\right.$$

  En soustrayant les deux équations :

$$-13x = -11$$

  donnant

$$x = \frac{11}{13}$$

- Trouver y (éliminer x) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & - & 18y & = & -42(E_1 \times 6) \\ 6x & - & 5y & = & -8(E_2) \end{array}\right.$$

  En soustrayant les deux équations :

$$-13y = -36$$

  donnant

$$y = \frac{36}{13}$$

- Conclusion : La solution du système est le couple : $\left(\frac{11}{13}; \frac{36}{13}\right)$

Exercice 7 : Résoudre par double combinaison

Résoudre par double combinaison le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 9 \\ x & - & 9y & = & -1 \end{array}\right.$$

5 Résoudre un système par substitution

Définition : Résolution par substitution

Cette **méthode** consiste à **remplacer une inconnue** par une expression en fonction des autres inconnues.

Définition : Isoler une variable

Isoler une variable revient à l'exprimer en fonction des autres.

Exemple. Isoler t revient à écrire :

$$\begin{array}{rcl} -2x+2t & = & 4 \\ 2t & = & -2x+4 \\ t & = & -x+2 \end{array}$$

Exemple. On veut résoudre :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & (E_1) \\ 4x + 5y = 12 & (E_2) \end{cases}$$

On commence par exprimer x en fonction de y (isoler x) dans E_1, pour ensuite éliminer x dans E_2.

$$\begin{cases} x = 3+2y & (E_1) \\ 4x + 5y = 12 & (E_2) \end{cases}$$

On remplace x par son expression en fonction de y dans E_2.

$$\begin{cases} x = 3+2y & (E_1) \\ 4\times(3+2y) + 5y = 12 & (E_2) \end{cases}$$

On résout E_2 et on trouve $y=0$.
On détermine x grâce à E_1 : $x=3$.
Conclusion : Le couple (3 ;0) est solution du système.

À la main

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y+3 \\ 4(2y+3)+5y = 12 \end{cases}$$

$$8y + \cancel{12} + 5y = \cancel{12}$$

$$13y = 0$$

$$\boxed{y=0.}$$

Connaissant y,

$$x - 2y = 3$$

$$x - 2\times 0 = 3$$

$$\boxed{x = 3}$$

Le couple $(3;0)$ est solution du système.

Exercice 8 : Résolution par substitution

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 9 \\ x & - & 9y & = & -1 \end{array}\right.$$

Pour toute question ...
boiteprof@gmail.com

Exercices

Ex 9 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$11x+17 \leqslant 19$$

$$-19x-9 \leqslant -7$$

$$11x+22 < -27$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 10 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$-22x > -17$$

$$21x \leqslant -20$$

$$-30x+13 > 7$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 11 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$11x-1 \leqslant 19$$

$$-24x+12 \geqslant 5$$

$$21x-29 > 14$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 12 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$-26x-9 > -28$$

$$-30x-22 \geqslant 18$$

$$13x+5 > -4$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 13 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$10x-30 > -1$$

$$19x \geqslant 11$$

$$-20x-4 \geqslant -22$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 14 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$-10x+3 \leqslant 18$$

$$5x+4 < 28$$

$$-13x-21 < -26$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 15 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$9x < 29$$

$$-14x > -30$$

$$-25x+19 \leqslant -18$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 16 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$24x \geqslant 1$$

$$-14x < -1$$

$$-17x \leqslant -22$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 17 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$-3x - 25 \geqslant 26$$

$$-1x - 26 \geqslant 15$$

$$-22x < 27$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 18 Inégalité

Résoudre les inéquations suivantes :

$$-8x \leqslant 2$$

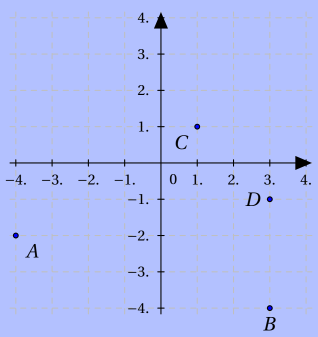
$$-17x + 26 < 19$$

$$24x + 30 < -30$$

Représenter les solutions sur un axe gradué.

Ex 19 Points et coordonnées

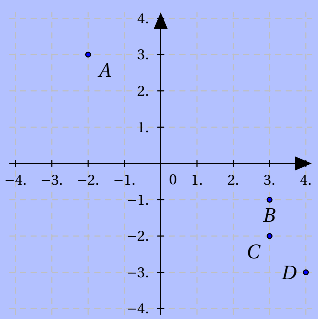
Donner les coordonnées des points suivants :



Placer les points E(2 ;-2),F(-2 ;-3),G(2 ;4),H(-1 ;1).

Ex 20 Points et coordonnées

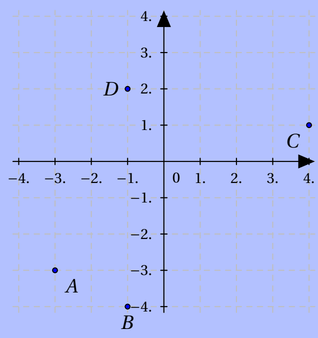
Donner les coordonnées des points suivants :



Placer les points E(-3 ;-4),F(-1 ;0),G(3 ;1),H(3 ;-2).

Ex 21 Points et coordonnées

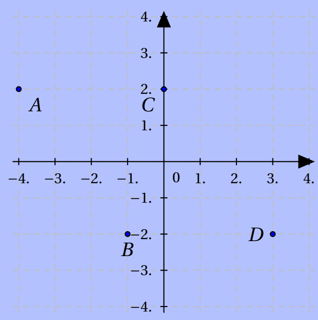
Donner les coordonnées des points suivants :



Placer les points E(3 ;-2),F(2 ;-1),G(-1 ;0),H(4 ;4).

Ex 22 Points et coordonnées

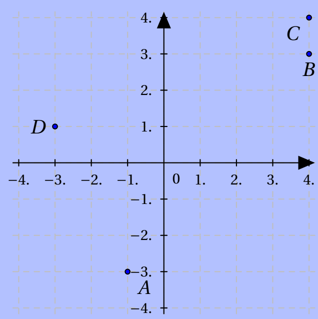
Donner les coordonnées des points suivants :



Placer les points E(4 ;0),F(-1 ;1),G(-4 ;-3),H(2 ;-4).

Ex 23 Points et coordonnées

Donner les coordonnées des points suivants :



Placer les points E(-2 ;-1),F(3 ;-3),G(-1 ;-4),H(-1 ;-1).

Ex 24 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 3x & -y & = & 4 \\ 9x & +y & = & 5 \end{cases}$$

Ex 25 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} -x & +y & = & -4 \\ -3x & -y & = & 10 \end{cases}$$

Ex 26 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 4x & -y & = & -4 \\ -2x & -y & = & 6 \end{cases}$$

Ex 27 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} -3x & -y & = & 10 \\ 4x & -y & = & -9 \end{cases}$$

Ex 28 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} -3x & -y & = & -3 \\ -9x & -y & = & 0 \end{cases}$$

Ex 29 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} x & +y & = & 0 \\ -5x & -y & = & -5 \end{cases}$$

Ex 30 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} -5x & +y & = & 8 \\ -9x & +y & = & -1 \end{cases}$$

Ex 31 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} -2x & -y & = & -8 \\ x & -y & = & -9 \end{cases}$$

Ex 32 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 3x & +y & = & -3 \\ -4x & +y & = & -1 \end{cases}$$

Ex 33 Résoudre

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} -3x & +y & = & -7 \\ -4x & +y & = & 1 \end{cases}$$

Ex 34 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & -3y & = & -9 \\ 6x & -5y & = & -8 \end{cases}$$

Ex 35 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & +3y & = & -9 \\ -3x & -2y & = & 0 \end{cases}$$

Ex 36 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & -4y & = & -4 \\ 4x & -6y & = & 8 \end{cases}$$

Ex 37 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & = & -8 \\ -2x & -9y & = & 9 \end{cases}$$

Ex 38 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & +4y & = & -10 \\ x & +9y & = & 4 \end{cases}$$

Ex 39 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} -9x & -9y & = & -2 \\ 5x & +3y & = & 4 \end{cases}$$

Ex 40 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & -9y & = & -4 \\ -2x & +3y & = & -4 \end{cases}$$

Ex 41 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} 3x & -6y & = & 8 \\ -x & -y & = & -1 \end{cases}$$

Ex 42 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} 3x & -4y & = & 3 \\ -3x & +y & = & -1 \end{cases}$$

Ex 43 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} -2x & +5y & = & -7 \\ -9x & +y & = & -5 \end{cases}$$

Ex 44 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & -y & = & 8 \\ -4x & -4y & = & -2 \end{cases}$$

Ex 45 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & -4y & = & 9 \\ -9x & +4y & = & -3 \end{cases}$$

Ex 46 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} -x & +y & = & 1 \\ -6x & +4y & = & 10 \end{cases}$$

Ex 47 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} -x & +4y & = & 5 \\ 3x & +9y & = & -6 \end{cases}$$

Ex 48 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} 9x & -4y & = & -7 \\ 9x & +9y & = & -3 \end{cases}$$

Ex 49 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +3y & = & -2 \\ -3x & +4y & = & 5 \end{cases}$$

Ex 50 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & -6y & = & 1 \\ -9x & +4y & = & 10 \end{cases}$$

Ex 51 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +9y & = & -3 \\ -6x & -6y & = & -2 \end{cases}$$

Ex 52 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} 4x & +9y & = & -5 \\ -6x & -3y & = & 10 \end{cases}$$

Ex 53 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & = & 6 \\ 4x & +3y & = & -5 \end{cases}$$

Ex 54 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +5y & = & 4 \\ -2x & -2y & = & -4 \end{cases}$$

Ex 55 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} x & +6y & = & -3 \\ 4x & +3y & = & -3 \end{cases}$$

Ex 56 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & -3y & = & -10 \\ -3x & +2y & = & -5 \end{cases}$$

Ex 57 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\begin{cases} x & -6y & = & -5 \\ -2x & -3y & = & -7 \end{cases}$$

Ex 58 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\begin{cases} 3x & +y & = & 9 \\ -9x & +y & = & 2 \end{cases}$$

Ex 59 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +4y & = & -10 \\ -x & -y & = & -8 \end{cases}$$

Ex 60 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & = & -10 \\ 5x & +4y & = & 1 \end{cases}$$

Ex 61 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} -6x & -2y & = & -2 \\ -2x & +y & = & -4 \end{array}\right.$$

Ex 62 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} -2x & +9y & = & -7 \\ -3x & +y & = & 1 \end{array}\right.$$

Ex 63 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2x & -5y & = & -7 \\ -x & +y & = & 6 \end{array}\right.$$

Ex 64 Résoudre

Résoudre le système suivant par la méthode de ton choix :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} -5x & +3y & = & 3 \\ -2x & +y & = & -6 \end{array}\right.$$

Ex 65 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 9 \\ -2x & +4y & = & 4 \end{array}\right.$$

Ex 66 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +y & = & 0 \\ -3x & -y & = & -4 \end{array}\right.$$

Ex 67 Résoudre

Résoudre par combinaison le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +y & = & -8 \\ x & +2y & = & -5 \end{array}\right.$$

Ex 68 Résoudre

Résoudre par substitution le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +6y & = & 10 \\ -2x & +6y & = & -4 \end{array}\right.$$

Ex 69 Approfondissement

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 4x & +y & < & -4 \\ -x & +y & \geqslant & 1 \end{array}\right.$$

Ex 70 Approfondissement

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2x & -y & < & 7 \\ 3x & +y & < & -7 \end{array}\right.$$

Ex 71 Approfondissement

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 5x & -y & < & 0 \\ 5x & -y & > & -5 \end{array}\right.$$

Ex 72 Approfondissement

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x & +y & > & 0 \\ 4x & +y & < & -1 \end{array}\right.$$

Ex 73 Approfondissement

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 3x & +y & > & 2 \\ 6x & +y & < & -10 \end{cases}$$

Ex 74 Problème

Après avoir ajouté 5 au triple d'un nombre, on obtient un nombre négatif.
Que peux-tu dire du nombre choisi au départ ?

Ex 75 Problème

Un cercle a un périmètre de $30m$, quel est son rayon ?

Ex 76 Problème

Pendant les soldes, un vendeur de chaussures a vendu 86 paires de chaussures au prix normal et 10 paires de chaussures à prix réduit. Il réalise 522,65€ de bénéfice.
Au même moment, son collègue a vendu 78 paires de chaussures au prix normal et huit paires de chaussures à prix réduit. Il a fait un bénéfice de 475,35€.
Chaque vendeur propose le même prix normal, le même prix réduit et réalise le même bénéfice sur chaque paire de chaussures vendue.
Quel est le bénéfice réalisé par les vendeurs sur une paire de chaussures vendue au prix normal ?

Ex 77 Problème

Soit l'inéquation $-3(x-1)-6 \geqslant 0$

1. Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation ? Justifier.
2. Résoudre l'inéquation. Représenter les solutions sur un axe (hachurer la partie de l'axe qui ne convient pas).

Ex 78 Problème

Il est recommandé de consommer 110 mg de vitamine C par jour.
La maman de Julien achète du jus d'orange qui contient 52 mg de vitamine C pour 100 mL et du jus de pomme qui en contient 12 mg pour 100 mL.
Pour suivre les recommandations tout en variant sa consommation de fruits, Julien souhaite boire un peu des deux dans un verre de 250 mL le matin au petit déjeuner.
Quelle quantité de chaque jus doit-il mélanger pour bénéficier de son apport quotidien en vitamine C avec un seul verre ?

Ex 79 Problème

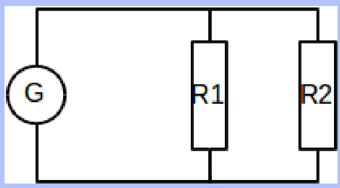
Chloé souhaite installer un aquarium de 80 L dans sa chambre. Pour déterminer le nombre de poissons à mettre dans l'aquarium, une règle empirique préconise 1 L d'eau pour chaque « centimètre » de poisson.
Chloé souhaite mettre des néons (taille adulte : 4 cm) et des guppys (taille adulte : 6 cm pour la femelle et 4 cm pour le mâle).
L'animalerie propose le couple de guppys à 2,30 € et le lot de cinq néons à 1,50 €. Chloé a 9,10 € dans sa tirelire.
Combien de poissons de chaque sorte pourra-t-elle mettre dans son aquarium ?

Ex 80 Problème

La tension U aux bornes d'un conducteur ohmique est égale au produit de sa résistance R par l'intensité I du courant qui la traverse :

$$U = R \times I$$

(U en volt V, R en ohm Ω et I en ampère A)

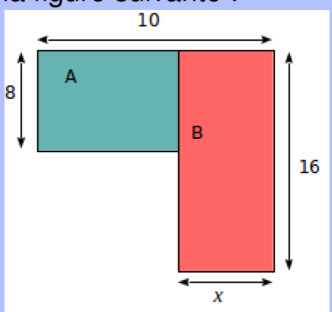


Dans le circuit, deux résistances $R_1 = 500\Omega$ et $R_2 = 80\Omega$ sont placés en dérivation. L'intensité du courant dans le générateur est de $0{,}174A$, elle suit la loi d'additivité des intensités. La tension aux bornes de R_1 et de R_2 est la même.

1. Faire le schéma en faisant apparaître i_1 et i_2 les intensités du courant traversant R_1 et R_2 .
   (a) Que vaut la quantité $i_1 + i_2$? Établir une première équation.
   (b) On sait également que la tension aux bornes de R_1 et R_2 sont égales. Établir une seconde équation.
2. Résoudre système d'équations permettant de déterminer i_1 et i_2.
3. Sachant que la tension aux bornes du générateur est la même que celle aux bornes de R_1. Quelle est la tension délivrée par le générateur ?

Ex 81 Problème

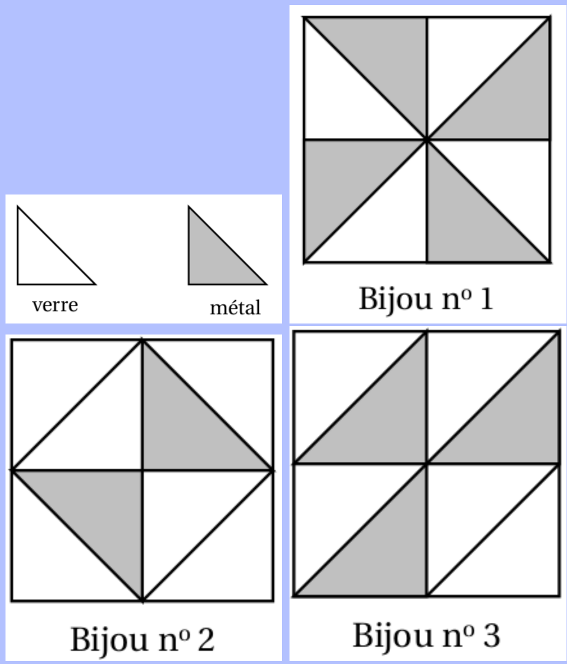
On considère la figure suivante :



1. Pour quelles valeurs de x , le périmètre du rectangle A est-il supérieur à celui du rectangle B ?
2. Pour quelles valeurs de x , l' aire du rectangle A est-elle supérieure à celle du rectangle B ?

Ex 82 Métropôle, juin 2011

On fabrique des bijoux à l'aide de triangles qui ont tous la même forme. Certains triangles sont en verre et les autres sont en métal. Trois exemples de bijoux sont donnés ci-dessous. Les triangles en verre sont représentés en blanc ; ceux en métal sont représentés en gris.



Tous les triangles en métal ont le même prix. Tous les triangles en verre ont le même prix.
Le bijou n°1 revient à 11 euros ; le bijou n°2 revient à 9,10 euros.
À combien revient le bijou n°3 ?

Chapitre XI

Fonctions linéaires, affines et pourcentages

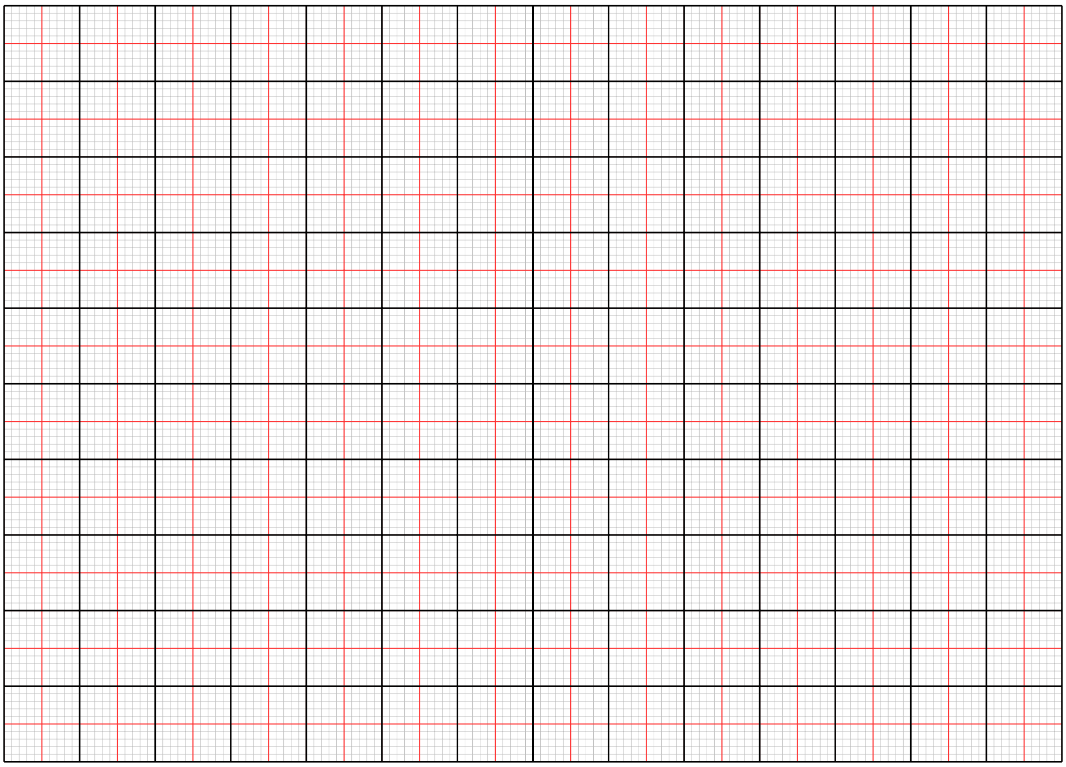
Activités d'introduction

Activité 1 Fonctions linéaires

1. Compléter ce tableau de valeurs.

x	-3	-1	0	2	4
$f(x) = 2{,}5x$					

2. Ce tableau de valeur est celui d'une fonction dite linéaire. Quel est le lien entre les valeurs de la première ligne et celles de la deuxième ?
3. Placer les points correspondants sur le graphique suivant.
4. Quelle est l'allure de la courbe représentative de la fonction f ?
5. Combien d'antécédents par f peut avoir un nombre ?

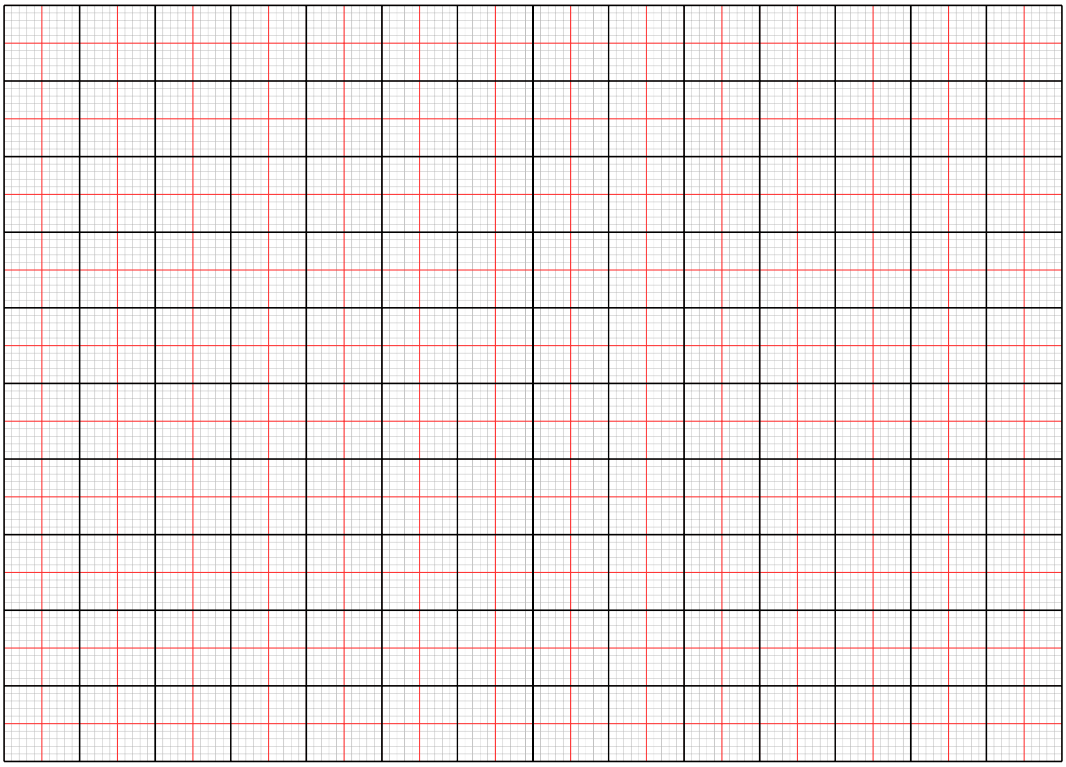


Activité 2 Fonctions affines

1. Compléter ce tableau de valeurs.

x	-3	-1	0	2	4
$f(x) = 2x - 3$					

2. Ce tableau de valeur est celui d'une fonction dite affine. Placer les points correspondants sur le graphique suivant.
3. Quelle est l'allure de la courbe représentative de la fonction f ?
4. Combien d'antécédents par f peut avoir un nombre ?
5. f est une fonction affine du type $ax + b$. Que vaut a, b dans le cas de la fonction f ? Montrer sur le graphique qu'il est possible de les lire.



Activité 3 Équation d'une droite

1. Tracer en rouge la représentation graphique de :

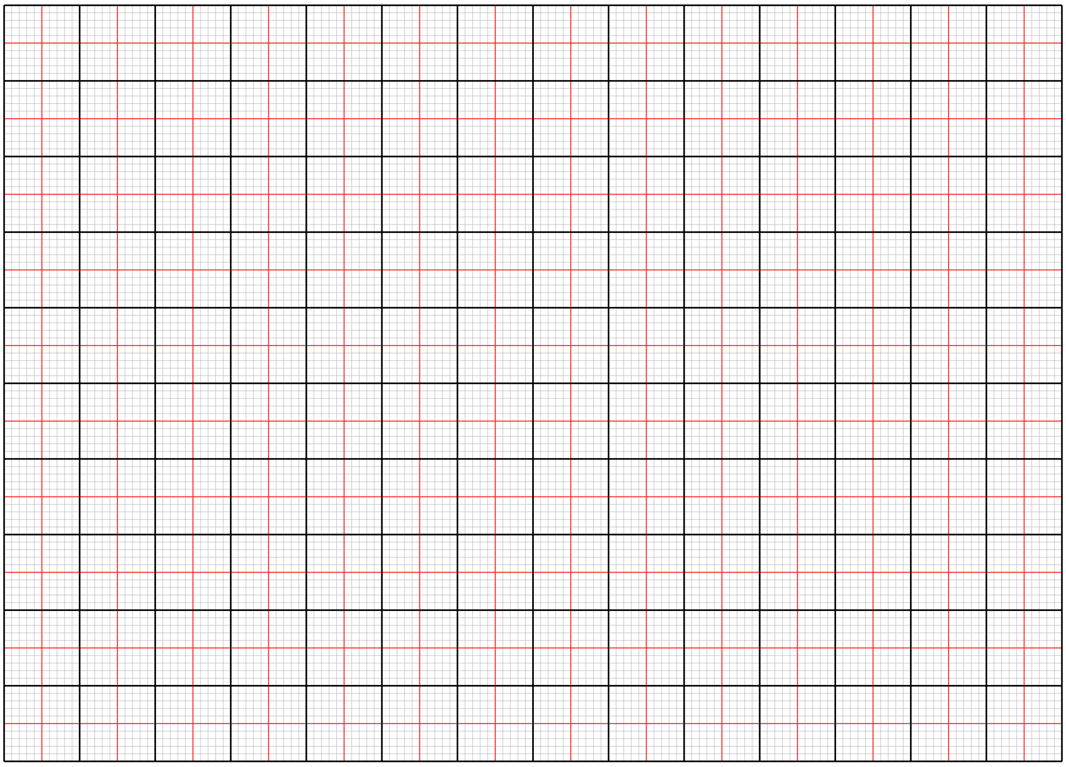
$$f : x \longmapsto 2x,\ g : x \longmapsto 2x + 3$$

   Que remarques-tu ?

2. Tracer en vert la représentation graphique de :

$$h : x \longmapsto -2x + 3,\ i : x \longmapsto 2x + 3$$

   Quelle est l'influence du signe du coefficient directeur ?



A Fonctions linéaires

1 Généralités

Définition : Fonction linéaire et proportionnalité

La **fonction linéaire** traduisant une relation de **proportionnalité** s'écrit

$$f(x) = ax$$

Exemple. Soit g la fonction telle que $g(t) = 2t$. g est une fonction linéaire.

Exercice 1 : Reconnaître une fonction linéaire

Indiquer les fonctions linéaires parmi les fonctions proposées ci-dessous :

$f : x \mapsto x^2$
$g : x \mapsto 2x$

$h : x \mapsto \frac{2}{x}$
$i : x \mapsto 2x+3$

$j : x \mapsto \frac{2x^2}{x}$
$k : x \mapsto x(3x-2)-3x^2$

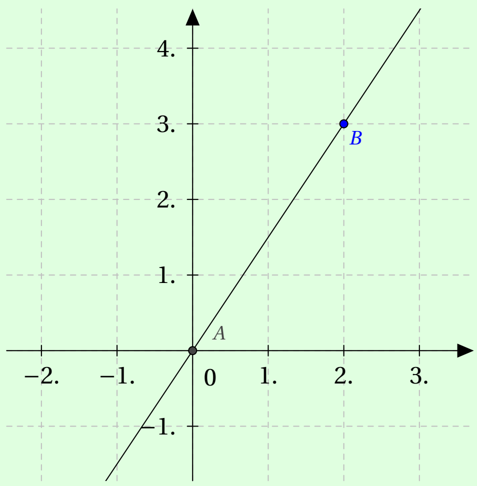
Non corrigé

Remarque. a est le coefficient de proportionnalité ou coefficient directeur :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1) \\ &= ax+a \\ &= f(x)+a \end{aligned}$$

Si je me décale de 1 vers la droite, je monte (a>0) de a ou je descends ($a<0$) de la même valeur.

Représentation graphique



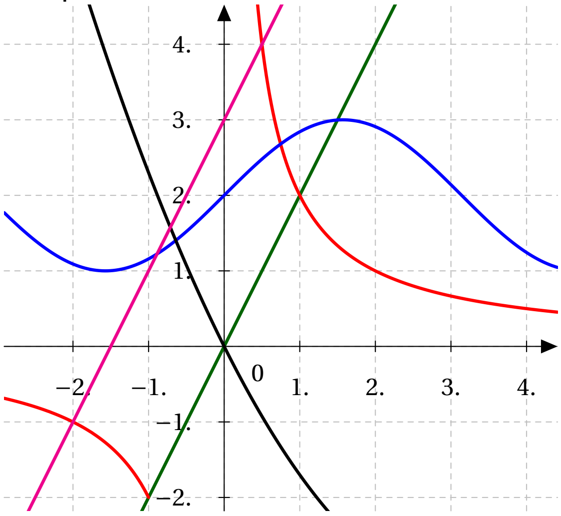
En passant de A à B, on se décale de 2($= 2 \times 1$) et on monte de 3($= 2 \times a$) donc $a = \frac{3}{2}$.

Propriété : Représentation graphique d'une fonction linéaire

La représentation graphique d'une fonction linéaire, est une **droite passant par l'origine du repère** et par le point de coordonnées $(1; a)$.

Exercice 2 : Reconnaître la représentation d'une fonction linéaire

Donne la couleur des courbes représentant une fonction linéaire.



Non corrigé

Exercice 3 : Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire

Tracer d_f la représentation graphique de $f : x \mapsto -3x$ et d_g la représentation graphique de $g : x \mapsto \frac{2}{3}x$.

Non corrigé

2 Déterminer le coefficient directeur

Propriété : Calculer le coefficient directeur

Soit f une fonction linéaire telle que $f : x \mapsto ax$. Le **coefficient directeur** s'écrit :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

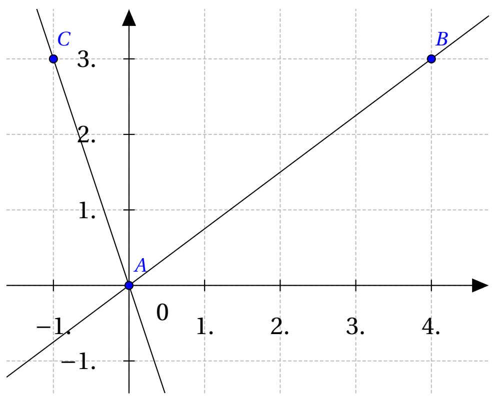
Démonstration. Soient f une fonction linéaire telle que $f : x \mapsto ax$ et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points de (d) représentative de la fonction f, on écrit alors :

$$\begin{aligned}
y_A &= ax_A \quad \text{(A appartient à la droite)}\\
y_B &= ax_B \quad \text{(B appartient à la droite)}\\
y_B - y_A &= ax_B - ax_A\\
y_B - y_A &= a(x_B - x_A)\\
a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}
\end{aligned}$$

□

Exercice 4 : Calculer le coefficient directeur

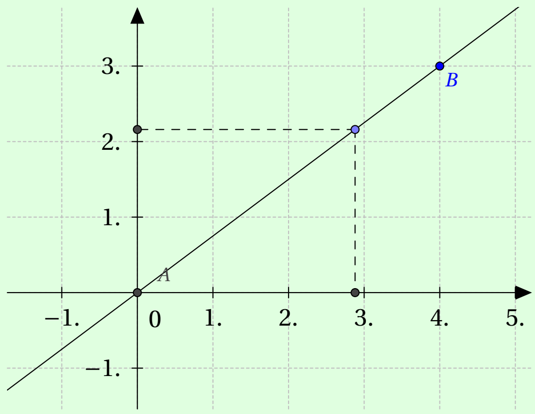
Donner les expressions de f et g toutes deux linéaires et représentées respectivement par les droites (AB) et (AC).



Non corrigé

3 Images et antécédents

Images et antécédents



Propriété : Images, antécédents et fonctions linéaires

- Tout nombre admet **une unique image** par une fonction linéaire.
- Tout nombre admet **un unique antécédent** par une fonction linéaire.

Exercice 5 : Recherche de l'antécédent

Après avoir représenté la fonction

$$f : x \longmapsto 2{,}5x$$

déterminer l'antécédent de 4 par f.
Confirmer le résultat par le calcul.

Non corrigé

B Fonctions affines

1 Généralités

Définition : Fonction affine

La **fonction affine** s'écrit

$$f(x) = ax + b$$

Remarque. La fonction linéaire est une fonction affine particulière, $b = 0$.
Exemple. Soit h la fonction telle que $h(x) = 2x + 3$. h est une fonction affine.

Exercice 6 : Reconnaître une fonction affine

Indiquer les fonctions affines parmi les fonctions proposées ci-dessous :

$f : x \mapsto x^2$
$g : x \mapsto 2x$
$h : x \mapsto \dfrac{2}{x}$
$i : x \mapsto 2x + 3$
$j : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x}$
$k : x \mapsto x(3x - 2) - 3x^2$

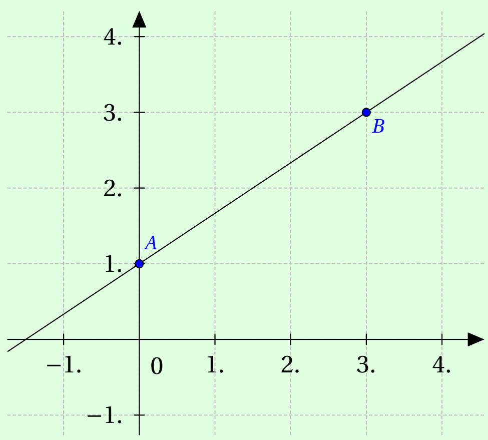
Non corrigé

Remarque. a est le coefficient coefficient directeur :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1) + b \\ &= ax + a + b \\ &= ax + b + a \\ &= f(x) + a \end{aligned}$$

Si je me décale de 1 vers la droite, je monte (a>0) de a ou je descends ($a < 0$) de la même valeur.

Représentation graphique

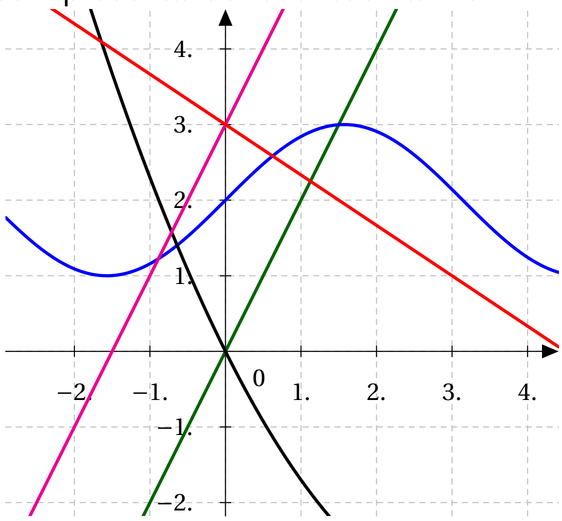


Propriété : Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$, est une **droite passant par le point de coordonnées** $(0; b)$.
b **s'appelle l'ordonnée à l'origine**.
L'**équation** de cette **droite** est : $y = ax + b$.

Exercice 7 : Reconnaître la représentation d'une fonction affine

Donne la couleur des courbes représentant une fonction affine.



Non corrigé

Exercice 8 : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine

Tracer d_f la représentation graphique de $f : x \mapsto -3x + 2$ et d_g la représentation graphique de $g : x \mapsto \frac{3}{5}x - 2$.

2 Déterminer le coefficient directeur

Propriété : Calculer le coefficient directeur

Soit f une fonction linéaire telle que $f : x \mapsto ax$. Le **coefficient directeur** s'écrit :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

avec $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Démonstration. Soit f une fonction affine telle que $f : x \mapsto ax + b$ et $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ deux points de (d) représentative de la fonction f, on écrit alors :

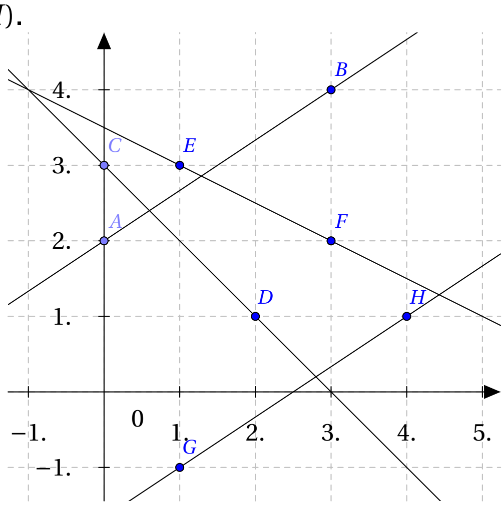
$$\begin{aligned}
y_A &= ax_A + b && \text{(A appartient à la droite)}\\
y_B &= ax_B + b && \text{(B appartient à la droite)}\\
y_B - y_A &= ax_B - ax_A && \text{(les "b" s'éliminent)}\\
y_B - y_A &= a(x_B - x_A)\\
a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}
\end{aligned}$$

□

Remarque. Ce qui a été vu précédemment sur les fonctions linéaires reste donc valable.

Exercice 9 : Calculer le coefficient directeur

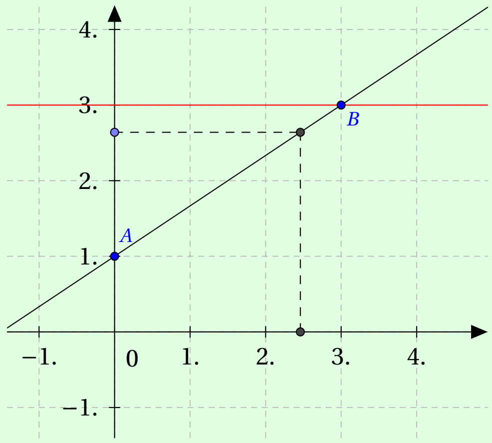
Donner les expressions de f, g, h et i toutes affines et représentées respectivement par les droites (AB), (CD), (EF) et (GH).



Non corrigé

3 Images et antécédents

Images et antécédents



Propriété : Images, antécédents et fonctions affines

- Tout nombre admet **une unique image** par une fonction affine.
- Si $a \neq 0$ tout nombre admet **un unique antécédent** par une fonction affine.

Exercice 10 : Images et antécédents

1. Quelle est l'image de 5 par $f : x \mapsto -5x + 20$?
2. Quel est l'antécédent de 3 par $g : x \mapsto 8x + 3$?

Non corrigé

C Lien avec les pourcentages

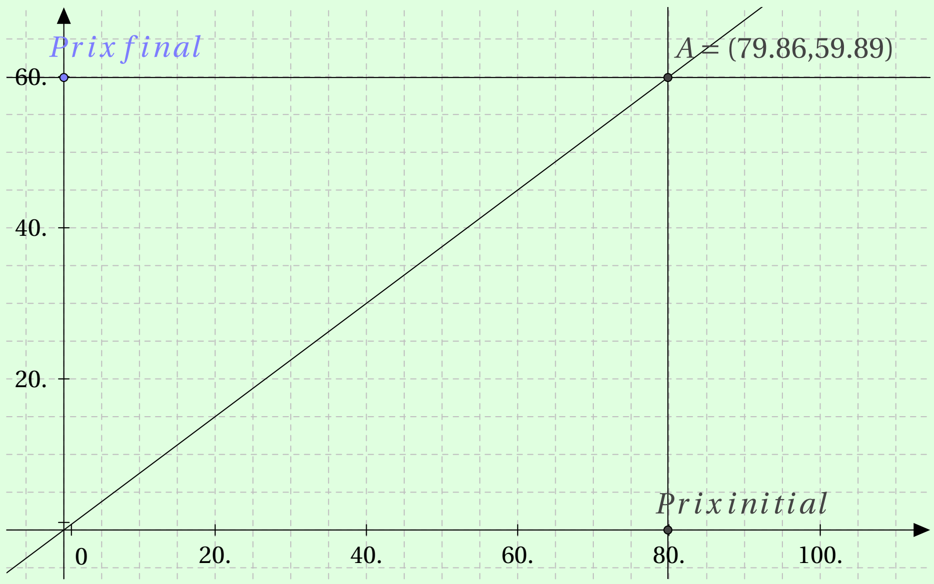
Propriété : Modélisation d'une diminution ou d'une augmentation

Une diminution ou d'une augmentation peut être modélisée par **une fonction affine** :

	Multiplier par le coefficient	fonction f
Augmenter un nombre de p%	$\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$f(x) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$
Diminuer un nombre de p%	$\left(1 - \frac{p}{100}\right)$	$f(x) = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$

Exemple. Dans un magasin, on décide d'appliquer une réduction générale de 25% le premier jour des soldes d'été.
La fonction modélisant cette situation est $f(x) = \left(1 - \frac{25}{100}\right)x = 0{,}75x$.

Graphiquement



Ainsi un article dont l'étiquette indique 59,89€ coûtait initialement 79,86€ environ (recherche de l'antécédent de 59,89 par f).

Par contre, un article habituellement vendu 40€ ne coûtera plus que 30€ (recherche de l'image de 40 par f).

Exercice 11 : Avec le tableur

Créer une feuille de calcul modélisant l'augmentation de 2,5% de tous les articles d'un magasin. Cette feuille de calcul doit permettre à un employer d'écrire plusieurs prix initiaux et de pouvoir instantanément connaître les nouveaux tarifs.

Non corrigé

Exercices

Ex 12 Reconnaître

Compléter le tableau en indiquant l'expression des fonctions linéaires et le coefficient de proportionnalité.

$f : x \mapsto 2x+3$

$g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$h : x \mapsto \dfrac{x}{7}$

$j : x \mapsto -\dfrac{3}{5}x$

$k : x \mapsto 2x-5x$

$l : x \mapsto -2x^2$

$m : x \mapsto -3(x+3)$

$n : x \mapsto -2(x-3)-6$

Expression de fonctions linéaires					
Coefficient de proportionnalité					

Ex 13 Tableau de valeurs

La fonction f est linéaire de coefficient -3. Compléter le tableau de valeur suivant.

x	-3	-1	0		
$f(x)$				-6	6

Quelle est la nature de ce tableau ?

Ex 14

Déterminer l'expression de f telle que : $f(1) = 3$.

Ex 15

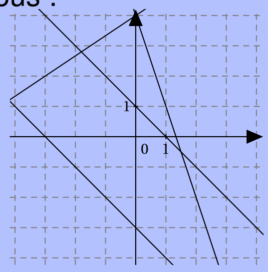
Déterminer l'expression de f telle que : $f(2) = 0{,}5$.

Ex 16

Déterminer l'expression de f telle que : $f(10) = 3$.

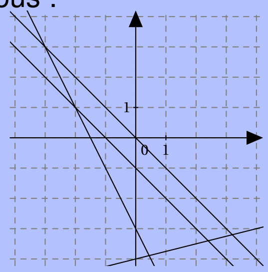
Ex 17 Lecture graphique

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées ci-dessous :



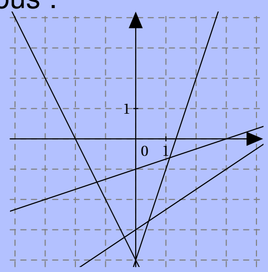
Ex 18 Lecture graphique

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées ci-dessous :



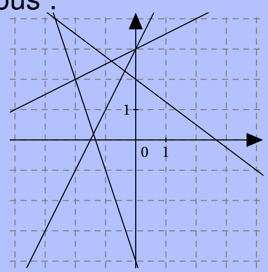
Ex 19 Lecture graphique

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées ci-dessous :



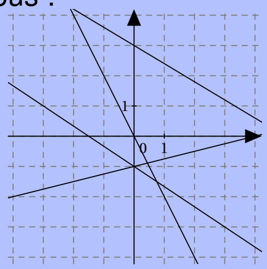
Ex 20 Lecture graphique

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées ci-dessous :



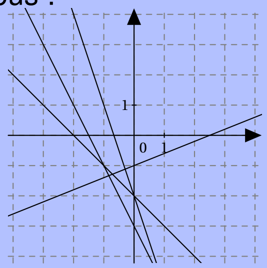
Ex 21 Lecture graphique

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées ci-dessous :



Ex 22 Lecture graphique

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées ci-dessous :



Ex 23 Tracer une droite

Tracer les droites dont les équations sont écrites ci-dessous :

- $y = -\frac{1}{2}x - 3$;
- $y = 3x - 1$;
- $y = -2x$;

Ex 24 Tracer une droite

Tracer les droites dont les équations sont écrites ci-dessous :

- $y = -3x + 1$;
- $y = -3x + 4$;
- $y = -3x + 2$;

Ex 25 Tracer une droite

Tracer les droites dont les équations sont écrites ci-dessous :

- $y = -2x - 3$;
- $y = -3x$;
- $y = -\frac{3}{4}x - 2$;

Ex 26 Tracer une droite

Tracer les droites dont les équations sont écrites ci-dessous :

- $y = -\frac{4}{3}x - 1$;
- $y = -\frac{3}{5}x + 3$;
- $y = -3x - 1$;

Ex 27 Tracer une droite

Tracer les droites dont les équations sont écrites ci-dessous :

- $y = 2x - 3$;
- $y = -\frac{2}{5}x + 2$;
- $y = -\frac{1}{2}x + 2$;

Ex 28

Soit une droite d d'équation $y = 5x - 8$.
Vérifier que $M(1;-3)$ et $N(3;7)$ appartiennent bien à la droite d.

Ex 29

Soit une droite d d'équation $y = -\frac{2}{3}x + 2$.
Vérifier que $M(6;-2)$ et $N(3;-1)$ appartiennent bien à la droite d.

Ex 30

Donner l'équation d'une droite d de coefficient directeur 2 passant par le point $A(2;1)$.

Ex 31

Donner l'équation d'une droite d de coefficient directeur $\frac{4}{5}$ passant par le point $B(-1;3)$.

Ex 32 Images et Antécédents

Soit $f : x \mapsto 2x-3$.

1. Calculer l'image de -3 par f.
2. Calculer l'image de $\frac{2}{7}$ par f.
3. Résoudre $f(x)=5$.
4. Calculer l'antécédent de 3 par f.

Ex 33 Images et Antécédents

Soit $g : x \mapsto -\frac{4}{3}x+7$.

1. Calculer l'image de -2 par g.
2. Calculer l'antécédent de 3 par g.
3. Calculer l'image de $\frac{5}{3}$ par g.
4. Résoudre $g(x)=2$.

Ex 34 Images et Antécédents

Soit $h : x \mapsto -\frac{4}{9}x$.

1. Calculer l'image de -2 par h.
2. Calculer l'antécédent de 3 par h.
3. Calculer l'image de $\frac{5}{3}$ par h.
4. Résoudre $h(x)=2$.

Ex 35

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction f telle que :

a) $f(0)=4$ et $f(5)=2$.

b) $f(2)=2$ et $f(6)=5$.

Ex 36

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction f telle que :

a) $f(-2)=2$ et $f(3)=5$.

b) $f(2)=3$ et $f(7)=-4$.

Ex 37

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction f telle que :

a) $f(-3)=\frac{2}{9}$ et $f(3)=\frac{5}{12}$.

b) $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{4}$ et $f\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{7}{6}$.

Ex 38 Les soldes

On s'intéresse, dans un magasin de vêtements, au prix d'articles.
Calculer le prix ...

1. ... final d'un jean's à 50 € subissant une réduction de 20%.
2. ... initial d'un T-shirt affiché à 35€ après une réduction de 30%.
3. ... final d'une jupe à 25 € subissant une réduction de 25%.
4. ... initial d'un pull affiché à 35€ après une réduction de 30%.

Ex 39 Modéliser

Modéliser les situations suivantes par une fonction f dont vous donnerez l'expression.

1. Un augmentation de 10%.
2. Une diminution de 13%.
3. Un augmentation de 110%.
4. Un augmentation de 25%.
5. Une diminution de 50%.
6. Une diminution de 70%.

Ex 40 Grille de tarifs

Chez un spécialiste de la course à pied, les adhérents aux club locaux ont une remise de 10% sur les articles du magasin.
Compléter le tableau suivant :

Tarif normal	Tarif réduit
130€	
45€	
	45€
12€	
	81€

Ex 41 Augmenter et diminuer

Le prix d'un article a augmenté de 20% avant de diminuer de 20%.
Est-il revenu au prix de départ ? Si non, quel est le pourcentage de variation ? Justifie ta réponse.

Ex 42 Sur internet ?

On cherche à acheter des CD vierges. En magasin, il coûte 1,20€ l'unité.
Sur internet, la réduction est de 17% mais les frais de port s'élèvent à 12€ .
Par une résolution graphique de ce problème, détermine le nombre de disques à partir duquel, il devient plus intéressant d'acheter sur internet.

Ex 43 Physique-Chimie

En physique, la tension U aux bornes d'une « résistance » est proportionnelle à l'intensité I du courant qui la traverse, c'est-à-dire : $U = R \times I$, où R (valeur de la résistance) est le coefficient de proportionnalité.
On rappelle que l'unité d'intensité est l'Ampère et que l'unité de tension est le Volt.

L'intensité I (en A)	0,02	0,03	0,04	0,08
Tension U (en V)	3	4,5	6	12

1.a. Vérifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité.

1.b. Quel est le coefficient de proportionnalité ?

1.c. Calculer la tension U si l'intensité I vaut $0{,}07A$.

On nomme f la fonction qui donne la tension U en fonction de l'intensité I.

2. Préciser la nature de la fonction f et donner l'expression algébrique de $f(I)$.

3. Dans le repère ci-dessous, tracer la représentation graphique de la fonction f.

4. Lire graphiquement l'intensité quand $U = 10V$ (donner une valeur approchée avec la précision permise par le graphique).

Déterminer par un calcul la valeur exacte de l'intensité quand $U = 10V$.

Culture

Monnaie : Francs Collectivités Françaises de l'Océan Pacifique, 1000 XPF = 8,38 €

Ex 44 Nelle-Cal, mars 2009

Dans un magasin de location de DVD, on propose à la clientèle deux formules :

- Tarif plein : 500 F par DVD loué.
- Tarif abonné : 2 000 F pour l'achat d'une carte d'abonné, puis 300 F par DVD loué .

On note x le nombre de DVD loués, $P(x)$ le prix payé au tarif plein et $A(x)$ le prix payé au tarif abonné.

Nombre de DVD loués : x	2	5	8	12
Prix payé avec le tarif plein : P (x) en Franc		2500		
Prix payé avec le tarif abonné : A(x) en Franc			4400	

1. Recopier et compléter le tableau précédent :
2. On admettra que P est une fonction linéaire, A est une fonction affine, et donc que leurs représentations graphiques sont des droites.
   Représenter dans un repère orthogonal les deux tarifs en fonction du nombre de DVD loués. (on placera l'origine du repère en bas à gauche, on prendra 1cm pour 1 DVD loué en abscisse et 2cm pour 1 000F en ordonnée).
3. En utilisant le graphique : donner le nombre de DVD pour lequel le prix est le même dans les deux tarifs puis, préciser le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de DVD loués.
4. Exprimer $P(x)$ et $A(x)$ en fonction de x.
5. Retrouver par le calcul le nombre de DVD pour lequel le prix est le même quelle que soit la formule choisie.

Ex 45 Pondichéry, mars 2010

Un disquaire en ligne propose de télécharger légalement de la musique.

- Offre A : 1,20 € par morceau téléchargé avec un accès gratuit au site.
- Offre B : 0,50 € par morceau téléchargé moyennant un abonnement annuel de 35 €.

1. Calculer, pour chaque offre, le prix pour 30 morceaux téléchargés par an.
   (a) Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix avec l'offre A.
   (b) Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix avec l'offre B.
2. Soit f et g les deux fonctions définies par : $f : x \mapsto 1{,}2x$ et $g : x \mapsto 0{,}5x + 35$
   (a) L'affirmation ci-dessous est-elle correcte ? Expliquer pourquoi.

   « f et g sont toutes les deux des fonctions linéaires »

   (b) Représenter sur une feuille de papier millimétré, dans un repère orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g. On prendra 1 cm pour 10 morceaux en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée.
3. Déterminer le nombre de morceaux pour lequel les prix sont les mêmes.
4. Déterminer l'offre la plus avantageuse si on achète 60 morceaux à l'année.
5. Si on dépense 80 €, combien de morceaux peut-on télécharger avec l'offre B ?

Ex 46 Tâche complexe

Madame Martin, professeur de mathématiques en terminale, désire faire un achat groupé d'annales non corrigées pour les 22 élèves de sa classe.
Un éditeur lui fait l'offre suivante :

Lorsqu'elle présente son bon de commande au libraire, il lui accorde alors une remise de 4
Combien chaque élève devra-t-il payer ?
Justifier la réponse.
Vous laisserez apparentes toutes vos recherches. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans l'évaluation.

http://www.ac-clermont.fr

Chapitre XII

Probabilités

A Vocabulaire

Définition : Expérience aléatoire

Une expérience dont le **résultat ne dépend que du hasard** est dite aléatoire.

Exemple. Lancer d'un dé équilibré. L'expérience est aléatoire car elle ne dépend que du hasard. Le choix en magasin de l'article le moins cher n'est pas une expérience aléatoire.

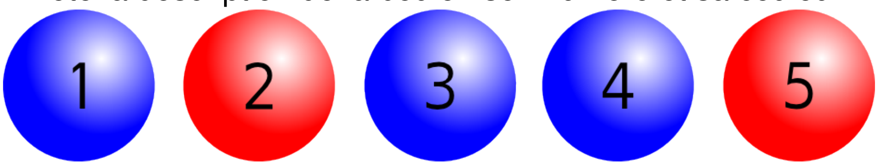
Définition : Issue

On appelle **issue** d'une expérience, le **résultat possible** de cette expérience.

Exemple. Les deux issues d'un lancer d'une pièce de monnaie est « pile » et « face ».

Exercice 1 : Expérience aléatoire et issue

On considère ces cinq boules indiscernables au toucher, dans une urne opaque. Au procède au tirage au sort et on note la description de la boule : son numéro et sa couleur.



1. Cette expérience est-elle aléatoire ?
2. Citer quatre issues de cette expérience.

Non corrigé

Définition : Événement et événement élémentaire

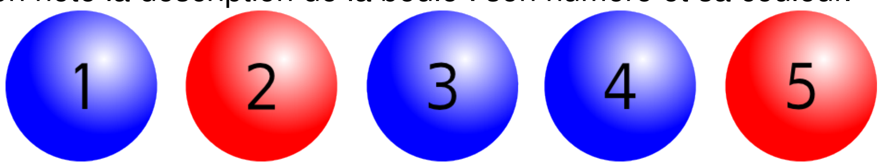
Un **événement** est une condition qui peut être réalisée lors d'une expérience.
Un événement peut être réalisé par plusieurs issues d'une expérience.
On appelle **événement élémentaire** un événement réalisé par une seule issue.

Exemple. Lancer d'un dé.

L'événement « obtenir un nombre impair » n'est pas un événement élémentaire. « obtenir un nombre supérieur à 5 » est élémentaire.

Exercice 2 : Événement élémentaire

On considère ces cinq boules indiscernables au toucher, dans une urne opaque. Au procède au tirage au sort et on note la description de la boule : son numéro et sa couleur.



1. Justifier que « Obtenir une boule rouge notée d'un numéro pair » est un événement élémentaire.
2. Justifier que « Obtenir une boule bleue notée d'un numéro impair » n'est pas un événement élémentaire.
3. Écrire deux événements élémentaires (différentes de ceux cités dans les questions précédentes).
4. Écrire deux événements qui ne sont pas élémentaires (différentes de ceux cités dans les questions précédentes).

Non corrigé

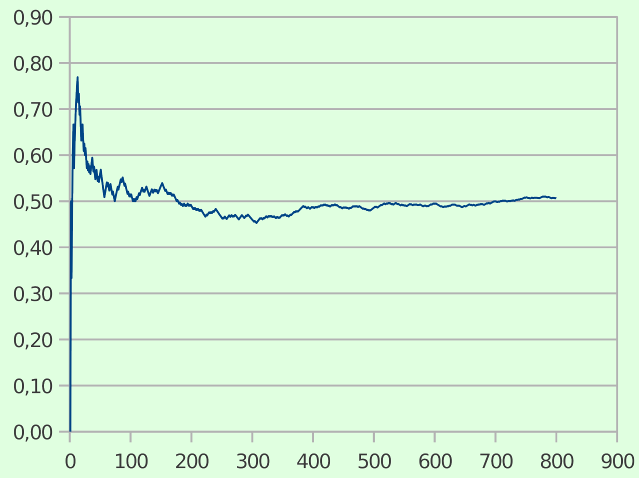
B La notion de probabilité

1 Les probabilités

Exemple. Simulation à l'aide du tableur

On effectue 800 lancers d'une même pièce de monnaie. Pour la simulation, on choisit une fonction donnant un nombre entier aléatoire entre 0 et 1. 0 si on obtient « face » et 1 si on obtient « pile » .

Graphique obtenu



Fréquence de l'évènement « obtenir pile » en fonction du nombre de lancers.

Définition : Probabilité

Lorsqu'on effectue un très **grand nombre d'expériences**, la fréquence de réalisation s'approche d'une « fréquence théorique » appelée probabilité.

Exemple. Dans l'expérience précédente, la probabilité de P est $\frac{1}{2}$.
La probabilité de « obtenir 2 » lorsqu'on lance un dé est de $\frac{1}{6}$.

Exercice 3 : Simulation avec le tableur

En utilisant un tableur, simuler l'expérience de 800 lancers de pièces de monnaie pour vérifier la propriété précédente.

Non corrigé

Définition : Probabilités

- La **probabilité** est un nombre compris entre 0 et 1.
- Si la **probabilité** d'un événement est de 1 alors cet événement est certain.
- Si la **probabilité** d'un événement est de 0 alors cet événement est impossible.

Propriété : Somme des probabilité

La **somme des probabilités des événements élémentaires** d'une expérience est de 1.

Remarque. Lancer d'une pièce équilibrée : $p(P) = p(F) = 0{,}5$. On peut remarquer que $p(P)+p(F) = 1$: « obtenir pile » et « obtenir face » sont deux événements contraires.

Soit C : « obtenir pile ou face » . $p(C) = 1$ puisqu'il s'agit d'un événement.

On remarque alors que $p(P)+p(F) = p(C)$: la probabilité d'obtenir pile ou face est égale à la somme de la probabilité d'obtenir pile et de la probabilité d'obtenir face.

2 Situation d'équiprobabilité

Définition : Événements équiprobables

On dit que deux **événements** sont **équiprobables** s'ils ont la même probabilité d'être réalisés.

Exemple. Lancer d'une pièce équilibrée : $p(P) = p(F) = 0{,}5$.

Lancer d'un dé non-pipé à six faces : $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$.

Propriété : Situations d'équiprobabilité

Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre d'issues favorables par le nombre d'issues possibles.

Remarque. Dans les énoncés, des mots vous indiquent une situation d'équiprobabilité :

Lancer d'un dé non-pipé à six faces, lancer d'une pièce équilibrée.

Exemple. Lancer d'un dé non-pipé à six faces, lancer d'une pièce équilibrée. p(4 ou 5)=$\frac{2}{6}$, deux issues favorables (4 et 5) et six issues au total.

Exercice 4 : Lancer d'un dé à 20 faces

On lance un dé équilibré à 20 faces. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 17 » ?

Non corrigé

3 Événements incompatibles et événements contraires

Propriété : Probabilité et événements incompatibles

Deux **évènements incompatibles** ne peuvent pas être réalisés simultanément.

$$p(A\, ou\, B) = p(A) + p(B)$$

avec A et B incompatibles.

Exemple. Lancer d'un dé équilibré. On considère les événement suivant :

- A : « Obtenir un nombre pair » , issues favorables : $\{2;4;6\}$
- B : « Obtenir un 3 » , issues favorables : $\{3\}$
- C : « Obtenir un 2 » , issues favorables : $\{2\}$

$$p(A)=\frac{3}{6}\ ;\ p(B)=\frac{1}{6}\ ;\ p(C)=\frac{1}{6}.$$

- On vérifie que A et B sont incompatibles.
  A ou B : $\{2;3;4;6\}$, $p(A\, ou\, B)=\frac{4}{6}$ et $p(A)+p(B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=p(A\, ou\, B)$
  Donc A et B sont incompatibles.
- On vérifie que A et C sont compatibles.
  A ou C : $\{2;4;6\}$, $p(A\, ou\, C)=\frac{3}{6}$ et $p(A)+p(C)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}\neq p(A\, ou\, C)$
  Donc A et C sont compatibles.

Définition : Événements contraires

L'événement contraire d'un événement A est celui que se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$ ou $non\, A$.

Propriété : Probabilité et événements contraires

Si les événements A et B sont contraires, alors on écrit :

$$P(A)+P(B)=1$$

Remarque. La réciproque n'est pas vraie : au lancer d'un dé, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 vaut $\frac{4}{6}$ alors que la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 3 vaut $\frac{2}{6}$: la somme de ces deux événements vaut 1 mais les événements ne sont pas contraires, ils sont ici compatibles.

Exemple. On tire des cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit R : « btenir un Roi » . $p(R)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

On veut calculer la probabilité d'obtenir une carte qui n'est pas un Roi.

$$p(\overline{R})=1-p(R)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Exercice 5 : Événements contraires et événements incompatibles

On lance un dé équilibré à six faces. Soit A : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2. »

1. Formuler un événement incompatible avec l'événement A.
2. Formuler l'événement $\overline{A}$.

Non corrigé

Exercice 6 : Événement contraire

On effectue un tirage aléatoire d'une carte d'un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité que cette carte ne soit pas un As (événement A) ?
2. Soit l'événement B : « obtenir une carte de couleur cœur ». Prouver que $\overline{A}$ et B ne sont pas incompatibles.

Non corrigé

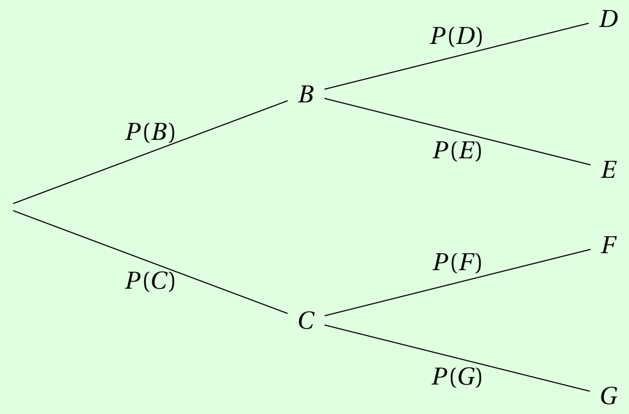
4 Utilisation d'un arbre pondéré

Définition : Utilisation d'un arbre pondéré

La probabilité d'un événement d'une expérience à deux épreuves est égale au **produit des probabilités** figurant sur la branche de l'**arbre pondéré** conduisant à cet événement.

Pour résoudre un exercice faisant intervenir ces expériences, on peut utiliser un arbre pondéré :

Arbre pondéré

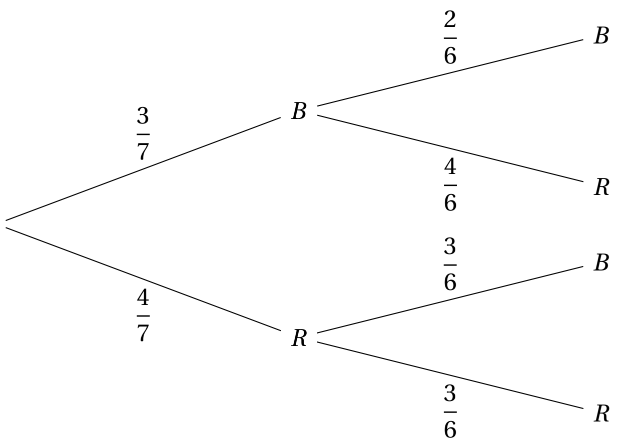


Dans ce cas, les événements sont indépendants.

Exemple. Une urne contient trois boules bleues et quatre boules rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise.

- Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule bleue ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule bleue ?

On commence par représenter l'arbre pondéré, R : «obtenir une boule rouge» B : «obtenir une boule bleue»



$P(\text{B puis B}) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

$P(\text{B puis R}) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$

$P(\text{R puis B}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

$P(\text{R puis R}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

- La probabilité d'obtenir une seule boule bleue est :

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

- La probabilité d'obtenir au moins une boule bleue est :

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Exercice 7 : Arbre pondéré

On utilise une urne opaque contenant 3 boules vertes et 5 boules jaunes, indiscernables au toucher. On effectue deux tirages successifs sans remise.
Calculer la probabilité de tirer au moins une boule jaune.

Non corrigé

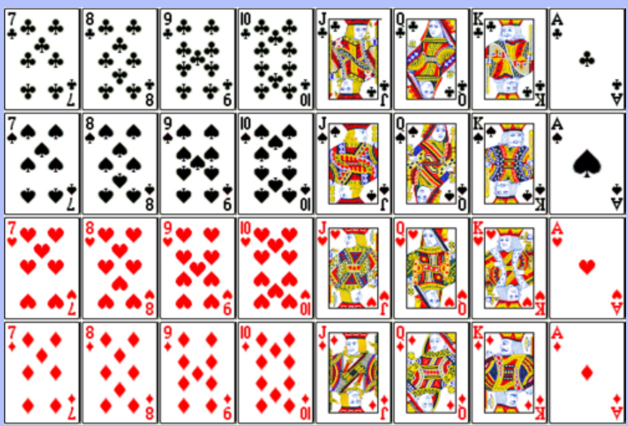
Exercices

Ex 8 Roue équilibrée

Une roue équilibrée est partagée en douze secteurs identiques. Sur chaque secteurs figure une des lettres du mot PROBABILITES. On fait tourner cette roue et on note la lettre ainsi obtenue lorsque la roue s'arrête. Cocher les affirmations justes.

- ☐ « Obtenir la lettre U » est un événement possible.
- ☐ « Obtenir la lettre I » est une issue possible.
- ☐ {I} est une issue.
- ☐ « Obtenir une consonne » est un événement possible.
- ☐ « Obtenir une voyelle » est un événement élémentaire.
- ☐ « Obtenir I » est un événement élémentaire.
- ☐ « Obtenir O » est un événement élémentaire.

Ex 9 Jeu de cartes



On considère un jeu de 32 cartes. Les cartes sont indiscernables et on en sélectionne une au hasard.
Les probabilités seront exprimées sous la forme d'une fraction simplifiée.

1. Citer un événement élémentaire ?
2. Citer un événement qui n'est pas élémentaire ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un dix de cœur » ?
4. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une carte de couleur cœur » ?
5. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une figure » ?

Ex 10 Arbre pondéré

Une urne opaque contient huit boules indiscernables au toucher : trois boules bleues et cinq boules rouges.

1. On tire successivement et **avec remise** deux boules de l'urne. Calcule les probabilités que :
   (a) la première boule soit bleue et la seconde boule soit rouge ;
   (b) les deux boules aient la même couleur.
2. Reprends les questions précédentes dans le cadre de deux tirages successifs sans remise.

Ex 11 Polynésie, juin 2012

L'hôtel « la ora na » accueille 125 touristes :
55 néo-calédoniens dont 12 parlent également anglais.
45 américains parlant uniquement l'anglais.
Le reste étant des polynésiens dont 8 parlent également anglais.
Les néo-calédoniens et les polynésiens parlent tous le français.

1. Si je choisis un touriste pris au hasard dans l'hôtel, quelle est la probabilité des évènements suivants :
   (a) Évènement A : « Le touriste est un américain »
   (b) Évènement B : « Le touriste est un polynésien ne parlant pas anglais »
   (c) Évènement C : « Le touriste parle anglais »
2. Si j'aborde un touriste dans cet hôtel, ai-je plus de chance de me faire comprendre en parlant en anglais ou en français ? Justifie ta réponse. (Toute trace de recherche, même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation).

Ex 12 Métropole, septembre 2012

Un cybercafé est ouvert depuis une semaine. Dans ce cybercafé, on peut choisir entre deux moteurs de recherche : Youpi et Hourra. Le tableau ci-dessous donne les moteurs de recherche utilisés par les 992 premiers utilisateurs lors de la semaine d'ouverture.

Nombre d'utilisateurs	Moteur Youpi	Moteur Hourra
992	789	203

La probabilité pour qu'un utilisateur pris au hasard dans ce cybercafé choisisse le moteur Youpi est-elle proche de 0,4 ; de 0,6 ou de 0,8 ?

Ex 13 Métropole, septembre 2014

Dans une classe de collège, après la visite médicale, on a dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes
Fille	3	15
Garçon	7	5

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.

1. Si l'infirmière en ramasse une au hasard, quelle est la probabilité que cette fiche soit :
   (a) celle d'une fille qui porte des lunettes ?
   (b) celle d'un garçon ?
2. Les élèves qui portent des lunettes dans cette classe représentent $12{,}5\%$ de ceux qui en portent dans tout le collège. Combien y a-t-il d'élèves qui portent des lunettes dans le collège ?

Chapitre XIII

Grandeurs et mesures

A Notion de grandeur

Définition : Grandeur

Les grandeurs permettent de mesurer les caractéristiques d'un objet.

On utilise des unités pour exprimer les grandeurs.

Exercice 1 : Grandeurs et unités

Remplir le tableau suivant :

Grandeurs	Unités
longueur	
masse	
durée	
tension	
intensité	
aire	
volume	
température	
prix	
prix massique (chez le boucher)	
énergie électrique (facture d'électricité)	
densité de population (en géographie)	
vitesse	

Non corrigé

B Les grandeurs composées

Définition : Grandeurs composées

Une grandeur produit est le produit de deux grandeurs. Une grandeur quotient est le quotient de deux grandeurs différentes.

Deux unités sont principalement utilisées : le km/h et le m/s
Quelle distance en m parcourt chaque seconde un véhicule roulant à $90km/h$?
Répondre à cette question revient à convertir des km/h en m/s.
On utilise encore une fois un tableau de proportionnalité dans lequel on n'oublie pas d'harmoniser les unités.

distance	90km=90 000m	d
temps	1h=3600s	1s

$d = \frac{90000\times 1}{3600} = 25m$

En voulant convertir plus rapidement, on peut chercher le lien entre ces deux unités : il y a proportionnalité,

vitesse en km/h	90	?
vitesse en m/s	25	1

$$1m/s = \frac{90\times 1}{25} = 3{,}6km/h$$

En conclusion, $1m/s = 3{,}6km/h$.

Méthode : Changer d'unité de vitesse

On veut convertir $60km/h$ en m/s :

$$60km/h = \frac{60}{3{,}6}m/s \simeq 16{,}7m/s$$

On veut convertir $20m/s$ en km/h :

$$20m/s = 20\times 3{,}6km/h = 72km/h$$

Exercice 2 : Conversion de vitesse

Convertir 20m/s en km/h.

Non corrigé

Exercices

...

Chapitre XIV

Statistiques

Activités d’introduction

Activité 1 Moyenne pondérées

Notes	Coefficients
14	1
8	3
10	2

1. Calculer la moyenne actuelle de cet élève.
2. Cet élève prépare un dernier devoir coefficient 1. Quelle note minimale doit-il obtenir pour atteindre 10 de moyenne ?

A Vocabulaire

Exemple. Voici les distances en km parcourues par les cyclistes du Tour de France 2007 à chaque étape :

203 ; 167 ; 236 ; 190 ; 184 ; 200 ; 197 ; 165 ; 161 ; 229 ; 180 ; 179 ; 54 ; 198 ; 196 ; 218 ; 210 ; 55 ; 130 ;

La **population** étudiée est les étapes du Tour 2007.

Le **caractère** étudié est la distance en km.

L'effectif total de cette série est de 19 (19 données).

Chaque étape prend une valeur différente, les énumérer reviendrait ici à recopier la série. Pour en citer quelques unes, 203 ; 190 ; 54 sont des **valeurs du caractère**.

B La valeur médiane

Définition : Médiane d'une série statistique

La médiane d'une série de N données est la valeur qui partage l'effectif en deux parties de même effectif.

Dans le cas où les données sont rangées dans l'ordre croissant :

- Si N est impair, alors il s'agit de la donnée n°$\frac{N+1}{2}$.
- Si N est pair, alors il s'agit de la donnée intermédiaire entre la n°$\frac{N}{2}$ et la n°$\frac{N}{2}+1$ (demi-somme de ces deux valeurs).

Exemple.

- Dans la série : 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 17 ; 19 ; 20 ;
  - ☐ Caractère de la population : note obtenue sur la copie.
  - ☐ La médiane est 11 : 3 données inférieures et 3 données supérieures à la médiane.
- Dans la série : 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 17 ; 19 ; 19,5 ; 20 ;
  - ☐ la médiane est 14 ce qui donne 4 données inférieures et 4 données supérieures à la médiane.
  - ☐ ici la médiane n'est pas une valeur de la série mais la demi-somme des deux « valeurs centrales » .

Remarque. Il est préférable de ranger les données dans l'ordre croissant.

⚠ Ne pas confondre la valeur médiane et la moyenne.

Exercice 1 : Déterminer la médiane d'une série

Voici les relevés de vitesse en agglomération qui nous ont été communiqués :

Vitesses relevées en km/h	48	49	50	52	70
Effectifs	10	13	5	8	2
Effectifs cumulés croissants					

1. Tracer une représentation graphique des effectifs cumulés croissants.
2. En déduire la médiane de cette série.

Non corrigé

C Le premier et troisième quartile

Définition : Premier et troisième quartile

On considère une série statistique, **au moins 25%** des données sont inférieures ou égales à Q_1(premier quartile) et **au moins 75%** des données sont inférieures ou égales à Q_3(troisième quartile).

Exemple. On demande à une classe de 25 élèves de mesurer la masse d'un morceau de sucre. Voici les résultats : (rangés dans l'ordre, en grammes).

2,40 ; 2,40 ; 2,42 ; 2,44 ; 2,45 ; 2,45 ; 2,46 ; 2,47 ; 2,49 ; 2,51 ; 2,52 ; 2,52 ; 2,54 ; 2,56 ; 2,56 ; 2,57 ; 2,58 ; 2,59 ; 2,60 ; 2,61 ; 2,62 ; 2,62 ; 2,63 ; 2,63 ; 2,63 ;

$25 \times \frac{1}{4} = 6{,}25$, on en déduit que Q_1 est la 7ème donnée et $25 \times \frac{3}{4} = 18{,}75$ Q_3 la 19ème. $Q_1 = 2{,}46$, $Q_3 = 2{,}60$.

Le premier et le troisième quartile ne change pas si le sucre le plus léger pèse en réalité $2{,}35g$. Tout comme la médiane mais contrairement à la moyenne.

Exercice 2 : Déterminer le premier et troisième quartile d'une série

Voici les tailles d'un groupe d'élèves de troisième.
$1{,}55$; $1{,}58$; $1{,}63$; $1{,}59$; $1{,}79$; $1{,}71$; $1{,}6$; $1{,}6$; $1{,}59$; $1{,}8$; $1{,}69$; $1{,}67$; $1{,}76$; $1{,}72$; $1{,}59$; $1{,}65$; $1{,}51$; $1{,}55$; $1{,}59$; $1{,}67$; $1{,}75$; $1{,}54$; $1{,}64$; $1{,}67$; $1{,}71$; $1{,}75$; $1{,}52$; $1{,}77$; $1{,}79$; $1{,}68$; $1{,}74$; $1{,}59$; $1{,}62$; $1{,}6$; $1{,}66$.
Déterminer le premier et le troisième quartile de cette série statistique.

Non corrigé

D L'étendue d'une série statistique

Définition : L'étendue d'une série statistique

L'étendue d'une série est un nombre qui précise la dispersion des valeurs. Il s'agit de la différence entre la valeur maximum et de la valeur minimum.

Exemple. Dans la série précédemment étudiée, la valeur maximum et minimum sont respectivement 2,63g et 2,40g. L'étendue de la série est alors de 0,23g. Entre le plus léger et le plus lourd sucre, il y a 0,23g de différence.

Ne pas confondre « valeur prise par le caractère » et « effectif ».

Exercices

Ex 3 Moyenne

Voici les notes obtenues lors d'un contrôle de mathématiques par un groupe d'élèves :
10 ; 12 ; 11 ; 15 ; 13 ; 16 ; 10 ; 11 ; 19 ; 8 ; 10 ; 13 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14.
Calculer la moyenne des notes obtenues par le groupe.

Ex 4 Moyenne

Voici les notes obtenues lors d'un contrôle de mathématiques par un groupe d'élèves :
10 ; 12 ; 10 ; 12 ; 11 ; 15 ; 13 ; 16 ; 12 ; 10 ; 11 ; 19 ; 8 ; 10 ; 13 ; 14 ; 11.

1. Construire un diagramme « baton » rendant compte de la répartition des notes.
2. Calculer la moyenne des notes obtenues par le groupe.
3. Quel pourcentage des notes est supérieur à la moyenne du groupe ?

Ex 5 Athlétisme

En athlétisme, on a relevé les performances, en secondes, obtenues par les élèves d'une classe au 100m.
11,18 ; 13,28 ; 13,24 ; 11,04 ; 12,33 ; 14,01 ; 12,41 ; 12,51 ; 11,44 ; 13,01 ; 12,23 ; 12,31 ; 12,01 ; 11,54 ; 11,18.

1. Quel est l'effectif total de cette série ?
2. Range les données dans l'ordre croissant puis détermine une médiane de cette série.
3. Quelle est l'étendue de cette série ?
4. Quel est le pourcentage des performances inférieures à 12 s ?

Papeterie