Sujet de mathématiques TLE C

Téléchargeables gratuitement sur www.sila.e-monsite.com

2) Quel est l'ensemble (C_θ) des points $M(z)$ tel que $f(z)$ soit imaginaire pur ? On montrera que $(\mathscr{C}_\theta)$ est une conique dont on précisera la nature et le centre Ω_θ. 1 pt

4) Déterminer les éléments caractéristiques de (C_θ) pour $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ et représenter cette courbe. 1 pt

PROBLEME **11 points**

Partie A : Equations différentielles

On considère les équations différentielles (E) $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ et (E') $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1) On pose $\mathrm{u}(x) = ax + b$.
Déterminer les réels a et b tel que la fonction u soit solution de l'équation (E). 0,5 pt

2) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\mathrm{u} - \varphi$ est solution de l'équation (E'). 0,75 pt

3) Résoudre l'équation (E') et déterminer une solution φ de (E) tel que $\varphi(0) = -\mathrm{e}^{-2}$ et $\varphi(1) = 0$. 1 pt

Partie B : Etude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \mathrm{e}^{2x-2}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormée $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On prendra 5 cm comme unité.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$. 0,5 pt

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation. 1 pt

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C).
Étudier la position relative de (C) et (D). 0,75 pt

4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C). 0,5 pt

5. **a.** On note I l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera α. 0,5 pt

b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α. 0,5 pt

6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T). 1 pt

Partie C : Détermination d'une valeur approchée de α.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$. Et (U_n) la suite numérique définie par :
$U_0 = 2$ et $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $U_{\mathrm{n}+1} = g(U_\mathrm{n})$.

1. En remarquant que $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$. 0,25 pt

2. Démontrer que, $\forall x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on a : $|g'(x)| \leqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}$. 0,75 pt

3. Démontrer que, $\forall x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $g(x) \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$. 0,5 pt

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n
$|U_{\mathrm{n}+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}|U_\mathrm{n} - \alpha|$. Et déduire par récurrence, que : $|U_\mathrm{n} - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^\mathrm{n}$. 1 pt

5. En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite. 0,5 pt

6. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_1 \implies |U_\mathrm{n} - \alpha| < 10^{-5}$. 0,5 pt

7. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-5} près. 0,5 pt