Ministère des Enseignements Secondaires **Examen : Séquence 2**
DRES:Ouest/ DDES:Menoua/ Lycee de Fongo-Ndeng **Classe : 1ère Série : *C***
Année scolaire 2017-2018 **Durée : 3h Coef : 6**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(L'épreuve comporte sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires.)

Exercice 1 : [7points]

Soit E_2 un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A. Soient a et b deux nombres réels donnés, on considère l'endomorphisme f de E_2 défini par : $f(\vec{\imath}+\vec{\jmath})=(a+1)\vec{\imath}+(a+b+1)\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\imath}-2\vec{\jmath})=(a-1)\vec{\imath}+(a-2b+1)\vec{\jmath}$.
   1. Exprimer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction des réels a et b. [1pt]
   2. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. [0.5pt]
   3. Trouver tous les couples de réels (a, b) pour lesquels f n'est pas bijectif. [0.75pt]
   4. déterminer $Kerf$ et Imf et lorsque $(a,b)=(-1,1)$. [1pt]
   5. Existe-t-il un couple de réels (a,b) pour lequel $f\ o\ f\ =\ IdE_2$? justifier. [0.75pt]
   6. Pour $(a,b)=(1,2)$ montrer que f est un automorphisme de E_2 et déduire $Kerf$ et Imf dans ce cas. [0.75pt]

B. Soit g une application de E_2 vers E_2 définie par pour tout vecteur $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ de E_2, $f(\vec{u})=(\vec{\imath}-2\vec{\jmath})x+(\vec{\jmath}-3\vec{\imath})y$.
   1. Montrer que g est un endomorphisme de E_2. [0.5pt]
   2. Déterminer l'expression analytique de g. [0.25pt]
   3. Déterminer la matrice de g puis en déduire que g est un automorphisme. [0.75pt]
   4. Déterminer la matrice de g^{-1} et en déduire l'expression analytique de g^{-1}. (où g^{-1} désigne la réciproque g). [0.75pt]

Exercice 2 : [4points]

1. Dans le système (S) ci-après, a,b et c sont les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle.

$$(S):\begin{cases} a^2+\dfrac{16}{b^2-1}-\dfrac{15}{c}=15 \\ -2a^2+\dfrac{24}{b^2-1}+\dfrac{5}{C}=-29 \\ \dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{8}{b^2-1}-\dfrac{10}{C}=5 \end{cases}$$

   a. Résoudre le système (S). [1.5pt]
   b. En déduire le volume du parallélépipède rectangle. [0.5pt]

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

   (E_1): $\sqrt{-x^2-2x+3}=\sqrt{11-2x^2}$ (I_1): $\sqrt{4x+1}\leq x-1$ et (E_2): $\frac{1}{\sqrt{-3x+2}}=\frac{\sqrt{3}}{x}$ [2pt]

Problème : [14 points]

Partie A : [6 points]

Soit ABC un triangle, on pose, $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. On note A',B',C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

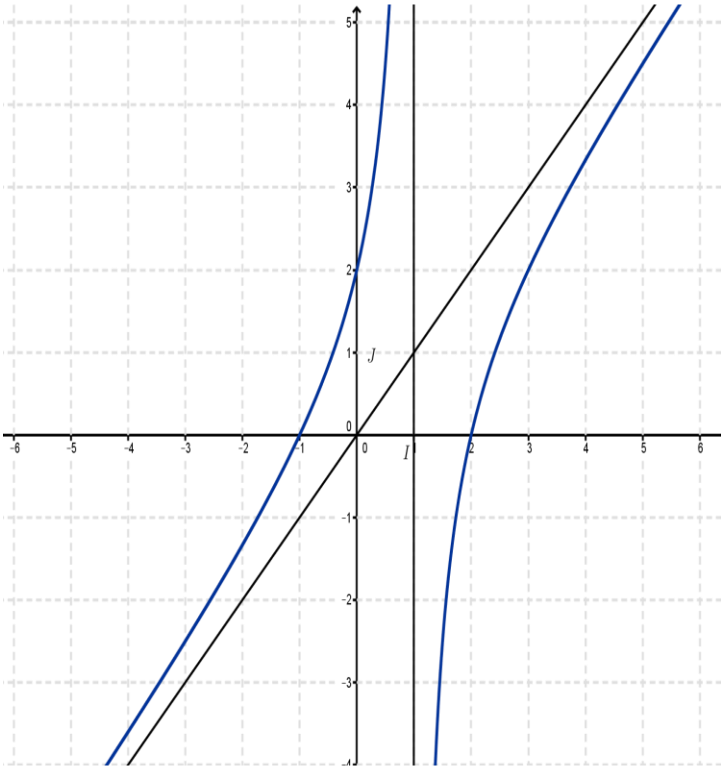
1. Montrer que les points A, A' et G sont alignés. [0.5pt]
2. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point que l'on précisera. [0.75pt]
3. Montrer que $GB^2+GC^2=\frac{1}{2}GA^2+\frac{1}{2}BC^2$. [0.75pt]
4. Apres avoir écrit deux autres relations analogues, montrer que :

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + C^2)$. [0.75pt]

5. A tout point M du plan, on associe le réel $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.
   a. Montrer que pour tout point M du plan, $f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. [0.5pt]
   b. Pour tout réel k, on désigne par L_k l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$. Déterminer suivant les valeurs du réel k, la nature de l'ensemble L_k. [0.75pt]
6. Calculer de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$ et en déduire que $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6}\right)$. [0.75pt]
7. On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA′] *et* [BC].
   a. Montrer que lorsqu'ils existent ces points appartiennent à un cercle (Γ) de centre G, dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c. (*on pourra utiliser le résultat de la question 4).* [0.5pt]
   b. Déterminer la valeur du réel k pour que $(\Gamma) = L_k$. [0.75pt]

<u>Partie</u> B : [8points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dont la courbe représentative est donnée par la figure ci-contre.



1. Déterminer $f(-1)$ $f(2), f(0)$ *et* $f(3)$.[1pt]
2. Déterminer le signe de f. [0.5pt]
3. Tracer le tableau de variation de f. [0.5pt]
4. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes.
   a. $f(x) = 2$. [0,5pt]
   b. $f(x) = 0$ [0,5pt]
   c. $f(x) < 2$. [0,5pt]
5. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ et $h(x) = f(|x|)$. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g et h. [0,5pt]
6. Montrer que la fonction h est paire. [0,5pt]
7. Reproduire la courbe de f et construire sur le même graphe et en pointillés la courbe représentative de la fonction g. [0.75pt]
8. On se propose de déterminer trois réels a, b *et* c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
   a. Montrer que a, b *et* c sont des solutions du système
   (S): $\begin{cases} -2a + 2b - c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ 6a + 2b + c = 4 \end{cases}$ [0.75pt]
   b. En déduire donc les valeurs de a, b *et* c. [0.75pt]
9. Soit m une fonction numérique d'une variable réelle définie par $m(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$.
   a. Montrer que $I(1,\ 1)$ est un centre de symétrique à la courbe (C_m). [0.75pt]
   b. m est-elle égale à f? Justifier votre réponse. [0.5pt]

« Tout ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve »

Alexandre d'Euclide

Bon courage !!!