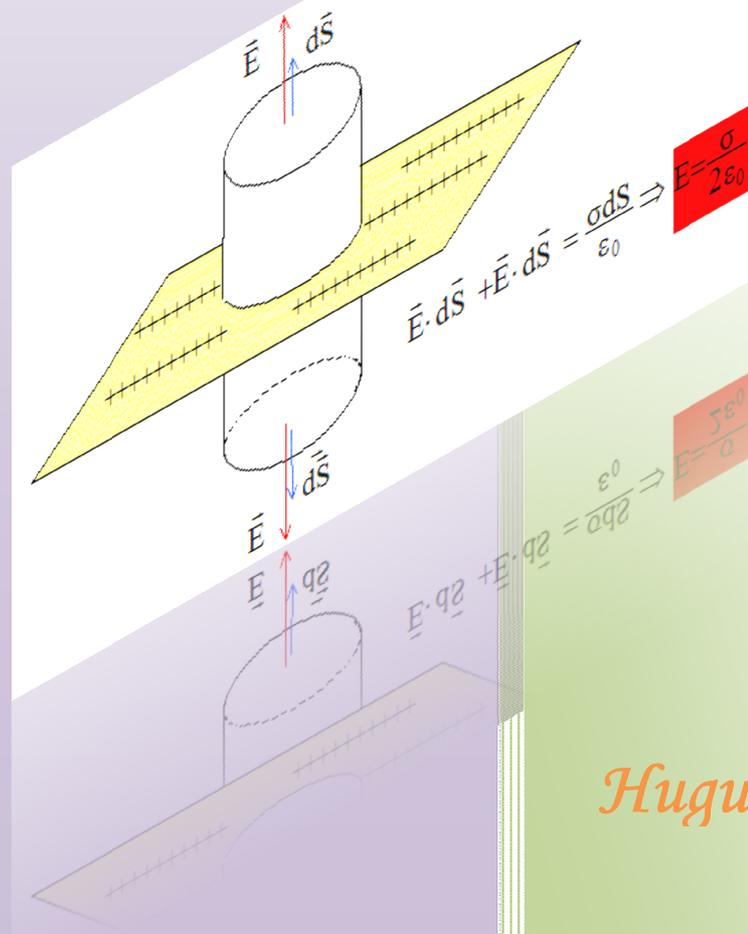


Exercices corrigés
Electromagnetisme
Electrostatique
Electrocinétique



IUT • 1^{er} Cycle • Licence



Hugues SILA

Exercices corrigés
Electromagnetisme
Electrostatique
Elelectrocinetique



IUT • 1^{er} Cycle • Licence

Hugues SILA

Professeur honoraire de Mathématiques diplômé de l' ENS

Yaoundé

E mail : silhu06@yahoo.fr

PREFACE

Cet ouvrage d'exercices corrigés d'Electromagnétisme-Electrostatique-Electricité- Electronique est pratiquement destiné aux élèves des classes préparatoires et aux étudiants de deuxième année de Mathématiques, physique et chimie .Il propose des problèmes originaux ou classiques, souvent extraits des sujets de concours.

Chaque exercice comprend :

Des énoncés intégrant chacun un titre permettant de se faire une idée sur le sujet traité avec parfois une référence à une épreuve de concours .Les questions sont échelonnées et progressives pour aider l'étudiant dans sa recherche.

Des corrigés détaillés de tous les exercices permettront aux étudiants de bien maîtriser la notion traitée.

Je n'insisterai jamais sur le bon mode d'emploi de ce livre d'exercices corrigés.Il serait parfaitement vain de se contenter de lire, même très attentivement, la solution à la suite de l'énoncé.On apprend pas à faire du vélo dans un manuel ! Ce n'est qu'après avoir cherché longuement chaque question avec ou sans succès, mais du moins avec persévérance que la lecture du corrigé pourra devenir fructueux et profitable.

Avec ce livre, j'espère mettre à la disposition des étudiants un ensemble de d'exercices et de problèmes leur permettant d'acquérir des méthodes et des pratiques qu'ils pourront réinvestir en d'autres circonstances .Je leur souhaite de réussir les concours et examens qu'ils préparent avec courage

Un élève qui ne réussit pas a appris à ne pas apprendre, c'est -à- dire à ne pas changer .Il a donc appris.il a appris quelque chose de très difficile : à résister à l'aptitude innée de s'adapter.

Hélène Trorné-Fabre, j'apprends, donc je suis

DU MEME AUTEUR

- *Exercices corrigés de mathématiques financières bts banque*
- *Comment réussir a ses examens et concours ?*
- *Exercices corrigés de probabilité classe de terminale*
- *Epreuves corrigés concours d'entrée a l'école nationale supérieure polytechnique yaounde*
- *Exercices corrigés de mécanique premier cycle- licence*
- *Exercices corrigés d'optique*
- *Exercices corrigés de thermodynamique premier cycle- licence*

EXERCICE1 : champ électromagnétique dans le vide.

Les équations de Maxwell dans le vide :

On donne les équations de Maxwell que doivent vérifier respectivement le vecteur champ électrique **E** et le vecteur champ magnétique **B** en notant ρ la densité volumique de charge et **j** le vecteur densité de courant.

$$\text{div} \vec{B} = 0; \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

(ϵ_0 et μ_0 étant respectivement la permittivité et la perméabilité du vide : $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$)

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On repère tout point M de l'espace à l'aide d'un repère (O, **e_x**, **e_y**, **e_z**)

Montrer qu'une onde plane rectiligne $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y$ peut se propager dans le vide ; E_0 est l'amplitude constante.

Elle doit vérifier l'équation de propagation, obtenue à partir des équations de Maxwell :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}; \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$d^2 E_y / dy^2 = d^2 E_y / dz^2 = 0; dE_y / dx = k E_0 \sin(\omega t - kx); d^2 E_y / dx^2 = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx) = -k^2 E_y.$$

$$dE_y / dt = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx); d^2 E_y / dt^2 = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 E_y.$$

par suite : $-k^2 E_y - (-\omega^2 / c^2 E_y) = 0$; **relation vérifiée si $k = \omega / c$.**

Quelle est la direction de propagation ?

Direction de propagation : l'axe x'x

Quelle est la Valeur de la norme du vecteur d'onde k ?

Valeur de la norme du vecteur d'onde **k** : $k = \omega / c$

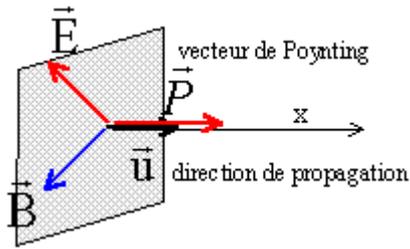
Donner l'Expression du champ magnétique associé :

Expression du champ magnétique associé :

$\mathbf{B} = E_0 / c \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$; **B, **E**, **e_x** forment un trièdre direct (figure ci-dessous)**

On définit le vecteur de Pyonting par $\mathbf{P} = 1/\mu_0 [\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}]$

Donner le sens et la vitesse de propagation de l'énergie ,le flus du vecteur de poynting et son unité



$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 \text{ avec } \mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} / c \text{ et } \mathbf{E} = c \mathbf{B} \wedge \mathbf{u}$$

$$\text{d'où : } \mathbf{P} = c \mathbf{B}^2 / \mu_0 \mathbf{u} = c \epsilon_0 E^2 \mathbf{u} = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \mathbf{u}$$

L'énergie se propage dans le sens de l'onde à la vitesse c .

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface S est égale à l'énergie contenue dans un cylindre de section S et de longueur c (énergie transmise à travers une surface par unité de temps)

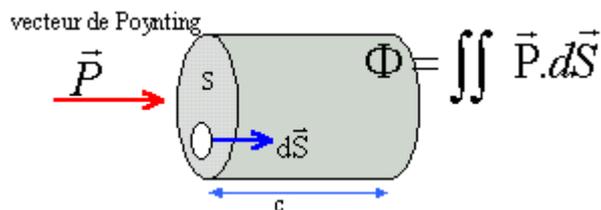
$$\Phi = PS = c \epsilon_0 E^2 S$$

Son unité est $W m^{-2}$.

Quelle est la Valeur moyenne de $\langle \mathbf{P} \rangle$ sur une période en fonction de E_0 , ϵ_0 et c vitesse de la lumière dans le vide.

Valeur moyenne de $\langle \mathbf{P} \rangle$ sur une période en fonction de E_0 , ϵ_0 et c , vitesse de la lumière dans le vide.

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{P} dt = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x dt = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t - 2kx) + 1}{2} \vec{e}_x dt = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_x$$



Un faisceau laser polarisé rectilignement est assimilable à une onde plane de section 1 mm^2 . Pour une puissance transportée $P_0 = 100 \text{ mW}$,

calcul de l'amplitude du champ électrique correspondant :

$$P_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S ; E_0^2 = 2P_0 / (\epsilon_0 c S) \text{ avec } \epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$$

$$E_0^2 = 2P_0 \mu_0 c / S \text{ avec } P_0 = 0,1 \text{ W} ; \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} ; c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} ; S = 10^{-6} \text{ m}^2.$$

$$E_0^2 = 2 \cdot 0,1 \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,00 \cdot 10^8 / 10^{-6} = 7,54 \cdot 10^7 ; E_0 = \underline{8,7 \cdot 10^3 \text{ V/m}}.$$

On définit une onde $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y + E_0 \sin(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$.

Cette onde est dite "circulaire " : l'amplitude E_0 est constante ; le vecteur \mathbf{E} tourne à vitesse constante ω autour de l'axe Ox .

Donner le champ \mathbf{B} et vecteur de Poynting \mathbf{P} associé :

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E} / c$$

$$\mathbf{B} = E_0 / c [\cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y + \sin(\omega t - kx) \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z]$$

$$\mathbf{B} = E_0 / c [\cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z + \sin(\omega t - kx) (-\mathbf{e}_y)]$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$$

$$\mathbf{P} = E_0^2 / (c\mu_0) [\cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y + \sin(\omega t - kx) \mathbf{e}_z] \wedge [\cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z + \sin(\omega t - kx) (-\mathbf{e}_y)]$$

$$\mathbf{P} = E_0^2 / (c\mu_0) [\cos^2(\omega t - kx) \mathbf{e}_x + \sin^2(\omega t - kx) \mathbf{e}_x] = E_0^2 / (c\mu_0) \mathbf{e}_x = \epsilon_0 c E_0^2 \mathbf{e}_x$$

Le vecteur de Poynting \mathbf{P} est constant : il ne dépend ni de x , ni du temps.

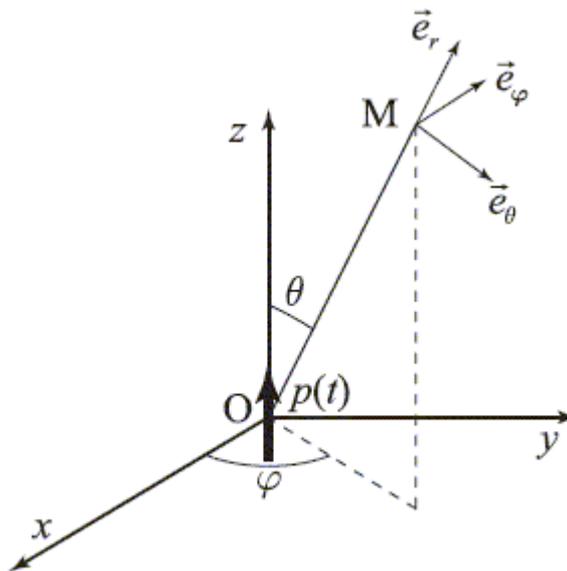
Exercice 2 : champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Pour $r=OM \gg \lambda=2\pi c/\omega$, le champ magnétique rayonné en M par un dipôle oscillant, de moment dipolaire $\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$, placé en un point O est tel que :

$$E_\theta = -\omega^2 \sin\theta / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \cos(\omega(t-r/c)) ; B_\varphi = E_\theta / c.$$

Les autres composantes sont négligeables.



L'onde est elle plane ?

Le dipôle (deux charges +q et - q situées à la distance d) est équivalent à un élément de courant $ldq/dt \mathbf{e}_z = dp/dt \mathbf{e}_z$.

Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie.

Le champ électrique est dans le plan défini par Oz et \mathbf{e}_θ .

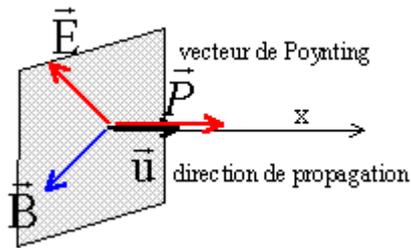
Le champ magnétique créé \mathbf{B}_φ est perpendiculaire au plan contenant le champ électrique.

Les amplitudes E_θ et B_φ dépendent de r et de θ : en conséquence l'onde n'est pas plane.

L'onde est elle quasi-plane ?

Le rapport des amplitudes $E_\theta / B_\varphi = c$ est constant et de plus les champs \mathbf{B}_φ et \mathbf{E}_θ sont perpendiculaires et transversaux : l'onde est dite " quasi-plane".

Définir le vecteur de Pyonting



$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 \text{ avec } \mathbf{E} = -\omega^2 \sin\theta / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \cos(\omega(t-r/c)) \mathbf{e}_\theta = E_\theta \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{B} = E_\theta / c \mathbf{e}_\phi.$$

$$\mathbf{P} = E_\theta \mathbf{e}_\theta \wedge E_\theta / (c\mu_0) \mathbf{e}_\phi = E_\theta^2 / (c\mu_0) \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_\phi = E_\theta^2 / (c\mu_0) \mathbf{e}_r.$$

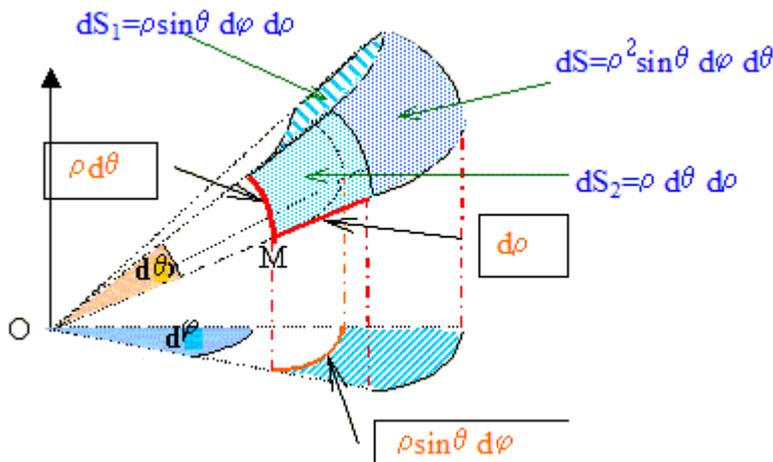
$$\mathbf{P} = [\omega^2 \sin\theta / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \cos(\omega(t-r/c))]^2 / (c\mu_0) \mathbf{e}_r \text{ avec } 1/(c\mu_0) = \epsilon_0 c$$

$$\mathbf{P} = \omega^4 \sin^2\theta / (16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3) p_0^2 \cos^2(\omega(t-r/c)) \mathbf{e}_r.$$

Calculer la Valeur moyenne de $\langle \mathbf{P} \rangle$ sur une période :

$$\langle \bar{\mathbf{P}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\omega^4 \sin^2\theta p_0^2 \cos^2(\omega(t-r/c))}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\omega^4 \sin^2\theta p_0^2 [\cos(2\omega(t-r/c)) + 1]}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r dt = \frac{\omega^4 \sin^2\theta p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r$$

Calculer L'énergie moyenne rayonnée par unité de temps à travers la sphère de rayon r
 expression de la surface élémentaire en coordonnées sphériques : $dS = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta$.



L'énergie moyenne rayonnée par unité de temps à travers la sphère de rayon r, c'est à dire le flux de \mathbf{P} à travers la surface de la sphère de rayon r vaut :

$$\iint_S \langle \bar{\mathbf{R}} \rangle \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \iint_S \frac{\omega^4 \sin^2\theta p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Primitive de $\sin^3\theta$:

$$\sin^3\theta = \sin\theta * \sin^2\theta = \sin\theta * (1 - \cos^2\theta) = \sin\theta - \sin\theta \cos^2\theta.$$

primitive de $\sin \theta$: $-\cos \theta$ dont la valeur entre 0 et π est : 2.

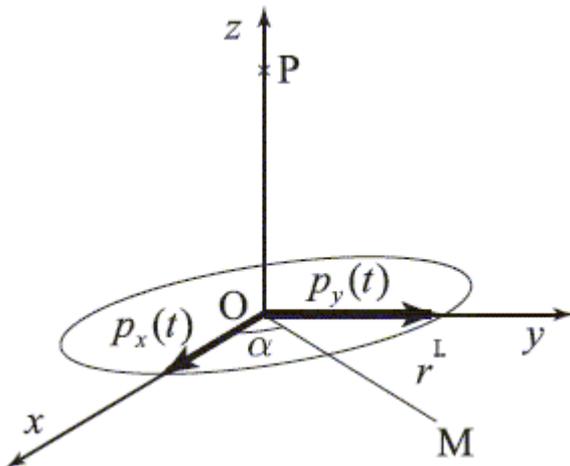
primitive de $-\sin \theta \cos^2 \theta$: $u = \cos \theta$; $u' = -\sin \theta$; $-\sin \theta \cos^2 \theta = u^2 u'$ d'où la primitive : $1/3 u^3 = 1/3 \cos^3 \theta$.

la valeur de $1/3 \cos^3 \theta$ entre 0 et π est : $-2/3$

Exercice 3 : rayonnement de l'électron dans le modèle de Thomson

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

L'atome d'hydrogène est considéré comme un double dipôle oscillant appliqué en O : $p_x=p_0\cos(\omega t)$; $p_y=p_0\sin(\omega t)$. Il rayonne un champ électromagnétique.



Donner l'expression du champ magnétique rayonné en M par un dipôle oscillant, de moment dipolaire $\mathbf{p}_y(t) = p_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$, placé en un point O.

Donner l'expression du champ magnétique rayonné en M par un dipôle oscillant, de moment dipolaire $\mathbf{p}_x(t) = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$, placé en un point O.

Conclure

Shématisons les composantes du champ E associé aux deux dipôles en un point M du plan (Oxy). M repéré par les coordonnées polaires r et α .

Pour $r=OM \gg \lambda=2\pi c/\omega$, le champ magnétique rayonné en M par un dipôle oscillant, de moment dipolaire $\mathbf{p}_x(t) = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$, placé en un point O est tel que :

$$\mathbf{E}_x = -\omega^2 \sin\alpha / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \cos(\omega(t-r/c)) \mathbf{e}_\alpha$$

Le champ magnétique rayonné en M par un dipôle oscillant, de moment dipolaire $\mathbf{p}_y(t) = p_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$, placé en un point O est tel que :

$$\mathbf{E}_y = -\omega^2 \cos\alpha / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \sin(\omega(t-r/c)) (-\mathbf{e}_\alpha) = \omega^2 \cos\alpha / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \sin(\omega(t-r/c)) \mathbf{e}_\alpha$$

par suite : $\mathbf{E} = [-\omega^2 \sin\alpha / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \cos(\omega(t-r/c)) + \omega^2 \cos\alpha / (4\pi\epsilon_0 r c^2) p_0 \sin(\omega(t-r/c))] \mathbf{e}_\alpha$.

$$\mathbf{E} = \omega^2 p_0 / (4\pi\epsilon_0 r c^2) [-\sin\alpha \cos(\omega(t-r/c)) + \cos\alpha \sin(\omega(t-r/c))] \mathbf{e}_\alpha$$

finalement

$$\mathbf{E} = \omega^2 p_0 / (4\pi\epsilon_0 r c^2) \sin[\omega(t-r/c) - \alpha] \mathbf{e}_\alpha$$

Exercice 4 : courant alternatif sinusoïdal

a.Rappel de cours

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \Psi)$$

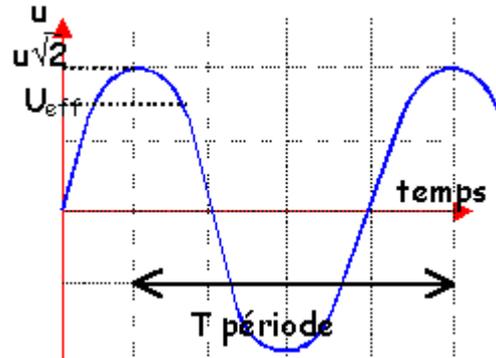
U volt valeur efficace

ω rads⁻¹ pulsation $\omega=2\pi f$

f hertz fréquence, inverse de la période

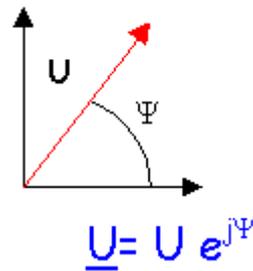
T s période

Ψ rad phase



On représente une grandeur sinusoïdale par

- un vecteur de norme U formant l'angle Ψ avec l'axe horizontal .
- un nombre complexe de module U, d'argument Ψ . ($j^2=-1$)



fonction sinusoïdale

dérivée

fonction sinusoïdale de même pulsation

en avance de $\pi/2$,

de valeur efficace $U\omega$

$j\omega\underline{U}$

p U

primitive

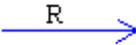
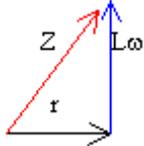
en retard de $\pi/2$,

de valeur efficace U/ω

notation complexe $\underline{U}/j\omega$

notation de Laplace \underline{U}/p

impédances Z ohm ; admittance $Y=1/Z$

	vecteur	notation complexe	notation de Laplace
résistance		R	R
condensateur		$1/(jC\omega)$	$1/(pC)$
bobine inductive		$r+jL\omega$	$r+pL$

On applique aux grandeurs complexes les lois du courant continu.

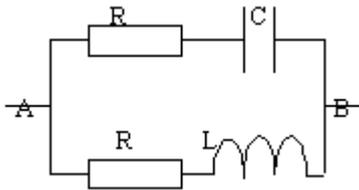
Danger !!!!! ces mêmes lois ne s'appliquent pas ni aux grandeurs efficaces , ni aux grandeurs instantanées

b. Exercices

1-exercice 1 :exemple de calcul d'une impédance complexe

Dans le cas ou $LC\omega^2=1$, calculer :

- l'impédance complexe
- l'impédance réelle
- la phase de U par rapport à celle de I prise comme origine



corrigé

remplacer $j\omega$ par p

contrôler constamment l'homogénéité des calculs ,

en se souvenant que LCp^2 est sans dimension ,

et que L/C est le carré d'une impédance.

	impédance	complexe
branche R, C		$Z_1=R+1/(pC)$
branche R, L		$Z_2= R+pL$
association	en dérivation	$Z_1Z_2 / (Z_1+Z_2)$

$$(R+1/(pC))(R+pL)/(2R+pL+1/(pC))$$

$$(R^2+L/C+R(Lp+1/(pC)) / (2R+pL+1/(pC))$$

or(Lp+1/(pC) =0 dans cet exercice

$$Z= (R^2+L/C)/ (2R) \text{ grandeur réelle ,}$$

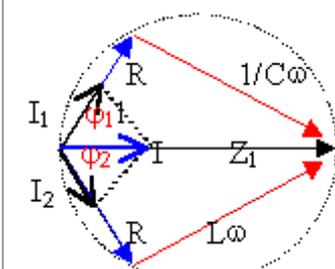
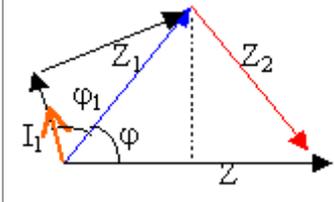
donc tension aux bornes du dipole et intensité principale en phase

2-exercice 2 : *exercice précédent : calculs des intensités*

R=50 Ω; L=0,1 H; C=10μF. U_{AB}=10V

- calculer la pulsation dans le cas où LCω²=1
- déterminer les intensités dans chaque branche, l'intensité principale.

corrigé

calcul	Lω=100 Ω	1/(Cω)=100Ω		de la
	Z ₁ ² =R ² +(Lω) ² =12500	Z ₂ ² =R ² +(1/(Cω)) ² =12500		
	Z ₁ =111,8 Ω	Z ₂ =111,8 Ω		
I ₁ =U/Z ₁ =10/111,8=0,089 A	I ₂ =0,089 A			
tan(φ ₁)=Lω/R=100/50=2	φ ₂ = -63,4°			
φ ₁ = 63,4°				
intensité I:			cos(φ)=(0,5Z)/Z ₁	
2*I ₁ cos(φ ₁) ou U _{AB} /Z			=62,5/111,8=0,559	
2*0,089*cos63,4= 0,079A			φ= 56°	

pulsation ω²=1/(10⁻⁵*0,1)=10⁶ ; ω=1000rads⁻¹.

EXERCICE 5. Rappel de cours **puissance active watt, réactive var, apparente VA**

Considérons un récepteur d'impédance Z alimenté par une tension alternative de valeur efficace U et traversé par un courant d'intensité efficace I. Les, grandeurs physiques, tension et intensité ne sont pas en général en phase. Soit φ la phase de l'intensité par rapport à celle de la tension.

P puissance active watt	$UI\cos(\varphi)$	$\cos(\varphi)$ facteur de puissance
Q puissance réactive var	$UI\sin(\varphi)$	$S^2=P^2+Q^2$
S puissance apparente VA	UI	

Q est positif si inductance, négatif si capacité.

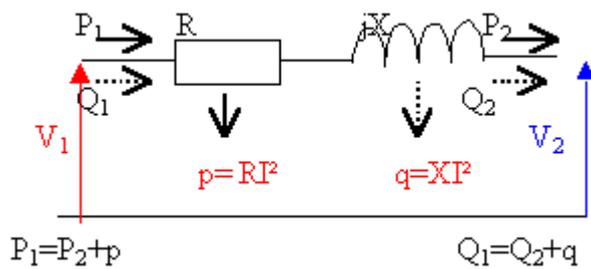
- Q et S intermédiaires commodes de calcul, mais pas de sens physique

	P	Q
résistance	RI^2	0
inductance	0	$L\omega I^2 = U^2/(L\omega)$
capacité	0	$-I^2/(C\omega) = -C\omega U^2$

Rappel De Cours

conservation des puissances à la traversée d'un dipôle

Un dipôle d'impédance complexe $Z=R+jX$, peut être considéré comme la mise en série d'un dipôle de résistance R et d'un dipôle de réactance X (impédance jX). Le schéma ci dessous représente le bilan de puissance active et réactive à la traversée du dipôle.



Exercice :schéma parallèle équivalent à une bobine

Une bobine d'inductance $L=15$ mH et de résistance $R=125 \Omega$ est utilisée à 80kHz. Calculer les éléments R' et L' du schéma parallèle équivalent à cette bobine.

corrigé

série	parallèle	
$Z=R+pL$ avec $p=j\omega$		
$1/Z=1/(R+pL)$	$1/Z=1/R'+1/pL'$	
$1/Z=(R-pL)/(R^2-p^2L^2)$		
$\frac{R}{R^2 - p^2 L^2} - \frac{pL}{R^2 - p^2 L^2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{pL'}$		$R'=(R^2+L^2\omega^2)/R$ $L'=(R^2+L^2\omega^2)/(L^2\omega^2)$

application numérique:

$$\omega=2\pi f=6,28*8 \cdot 10^4=5,024 \cdot 10^5 \text{ rads}^{-1}.$$

$$L\omega = 7536 ; (L\omega)^2 = 5,68 \cdot 10^7$$

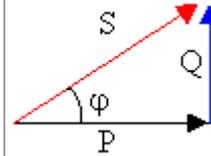
$$R' = 450 \text{ k}\Omega ; L' = 15,3 \text{ mH}$$

EXERCICE 6 : relevement du facteur de puissance

Expliquer comment relever le facteur de puissance

triangle des puissances

φ déphasage courant tension



Il est parfois nécessaire d'augmenter le facteur de puissance $\cos\varphi$ (donc diminuer φ). Pour cela on branche en dérivation un condensateur aux bornes du dipôle. La puissance active n'est pas modifiée par le branchement, en revanche la puissance réactive diminue de la quantité $U^2C\omega$.

Exercice 7

relevement du facteur de puissance

Une tension sinusoïdale de valeur efficace $U=20 \text{ V}$ et de fréquence $f=100 \text{ Hz}$ alimente un circuit RLC série ($R=200\Omega$; $L=0,2 \text{ H}$; $C=4 \mu\text{F}$). Calculer :

1. l'impédance, le facteur de puissance.
2. les puissances active, réactive et apparente.
3. On désire que la puissance réactive consommée par le circuit soit nulle. On utilise un condensateur supplémentaire C' . Comment brancher C' et C ? Calculer la capacité C' .

corrigé

$$Z^2 = R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2$$

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 100 = 628 \text{ rads}^{-1}$$

$$L\omega = 0,2 \cdot 628 = 125,6 \Omega ; 1/C\omega = 1/(4 \cdot 10^{-6} \cdot 628) = 398 \Omega$$

$$(L\omega - 1/C\omega)^2 = 7,4 \cdot 10^4 ; R^2 = 4 \cdot 10^4 ; Z = 337 \Omega$$

$$\cos(\varphi) = R/Z = 200/337 = 0,593$$

Danger!!!! deux solutions pour φ +53,6 ou -53,6

$1/C\omega$ est supérieur à $L\omega$ donc $\varphi = -53,6$

$$\text{intensité efficace} = U/Z = 20/337 = 0,0593 \text{ A}$$

$$P=UI\cos(\varphi)=20*0,0593*0,593=0,703 \text{ watt}$$

$$P=UI\sin(\varphi)=20*0,0593*(-0,805)=-0,984 \text{ vars}$$

$$S=UI=20*0,0593=1,186 \text{ VA}$$

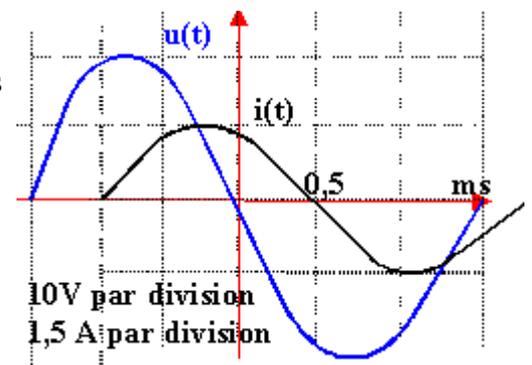
La puissance réactive est nulle si la réactance du dipôle est nulle. Soit C_1 la capacité équivalente aux condensateurs.

$$L\omega-1/C_1\omega=0 \text{ ou } C_1=1/(L\omega^2)=1,267 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

A partir de $4 \mu\text{F}$ il faut associer $8,67 \mu\text{F}$ en dérivation pour obtenir $12,6 \mu\text{F}$

Exercice 8 : études graphiques -facteur de puissance.

- déduire des courbes les puissances actives, réactives et apparente.
- Quel est la nature du dipôle; calculer ces éléments.
- Calculer la capacité du condensateur, monté en dérivation, nécessaire pour relever le facteur de puissance à 0,9.



corrigé

$$\text{tension efficace} = 20/1,414 = 14,14 \text{ V}$$

$$\text{intensité efficace} = 1,5/1,414 = 1,06 \text{ A}$$

$$\text{fréquence} = 1/0,003 = 333,3 \text{ Hz}$$

$$\omega=2\pi f=6,28*333,3=2093 \text{ rad s}^{-1}$$

tension en avance sur intensité (donc bobine inductive) de $1/6$ période ou $\pi/3$ rad

$$\cos(\varphi)=0,5$$

$$\text{puissance active } UI\cos(\varphi)=14,14*1,06*0,5=7,5 \text{ W}$$

$$\text{puissance réactive } UI\sin(\varphi)=14,14*1,06*0,866=13 \text{ vars}$$

$$\text{puissance apparente } UI=14,14*1,06=15 \text{ VA}$$

$$\text{résistance de la bobine : } P=rI^2=7,5$$

$$r=7,5/1,06^2= 6,7 \Omega.$$

inductance de la bobine : $Q=L\omega I^2=13$

$$L=13/(1,06^2*2093)= 5,5 \text{ mH}$$

le facteur de puissance doit être égal à $\cos\varphi = 0,9$

$$\sin\varphi = 0,436 \text{ et } Q=14,14*1,06*0,436 = 6,54 \text{ vars}$$

$$Q=(L\omega-1/C\omega)I^2 \text{ d'où } C = 83\mu\text{F}$$

EXERCICE 9. application du théorème d'Ampère

On considère un ensemble de fils parcourus par des courants, la circulation C du champ magnétique le long d'une courbe fermée (Γ) quelconque est :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \Sigma I_{\text{enlacé}}$$

quand l'appliquer:

1

lorsque la distribution de courants possède d'importantes symétries.

Il faut trouver un contour sur lequel B est uniforme.

théorème
d'Ampère

reconnaître tous les éléments de symétrie.

calcul direct de la circulation : produit scalaire entre les vecteurs champ et déplacement

calcul par la méthode d'Ampère : attention au sens des courants

égaler les 2 expressions

2

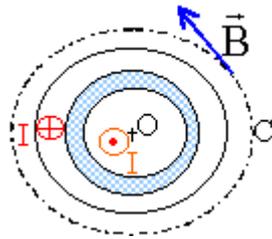
Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique central de rayon R_1 parcouru par un courant d'intensité I. Il est entouré d'un isolant cylindrique de rayon extérieur R_2 . Le retour - [menu](#) du courant se fait par un conducteur cylindrique de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 .

cable
coaxial

La densité volumique de courant est uniforme dans les conducteurs ; la longueur est bien supérieure aux rayons.

1. Déterminer en tout point M de l'espace le champ magnétique.
2. Etudier la continuité du champ.
3. Représenter B en fonction de la variable dont il dépend.

corrigé



Le champ est orthoradial, il ne dépend que de la distance r, rayon du cercle.

Circulation du champ magnétique le long d'une courbe C, circulaire de centre O, de rayon r :

$$2\pi r B(r)$$

théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 \Sigma I_{\text{enlacé}}$.

M extérieur : $r > R_3$: $\Sigma I_{\text{enlacé}} = 0$. donc $B(r) = 0$.

M intérieur au 2ème conducteur : $R_2 < r < R_3$:

expression de l'intensité :

$$I_1 = j \pi (r^2 - R_2^2) \quad I_1 = j \pi (R_3^2 - R_2^2)$$

$$I_1 = I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

théorème d'Ampère :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I - \mu_0 I_1.$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \xrightarrow{r \rightarrow R_3} 0$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \xrightarrow{r \rightarrow R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

M intérieur à l'isolant : $R_1 < r < R_2$:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \text{ d'où } B(r) = \mu_0 I / (2\pi r)$$

B tend vers $\mu_0 I / (2\pi R_1)$ quand r tend vers R_1 .

M intérieur au 1er conducteur : $r < R_1$:

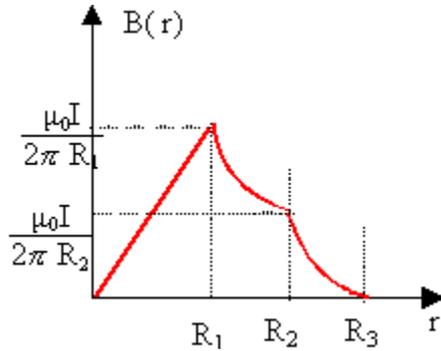
expression de l'intensité :

$$I_2 = I r^2 / R_1^2$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I r^2 / R_1^2 \text{ d'où } B(r) = \mu_0 I r / (2\pi R_1^2)$$

B tend vers $\mu_0 I / (2\pi R_1)$ quand r tend vers R_1 .

il y a continuité du champ sur les différentes surfaces de séparation.

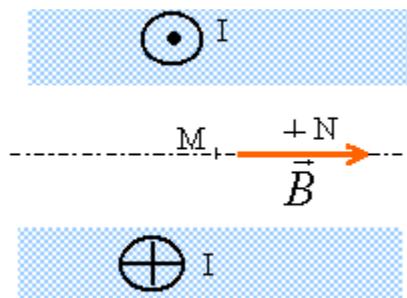


Un solénoïde infiniment long est composé de spires jointives (n spires par unité de longueur) et il compte plusieurs couches. Le rayon intérieur est noté R_1 et le rayon extérieur est noté R_2 . L'intensité du courant dans une spire est I. Le champ magnétique est nul à l'extérieur.

1. Donner l'expression du champ magnétique en un point de l'axe du solénoïde.
2. Montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.
3. Donner l'expression du champ à l'intérieur des enroulements à une distance r de l'axe.
4. Donner l'expression du flux du champ magnétique à travers une section droite du solénoïde.

3

solénoïde

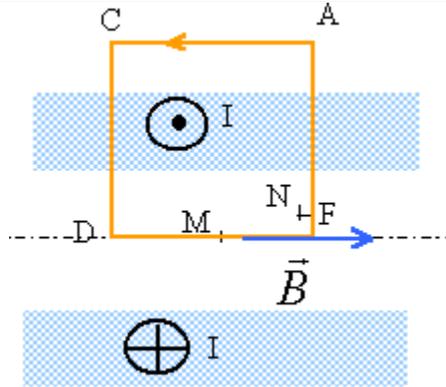


corrigé

le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est parallèle à l'axe de la bobine

Il reste invariant dans une translation parallèle à l'axe z et par rotation autour de cet axe.

on choisit le contour ACDF pour appliquer le théorème d'Ampère.



trajet AC : le champ est nul à l'extérieur du solénoïde

trajet AF et CD : le vecteur champ et trajet sont perpendiculaires: la circulation du champ est nulle

trajet DF : $C = B(r) L$

intensité des courants enlacés :

$n L$ spires sur la longueur L

$n(R_2-R_1)$ sur l'épaisseur R_2-R_1 .

$n^2 L(R_2-R_1) I$

théorème d'Ampère :

$C = B(r) L = \mu_0 n^2 L(R_2-R_1) I$

$B(r) = \mu_0 n^2 (R_2-r) I$.

Un contour similaire passant par N donne le même résultat : le champ est donc uniforme à l'intérieur du solénoïde.

même méthode lorsque le point M est à l'intérieur de l'enroulement à une distance r de l'axe.

remplacer R_1 par r .

$B(r) = \mu_0 n^2 (R_2-r) I$

flux du champ à travers une section droite du solénoïde :

flux du champ à travers l'intérieur du solénoïde :

$\Phi_1 = \pi R_1^2 \mu_0 n^2 (R_2-R_1) I$

flux du champ à travers les enroulements:

on choisi une couronne de rayon r et d'épaisseur dr : $dS=2\pi r dr$

$$\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 n^2 (R_2 - r) I 2\pi r dr$$

ajouter ces deux flux : $\Phi = 1/3 \mu_0 n^2 I \pi (R_2^3 - R_1^3)$.

On considère un plan infini parcouru par un courant surfacique de densité j_s uniforme.

4

nappe de
courant

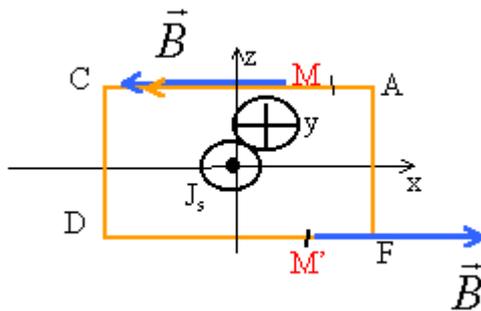
1. Déterminer en tout point l'expression du champ magnétique.
2. Etudier la continuité de ce champ.
3. Mêmes questions, la nappe a une épaisseur $2a$ et est parcourue par un courant volumique uniforme de densité j_v .

corrigé

Le plan contenant M et parallèle au plan yOz est plan de symétrie pour la distribution des courants : donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan.

Par translation parallèle à Ox ou à Oy , la distribution des courants est invariante: donc le champ ne dépend que de z .

On choisit le contour d'Ampère ci dessous :(M' symétrique de M)



le plan xOy est un plan de symétrie pour la distribution des courants donc $B(-z) = -B(z)$.

Le long de CD et de AF, la circulation est nul (champ et trajet orthogonaux)

le long de AC: $C_1 = -B(z) L$ (signe - car AC sens contraire à Ox)

le long de DF : $C_2 = B(-z) DF = -B(z) L$

$C = -2 B(z) L$

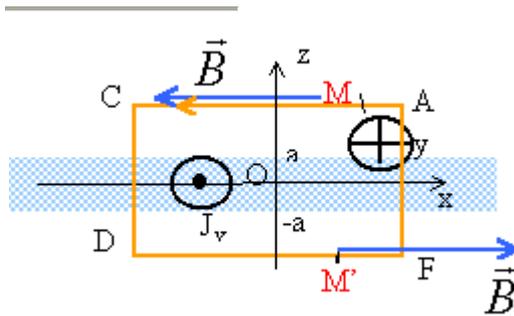
courant enlacé : $j_s L$

théorème d'Ampère : $-2 B(z) L = \mu_0 j_s L$

$B(z) = -0,5 \mu_0 j_s$ (sens contraire de l'axe Ox)

alors que $B(-z) = 0,5 \mu_0 j_s$ (sens de l'axe Ox)

discontinuité $B(z) - B(-z) = -\mu_0 j_s$ au passage de la nappe.



les éléments de symétrie sont identiques à ceux de la question précédente.

La circulation du champ magétique est toujours : $C = -2 B(z) L$

courants enlacés :

$z > a$, M extérieur à la nappe de courant : $I = 2aLj_v$.

$z < -a$, M intérieur à la nappe de courant : $I = 2zLj_v$.

théorème d'Ampère :

$z > a$: $-2 B(z) L = \mu_0 2aLj_v$.

$B(z) = -\mu_0 a j_v$.

$z < -a$: $B(z) = \mu_0 z j_v$.

$-a < z < a$: $B(z) = -\mu_0 z j_v$.

discontinuité au passage de la nappe : $B(z) - B(-z) = -\mu_0 2a j_v$.

EXERCICE 10 : Caractéristiques d'une bobine réelle

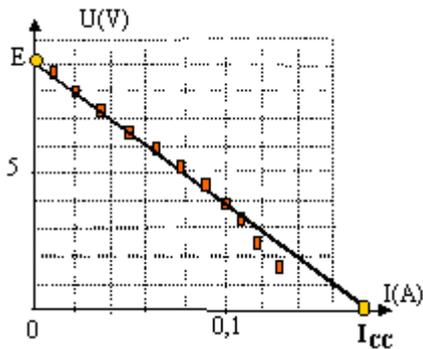
➤ étude du générateur

On se place en régime continu. En faisant débiter le générateur dans des résistances réglables, on obtient la figure ci-dessous :

1. En précisant le domaine de validité en intensité, déduire de ces mesures un modèle linéaire du générateur: calculer la tension à vide, la résistance interne et le courant de court circuit.
2. Ce générateur alimente un circuit de résistance R ; calculer la valeur minimale de R assurant de ne pas sortir du domaine linéaire.

corrigé

si $I < 0,1$ A la caractéristique du générateur est linéaire.

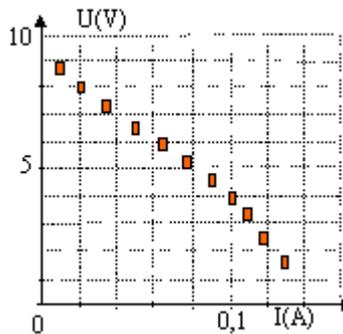


L'ordonnée à l'origine donne la tension à vide $E = 9$ V ; l'intersection avec l'axe des abscisses donne le courant de court circuit $I_{CC} = 0,18$ A.

On en déduit la résistance interne $r_1 = E / I_{CC} = 9 / 0,18 = 50$ Ω.

Le générateur fonctionne dans son domaine linéaire si l'intensité reste inférieure à 0,1 A. R doit être supérieure à R_{min} :

$$0,1 (R_{min} + r_1) = 9 \text{ soit } R_{min} = 9/0,1 - r_1 = 90 - 50 = 40 \text{ Ω.}$$



➤ étude rapide du bobinage

Le grand nombre de spires du bobinage nécessite une grande longueur de fil, ce qui confère au dipole une résistance non négligeable. Un multimètre donne la valeur $r = 7,9 \Omega$.

1. Le fil de cuivre du bobinage présente une section de l'ordre de 1 mm^2 et la conductivité du cuivre est $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$. En déduire une estimation de la longueur du fil. En réalité la longueur du fil est sensiblement inférieure à la valeur calculée : justifier.
2. Les multimètres disponibles ne possédant pas de fonction inductancemètre, on détermine la valeur de l'inductance L en étudiant la résonance de courant dans un circuit RLC série. Le circuit RLC est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
 - En utilisant les notations complexes, déterminer l'amplitude I_0 de l'intensité du courant $i(t)$ en fonction de E_0, R, L, C, ω .
 - A quelle pulsation le courant est-il en phase avec la tension d'alimentation ? La présence d'une résistance r indissociable du dipôle d'inductance L modifie-t-elle cette propriété ?
3. Mise en pratique : On alimente le circuit série (R , bobine r, L , condensateur C) à l'aide d'un GBF ; on visualise à l'oscilloscope la tension aux bornes du GBF et celle aux bornes de R . On détermine expérimentalement la fréquence de résonance de l'intensité du courant et on en déduit par le calcul la valeur de L .
 - Faire le schéma du circuit et indiquer les branchements de l'oscilloscope.
 - Proposer une méthode permettant rapidement de déterminer la fréquence de résonance à l'aide de l'oscilloscope.
 - On repère la fréquence de résonance $f = 774 \text{ Hz}$ avec $C = 470 \text{ nF}$; déduire la valeur de L .

corrigé

résistance d'un conducteur cylindrique : $R = L / (\sigma s)$: avec L : longueur (m) et s section (m^2)

$$L = R \sigma s = 7,9 \cdot 610^7 \cdot 10^{-6} = \underline{474 \text{ m}}$$

si la longueur réelle est plus faible, alors le cuivre utilisé est impur : les impuretés diminuent la conductivité du matériau.

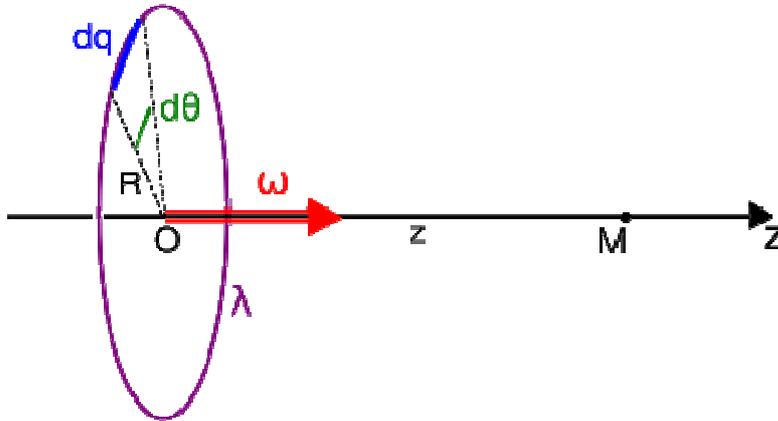
impédance complexe du dipôle RLC série : $\underline{Z} = (R+r) + j(L\omega - 1/(C\omega))$

module de l'impédance : $Z = [(R+r)^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2]^{1/2}$.

Exercice 11 : Spire chargée en rotation

Une spire circulaire, de rayon R , d'axe (Oz) , tourne à vitesse angulaire constante ω autour de son axe. Sachant que la spire porte une densité linéique de charge uniforme λ , déterminer le champ magnétique en tout point de (Oz) .

Solution



La clé de l'exercice est de relier ω à I . On utilise pour cela la définition de I : $I = \frac{dq}{dt}$.

- La charge portée par une portion élémentaire de spire est $dq = \lambda R d\theta$.
- Donc $I = \lambda R \dot{\theta} = \lambda R \omega$
- Une fois cette expression obtenue, on peut conduire exactement le même raisonnement que pour une spire circulaire de courant « normale » et remplacer I par son expression dans le résultat final :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 12 : Sphère chargée en rotation

Soit une sphère de centre O , de rayon R , en rotation autour d'un axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . Sachant que la sphère porte une densité surfacique de charge σ , calculer le champ magnétique créé en O par cette distribution.

Solution

Cet exercice ne diffère que peu du précédent. Pour le réussir, il faut voir la sphère comme un « empilement de spires élémentaires » constituées par les couronnes élémentaires.

- Soit une couronne élémentaire située à la latitude θ . La surface de cette couronne vaut $dS = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$.
- La couronne porte donc une charge $dq = 2\pi R^2 \sigma \sin(\theta) d\theta$

- La charge portée par une portion élémentaire de couronne est $d^2q = R^2 \sigma \sin(\theta) d\theta d\varphi$
- La couronne en rotation se comporte comme une spire circulaire parcourue par un courant $dI = \frac{d^2q}{dt} = R^2 \sigma \sin(\theta) \dot{\varphi} d\theta = \omega R^2 \sigma \sin(\theta) d\theta$
- Cette spire génère un champ magnétique en O valant, en réutilisant un calcul déjà fait, $d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{2R \sin(\theta)} \sin^3(\theta) \omega R^2 \sigma \sin(\theta) d\theta \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3(\theta) d\theta \vec{u}_z$
- On linéarise l'expression grâce à $\sin^3(\theta) = \frac{3 \sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}$, ce qui donne $d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{8} (3 \sin(\theta) - \sin(3\theta)) d\theta \vec{u}_z$
- Il ne reste qu'à intégrer pour θ entre 0 et π : $\vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{8} (3 \sin(\theta) - \sin(3\theta)) d\theta \vec{u}_z$
- On trouve finalement

$$\vec{B}(O) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \vec{u}_z$$

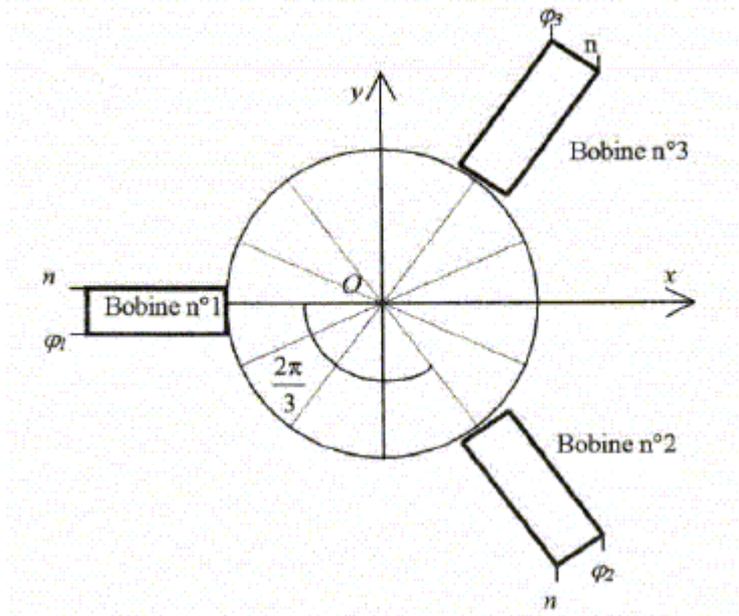
EXERCICE 13 : étude magnétique du stator du moteur asynchrone

Etude magnétique du stator :

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Soit un solénoïde circulaire, de longueur supposée quasi-infinie suivant son axe (Ox) parcouru par un courant d'intensité I. Le nombre de spires par unité de longueur est n. Le vecteur surface $\mathbf{S} = S \mathbf{u}_x$ est choisi grâce à la "règle de la main droite" à partir de l'orientation du courant I qui circule dans le solénoïde.

1. Exprimer le champ magnétique B créé par un solénoïde en un point quelconque de l'espace en fonction de la perméabilité du vide μ_0 , n, I et de \mathbf{u}_x .
2. Le stator du moteur asynchrone est constitué de trois enroulements cylindriques (qu'on assimilera à des solénoïdes infinis) identiques.



On repère les axes respectifs des solénoïdes par les vecteurs : $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_x$;

$\mathbf{u}_2 = \cos(2\pi/3)\mathbf{u}_x + \sin(2\pi/3)\mathbf{u}_y$; $\mathbf{u}_3 = \cos(2\pi/3)\mathbf{u}_x - \sin(2\pi/3)\mathbf{u}_y$.

On alimente ces trois bobines grâce à un courant triphasé créé par un alternateur triphasé. Ainsi, chacune des intensités $I_k(t)$ est de la forme :

$I_k(t) = -I_0 \sin(\omega_{tri} t + \Psi_k)$ avec $\Psi_1 = 0$; $\Psi_2 = -2\pi/3$; $\Psi_3 = 2\pi/3$.

- Montrer que les composantes du champ magnétique peuvent s'exprimer sous la forme : $B_x(t) = -B_0 \sin(\omega_{tri} t)$; $B_y(t) = B_0 \cos(\omega_{tri} t)$.

- Montrer que le stator du moteur asynchrone crée en O un champ magnétique de valeur constante B_0 tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\Omega_B = \omega_B \mathbf{u}_z$. Identifier ω_B .

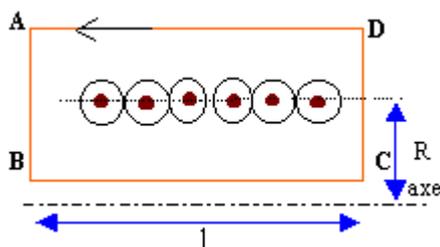
Champ du solénoïde :

Tout plan perpendiculaire à l'axe de la bobine est un plan de symétrie pour le courant : en conséquence, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan.

La distribution de courant étant invariante par rotation autour de l'axe de la bobine, et par translation sur cet axe, le champ est porté par l'axe de la bobine et ne dépend que de la distance à l'axe.

Le champ est nul à l'extérieur de la bobine, car les lignes de champ ne sortent pas du solénoïde.

Appliquons le *théorème d'Ampère* au contour ABCD



le champ étant perpendiculaire à AB et à CD, la circulation est nulle le long de AB et CD

le champ est nul à l'extérieur, la circulation du champ est nulle le long de AD

la circulation du champ est $\mu_0 n I$ le long de BC

$$\mu_0 n I = B l$$

$B = \mu_0 n I$ avec $n = N/l$, nombre de spire par mètre.

le champ est uniforme et colinéaire à l'axe à l'intérieur du solénoïde.

Composantes du champ magnétique :

Le champ total est la somme vectorielle des champs créés par chaque solénoïdes, le milieu étant linéaire.

$$B = -\mu_0 n I_0 [\sin(\omega_{tri} t) \mathbf{u}_1 + \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) \mathbf{u}_2 + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) \mathbf{u}_3]$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_x ; \mathbf{u}_2 = \cos(2\pi/3) \mathbf{u}_x + \sin(2\pi/3) \mathbf{u}_y ; \mathbf{u}_3 = \cos(2\pi/3) \mathbf{u}_x - \sin(2\pi/3) \mathbf{u}_y.$$

$$B = -\mu_0 n I_0 [\sin(\omega_{tri} t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) \mathbf{u}_x + \sin(2\pi/3) \mathbf{u}_y) + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) \mathbf{u}_x - \sin(2\pi/3) \mathbf{u}_y)].$$

$$B_x(t) = -\mu_0 n I_0 [\sin(\omega_{tri} t) + \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3))]$$

$$\text{Or } \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3))) = \frac{1}{2} [\sin(\omega_{tri} t - 4\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t)]$$

$$\text{Or } \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) - \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3))) = \frac{1}{2} [\sin(\omega_{tri} t) + \sin(\omega_{tri} t + 4\pi/3)]$$

$$\sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3))) = \sin(\omega_{tri} t) + \frac{1}{2} [\sin(\omega_{tri} t - 4\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 4\pi/3)]$$

$$\text{Or } \sin(\omega_{tri} t - 4\pi/3) = \sin(\omega_{tri} t) \cos(4\pi/3) - \cos(\omega_{tri} t) \sin(4\pi/3)$$

$$\text{Or } \sin(\omega_{tri} t + 4\pi/3) = \sin(\omega_{tri} t) \cos(4\pi/3) + \cos(\omega_{tri} t) \sin(4\pi/3)$$

$$\frac{1}{2} [\sin(\omega_{tri} t - 4\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 4\pi/3)] = \sin(\omega_{tri} t) \cos(4\pi/3) = -0,5 \sin(\omega_{tri} t).$$

$$\sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3))) = 0,5 \sin(\omega_{tri} t)$$

$$B_x(t) = -\mu_0 n I_0 [\sin(\omega_{tri} t) + \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\cos(2\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\cos(2\pi/3)))]$$

$$\mathbf{B}_x(t) = -1,5 \mu_0 n I_0 \sin(\omega_{tri} t) = -\mathbf{B}_0 \sin(\omega_{tri} t).$$

$$B_y(t) = -\mu_0 n I_0 [\sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\sin(2\pi/3) - \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\sin(2\pi/3)))]$$

$$\text{Or } \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\sin(2\pi/3) - \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\sin(2\pi/3))) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_{tri} t - 4\pi/3) - \cos(\omega_{tri} t)]$$

$$\text{Or } \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\sin(2\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\sin(2\pi/3))) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_{tri} t) - \cos(\omega_{tri} t + 4\pi/3)]$$

$$\sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) (\sin(2\pi/3) - \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) (\sin(2\pi/3))) = -\cos(\omega_{tri} t) + \frac{1}{2} [\cos(\omega_{tri} t - 4\pi/3) + \cos(\omega_{tri} t + 4\pi/3)]$$

$$\text{Or } \cos(\omega_{tri} t - 4\pi/3) = \cos(\omega_{tri} t) \cos(4\pi/3) + \sin(\omega_{tri} t) \sin(4\pi/3)$$

Or $\cos(\omega_{tri} t + 4\pi/3) = \cos(\omega_{tri} t) \cos(4\pi/3) - \sin(\omega_{tri} t) \sin(4\pi/3)$

$\frac{1}{2}[\cos(\omega_{tri} t - 4\pi/3) + \cos(\omega_{tri} t + 4\pi/3)] = \cos(\omega_{tri} t) \cos(4\pi/3) = -0,5 \cos(\omega_{tri} t)$

$\sin(\omega_{tri} t - 2\pi/3) \sin(2\pi/3) - \sin(\omega_{tri} t + 2\pi/3) \sin(2\pi/3) = -1,5 \cos(\omega_{tri} t)$

$B_y(t) = 1,5\mu_0 n I_0 \cos(\omega_{tri} t) = B_0 \cos(\omega_{tri} t)$.

Montrons que le stator du moteur asynchrone crée en O un champ magnétique de valeur constante B_0 tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\Omega_B = \omega_{tri} \mathbf{u}_z$.

$B^2 = B_x^2(t) + B_y^2(t) = B_0^2(\sin^2(\omega_{tri} t) + \cos^2(\omega_{tri} t)) = B_0^2$.

La valeur du champ magnétique est constante en O : $B = B_0$.

$\mathbf{B} = -B_0 \sin(\omega_{tri} t) \mathbf{u}_x + B_0 \cos(\omega_{tri} t) \mathbf{u}_y$.

$d\mathbf{B}/dt = -B_0 \omega_{tri} [\cos(\omega_{tri} t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega_{tri} t) \mathbf{u}_y] = \Omega_B \wedge \mathbf{B}$ avec $\Omega_B = \omega_{tri} \mathbf{u}_z$

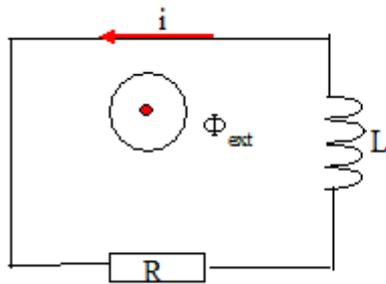
EXERCICE 14 : Etude électrique du rotor du moteur asynchrone

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Le rotor du moteur asynchrone est une bobine plate, fermée sur elle-même, de surface totale $S = S \mathbf{u}_z$, de résistance R, d'inductance L qui peut tourner autour de l'axe (Oz) passant par son centre et perpendiculaire à S . La bobine est solidaire d'un volant de grand moment d'inertie régularisant sa vitesse de rotation $\Omega_S = \omega_S \mathbf{u}_z$. Le rotor du moteur asynchrone ressent le champ magnétique créé par le stator, de valeur constante B_0 , tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\Omega_B = \omega_B \mathbf{u}_z$. Le retard de phase initial de la bobine sur le champ tournant est φ .

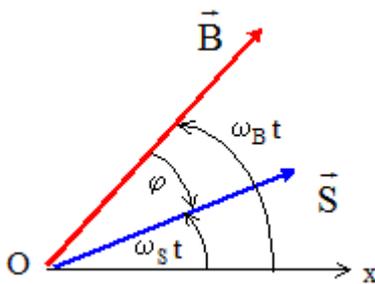
- Déterminer l'équation différentielle qui régit le courant $i(t)$ dans la bobine du rotor, en fonction de R, L et de Φ_{ext} , le flux du champ magnétique extérieur à travers la bobine du rotor.
- Représenter dans le plan (Oxy) le champ tournant \mathbf{B} et le vecteur surface S en faisant figurer l'angle φ à l'instant t.
- Exprimer Φ_{ext} en fonction de t, B_0 , S, ω_B , ω_S et φ .
- On veut exprimer l'intensité sous la forme $i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi - \Psi)$. Exprimer I_{max} en fonction de ω , R, L, B_0 et S.
- Faire de même pour $\sin \Psi$.

Equation différentielle qui régit le courant $i(t)$ dans la bobine du rotor :



$$Ri + L \frac{di}{dt} = \frac{d\Phi_{ext}}{dt}$$

Dans le plan (Oxy), représentation du champ tournant \vec{B} et du vecteur surface \vec{S} :



Expression de Φ_{ext} en fonction de t , B_0 , S , ω_B , ω_S et φ .

$$\Phi_{ext}(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{S}(t) \text{ avec } B_x(t) = -B_0 \sin(\omega_B t) ; B_y(t) = B_0 \cos(\omega_B t)$$

$$\text{et } S_x(t) = S \sin(\omega_S t - \varphi) ; S_y(t) = B_0 \cos(\omega_S t - \varphi)$$

$$\Phi_{ext}(t) = B_x(t)S_x(t) + B_y(t)S_y(t)$$

$$\Phi_{ext}(t) = B_0 S [-\sin(\omega_B t) \sin(\omega_S t - \varphi) + \cos(\omega_B t) \cos(\omega_S t - \varphi)]$$

$$\text{Or } -\sin(\omega_B t) \sin(\omega_S t - \varphi) + \cos(\omega_B t) \cos(\omega_S t - \varphi) = \cos((\omega_B - \omega_S)t + \varphi)$$

$$\Phi_{ext}(t) = B_0 S \cos((\omega_B - \omega_S)t + \varphi).$$

Expression de I_{max} en fonction de ω , R , L , B_0 et S :

L'équation différentielle est résolue par la méthode des nombres complexes ; on pose $\omega = \omega_B - \omega_S$

$$R\vec{i} + L\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\Phi_{ext}}{dt} ; \Phi_{ex} = B_0 S \cos(\omega t + \varphi) ; \vec{i}(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi - \Psi).$$

grandeur physique	$i(t)$	di/dt	$d\Phi_{ext}/dt$
nombre complexe associé	$I_{max} \exp j(\varphi - \Psi)$	$j\omega I_{max} \exp j(\varphi - \Psi)$	$j\omega B_0 S \exp j\varphi$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$R I_{\max} \exp j(\varphi-\Psi) + jL\omega I_{\max} \exp j(\varphi-\Psi) = j\omega B_0 S \exp j\varphi.$$

$$(R+jL\omega)I_{\max} \exp j(-\Psi) = j\omega B_0 S$$

Par suite en égalant les modules $[R^2+(L\omega)^2] I_{\max}^2 = (\omega B_0 S)^2$.

$$I_{\max} = \omega B_0 S [R^2+(L\omega)^2]^{-1/2}.$$

$$\arg [(R+jL\omega)I_{\max}] -\Psi = \arg (j\omega B_0 S)$$

$$\Psi = \arg (j\omega B_0 S) - \arg [(R+jL\omega)I_{\max}]$$

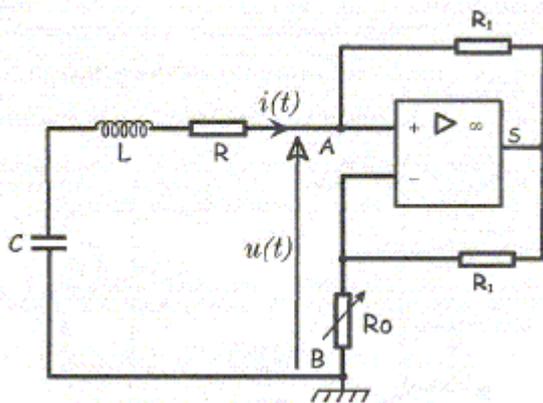
$$\arg (j\omega B_0 S) = 1/2\pi ; \arg [(R+jL\omega)I_{\max}] = \tan^{-1}(L\omega/R).$$

$$\Psi = 1/2\pi - \arctan(L\omega/R).$$

$$1/2\pi - \Psi = \arctan(L\omega/R) \text{ ou } \sin(1/2\pi - \Psi) = \cos\Psi = L\omega / [R^2+(L\omega)^2]^{-1/2}.$$

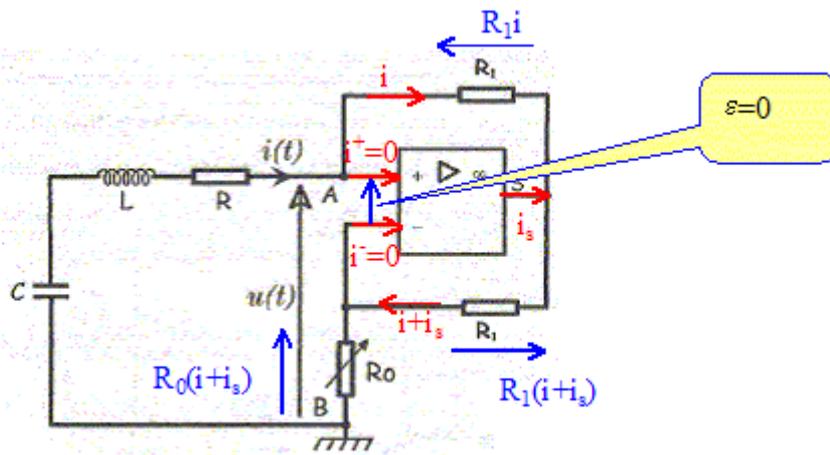
Exercice 15 : Oscillations électriques entretenues

On s'intéresse à un dispositif électronique dit à "résistance négative" permettant d'obtenir des oscillations libres non amorties du dipole RLC.



L'amplificateur utilisé est supposé idéal. En régime linéaire, sa tension de sortie est, en valeur absolue, inférieure à la tension de saturation notée V_{sat} .

Relation entre la tension $u(t) = V_A - V_B$, $i(t)$ et R_0 :



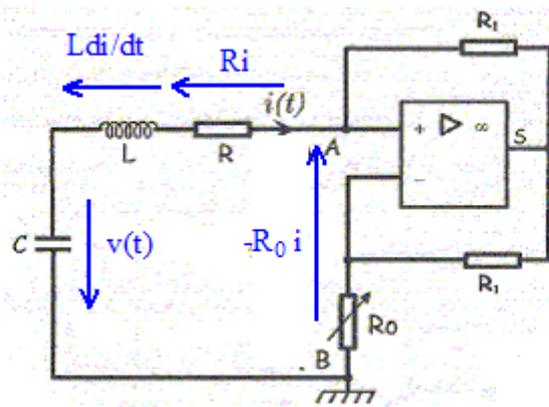
$$u(t) = R_0(i+i_s) ; u(t) = R_1 i + (R_1+R_0)(i+i_s)$$

$$\text{d'où } R_1 i + R_1(i+i_s) = 0 \text{ soit } i_s = -2i$$

$$\text{Par suite : } \mathbf{u(t) = -R_0 i(t)}$$

Valeur de R₀ conduisant à l'entretien des oscillations :

En notant v(t) la tension aux bornes du condensateur :



$$v(t) + R i(t) + L di(t) / dt - R_0 i = 0$$

$$\text{si } \mathbf{R = R_0} : v(t) + L di(t) / dt = 0 \text{ (éq. différentielle de l'oscillateur libres non amorti)}$$

La puissance instantanée mis en jeu dans le dipôle RLC est dissipée dans le conducteur ohmique R : $p = R i^2(t)$

A chaque instant les alimentations de l'amplificateur opérationnel fournissent au dipôle RLC la puissance $R i^2(t)$ et compensent ainsi la puissance perdue par effet Joule.

Oscillateur de van der Pol :

Pour tenir compte des non linéarités du montage, la caractéristique $u=f(i)$ du dipôle AB, réalisé avec l'amplificateur opérationnel, est modélisée par une courbe d'équation unique de la forme $u = -R_0 i + b i^3$.

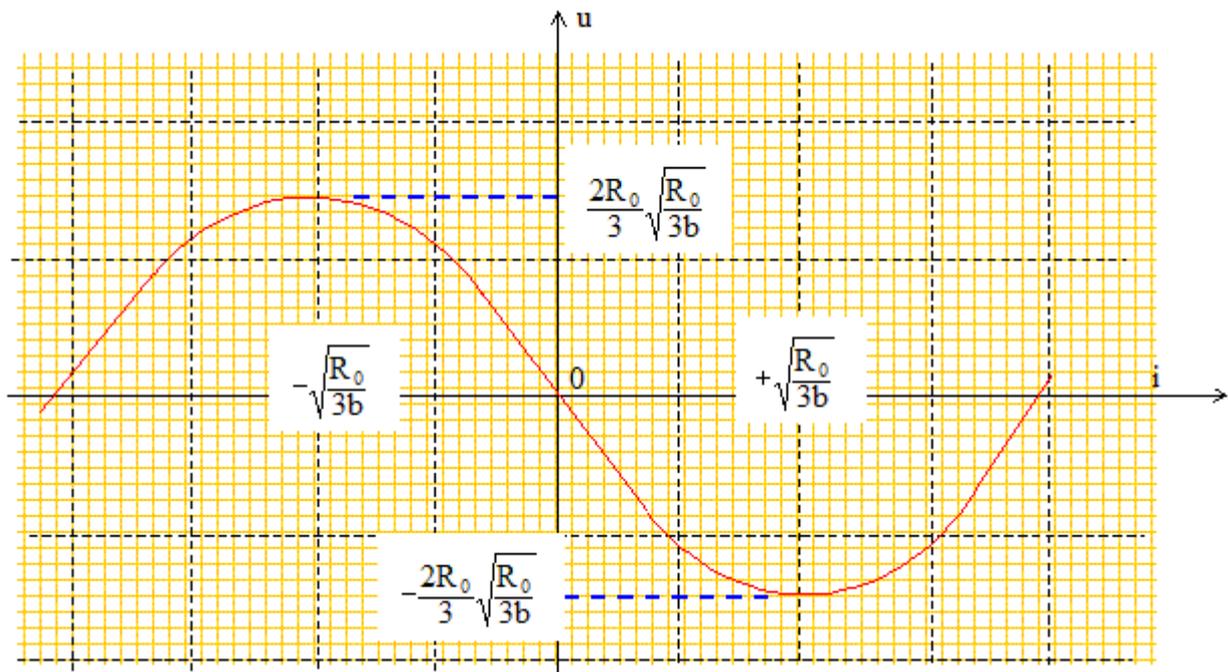
Etude de cette fonction : $u = -R_0 i + b i^3$

La dérivée $du/di = -R_0 + 3 bi^2$ s'annule pour les valeurs $i_1 = [R_0/(3b)]^{1/2}$ et $i_2 = - [R_0/(3b)]^{1/2}$

u présente donc deux extrémums pour $i = i_1$ et $i = i_2$.

La dérivée est négative sur l'intervalle $[i_2 ; i_1]$: la fonction u est décroissante sur cette intervalle.

La fonction u étant impaire, l'origine est centre de symétrie.



Equation différentielle vérifiée par i(t) :

Le montage simulant une résistance négative est relié au dipôle RLC.

$$v(t) + R i(t) + L di(t) / dt + u(t) = 0 \text{ avec } u = -R_0 i + b i^3.$$

$$dv/dt + R di/dt + L d^2i/dt^2 - R_0 di/dt + 3b i^2 di/dt = 0$$

Or $v(t) = q/C$ et $i = dq/dt$ d'où $dv/dt = i/C$

Par suite $i/C + (R-R_0+3 b i^2) di/dt + L d^2i/dt^2 = 0$.

$i + (R-R_0+3 b i^2)C di/dt + LC d^2i/dt^2 = 0.$ (1)

Condition de stabilité de cet oscillateur :

On effectue le changement de variable suivant : $x = i$ et $\tau = t (LC)^{-1/2}$ soit $d\tau/dt = (LC)^{-1/2}$

(1) s'écrit : $x + (R-R_0+3 b x^2)C dx/dt + LC d^2x/dt^2 = 0$.

Or $dx/dt = (LC)^{-1/2} dx/d\tau$ et $d^2x/dt^2 = (LC)^{-1} d^2x/d\tau^2$

par suite : $x + (R-R_0+3 bx^2)(C/L)^{1/2} dx/d\tau + d^2x/d\tau^2 = 0$.

en posant $\alpha = (R_0-R) (C/L)^{1/2}$ et $\beta = 3 b / (R_0-R)$:

$$x - \alpha(1-\beta x^2)dx/d\tau + d^2x/d\tau^2 = 0.$$

La condition de stabilité de l'oscillateur de Van der Pol est $\beta > 0$ soit $R_0 > R$.

Exercice 16 : Fonctionnement de la génératrice

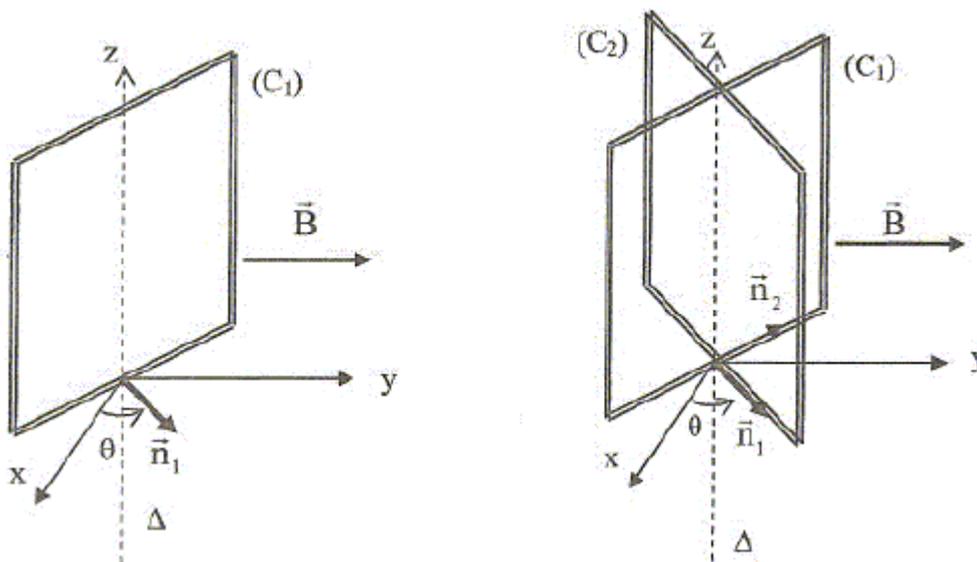
Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

l'axe de l'éolienne entraîne une génératrice qui fournit du courant électrique avec un rendement proche de l'unité.

On schématise la génératrice par un cadre rectangulaire C_1 sur lequel on a enroulé N spires. Ce cadre tourne dans un champ magnétique uniforme constant

$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ autour d'un axe vertical que l'on prend comme axe Oz . On note \mathbf{n}_1 le vecteur normal, ce qui oriente le parcours du cadre.

On note θ l'angle orienté $\theta = (\mathbf{e}_x, \mathbf{n}_1)$. Le cadre est entraîné par l'axe de l'éolienne et tourne à la vitesse angulaire $\Omega = \theta'$.



Etablir l'expression du flux ϕ_1 du champ magnétique à travers une spire de C_1 en fonction de S_c surface du cadre, B et θ .

$$\phi_1 = \mathbf{B} \cdot S_c \mathbf{n}_1 = B\mathbf{e}_y \cdot S_c \mathbf{n}_1 = B S_c \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{n}_1) = B S_c \cos(\pi/2 - \theta)$$

$$\phi_1 = B S_c \sin(\theta)$$

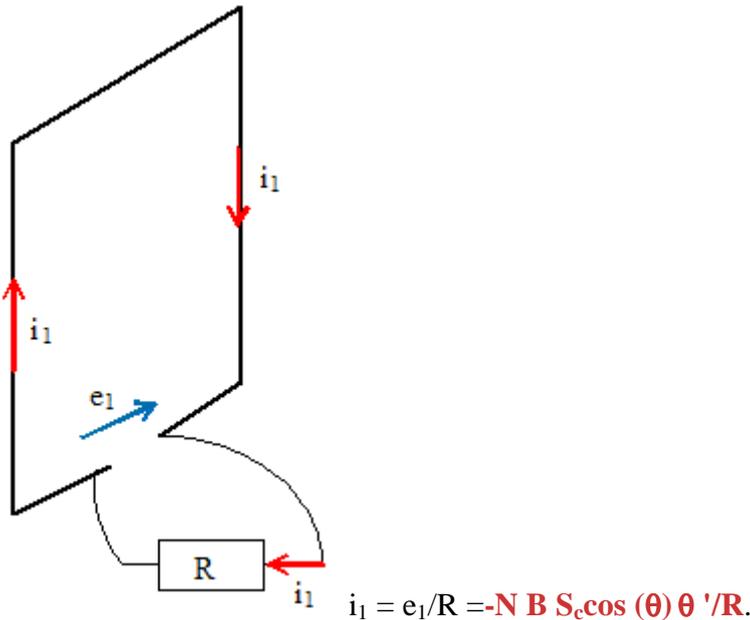
Il apparaît aux extrémités de l'enroulement des N spires de C_1 une force électromotrice e_1 que l'on exprimera en fonction de S_c , N , B , θ et θ' .

$$\text{Flux total à travers } N \text{ spires : } N \phi_1 = N B S_c \sin(\theta)$$

$$e_1 = -d\phi_1 / dt = -N B S_c \cos(\theta) \theta'.$$

L'enroulement de résistance et d'inductance propre négligeable, est connecté à une résistance R.

Représenter le circuit électrique équivalent. Donner l'expression de i_1 , intensité du courant qui le parcourt.



Un second cadre identique C_2 , solidaire du premier et s'en déduisant par une rotation de 90° , complète le dispositif. On note \mathbf{n}_2 le vecteur normal à ce second cadre. Les deux cadres sont isolés électriquement l'un de l'autre.

Exprimer la f.e.m e_2 qui apparaît aux bornes de C_2 .

Même calculs que ci-dessus en remplaçant θ par $\frac{1}{2}\pi + \theta$:

$$e_2 = -N B S_c \cos(\frac{1}{2}\pi + \theta) \theta' = N B S_c \sin(\theta) \theta'.$$

Le cadre C_2 est connecté à une résistance R de même valeur que celle connectée à C_1 .

Etablir l'expression de l'intensité i_2 circulant dans le cadre C_2 .

$$i_2 = e_2/R = N B S_c \sin(\theta) \theta' / R.$$

On cherche maintenant à établir l'équation mécanique de la partie tournante de la génératrice. On rappelle que le moment des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit baignant dans un champ magnétique \mathbf{B} uniforme vaut : $\Gamma_1 = \mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{B}$ où $\mathbf{M}_1 = Ni_1 S_c \mathbf{n}_1$ est le moment magnétique du cadre C_1 .

On notera J le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ de l'ensemble des deux cadres et de l'axe de l'hélice dont ils sont solidaires. On supposera que les liaisons avec l'axe sont parfaites.

Calculer le moment Γ_1 des forces de Laplace que subit le cadre C_1 .

$$\Gamma_1 = Ni_1 S_c \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{B} = Ni_1 S_c B \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{e}_y = Ni_1 S_c B \sin(\pi/2 - \theta) \mathbf{e}_z = Ni_1 S_c B \cos(\theta) \mathbf{e}_z.$$

$$\Gamma_1 = -N^2 B^2 S_c^2 \cos^2(\theta) \theta' / R e_z.$$

Calculer le moment Γ_2 des forces de Laplace que subit le cadre C_2 .

$$\Gamma_2 = Ni_2 S_c n_2 \wedge B = Ni_2 S_c B n_2 \wedge e_y = Ni_2 S_c B \sin(-\theta) (e_z) = -Ni_2 S_c B \sin(\theta) (e_z).$$

$$\Gamma_2 = -N^2 B^2 S_c^2 \sin^2(\theta) \theta' / R e_z.$$

Par application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ ,

trouver une équation différentielle en θ reliant les moments calculés ci-dessus et le moment

$\Gamma_m = \Gamma_m e_z$ des actions exercées par l'hélice sur la partie tournante.

$$\Gamma_m + \Gamma_1 + \Gamma_2 = d\sigma_0/dt ; \text{projeter sur l'axe } \Delta : \Gamma_m + \Gamma_1 + \Gamma_2 = J\theta''.$$

En régime permanent la vitesse angulaire Ω est constante ainsi que le moment Γ_m .

Exprimer Ω en fonction de R , Γ_m , N , S_c et B . En déduire la puissance mécanique P_m fournie par l'hélice à la génératrice.

$\Omega = \theta'$; en régime permanent Ω est constant, d'où $d\Omega/dt = 0$ soit $\theta'' = 0$.

par suite : $\Gamma_m + \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$; $\Gamma_m = -\Gamma_1 - \Gamma_2 = N^2 B^2 S_c^2 \cos^2(\theta) \Omega / R + N^2 B^2 S_c^2 \sin^2(\theta) \Omega / R$

$$\Gamma_m = N^2 B^2 S_c^2 \Omega / R ; \Omega = R\Gamma_m / (N^2 B^2 S_c^2).$$

$$P_m = \Gamma_m \cdot \Omega = \Gamma_m \Omega = R\Gamma_m^2 / (N^2 B^2 S_c^2).$$

Déterminer en régime permanent, la puissance moyenne électrique P_e dissipée dans les deux résistances R . Conclure.

$$P_e = R(i_1^2 + i_2^2) = R [(N B S_c \cos(\theta) \Omega / R)^2 + (N B S_c \sin(\theta) \Omega / R)^2]$$

$$P_e = (N B S_c \Omega)^2 / R.$$

$$\text{Or } \Omega = R\Gamma_m / (N^2 B^2 S_c^2) \text{ d'où } P_e = R\Gamma_m^2 / (N^2 B^2 S_c^2) = P_m.$$

La puissance mécanique est entièrement convertie en puissance électrique dans les résistances R .

La puissance P_e fournie par la génératrice est de 400 W pour une vitesse de rotation $\Omega = 750$ tr/min.

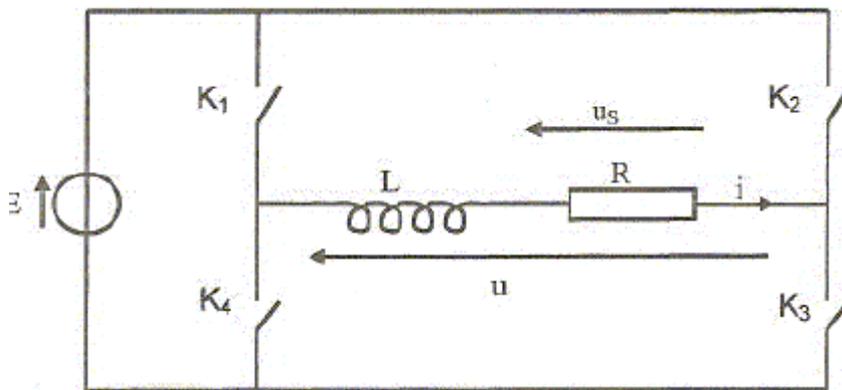
Evaluer numériquement Γ_m .

$$\Omega = 750 / 60 = 12,5 \text{ tr/s soit } 12,5 * 6,28 = 78,5 \text{ rad/s.}$$

$$P_m = P_e = \Gamma_m \Omega ; \Gamma_m = P_e / \Omega = 400 / 78,5 = 5,1 \text{ N m.}$$

Exercice 17 : Etude d'un onduleur,

Cette partie étudie un onduleur de tension autonome à commande symétrique ou décalée. Un onduleur est un convertisseur de tension alternative. Le montage est celui représenté sur la figure ci-dessous :



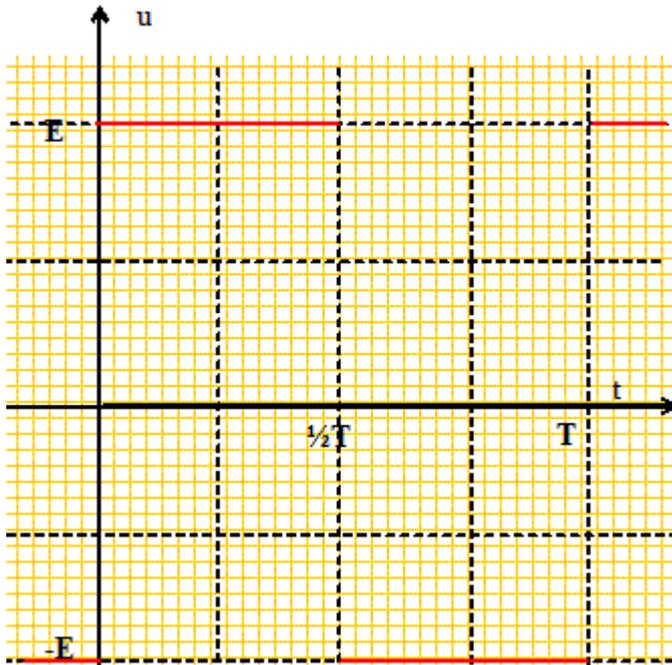
les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1 , K_2 , K_3 , K_4 sont commandés électriquement de telle façon que :

pour $nT < t < (n+1/2)T$ K_1 et K_3 fermés K_2 et K_4 ouverts

pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$ K_1 et K_3 ouverts K_2 et K_4 fermés

Le générateur est une source de tension idéale de f.e.m E constante. L est une inductance pure dite de lissage et R représente la charge.

Tracer la courbe $u(t)$ en indiquant les points remarquables.



Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, courant circulant dans la charge.

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri \text{ avec } u(t) = E \text{ si } nT < t < (n+1/2)T \text{ et } u(t) = -E \text{ si } (n+1/2)T < t < (n+1)T$$

Si $i_1(t)$ est la solution de cette équation pour $0 < t < 1/2 T$ et $i_2(t)$ la solution de cette équation pour $1/2 T < t < T$,

Déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R , L et E et en fonction des deux constantes d'intégration A_1 et A_2 (que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant). On pose $\tau = L/R$.

$nT < t < (n+1/2)T$: solution particulière $i_1 = E/R$; solution générale de $di/dt + 1/\tau i = 0$: $i_1(t) = A_1 \exp(-t/\tau)$.

$$i_1(t) = A_1 \exp(-t/\tau) + E/R.$$

$(n+1/2) T < t < (n+1)T$: solution particulière $i_2 = -E/R$; solution générale de $di/dt + 1/\tau i = 0$: $i_2(t) = A_2 \exp(-t/\tau)$.

$$i_2(t) = A_2 \exp(-t/\tau) - E/R.$$

On se place en régime permanent et on cherche à déterminer les valeurs de A_1 et A_2 . On pose $\alpha = \exp(-T/(2\tau))$.

Ecrire la condition de raccordement pour le courant $t = 1/2 T$; justifier.

La continuité de l'énergie stockée dans la bobine entraîne la continuité de l'intensité.

$$i_1(1/2 T) = A_1 \exp(-T/(2\tau)) + E/R = A_1 \alpha + E/R ; i_2(1/2 T) = A_2 \exp(-T/(2\tau)) - E/R = A_2 \alpha - E/R$$

$$i_1(1/2 T) = i_2(1/2 T) ; A_1 \alpha + E/R = A_2 \alpha - E/R ; A_2 \alpha - A_1 \alpha = 2E/R.$$

En écrivant que le courant est périodique, écrire une seconde relation entre A_1 et A_2 . Résoudre le système.

$$i_2(T) = i_1(0) : A_2 \exp(-T/\tau) - E/R = A_1 + E/R ; A_2 \alpha^2 = A_1 + 2E/R.$$

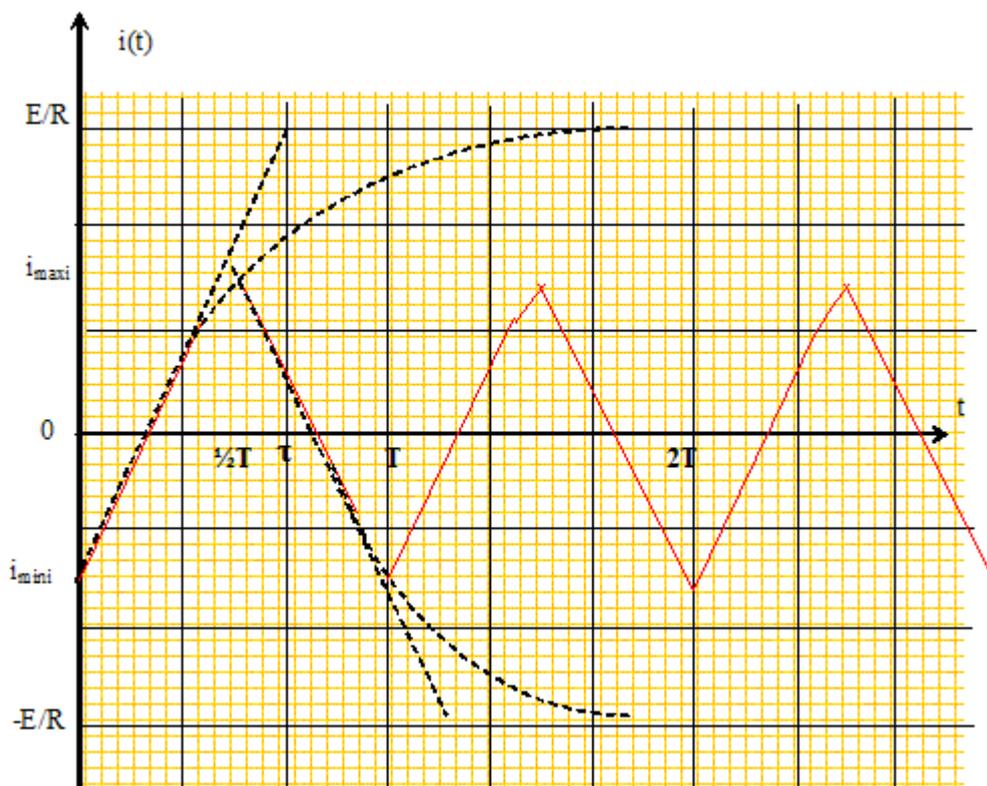
$$A_1 = A_2 - 2E/(R\alpha) ; A_2 \alpha^2 = A_2 - 2E/(R\alpha) + 2E/R ; A_2(\alpha^2 - 1) = 2E/R(1 - 1/\alpha) ; A_2 = 2E/(\alpha(\alpha + 1)R).$$

$$A_1 = A_2 - 2E/(R\alpha) = 2E/(\alpha(\alpha + 1)R) - 2E/(R\alpha) ; A_1 = -2E/((1 + \alpha)R).$$

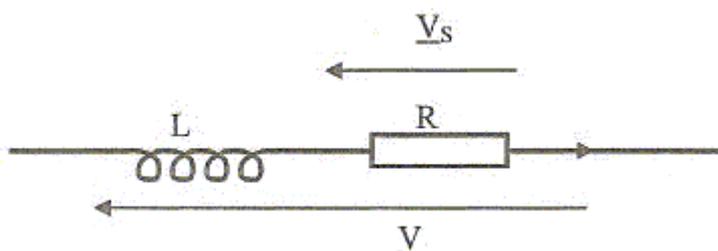
Exprimer $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Tracer le graphe $i(t)$ en faisant apparaître les points remarquables.

$$i_1(t) = -2E/((1 + \alpha)R) \exp(-t/\tau) + E/R ; i_1(t) = E/R [1 - 2/(1 + \alpha) \exp(-t/\tau)].$$

$$i_2(t) = 2E/(\alpha(\alpha + 1)R) \exp(-t/\tau) - E/R ; i_2(t) = E/R [-1 + 2/(1 + \alpha) \alpha \exp(-t/\tau)].$$



On va maintenant étudier l'influence de l'inductance de lissage.



Montrer que pour une tension sinusoïdale V de pulsation ω , l'ensemble R et L se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre.

Pour cela, on calculera en notant \underline{V} et \underline{V}_s les grandeurs complexes associées aux tensions, la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{V}_s / \underline{V}$ que l'on exprimera en fonction de ω et τ .

Puis on étudiera le comportement du module H de $\underline{H}(j\omega)$ pour les grandes et les petites pulsations.

$$\underline{V} = (jL\omega + R) \underline{i} ; \underline{V}_s = R \underline{i} ; \underline{V}_s / \underline{V} = R / (jL\omega + R) = 1 / (jL\omega/R + 1) ; \underline{H}(j\omega) = 1/(1+j\omega\tau).$$

$$\underline{H}(j\omega) = (1-j\omega\tau) / (1+(\omega\tau)^2) ; \mathbf{H} = 1/(1+(\omega\tau)^2)^{1/2}.$$

si ω tend vers zéro, H tend vers 1 ; si ω tend vers l'infini, $H \sim 1/(\omega\tau)$. Comportement d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

Déterminer la pulsation de coupure ω_c du filtre.

$$H(\omega_c) = H_{\max} / 2^{1/2} = 1 / 2^{1/2} ; 1/2 = 1/(1+(\omega_c\tau)^2) ; 1+(\omega_c\tau)^2 = 2 ; (\omega_c\tau)^2 = 1 ; \omega_c = 1/\tau.$$

La tension en créneaux u(t) admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad b_{2k+1} = \frac{4E}{(2k+1)\pi}$$

De même la tension $u_s(t)$ admet une décomposition en série de Fourier de la

$$u_s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \sin(n\omega_0 t + \phi_{sn})$$

Justifier le fait que seuls les coefficients β_n correspondants à des n impairs soient différents de zéro.

La fonction sinus et la tension créneaux sont des fonctions impaires.

Calculer les coefficients β_1 et β_3 de la décomposition en série de Fourier de la tension $u_s(t)$.

$$\underline{V}_s(t) = \underline{H} \underline{V}(t) = (1-j\omega\tau) \underline{V}(t) / (1+(\omega\tau)^2)$$

$$\exp(j\theta) = \cos \theta + j \sin \theta ; -j \exp(j\theta) = -j \cos \theta + \sin \theta ; \sin \theta \text{ est la partie réelle de } -j \exp(j\theta).$$

$$\text{à } b_{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) \text{ on associe la partie réelle du complexe : } -jb_{2k+1} \exp(j(2k+1)\omega_0 t) ;$$

$$\text{à } \beta_{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t + \Phi_{s 2k+1}) \text{ on associe la partie réelle du complexe : } -j\beta_{2k+1} \exp(j\Phi_{s 2k+1}) \exp(j(2k+1)\omega_0 t)$$

$$-j\beta_{2k+1} \exp(j\Phi_{s 2k+1}) \exp(j(2k+1)\omega_0 t) = -(1-j(2k+1)\omega\tau) j b_{2k+1} \exp(j(2k+1)\omega_0 t) / (1+(2k+1)^2(\omega\tau)^2)$$

$$\beta_{2k+1} \exp(j\Phi_{s 2k+1}) = (1-j(2k+1)\omega\tau) b_{2k+1} / (1+(2k+1)^2(\omega\tau)^2)$$

Le nombre complexe $a+jb$ s'écrit $\rho \exp(j\theta)$ avec $\rho = (a^2+b^2)^{1/2}$ et $\tan \theta = b/a$.

ici $a = b_{2k+1}/(1+(2k+1)^2(\omega\tau)^2)$ et $b = -(2k+1)\omega\tau / b_{2k+1}/(1+(2k+1)^2(\omega\tau)^2)$

Identifier les parties réelles : $\beta_{2k+1} = b_{2k+1}/(1+(2k+1)^2(\omega\tau)^2)^{1/2}$.

$b_{2k+1} = 4E/((2k+1)\pi)$; $\beta_{2k+1} = b_{2k+1}/(1+(2k+1)^2(\omega\tau)^2)^{1/2}$.

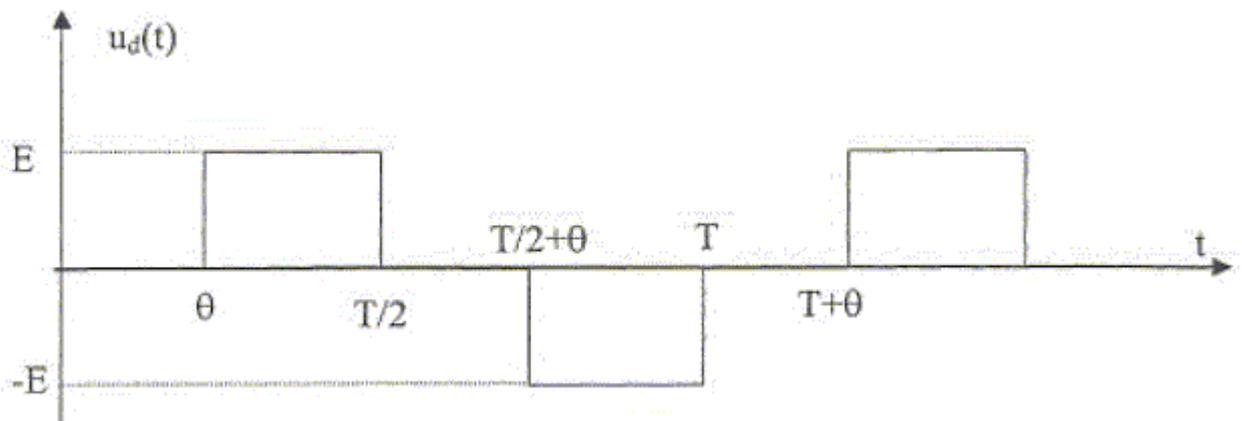
$b_1 = 4E/\pi$; $\beta_1 = 4E/(\pi (1+(\omega\tau)^2)^{1/2})$; $b_3 = 4E/(3\pi)$; $\beta_3 = 4E/(3\pi (1+9(\omega\tau)^2)^{1/2})$.

Déterminer le rapport $B = \beta_3/\beta_1$ et le calculer si $\omega = \omega_c$.

$B = (1+(\omega_c\tau)^2)^{1/2} / [3(1+9(\omega_c\tau)^2)^{1/2}]$; avec $\omega_c\tau = 1$

$B = 2^{1/2}/(3*10^{1/2}) = 0,15$.

Pour alimenter la charge avec un courant quasi-sinusoïdal, on modifie la commande des interrupteurs pour modifier la tension $u(t)$ et obtenir une tension $u_d(t)$ représentée ci-dessous :



Cette tension admet la décomposition en série de Fourier suivante :

$$u_d(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\omega_0\theta}{2}\right) \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\cos\left(\frac{3\omega_0\theta}{2}\right)}{3} \sin\left(3\omega_0\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\cos\left(\frac{5\omega_0\theta}{2}\right)}{5} \sin\left(5\omega_0\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right) \right]$$

Comment faut-il choisir θ pour que l'harmonique de rang 3 soit nul ? Dans ce cas, calculer pour la plus petite valeur positive de θ et pour $\omega = \omega_c$, le rapport $D = d_5/d_1$, où d_5 est l'amplitude de l'harmonique de rang 5 et d_1 est l'amplitude du fondamental (ou harmonique de rang 1) de la tension aux bornes de R. Conclure.

$\cos(1,5\omega_0\theta) = \cos((2k+1)\pi/2)$; $1,5\omega_0\theta = (2k+1)\pi/2$; $\theta = (2k+1)\pi/(3\omega_0)$.

La plus petite valeur de θ est : $\theta = \pi/(3\omega_0)$

$$b_1 = \cos(\omega_0 \theta / 2) = \cos(\pi/6) = 0,866 ; b_5 = \cos(5\omega_0 \theta / 2) / 5 = \cos(5\pi/6) / 5 = -0,173.$$

$$D = d_5/d_1 = |b_5 H(5\omega_c) / (b_1 H(\omega_c))| ;$$

$$H(5\omega_c) = 1 / (1 + 25(\omega_c \tau)^2)^{1/2} = 1/26^{1/2} = 0,196 ; H(\omega_c) = 1 / (1 + (\omega_c \tau)^2)^{1/2} = 1/2^{1/2} = 0,709 ;$$

$$D = |-0,173 * 0,196 / (0,866 * 0,709)| = 0,055.$$

L'harmonique de rang trois a une amplitude nulle ; l'harmonique de rang 5 a une amplitude égale à 5,5 % de l'amplitude du fondamental.

La tension $u_s(t)$ est quasiment sinusoïdale

Donner dans ces conditions en fonction de E et R, la puissance moyenne sur une période reçue par la charge.

La puissance moyenne est voisine de la puissance du fondamental.

$$u_s(t) = 4E/\pi b_1 \sin(\omega_0(t - 1/2\theta)) H(\omega_c) = 4E/\pi * 0,866 * 0,709 \sin(\omega_0 t - \pi/6) = 0,782 E \sin(\omega_0 t - \pi/6).$$

$$p(t) = u^2(t) / R = (0,782 E)^2 \sin^2(\omega_0 t - \pi/6) / R ; \text{ la valeur moyenne de } \sin^2 \text{ est } 1/2$$

$$\text{puissance moyenne : } (0,782 E)^2 / (2R) = \mathbf{0,31 E^2/R}.$$

Exercice 18. utiliser l'énergie électrostatique

1

1. Déterminer la capacité d'un condensateur sphérique.

capacité d'un
condensateur
sphérique

corrigé

étape 1 : calcul du champ à l'intérieur du condensateur



Sphère centrale
au potentiel V_1
Sphère externe
au potentiel V_2

On considère une sphère Σ , de centre O et de rayon r.

On applique le théorème de Gauss à cette sphère Σ .

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

le champ est radial par raison de symétrie.

étape 2 : l'énergie d'un système de charges est égale au travail que l'on doit fournir pour amener les charges qui le constituent réversiblement depuis l'infini.

$$U = \iiint_{\tau} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 d\tau = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\epsilon_0 Q^2 4\pi r^2 dr}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} = \frac{Q^2 (r_2 - r_1)}{8\pi\epsilon_0 r_1 r_2}$$

puis identifier à : $U = 0,5 Q^2/C$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 (r_2 - r_1)}{8\pi\epsilon_0 r_1 r_2} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

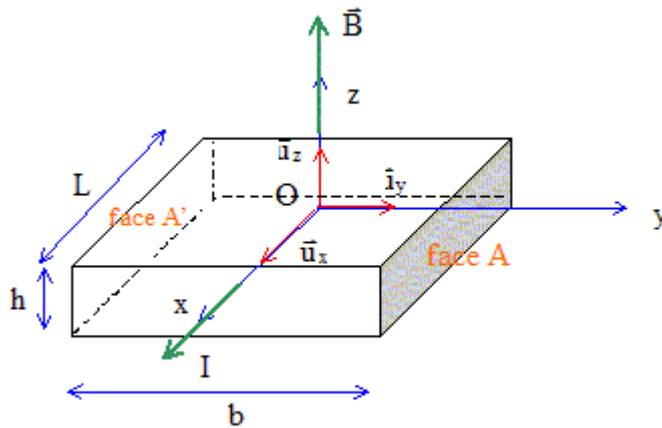
EXERCICE 19

Les vecteurs sont écrits en bleu et en gras.

- Généralités sur les capteurs :
 - Définir un capteur utilisable en électronique.
 - Quelles sont les propriétés essentielles que doit remplir un capteur ?
 - Citer 4 exemples de capteurs couramment utilisés.
- Etude de l'effet Hall :

On considère une plaquette parallélépipédique de semi conducteur dont les dimensions sont : $L = 8,0$ mm, $b = 5,0$ mm et $h = 10$ μ m. La plaquette est parcourue par un courant continu d'intensité I uniformément réparti avec la densité surfacique $\mathbf{j} = j \mathbf{u}_x$ avec $j > 0$. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme extérieur $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ avec $B > 0$. On négligera le champ magnétique créée par le courant I à travers la plaque.

On suppose qu'en présence du champ magnétique, le vecteur densité de courant est toujours $\mathbf{j} = j \mathbf{u}_x$ et on se place en régime permanent.



- Quelle est la différence entre un conducteur et un semi-conducteur ? Citer deux éléments chimiques aux propriétés semi-conductrices.
- Quelle est la différence essentielle entre un semi-conducteur intrinsèque et un semi-conducteur dopé.
- On a à faire ici à un semi-conducteur de type N. Quels sont les porteurs de charge libres majoritaires ?
- Dans la suite, ces porteurs de charge, animés de la vitesse \mathbf{v} , ont une masse m , une charge q et une densité volumique n (nombre de porteurs par unité de volume). Exprimer le vecteur vitesse \mathbf{v} des porteurs de la plaquette en fonction de \mathbf{j} , n et q . Justifier.
- Montrer qu'en présence du champ magnétique extérieur \mathbf{B} , il apparaît dans la plaquette un champ électrique de Hall \mathbf{E} tel que : $\mathbf{E} = -1/(nq) \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$.
Exprimer dans le repère les composantes de \mathbf{E} .
- Calculer la différence de potentielle de Hall $U = V(A') - V(A)$ qui apparaît entre les faces A et A' de la plaquette. Montrer que cette ddp peut se mettre sous la forme $U = kIB/h$ et exprimer la constante k en fonction de n et q .
- Justifier l'intérêt de l'effet Hall dans la mesure des champs magnétiques. Définir et exprimer en fonction de k , I et h la sensibilité de ce capteur.
- Si on désire augmenter la sensibilité du capteur, sur quelle grandeur peut-on jouer et dans quel sens ? Y a-t-il une limitation imposée à une augmentation de la sensibilité ?
- A N : $k = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$; $I = 0,20 \text{ A}$. Calculer la sensibilité de ce capteur ainsi que la densité volumique de porteurs libres n .
- Pourquoi préfère t-on un semi-conducteur à un conducteur dans la réalisation d'une sonde à effet Hall ?
- Pour obtenir l'intensité I du courant qui traverse le capteur, est-il préférable d'utiliser un générateur de courant ou de tension ? Justifier.

corrigé

Généralités sur les capteurs :

Un capteur utilisable en électronique, transforme une grandeur physique en tension électrique.

Un capteur doit être sensible, linéaire et fidèle.

Les CTN, thermocouples sont utilisés dans les mesures de température ; les photodiodes et photorésistors sont utilisés en optoélectronique ; les microphones convertissent les sons en tensions électriques ; l'électrode combinée du pH-mètre mesure le pH en chimie.

Différence entre un conducteur et un semi-conducteur :

La conductivité d'un semi-conducteur pur est faible, intermédiaire entre celle des métaux conducteurs

et celle des isolants. Le silicium, le germanium sont des semi-conducteurs.

Différence essentielle entre un semi-conducteur intrinsèque et un semi-conducteur dopé :

Dans un semi-conducteur dopé, on a remplacé un certain nombre d'atomes du semi-conducteur pur, par du bore (élément trivalent) ou par du phosphore (élément pentavalent) ; on augmente ainsi la conductivité de ce semi-conducteur.

Dans un semi-conducteur de type N (dopé par un élément pentavalent), les porteurs de charge libres majoritaires sont les électrons.

Expression du vecteur vitesse \mathbf{v} des porteurs de la plaquette en fonction de \mathbf{j} , n et q :

Les porteurs de charge, animés de la vitesse \mathbf{v} , ont une masse m , une charge q et une densité volumique n (nombre de porteurs par unité de volume).

densité de courant \mathbf{j} en fonction de I , S (section droite) et du vecteur unitaire \mathbf{u}_x : $\mathbf{j} = I / S \mathbf{u}_x$

Quantité d'électricité traversant la section S en dt seconde : Idt ; ces charges se trouvent dans le volume $Sdx = Svdt$

d'où $Idt = \rho S v dt$ avec $\rho = nq$, la charge volumique d'espace, densité volumique de charges mobiles.

$I = \rho S v$; $\mathbf{j} = \rho v \mathbf{u}_x = nq v \mathbf{u}_x$; $v \mathbf{u}_x = \mathbf{j} / (nq)$

En présence du champ magnétique extérieur \mathbf{B} :

Un conducteur électrique parcouru par le courant I , et placé dans un champ magnétique \mathbf{B} , est soumis à une force, appelée force de Laplace :

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

- En présence du champ magnétique, ces électrons sont soumis à une force qui les dévie. Il y a accumulation d'électrons sur la face A du ruban.
- Il apparaît une différence de potentiel U entre les 2 faces A et A' du ruban et un champ électrique \mathbf{E} de module U/b .

Les électrons qui arriveront ensuite seront soumis en plus à une force électrique $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$. On arrivera rapidement à un régime permanent dans lequel les électrons seront soumis à 2 forces opposées.

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0} ; \mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} ; \text{or } \mathbf{v} = \mathbf{j} / (nq)$$

il apparaît dans la plaquette un champ électrique de Hall \mathbf{E} tel que : $\mathbf{E} = -1/(nq) \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$.

Dans le repère les composantes de \mathbf{E} : (0 ; $jB/(nq)$; 0)

Différence de potentielle de Hall $U = V(A') - V(A)$ qui apparaît entre les faces A et A' de la plaquette :

$$U = V(A') - V(A) = \int_{A'}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A'}^A \frac{jB}{nq} dy = \frac{jB}{nq} (y_{A'} - y_A) = \frac{jBb}{nq}$$

De plus $j = I/S$ avec $S = bh$, d'où : $U = IB / (nqh) = kIB/h$ avec $k = 1/(nq)$.

Intérêt de l'effet Hall dans la mesure des champs magnétiques : la valeur du champ magnétique et la tension mesurée sont proportionnelles.

La sensibilité de ce capteur est : $U/B = kI/h$.

Le capteur est d'autant plus sensible que l'intensité du courant est plus grande ; mais avec l'augmentation de l'intensité l'effet joule (proportionnel au carré de l'intensité) augmente rapidement et on risque de détruire le semi-conducteur.

Calcul de la sensibilité de ce capteur :

$$k = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3\text{C}^{-1} ; I = 0,20 \text{ A} ; h = 10 \text{ }\mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m} ; kI/h = 3,0 \cdot 10^{-4} * 0,20 / 10^{-5} = \mathbf{6 \text{ V T}^{-1}}.$$

La densité volumique de porteurs libres n :

$$k = 1/(nq) ; n = 1/(kq) = 1/ (3,0 \cdot 10^{-4} * 1,6 \cdot 10^{-19}) = \mathbf{2,1 \cdot 10^{22}}.$$

On préfère un semi-conducteur à un conducteur dans la réalisation d'une sonde à effet Hall car la sensibilité, inversement proportionnelle à "n", est plus grande.

Pour obtenir l'intensité I du courant qui traverse le capteur, il est préférable d'utiliser un générateur de courant : ce dernier délivre une intensité constante. (la tension de Halla dépend de l'intensité) .

Un générateur de tension délivrerait une tension constante, mais une intensité non constante

Exercice 20 : Origine du champ magnétique.

Préliminaires :

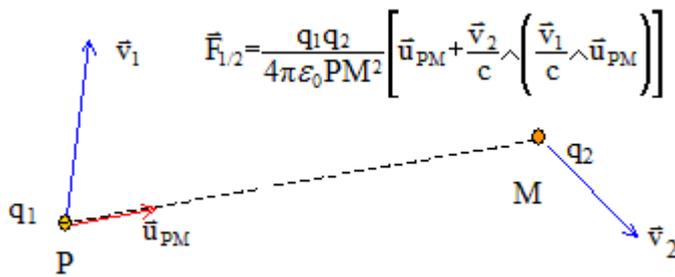
Les vecteurs sont écrits en bleu et en gras.

1. Quelles sont les sources usuelles de champs magnétiques ?
2. Quel physicien a mis en évidence l'action d'un courant sur un aimant ?
 - Quel physicien en a déduit peu après qu'un courant agit sur un aimant ?
 - A quelle époque ont eu lieu ces deux découvertes ?
3. Quels sont les ordres de grandeur de ces champs magnétiques créés par ces différentes sources ?

Origines du champ magnétique :

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement en P et M dans le vide et soit $\mathbf{u_{PM}}$ le vecteur unitaire orienté de P vers M. Les charges sont immobiles.

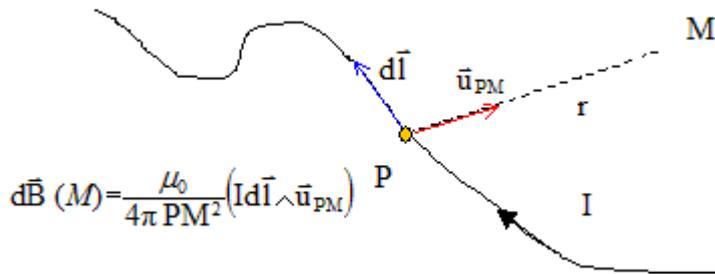
1. Rappeler la loi de Coulomb traduisant l'interaction électrostatique entre les charges.
2. En déduire l'expression du champ électrostatique $\mathbf{E_1(M)}$ créé par la charge q_1 au point M.
3. Un champ magnétique est-il créé au point M ? Justifier.
4. Lorsque les charges ne sont plus immobiles, mais animées par rapport au référentiel du laboratoire de vitesse $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$, l'expression de la force exercées en M par q_1 sur q_2 peut s'écrire :



- L'expression précédente peut encore s'écrire : $\vec{F}_{1/2} = q_2 [\vec{E}_1(M) + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1(M)]$ Comment se nomme cette force ?
- Retrouver l'expression de $\vec{E}_1(M)$ et donner celle de $\vec{B}_1(M)$ en fonction de c , ϵ_0 , q_1 , PM , \vec{v}_1 et \vec{u}_{PM} .

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi PM^2} (\vec{v}_1 \wedge \vec{u}_{PM})$$

- Dédire de ce qui précède que $\vec{B}_1(M)$ peut s'écrire : avec μ_0 constante que l'on exprimera en fonction de ϵ_0 et c . Que représente μ_0 ?
- Montrer alors que le champ magnétique crée en un point M par un élément dl de circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I situé en un point P, est donné par la loi de Biot et Savart :



corrigé

Les sources usuelles de champs magnétiques : les aimants, les bobinages parcourus par des courants.

En 1820, Oersted met en évidence l'action d'un courant sur un aimant en plaçant une petite aiguille aimantée (boussole) au voisinage d'un fil parcouru par un courant électrique.

Ampère en a déduit peu après qu'un courant agit sur un aimant.

Les ordres de grandeur de ces champs magnétiques créés par ces différentes sources :

bobines sans noyaux de fer doux : quelques milliteslats (mT) à quelques centaines de mT

Bobines avec noyaux de fer doux : 1 à 2 T

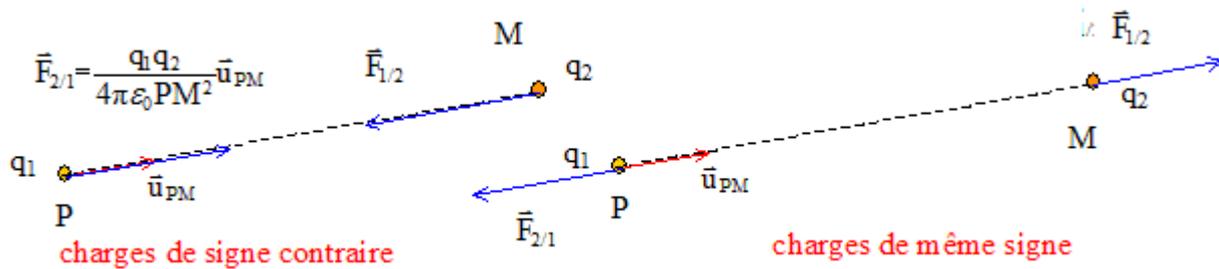
Bobines supraconductrices : jusqu'à 10 T.

Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement en P et M dans le vide et soit \vec{u}_{PM} le

vecteur unitaire orienté de P vers M. Les charges sont immobiles.

Loi de Coulomb traduisant l'interaction électrostatique entre les charges immobiles :



Expression du champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé par la charge q_1 au point M :

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Aucun champ magnétique n'est au point M, les charges étant immobiles et il n'y a pas de courant électrique.

Force de Lorentz :

Lorsque les charges ne sont plus immobiles, mais animées par rapport au référentiel du laboratoire de vitesse \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , l'expression de la force exercées en M par q_1 sur q_2 peut s'écrire :

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 [\vec{E}_1(M) + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1(M)]$$

Cette force se nomme force de Lorentz.

Retrouver l'expression de $\vec{E}_1(M)$ et donner celle de $\vec{B}_1(M)$ en fonction de c , ϵ_0 , q_1 , PM , \vec{v}_1 et \vec{u}_{PM} .

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \left[\vec{u}_{PM} + \frac{\vec{v}_2}{c} \wedge \left(\frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \vec{u}_{PM} \right) \right]$$

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 [\vec{E}_1(M) + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1(M)]$$

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM} \quad \vec{B}_1(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 c^2 PM^2} (\vec{v}_1 \wedge \vec{u}_{PM})$$

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi PM^2} (\vec{v}_1 \wedge \vec{u}_{PM})$$

$\vec{B}_1(M)$ peut s'écrire : avec μ_0 constante = $1/(\epsilon_0 c^2)$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide.

Montrons que le champ magnétique créé en un point M par un élément dl de circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I situé en un point P, est donné par la loi de Biot et Savart.

Soit dq la charge portée par l'élément dl du conducteur ; cet élément crée en M le champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 dq}{4\pi PM^2} (\vec{v}_1 \wedge \vec{u}_{PM})$$

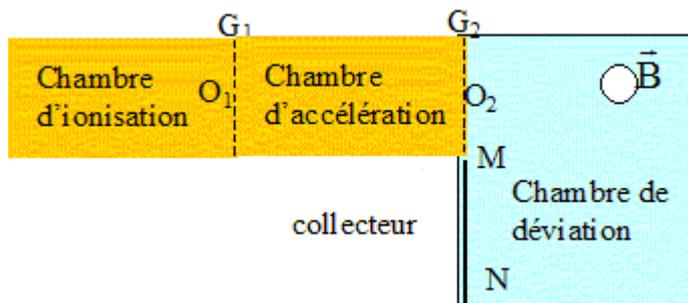
Or $dq = Idt$ et $d\vec{l} = \vec{v}_1 dt$; d'où $dq\vec{v}_1 = I \vec{v}_1 dt = I d\vec{l}$.

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi PM^2} (I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM})$$

Par suite :

EXERCICE 22 : Spectrographe de masse.

Un spectrographe de masse est constitué de plusieurs parties comme l'indique la figure ci-dessous :



Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes de potassium $^{A1}_{19}\text{K}$ et $^{A2}_{19}\text{K}$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ion K^+ . On considère qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse de ces ions est quasi-nulle.

- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les grilles G_1 et G_2 .

- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme \vec{B} de direction perpendiculaire au plan de la figure. Un collecteur constitué d'une plaque photosensible est disposé entre M et N .

Les chambres sont sous vide. On néglige le poids des ions devant les autres forces et on admet qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

Accélération des ions :

1. Quel doit être le signe de la différence de potentiel $V_{G1}-V_{G2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 .
2. Etablir les expressions des vitesses des ions lorsqu'ils arrivent en O_2 en fonction de m_1, m_2, e et $U= V_{G1}-V_{G2}$.

Accélération des ions :

1. Quel doit être le sens du champ magnétique **B**, régnant dans la chambre de déviation, pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
2. Montrer que dans la chambre de déviation, la trajectoire des ions est plane et que le mouvement est uniforme.
3. Montrer que la trajectoire de chaque type d'ion est un cercle dont on donnera le rayon R_1 (respectivement R_2) en fonction de m_1 (respectivement m_2), e, B et U .
4. En admettant que le rapport des masses des ions est égal au rapport de leurs nombres de masse, exprimer le rapport A_2/A_1 en fonction des rayons R_1 et R_2 des trajectoires.
5. A.N : on observe sur la plaque photosensible deux taches T_1 et T_2 correspondant aux impact des ions de masse m_1 et m_2 respectivement et telles que $OT_1=103,0$ cm et $OT_2 = 105,6$ cm. Déterminer A_2 sachant que $A_1=39$.
6. Décrire qualitativement quelle serait la trajectoire des ions si leur vitesse en O_2 n'était plus perpendiculaire au champ magnétique **B**.

corrigé

Accélération des ions :

Signe de la différence de potentiel $V_{G1}-V_{G2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 :

th. de l'énergie cinétique entre G_1 et G_2 :

le poids est négligeable devant la force électrique.

le travail de la force électrique est : $q (V_{G1}-V_{G2})$;

ce travail doit être moteur pour que les ions soient accélérés : or $q=e$, charge positive des ions, donc $V_{G1}-V_{G2}$ positive.

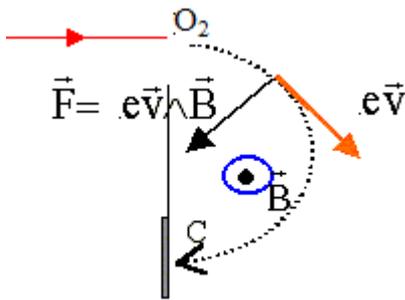
Expressions des vitesses des ions lorsqu'ils arrivent en O_2 en fonction de m_1, m_2, e et $U= V_{G1}-V_{G2}$.

la vitesse initiale en G_1 est nulle

$\frac{1}{2} m_i v_i^2 - 0 = e U$ d'où $v_i^2 = 2 e U / m_i$; $v_i = [2 e U / m_i]^{1/2}$ avec $i = 1, 2$.

Accélération des ions :

Sens du champ magnétique **B**, régnant dans la chambre de déviation, pour que les ions puissent atteindre le collecteur :



Dans la chambre de déviation, la force \mathbf{F} est perpendiculaire au vecteur vitesse et au vecteur champ magnétique : la trajectoire des ions est plane et située dans un plan perpendiculaire à \mathbf{B} et contenant le vecteur vitesse.

La force électromagnétique est à chaque instant perpendiculaire au vecteur vitesse. Or

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

watt N m/s

en conséquence la puissance de la force électromagnétique est nulle. Cette force ne travaille pas et ne modifie pas l'énergie cinétique de la particule chargée.

la norme du vecteur vitesse est constante : mouvement uniforme.

Trajectoire de chaque type d'ion :

Dans le repère de Frenet écrire la seconde loi de Newton sur l'axe n.

la particule chargée n'est soumise qu'à la force de Lorentz, centripète.

d'où $e v_i B = m_i v_i^2 / R_i$ soit $R_i = m_i v_i / (eB)$

or $v_i = [2 e U / m_i]^{1/2}$; $R_i = [2 m_i U / (eB^2)]^{1/2}$ avec $i = 1, 2$.

R_1 est constant : la trajectoire est un cercle.

Expression du rapport A_2/A_1 en fonction des rayons R_1 et R_2 des trajectoires :

$$R_2/R_1 = [m_2 / m_1]^{1/2}$$

En admettant que le rapport des masses des ions est égal au rapport de leurs nombres de masse : $R_2/R_1 = [A_2 / A_1]^{1/2}$; $A_2 / A_1 = (R_2/R_1)^2$.

A.N : $OT_1 = 103,0$ cm et $OT_2 = 105,6$ cm.

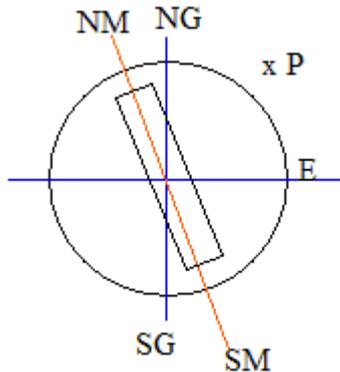
$$A_2 = 39 (105,6 / 103,0)^2 = \underline{41}.$$

Si la vitesse des ions en O_2 n'est plus perpendiculaire au champ magnétique \mathbf{B} , la trajectoire sera une

hélice. (la vitesse aura une composante suivant **B**)

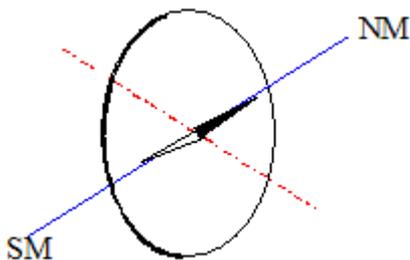
EXERCICE 23: Champ magnétique terrestre

A notre échelle tout se passe comme si il existait à l'intérieur de la Terre un aimant droit comme l'indique la figure ci-dessous :



NG : nord géographique ; SG : sud géographique ; E : équateur ; NM : nord magnétique ; SM : sud magnétique.

1. Indiquer sur ce schéma les pôles de l'aimant, quelques lignes de champ orientées, les pôles d'une boussole située au point P.
 - L'observatoire de Chambon la Forêt (France) a déterminé pour l'année 2001 les caractéristiques suivantes du champ magnétique terrestre :
 Déclinaison : $D= 2^\circ$ ouest ; inclinaison $I= 64^\circ$; valeur totale $B= 47450$ nT
 Définir à l'aide d'un schéma, la déclinaison et l'inclinaison magnétiques.
 - Calculer à partir de ces données la valeur de la composante horizontale B_0 du champ magnétique terrestre.
2. Mesure de la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre :
 On réalise une bobine plate de N spires de rayon r parcourues par un courant d'intensité I. Justifier que le champ au centre de la bobine est donné par la relation $B= \mu_0NI/ (2r)$.
 - On dispose au centre de la bobine et perpendiculairement à son plan une petite aiguille aimantée. En l'absence de courant dans la bobine, l'aiguille aimantée est perpendiculaire à l'axe de la bobine comme l'indique la figure ci-dessous :

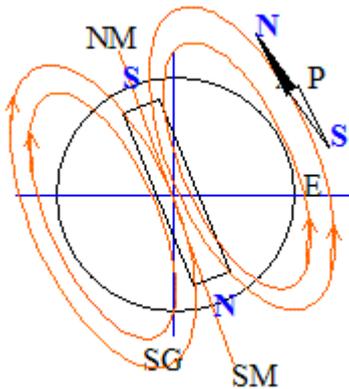


Que se passe t-il lorsque la bobine plate est parcourue par un courant d'intensité I ? Faire un schéma.

- Lorsque l'aiguille aimantée atteint sa nouvelle position d'équilibre en présence du courant elle est déviée d'un angle α . Exprimer la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_0 en fonction de N, I, R et α .

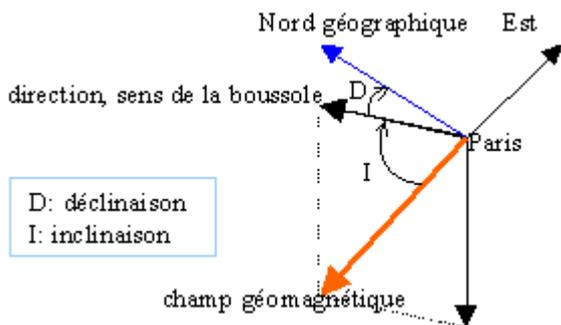
- A.N : I= 1,2 A ; r= 10 cm ; N=10 ; $\alpha=75^\circ$. Calculer B_0 et conclure.

corrigé



Déclinaison magnétique : angle formé entre le méridien géographique et le méridien magnétique

Inclinaison magnétique : angle que fait le champ magnétique terrestre avec l'horizontale.



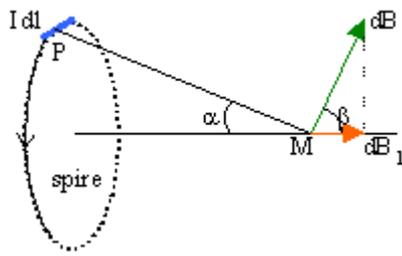
valeur de la composante horizontale B_0 du champ magnétique terrestre :

$$B_0 = B \cos I = 47450 \cos 64 = 20800 \text{ nT} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Mesure de la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre :

On réalise une bobine plate de N spires de rayon R parcourues par un courant d'intensité I.

champ magnétique créé par une spire circulaire en un point de son axe



l'élément de courant $I dl$ crée en M , le champ élémentaire dB , perpendiculaire à PM , de module :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\theta)}{PM^2}$$

$I dl$ et PM étant perpendiculaire $\sin(\theta)=1$

Par raison de symétrie le champ résultant sera porté par l'axe horizontal. La composante utile sera $dB \cos(\beta) = dB \sin(\alpha)$

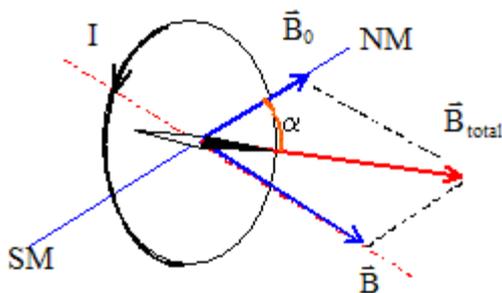
Pour tous les éléments $I dl$, l'angle α et PM sont les mêmes. L'intégration de dB sur toute la spire donne le module du champ résultant ($\sin \alpha = \text{rayon } r / PM$)

$$B = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin(\alpha)}{PM^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3(\alpha)$$

champ au centre de la spire : $\alpha = 90^\circ$; $B = \mu_0 I / (2r)$

champ au centre de la bobine (N spires) $B = \mu_0 NI / (2r)$.

On dispose au centre de la bobine et perpendiculairement à son plan une petite aiguille aimantée. En l'absence de courant dans la bobine, l'aiguille aimantée est perpendiculaire à l'axe de la bobine ; lorsque la bobine plate est parcourue par un courant d'intensité I , l'aiguille aimantée s'oriente suivant le champ magnétique total (somme vectorielle des champs créés par la bobine et par la Terre).



Lorsque l'aiguille aimantée atteint sa nouvelle position d'équilibre en présence du courant elle est déviée d'un angle α .

Expression de la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_0 en fonction de

N, I, R et α .

$$\tan \alpha = B/B_0 \text{ soit } B_0 = B/\tan \alpha = \mu_0 NI / (2r \tan \alpha)$$

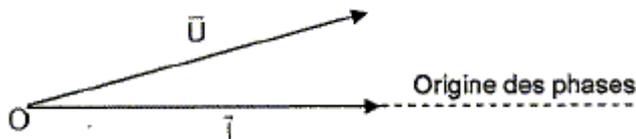
$$B_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 1,2 / (2 \cdot 0,1 \cdot \tan 75^\circ) = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

écart relatif avec la valeur précédente : $(2,1-2,0) \cdot 100/2 = 5 \%$; les deux résultats sont en accord à 5% près.

EXERCICE 23 : bobine

Une bobine (R, L) assimilable à une bobine parfaite d'inductance L, en série avec une résistance R. Cette bobine est alimentée sous une tension sinusoïdale $u(t)$, de valeur efficace égale à 24 V. Elle est traversée par un courant d'intensité $i(t)$, de valeur efficace $I = 0,24$ A.

Le diagramme de Fresnel lié au fonctionnement de la bobine est donné ci-dessous : $f = 50$ Hz.



Mesurer au rapporteur la valeur du déphasage entre l'intensité du courant et la tension, représentés par les vecteurs associés.

Calculer l'échelle de représentation de U si la mesure de la norme de ce vecteur est 4,8 cm.

Indiquer parmi les grandeurs $i(t)$ et $u(t)$, celle qui est en avance sur l'autre.

Calculer l'impédance de la bobine (R, L)

Calculer la puissance électrique (puissance active) absorbée par la bobine.

Rédiger une solution de cet exercice et donner les expressions de $i(t)$ et $u(t)$.

Déphasage : $\varphi \sim 15^\circ = \pi/12$ radians. $u(t)$ est en avance sur $i(t)$.

4,8 cm correspondent à 24 V soit 1 cm correspond à 5 V.

Impédance de la bobine $Z = U/I = 24/0,24 = 100$ ohms.

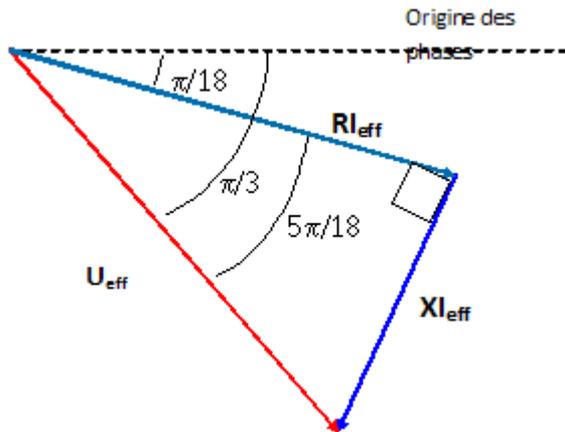
Puissance active = $UI \cos \varphi = 24 \cdot 0,24 \cdot \cos 15^\circ = 5,6$ W.

$i(t) = 0,24 \cdot 2^{1/2} \cos (314 t)$; $u(t) = 24 \cdot 2^{1/2} \cos (314 t + \pi/12)$.

Un récepteur (R, X) est assimilé à un dipôle purement résistif de résistance R en série avec un dipôle purement réactif de réactance X. Il est alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = 325 \sin(100\pi t - \pi/3)$ et est traversé par un courant d'intensité $i(t) = 9,6 \sin(100\pi t - \pi/18)$. Ces grandeurs sont données dans le système

internationnal.

Représenter avec soin le diagramme de Fresnel.



Déterminer les valeurs des puissances apparente, active et réactive mises en jeu par le dipôle.

$U = 325 / 2^{1/2}$; $I = 9,6 / 2^{1/2}$; $UI = 325 * 9,6 / 2 = 1560$; $S = UI = 1560 \text{ VA} = \mathbf{1,56 \text{ kVA}}$.

$P = UI \cos(-5\pi/18) = \mathbf{1,0 \text{ kW}}$; $Q = UI \sin(-5\pi/18) = \mathbf{-1,2 \text{ kvar}}$.

Déterminer les valeurs de R et X.

$P = RI^2$ avec $I^2 = 9,6^2 / 2 = 46,1$; $R = 1000 / 46,1 = \mathbf{21,7 \text{ ohms}}$.

$\tan(-5\pi/18) = X/R$; $X = -21,7 * 1,19 = \mathbf{-25,9 \text{ ohms}}$.

Indiquer la nature de la réactance. Calculer la capacité du condensateur ou l'inductance de la bobine qui en est la source.

La tension $u(t)$ est en retard sur $i(t)$: la réactance est un condensateur.

$1/(C\omega) = 25,9$ avec $\omega = 50 * 2 * 3,14 = 314 \text{ rad/s}$.

$C = 1/(25,9 * 314) = \mathbf{1,2 \cdot 10^{-4} \text{ F}}$.

Tension triphasée et transport du courant électrique.

Un atelier peut être alimenté depuis un transformateur par une ligne monophasée (2 câbles de cuivre, la résistance de chaque câble est notée R_M) ou par une ligne triphasée (3 câbles de cuivre, la résistance de chaque câble est notée R_T). Des quantités identiques de cuivre sont utilisées pour fabriquer la ligne monophasée et la ligne triphasée.

Calculer le rapport R_T/R_M .

Les câbles ont la même longueur L ; la section des câbles de la ligne monophasée est notée S_M , celle de la ligne triphasée est notée S_T .

Volume du cuivre : $2L S_M = 3 L S_T$; $S_M = 1,5S_T$.

Résistance d'un câble : $R_T = \rho L/S_T$; $R_M = \rho L/S_M = \rho L/(1,5S_T)$; $R_T/R_M = 1,5$.

L'atelier consomme une puissance active P et possède un facteur de puissance de valeur $\cos \varphi$.

Donner l'expression des pertes par effet Joule P_M et P_T dans chacune des lignes. Calculer le rapport P_T/P_M . Conclure.

Résistance de la ligne monophasée : $2R_M$; pertes en ligne : $P_M=2R_M I_M^2$.

Résistance de la ligne triphasée : $3R_T=3R_M*1,5 = 4,5R_M$; pertes en ligne : $P_T=4,5R_M I_T^2$.

Puissance active dans l'installation triphasée : $P = 3^{1/2}U I_T \cos \varphi$.

Puissance active dans l'installation monophasée : $P =U / 3^{1/2} *I_M \cos \varphi$.

d'où $3I_T =I_M$; $P_M=2R_M I_M^2 = 18R_M I_T^2$

Les pertes joule sont 4 fois plus grande dans le cas de la ligne monophasée, par rapport à la ligne triphasée.

Systeme triphasé de tension.

Donner la définition d'un système triphasé de tensions. Quand dit-on qu'un système est équilibré ?

Le triphasé est un système composé de trois tensions sinusoïdales, ayant même fréquence et en général la même amplitude ; ces tensions sont déphasées entre elles de 120° . Lorsque les trois conducteurs sont parcourus par des courants de même valeur efficace, le système est dit équilibré.

Un réseau triphasé comporte 3 fils de phase et un neutre.

La figure 1 représente les 3 fils de phases numérotés 1, 2, 3 et le neutre N.

les tensions $v(t)$ entre fil de phase et neutre sont les tensions simples, ayant même valeur efficace V, déphasées de $\pi/3$ (120°) ; les tensions entre fils de phases $u(t)$ sont appelées tensions composées : elles ont même valeur efficace U et sont déphasées de $\pi/3$ (120°)

$$U = V\sqrt{3}$$

les vecteurs de Fresnel associés à ces tensions sont représentés sur les figure 4 et 3.

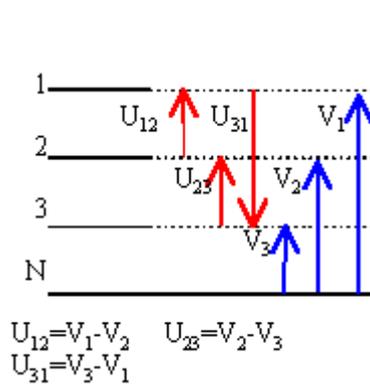


figure 1

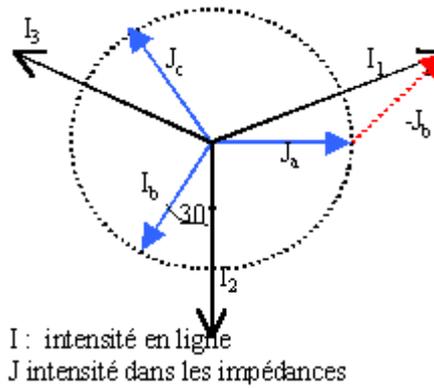


figure 2

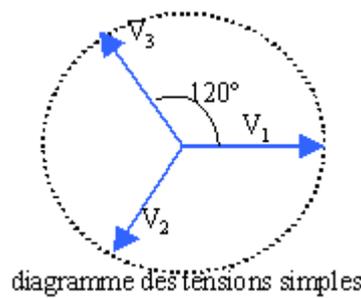


figure 3

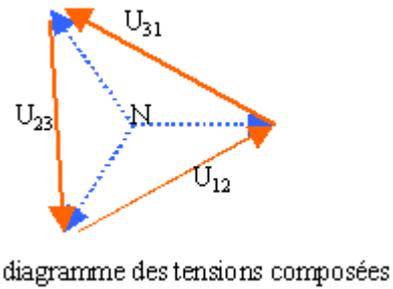
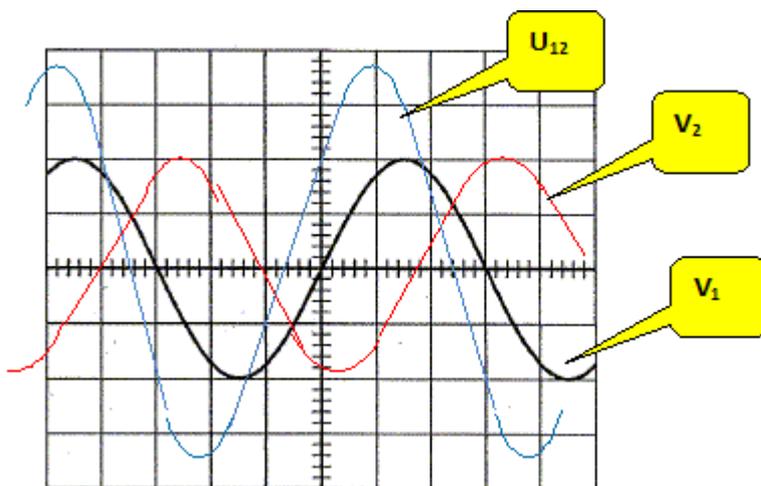


figure 4

L'oscillogramme de la tension instantanée $V_1(t)$ est visualisée sur l'écran d'un oscilloscope.

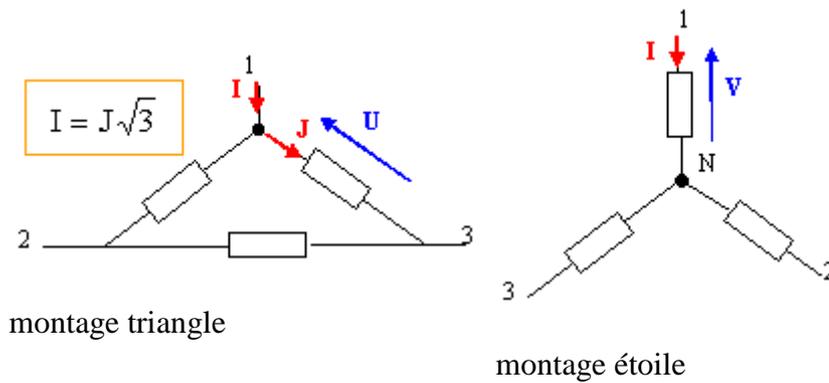
Représenter les traces que laisserait la tension $V_2(t)$ ainsi que la tension $U_{12}(t)$. Justifier.

$V_2(t)$ présente un retard de 120° par rapport à $V_1(t)$. $U_{12}(t) = V_1(t) - V_2(t)$.



Il existe deux façons de coupler des récepteurs sur un réseau triphasé.

Représenter par des schémas les couplages qu'il est possible de réaliser.



Le fil de neutre est indispensable dans le montage étoile non équilibré.

Etude d'un cas.

Un système triphasé de tensions équilibré (230 V / 400 V, 50 Hz) alimente un récepteur triphasé équilibré couplé en triangle. Chaque récepteur monophasé est équivalent à une résistance $R= 30$ ohms en série avec une inductance $L= 0,07$ H.

Donner la signification des grandeurs 230 V / 400 V, 50 Hz.

230 V : tension simple entre phase et neutre ; 400 V : tension composée entre phases

$f=50$ Hz : fréquence.

Donner l'expression de l'impédance complexe d'un des récepteurs monophasés.

$Z = R + jL\omega$ avec $\omega = 2\pi f = 314$ rad/s

Calculer les valeurs de l'impédance et de l'angle de déphasage.

$Z = [R^2+(L\omega)^2]^{1/2} = [30^2+(0,07*314)^2]^{1/2} = 37,2$ ohms.

$\tan \varphi = L\omega / R = 0,07*314 / 30 = 0,733$; $\varphi = 36,2^\circ$.

Calculer l'intensité des courants qui parcourent les récepteurs et l'intensité des courants en ligne.

intensité du courant dans un récepteur : $J = U/Z = 400 / 37,2 = 10,8$ A.

intensité du courant en ligne : $I = 3^{1/2}J = 18,6$ A.

Calculer les puissance active, réactive et apparente.

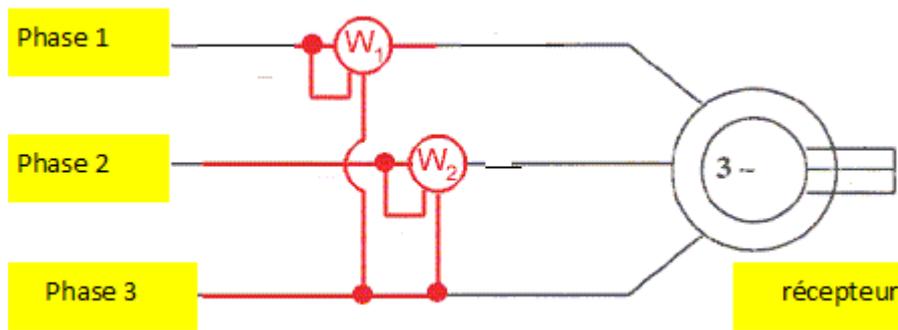
$P = 3^{1/2}UI \cos\varphi = 3^{1/2} * 400 * 18,6 \cos 36,2 = 10,4$ kW.

$Q = 3^{1/2}UI \sin\varphi = 3^{1/2} * 400 * 18,6 \sin 36,2 = 7,6$ kvar.

$S = 3^{1/2}UI = 12,9$ kVA.

Préciser un schéma de montage avec un ou plusieurs wattmètres qui permettrait de vérifier

expérimentalement la valeur de la puissance active.



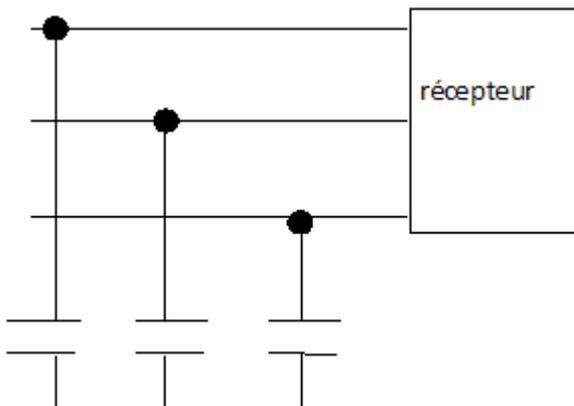
méthode des deux wattmètres : montage triangle ou étoile

$$P_1 = UI \cos (I_1, U_{13}) = UI \cos (-30 + \varphi) ; P_2 = UI \cos (I_2, U_{23}) = UI \cos (+30 + \varphi)$$

$$P_1 + P_2 = UI [\cos (-30 + \varphi) + \cos (30 + \varphi)]$$

$$P_1 + P_2 = 2UI \cos \varphi \cos 30 = 3^{1/2} UI \cos \varphi = P$$

On considère que le facteur de puissance est égal à 0,8. Pour ramener ce facteur à 1, le circuit précédent est complété par une batterie de condensateurs montés en étoile. **Faire le schéma du montage.**



Calculer la capacité des condensateurs qui ramèneront à 1 la valeur du facteur de puissance.

puissance réactive des condensateurs : $Q_1 = - 3 C \omega U^2 = -7,6 \cdot 10^3$.

tension aux bornes des condensateurs : 230 V ; $C = 7,6 \cdot 10^3 / (3 \cdot 230^2 \cdot 314) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ F}$.

On préfère monter les condensateurs en triangle (tension aux bornes 400 V) : les capacités sont trois fois plus faibles.

Calculer la puissance active P.

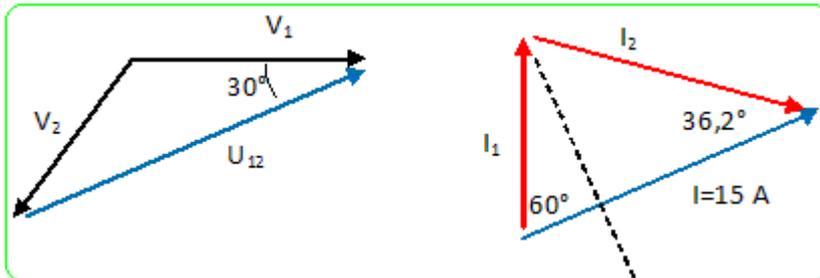
Les condensateurs ne consomment pas de puissance active ; P reste donc inchangée (10,4 kW).

Calculer l'intensité des courants en ligne.

$$P = 3^{1/2}UI ; I = 10,4 \cdot 10^3 / (3^{1/2} * 400) = \mathbf{15 \text{ A}}$$

Calculer l'intensité des courants dans chaque récepteur monophasé et l'intensité des courants dans les condensateurs.

I : intensité en ligne, I₁ intensité dans un condensateur, I₂ intensité dans un récepteur monophasé.



$$I_1 \sin 60 = I_2 \sin 36,2 ; 0,866 I_1 = 0,59 I_2 ; I_1 = 0,682 I_2 ;$$

$$15 = I_1 \cos 60 + I_2 \cos 36,2 ; 15 = 0,5 I_1 + 0,8 I_2 ; 15 = (0,341 + 0,8)I_2 ; I_2 = \mathbf{13 \text{ A}} ; I_1 = \mathbf{8,9 \text{ A}}$$

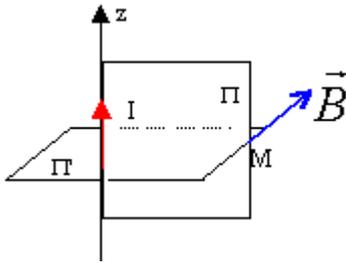
EXERCICE :24 champ magnétique

champ magnétique crée par un fil :

- On considère un fil rectiligne de longueur infinie, de section circulaire négligeable, placé dans le vide et parcouru par un courant électrique constant d'intensité I.
 - A quelle condition peut-on admettre que le champ magnétique existant au voisinage du fil correspond bien au champ crée par ce fil.
 - En utilisant les propriétés de symétrie, que peut-on dire de la direction du champ magnétique crée par ce fil.
 - Par application du théorème d'Ampère, en déduire l'expression du champ magnétique crée à la distance r du fil. préciser son orientation à l'aide d'un schéma.
 - application numérique : I=1,7 A. Calculer le champ B crée à la distance r=3 cm de ce fil infiniment long. Comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_T= 2 · 10⁻⁵ T.
- Rappeler l'expérience d'Oersted metant l'évidence de l'action d'un courant électrique parcourant un fil rectiligne, sur une petite aiguille aimantée assimilable à un petit dipôle magnétique. Comment peut-on interpreter cette action? Quelles précautions faut-il prendre pour réaliser cette expérience?
- On considère maintenant deux conducteurs parallèles, rectilignes de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance d l'un de l'autre dans le vide. Chacun de ces conducteurs est parcouru par un courant électrique constant de même intensité I et de même sens. Exprimer la force qui s'exerce sur un élément de courant d'un des deux conducteurs, du fait de la présence de l'autre. Préciser son orientation à l'aide d'un schéma.
 - A.N : la force s'exerçant entre deux conducteurs placés dans le vide à 1 m l'un de l'autre est de 2 · 10⁻⁷ N par mètre de longueur. En déduire l'intensité I parcourant chacun de ces conducteurs. Quelle

remarque vous suggère ce résultat?

corrigé



Le champ magnétique au point M est créé uniquement par le courant traversant le fil infini si on peut négliger les contributions des autres éléments du circuit électrique.

principe de Curie : si une distribution de courant est invariante par translation le long d'un axe Oz les effets physiques engendrés au point M ne dépendent pas de la coordonnée z; si la distribution de courant est invariante par rotation d'un angle α , les effets ne dépendent pas de l'angle α .

En conséquence pour ce fil, le champ en M ne dépend pas des coordonnées z et α .

plan Π : plan de symétrie pour le courant ; le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan.

le plan Π' : plan d'antisymétrie pour le courant : le champ magnétique en M est contenu dans ce plan.

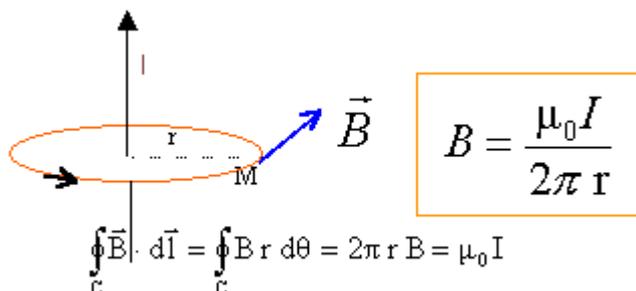
le champ magnétique en M est *orthoradial*.

théorème d'Ampère :

La norme du champ magnétique en M se calcule à l'aide du théorème d'Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

On calcule la circulation sur un cercle: le champ est constant sur ce contour et reste tangent au cercle.

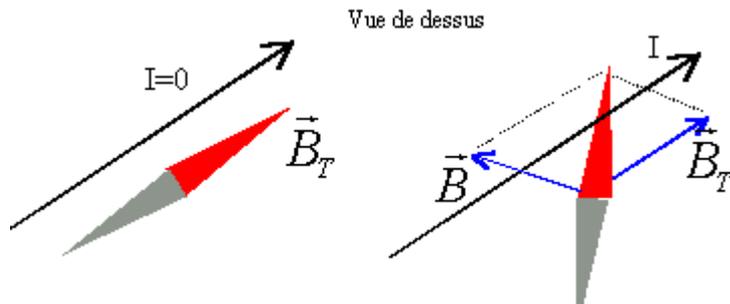


application numérique : $B = 4 \pi 10^{-7} * 1,7 / (2\pi * 0,03) = 1,13 10^{-5} \text{ T}$

du même ordre de grandeur que la composante horizontale du champ magnétique terrestre

Exercice 25. expérience d'OErsted:

L'aiguille aimantée en l'absence de courant dans le fil s'oriente suivant la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

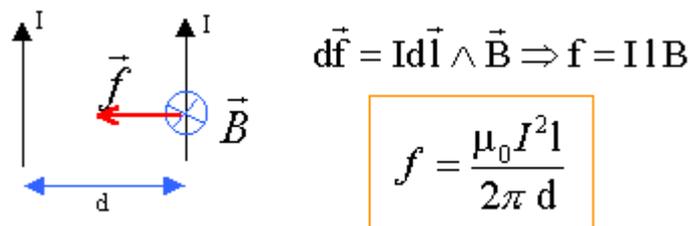


Si on inverse le sens du courant on remarque que l'aiguille s'oriente symétriquement par rapport à B_T .

Pour que la déviation de l'aiguille soit visible, utiliser un courant d'intensité assez élevée, l'aiguille étant très près du fil.

loi de Laplace :

La force qui s'exerce sur un élément de courant est déterminée à partir de la loi de Laplace:

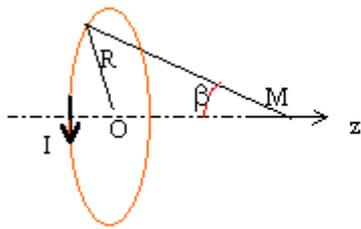


application numérique : $l = 1 \text{ m}$; $P = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 1 / (4\pi \cdot 10^{-7}) = 1$

l'intensité du courant vaut 1 A; c'est la définition légale de l'ampère.

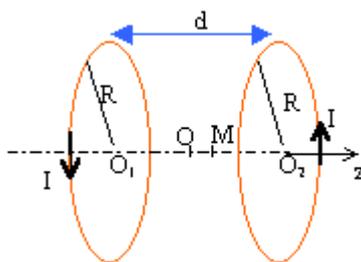
EXERCICE 26 bobines de Helmholtz

1. On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I. En utilisant les symétries que peut-on dire de la direction du champ magnétique créée par cette spire en un point de son axe? En utilisant de Biot et Savart montrer que le champ magnétique créé en un point M de son axe par une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I a pour expression :



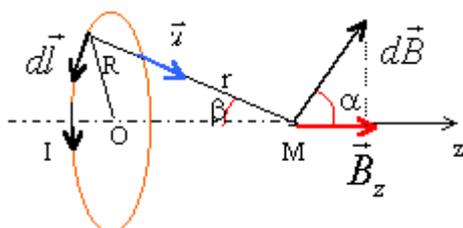
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta$$

- Compléter la figure en indiquant le sens de B.
- Tracer qualitativement la courbe donnant la variation de B en fonction de la distance z du point M à O. Vérifier que la courbe présente un point d'inflexion pour $z = \frac{1}{2} R$
- Donner la valeur du rapport $B(z = \frac{1}{2} R) / B(z = 0)$
- application numérique : $N = 130$ spires ; $R = 15$ cm ; $I = 1,7$ A . Calculer B au centre de la bobine et comparer cette valeur à la composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_T = 2 \cdot 10^{-5}$ T



2. On considère un dispositif constitué de 2 bobines plates identiques à celle étudiée ci-dessus, de même rayon R, de même axe et comptant N spires. Chacune de ces bobines est parcourue par un courant d'intensité constante I et de même sens. La distance entre les centres O_1 et O_2 des bobines vaut d. On appelle O le milieu de O_1O_2 et x la distance d'un point M sur l'axe au point O. On se propose de montrer que pour une certaine valeur de d que l'on exprimera en fonction de R, le champ magnétique varie très peu sur l'axe au voisinage du point O: le dispositif est alors appelé bobines de Helmholtz. Montrer que le champ magnétique au point M peut se mettre sous la forme $B(x) = f(z = \frac{1}{2}d + x) + f(z = \frac{1}{2}d - x)$ où f est une fonction que l'on définira.
 - en effectuant un développement limité pour x petit, faisant intervenir les dérivées 1ère, seconde et du 3ème ordre de la fonction f(x) montrer que pour une certaine valeur de d, que l'on exprimera en fonction de R, le champ magnétique se met sous la forme : $B(x) = 2f(\frac{1}{2}d) + 0x^3$.
 - A.N: avec les valeurs numériques précédentes, calculer dans cette configuration le champ magnétique en O, milieu de O_1O_2 et celle du champ magnétique au centre de l'une des bobines. Conclure.

corrigé



Tout plan passant par Oz est un plan d'antisymétrie du système. En conséquence le champ magnétique est porté par l'axe Oz

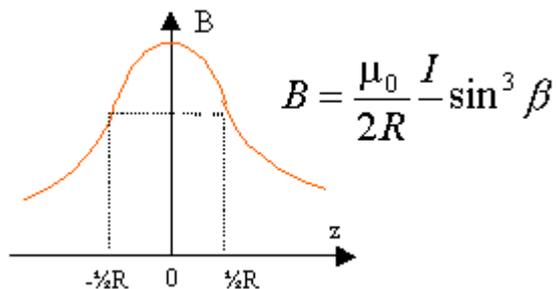
On applique la relation de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl}{r^2} \cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R}{r^2} \cos\alpha$$

$\cos \alpha = \sin \beta$. angles complémentaires

$$r = R / \sin \beta.$$



La courbe $B(z)$ présente un point d'inflexion en $z= R/2$ si la dérivée seconde s'annule en ce point.

$$\sin \beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}; B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{-3\mu_0 I R^2 z}{2} (R^2 + z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = \frac{-3\mu_0 I R^2}{2} (R^2 + z^2)^{-5/2} \left(1 - \frac{5z^2}{R^2 + z^2} \right)$$

cette dérivée seconde s'annule pour $z = R/2$ et $z = -R/2$; la courbe présente deux points d'inflexion.

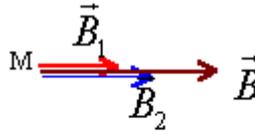
$$B(z=0) = \mu_0 I / (2R) \text{ et } B(z=R/2) = 4\mu_0 I / (5^{3/2} R)$$

$$B(z=R/2) / B(z=0) = 0,715.$$

$$A.N : B(z=0) = \mu_0 N I / (2R) = 4\pi 10^{-7} * 130 * 1,7 / (2 * 0,15) = 0,926 \text{ mT.}$$

cette valeur est 46 fois plus grande que la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

bobines de Helmholtz :



The diagram shows two parallel solenoids, M and N, with current I flowing into the page. Magnetic field vectors \vec{B}_1 and \vec{B}_2 are shown pointing to the right from the solenoids. The resultant magnetic field vector \vec{B} is also shown pointing to the right, representing the sum of \vec{B}_1 and \vec{B}_2 .

$$B_1 = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (\frac{1}{2}d + x)^2)^{3/2}}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (\frac{1}{2}d - x)^2)^{3/2}}$$

Les champs créés par chaque bobine ont la même direction et le même sens; le champ résultant est la somme vectorielle des champs créés par chaque bobine.

B peut se mettre sous la forme :

$B(x) = f(z = \frac{1}{2}d + x) + f(z = \frac{1}{2}d - x)$ où f est :

$$f(z) = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

On effectue le développement limité pour x petit:

$$f(\frac{1}{2}d + z) = f(\frac{1}{2}d) + x f'(\frac{1}{2}d) + \frac{1}{2}x^2 f''(\frac{1}{2}d) + \frac{x^3}{6} f'''(\frac{1}{2}d) + 0 x^3.$$

$$f(\frac{1}{2}d - z) = f(\frac{1}{2}d) - x f'(\frac{1}{2}d) + \frac{1}{2}x^2 f''(\frac{1}{2}d) - \frac{x^3}{6} f'''(\frac{1}{2}d) + 0 x^3.$$

la somme donne : $B(x) = 2 f(\frac{1}{2}d) + x^2 f''(\frac{1}{2}d) + 0 x^3.$

si $d=R$, alors $f''(\frac{1}{2}d) = 0$ car la dérivée seconde d^2B / dz^2 est nulle pour $z = \frac{1}{2}R$

d'où $B(x) = 2 f(\frac{1}{2}d) + 0 x^3.$

A.N : champ au point O : 1,32 mT; champ en O_1 : 1,25 mT

l'écart relatif est voisin de 5% entre le centre des deux bobines et l'une ou l'autre des deux bobines.

On peut considérer que le champ magnétique est uniforme sur l'axe, entre les deux bobines de Helmholtz.

Exercice 27 bobine longue ou solénoïde

On considère une bobine longue sans noyau de fer , dont les caractéristiques sont les suivantes:
 $N=200$ spires; longueur ; $l = 40$ cm; rayon moyen des spires : $R= 2,5$ cm.

1. En assimilant la bobine à un solénoïde très allongé et en utilisant les symétries, que peut-on dire du champ magnétique créée à l'intérieur de la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant continu

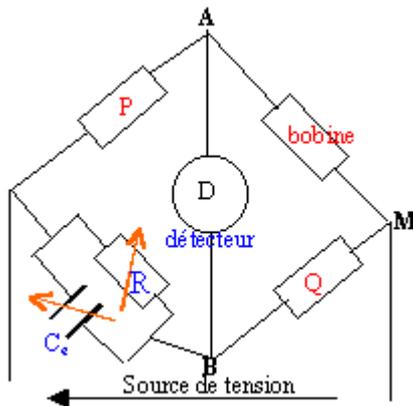
d'intensité I ?

- Pour quelles raisons peut-on admettre que le champ magnétique est nul à l'extérieur ?
- Par application du théorème d'Ampère montrer que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde et calculer sa valeur B_0 en fonction de l'intensité I du courant et du nombre de spires par mètre noté n .
- A.N : $I=7A$; Calculer le champ magnétique B_0 à l'intérieur de la bobine . Le comparer à la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_T=2 \cdot 10^{-5} T$.

2. Etablir avec la même approximation, l'expression de l'inductance L de la bobine.

- A.N: calculer L pour la bobine citée.

3. Pour mesurer expérimentalement la valeur de l'inductance de cette bobine on utilise un montage appelé pont de Maxwell :



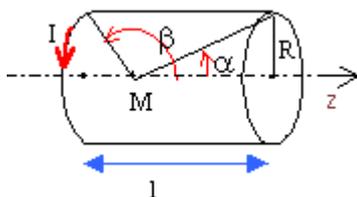
P et Q sont des résistances pures; R_e est une résistance pure réglable; C_e est une capacité pure, réglable. Ce pont est alimenté par une source de courant sinusoïdale de fréquence $f=400$ Hz. D est un détecteur de filtre passe bande alimentant un voltmètre électronique couplé à un oscilloscope. La bobine est modélisée par l'association en série d'une inductance pure L et d'une résistance R .

- Quel est le rôle du filtre passe bande F ? Quelle doit être la fréquence centrale de sa bande passante ? Préciser la façon dont on opère pour équilibrer le pont.

- On note R_0 et C_0 les valeurs de R_e et C_e lorsque le pont est équilibré. Donner les expressions de L et R en fonction de R_0 , C_0 , P et Q .

- A.N : $P=100\Omega$; $Q= 100\Omega$; $R_0 =8k\Omega$; $C_0 = 24,1$ nF. Calculer L et R . Comparer à la valeur théorique obtenue précédemment. Conclure.

4. On considère maintenant cette bobine longue comme une distribution de spires circulaires de rayon R et de même axe Oz . En admettant que sur une longueur dz de solénoïde il y a ndz spires, en déduire par intégration l'expression du champ magnétique sur l'axe de la bobine en fonction de l'intensité I , du nombre de spire par mètre n , et des angles α et β . Dans quel cas retrouve-t-on l'expression du solénoïde infiniment long?



- Exprimer le rapport de la valeur du champ B_0 au centre du solénoïde à celle B_{00} obtenue en supposant le solénoïde infini.

- à partir de quelle valeur du rapport l / R peut-on assimiler avec une incertitude relative inférieure à 2% le champ au centre de la bobine à celui donné en utilisant l'approximation du solénoïde infiniment long.
- A.N : tracer la courbe donnant la variation du champ magnétique sur l'axe à l'intérieur du solénoïde pour la bobine citée.

corrigé

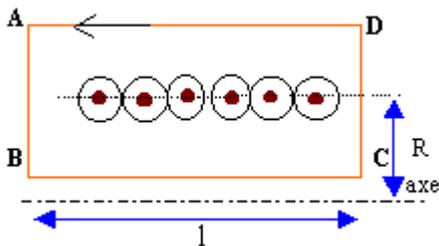
Exercice 28 : Champ du solénoïde

Tout plan perpendiculaire à l'axe de la bobine est un plan de symétrie pour le courant : en conséquence, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan.

La distribution de courant étant invariante par rotation autour de l'axe de la bobine, et par translation sur cet axe, le champ est porté par l'axe de la bobine et ne dépend que de la distance à l'axe.

Le champ est nul à l'extérieur de la bobine, car les lignes de champ ne sortent pas du solénoïde.

Appliquons le *théorème d'Ampère* au contour ABCD



le champ étant perpendiculaire à AB et à CD, la circulation est nulle le long de AB et CD

le champ est nul à l'extérieur, la circulation du champ est nulle le long de AD

la circulation du champ est $\mu_0 N I$ le long de BC

$$\mu_0 N I = B l$$

$B = \mu_0 n I$ avec $n = N / l$, nombre de spire par mètre.

le champ est uniforme et colinéaire à l'axe à l'intérieur du solénoïde.

A.N : $B = 4\pi \cdot 10^{-7} * 200 / 0,4 * 7 = \underline{4,39 \text{ mT}}$.

cette valeur est 220 fois plus grande que la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

le flux Φ du vecteur champ magnétique à travers une spire est :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = L I$$

$$B S = LI \text{ soit } \mu_0 N I / l \pi R^2 = L I$$

$$\text{à travers } N \text{ spires : } \mu_0 N^2 I / l \pi R^2 = L I$$

$$L = \mu_0 N^2 / l \pi R^2$$

$$L = 4\pi 10^{-7} * 200^2 / 0,4 * \pi * 0,025^2 = \underline{0,247 \text{ mH.}}$$

mesure de L:

Le filtre réglé sur la fréquence d'étude 400 Hz élimine les parasites

L'équilibre du pont est réalisé la tension aux bornes du détecteur est nulle.

On règle R_e et C_e afin que cette tension soit nulle.

(toutes les grandeurs écrites en rouge ci dessous sont des nombres complexes)

$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MB} = 0 \text{ à l'équilibre du pont soit } u_{AM} = - u_{MB}$$

impédance complexe de la bobine $Z_B = R + jL\omega$.

impédance complexe Z_e du condensateur et de R_e en dérivation :

$$1 / Z_e = 1 / R_e + jC_e\omega.$$

$$u_{AM} = Q / (Q + Z_e) \mathbf{e} \text{ et } u_{BM} = Z_B / (P + Z_B) \mathbf{e} .$$

\mathbf{e} est l'amplitude complexe de la source de tension

$$Q / (Q + Z_e) = Z_B / (P + Z_B)$$

$$PQ + QZ_B = QZ_B + Z_B Z_e$$

$$PQ = Z_B Z_e$$

exprimons L et R :

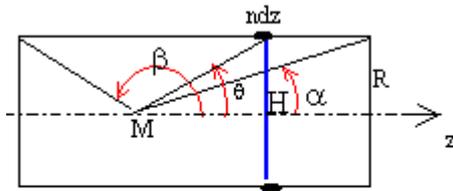
$$Z_B = PQ(1 / R_0 + jC_0\omega) = PQ / R_0 + jPQC_0\omega = R + jL\omega.$$

$$R = PQ / R_0 \text{ et } L = PQC_0$$

$$A.N : R = \underline{1,25 \text{ ohm}} \text{ et } L = \underline{0,241 \text{ mH.}}$$

l'écart avec l'inductance, calcul théorique, n'excède pas 3%; cette méthode de mesure est correcte.

champ crée en M par les ndz spires



$$dB = \frac{\mu_0 I n}{2R} \sin^3 \theta dz$$

On pose $MH = z$; $z = R \cotan \theta$ et $dz = -R d\theta / \sin^2 \theta$ et $dB = -\frac{1}{2} \mu_0 I n \sin \theta d\theta$

intégrer entre les valeurs β et α .

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\cos \alpha - \cos \beta)$$

pour un solide infiniment long α tend vers 0 et β tend vers π : on retrouve $B_{\infty} = \mu_0 I n$

au centre du solénoïde : $\pi = \alpha + \beta$.

$$B_0 = \mu_0 I n \cos \alpha.$$

avec $\cos \alpha = \frac{1}{2} l / (R^2 + l^2/4)^{1/2}$.

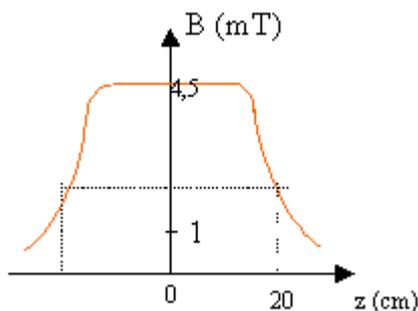
$$B_{\infty} = \mu_0 I n$$

$$\frac{B_0}{B_{\infty}} = \frac{l/2}{(R^2 + l^2/4)^{1/2}} = \left(1 + \frac{4R^2}{l^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{2R^2}{l^2}$$

écart relatif :

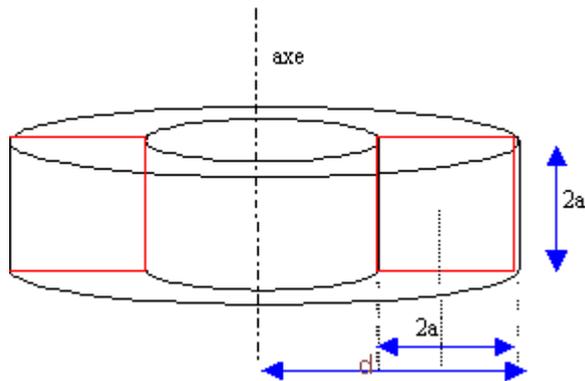
$$\frac{B_{\infty} - B_0}{B_0} \approx \frac{2R^2}{l^2} < 0,02$$

si la longueur est supérieure à 10 fois le rayon le solénoïde peut être considéré comme infini.



Exercice 29 : bobinage torique à section carrée.

On considère un bobinage de N spires régulièrement réparties sur un tore à section carrée, sans noyau de fer, dont les caractéristiques sont les suivantes : N=200 ; coté du carré 2a=5 cm; distance du centre de l'un des carrés à l'axe du tore d=6 cm.



1. En utilisant les propriétés des symétries justifier que le champ magnétique créé par le bobinage parcouru par un courant continu d'intensité I est orthoradial.
 - Par application du théorème d'Ampère, en déduire l'expression du champ magnétique B(r) à l'intérieur du solénoïde à la distance r de l'axe du tore en fonction de l'intensité du courant I, du nombre de spires N et de la distance r à l'axe.
 - en utilisant le même type de raisonnement montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur du tore.
2. En déduire l'expression théorique de l'inductance propre L de ce bobinage torique. Dans le cas particulier où a est petit devant d, vérifier que l'on obtient pour L la même formule que celle obtenue dans le cas du solénoïde en posant $l=2\pi d$. A.N : Calculer l'intensité I.

corrigé

La distribution des courants est invariante par rotation d'angle θ autour de l'axe du solénoïde : le champ ne dépend donc pas de θ .

Tout plan passant par l'axe du tore est plan de symétrie pour les courants : le champ magnétique est donc orthoradial.

les lignes de champ sont des cercles d'axe Oz, Oz étant l'axe du tore.

th. d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

On prend une ligne de champ comme contour C. L'intensité enlacée par cette ligne est N I si le point M est à l'intérieur du tore et l'intensité enlacée est nulle si M est extérieur au tore.

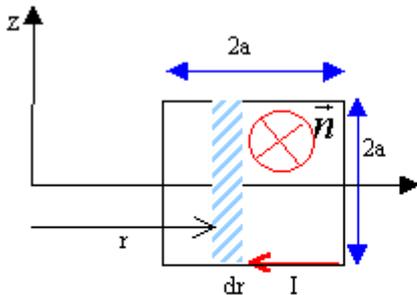
$$B_{\text{int}} 2\pi r = \mu_0 N I \text{ et } B_{\text{ext}} = 0$$

$$B_{\text{int}} = \mu_0 N I / (2\pi r)$$

inductance :

l'inductance L est calculée à partir de l'expression du flux : $\Phi = L I$.

flux à travers une spire :



$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{d-a}^{d+a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} 2a dr = \frac{\mu_0 N I a}{\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}$$

flux à travers l'ensemble des spires : multiplier l'expression précédente par N

$$\text{d'où } L = \mu_0 N^2 / \pi a \ln \left(\frac{d+a}{d-a} \right)$$

$$a.n : L = 4 \pi 10^{-7} * 200^2 / \pi * 0,025 \ln (8,5 / 3,5) = \underline{0,355 \text{ mH}}.$$

si $a \ll d$

$$\frac{d+a}{d-a} = \frac{1 + a/d}{1 - a/d} \approx \left(1 + \frac{a}{d}\right)^2 \approx 1 + \frac{2a}{d} \text{ et } \ln\left(1 + \frac{2a}{d}\right) \approx \frac{2a}{d}$$

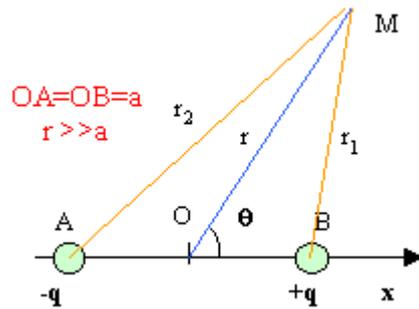
alors L voisin de : $\mu_0 N^2 / \pi a * 2a / d$

L voisin de : $\mu_0 N^2 4a^2 / (2\pi d)$ soit $\mu_0 N^2 S / l$

on retrouve la même expression que pour le solénoïde long.

EXERCICE 30 : champ et potentiel créés à grande distance par un dipole

- On considère un dipole(-q, +q) et un axe Ox orienté de la charge négative vers la charge positive.



1

potentiel

- Exprimer le potentiel crée en M par ce dipole.

corrigé

Le potentiel crée par le dipole en M est :

$$V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

utiliser le théorème d'Al Kashi dans les triangles OBM et OAM en remarquant que $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta$$

mettre r^2 en facteur commun

et effectuer un développement limité au premier ordre

$$r_1^{-1} = r^{-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-0.5} \approx r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$r_2^{-1} = r^{-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 + 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-0.5} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2a \cos \theta$$

2

quelle est l'expression du champ créé à grande distance par ce dipole

corrigé

champ
électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

expression du gradient en coordonnées polaires

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_r = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2 \cos \theta \text{ et } E_\theta = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta$$

Exercice 31 : application du théorème de Gauss

1

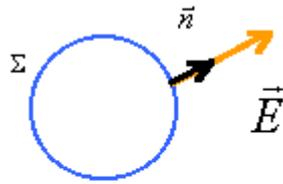
1. Soit une sphère de rayon R portant une densité surfacique de charge σ constante. Calculer le champ électrostatique créé en tout point.

champ d'une
couche
sphérique
mince
uniformément
électrisé

corrigé

Soit un point M situé à l'intérieur de la sphère, à une distance OM=x du centre.

Par raison de symétrie le champ est radial.



$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = \frac{\Sigma q_i}{\epsilon_0}$$

On considère une sphère Σ , de centre O et de rayon x.

D'après le théorème de Gauss, le flux du vecteur champ électrique à travers la surface Σ est nul car il n'y a pas de charge à l'intérieur de Σ .

si $x < R$, le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère.

Soit un point M situé à une distance $x > R$

$$\Phi = E 4\pi x^2$$

D'autre part la charge contenue à l'intérieure de Σ est la charge totale de la sphère de rayon R : $Q = \sigma 4\pi R^2$.

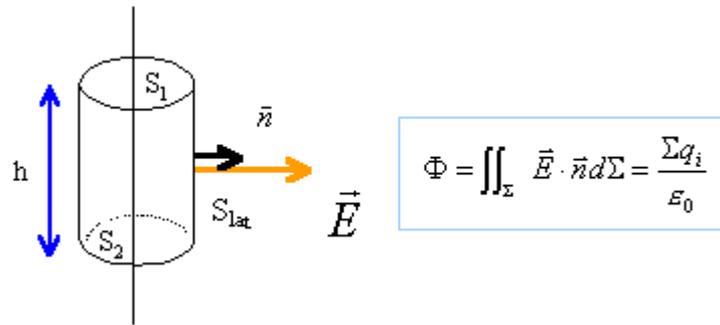
$$\text{d'où } E = \sigma R^2 / (\epsilon_0 x^2)$$

On retrouve la discontinuité de la composante normale du champ (σ / ϵ_0) à la traversée d'une surface chargée.

2

quelle est l'expression du champ crée par cette ligne ?

champ crée par une ligne uniformément chargée corrigé



On prend comme surface Σ un cylindre de hauteur h , d'axe la ligne infinie, et de rayon r .

En tout point de la surface latérale le champ est radial et a même module, par raison de symétrie.

Le flux du champ à travers la surface latérale est : $\Phi = E 2\pi r h$

Le flux du champ est nul à travers les bases S_1 et S_2 , le champ étant perpendiculaire à la normale aux surfaces.

D'autre part la charge contenue dans Σ est : $Q = \lambda h$

λ charge par unité de longueur.

en appliquant le th de Gauss :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Exercice32 : champ magnétique d'un solénoïde

Une bobine, de longueur 50 cm, comportant 1000 spires de diamètre 4 cm est parcourue par un courant de 300 mA . $\mu_0=4\pi 10^{-7}$. Le champ magnétique à l'intérieur de la bobine est:

7,5 mT ; 75 μ T ; 0,75 mT ;1,5 mT 3 mT

corrigé

$$B=4\pi 10^{-7} n I$$

$$I=0,3 \text{ A}$$

0,75 mT

$$n=1000 / 0,5=2000$$

Exercice33 : somme de 2 champs magnétiques

Composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_H=2 \cdot 10^{-5}$ T. et $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ SI

Les 2 propositions suivantes sont équivalentes: le vecteur champ magnétique est un vecteur constant et le champ magnétique est uniforme (répondre vrai ou faux)

On fabrique un solénoïde à spires jointives en enroulant une seule couche d'un fil conducteur isolé. le diamètre extérieur du fil est égal à d. On fait circuler dans le fil un courant continu d'intensité I . A l'intérieur du solénoïde règne un champ magnétique dont la valeur est $4\pi \cdot 10^{-7} I / d$

Un solénoïde de 500 spires jointives de rayon $R=2$ cm, mesure 20 cm de long. En son centre est placée un petite aiguille aimantée. L'axe du solénoïde est horizontal, l'aiguille peut tourner dans un plan horizontal . Le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I . On fait passer un courant d'intensité 3,7 mA, l'aiguille tourne d'un angle de 30° .

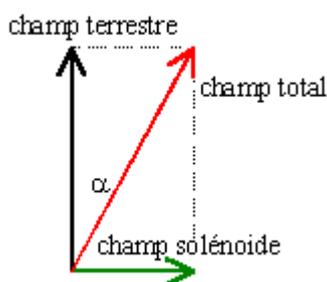
On recommence l'expérience avec deux solénoïdes ayant les mêmes caractéristiques, placés en série et bout à bout ; l'aiguille aimantée tourne d'un angle supérieur à 30° .

corrigé

vrai Un champ de vecteurs est uniforme si les lignes de champ sont parallèles et si la norme du champ est constante .entre les branches d'un aimant en forme de U, dans la région centrale d'un solénoïde parcouru par un courant continu ,le champ magnétique est uniforme.

faux Le champ est proportionnel à l'intensité et au nombre de spires par mètre.

vrai Le champ magnétique crée par le courant est $4\pi \cdot 10^{-7} * 3,7 \cdot 10^{-3} * 500 / 0,2 = 1,16 \cdot 10^{-5}$ T



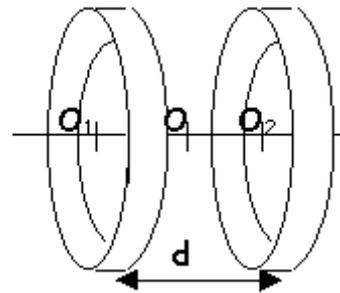
$$\tan(\alpha)=1,16 / 2$$

$$\alpha=30^\circ$$

Si l'intensité dans le circuit est égale à 3,7 mA , deux solénoïdes créent un champ plus intense(**vrai**)

Par contre si la tension aux bornes des 2 bobines est constante , alors l'intensité est divisée par deux (la résistance du circuit double) **faux**

Exercice 33/bobines de Helmholtz- champ magnétique uniforme

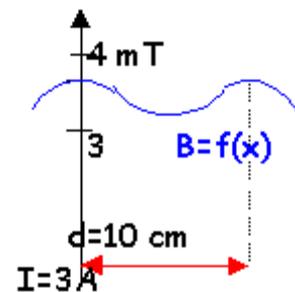
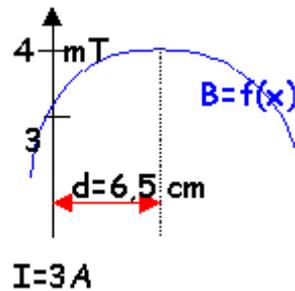
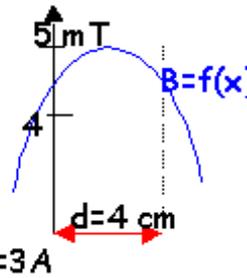


Deux bobines circulaires coaxiales de rayon $R=6,5\text{ cm}$ sont parcourues par un courant d'intensité $I=3\text{ A}$. Chaque bobine compte $N=100$ spires. On cherche à obtenir en O , milieu de O_1O_2 un champ magnétique uniforme.

1. Le courant dans les deux bobines a-t-il le même sens ?
2. Comparer d et le rayon R des bobines lorsque le champ est uniforme en O .
3. Quelle est la bonne expression de B champ magnétique créé en O (k est sans unité ; $\mu_0 = \text{T m A}^{-1}$)

$k\mu_0 N/(RI)$	$k\mu_0 NI/R$
$k\mu_0 NIR$	

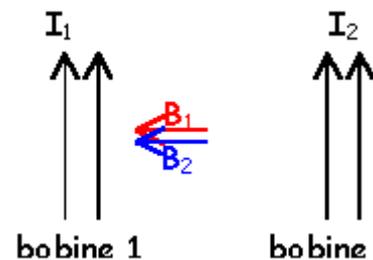
4. Calculer B si $k=0,71$



corrigé

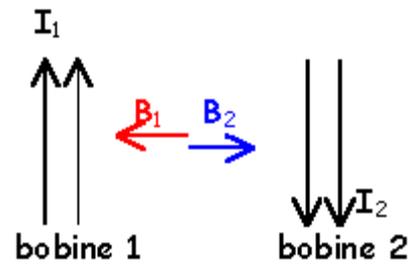
Les courants doivent avoir le même sens: dans ce cas les champs magnétiques créés par les bobines en O s'ajoutent. Avec des courants de sens contraire les champs en O vont s'annuler.

La distance d doit avoir une valeur voisine du rayon R des bobines.



B est en tesla T ; μ_0 est en T m A⁻¹

il faut donc multiplier μ_0 par des ampères et divisé par une longueur $k\mu_0NI / R$



Calcul de B

$$0,71 * 100 * 3 * 4\pi 10^{-7} / 6,5 * 10^{-2} = \underline{4,1 \text{ mT}}$$

Exercice 34 : APPROXIMATIONS

$(1+\epsilon)^{-\alpha}$ voisin de $1-\alpha\epsilon$ si ϵ est petit devant 1

En ne faisant aucune approximation, la valeur du champ magnétique crée au centre d'une bobine de longueur L, de diamètre d et comprenant N spires circulaires parcourues par un courant d'intensité I, est:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{L^2 + d^2}}$$

1. A quelle condition cette relation peut-elle être assimilée à celle donnée dans le cours?
2. Quelle valeur minimale le rapport L/d doit-il prendre si l'on veut assimiler les deux relations avec une précision supérieure à 1%? à 1 pour mille?

corrigé

Si la longueur de la bobine est très supérieure à son diamètre alors on peut négliger d^2 devant L^2 et on retrouve la formule du cours.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{L^2 + d^2}} = \frac{\mu_0 NI}{L \sqrt{1 + \frac{d^2}{L^2}}} = \mu_0 \frac{N}{L} I \left(1 + \frac{d^2}{L^2}\right)^{-0,5} \approx \mu_0 \frac{N}{L} I \left(1 - \frac{d^2}{2L^2}\right)$$

écart à la formule habituelle : $d^2 / (2L^2)$ inférieur à 0,01

d/L inférieur à racine carrée (0,02) soit 0,14.

$d^2 / (2L^2)$ inférieur à 0,001

d/L inférieur à racine carrée (0,002) soit 0,045

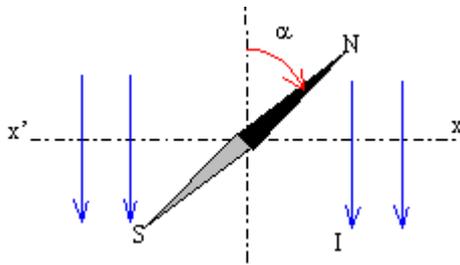
Exercice 35 :

Une petite aiguille aimantée tournant librement autour d'un axe vertical est placée au centre O d'un long solénoïde également mobile autour d'un axe vertical passant par O. L'axe xx' du solénoïde est initialement perpendiculaire à l'aiguille aimantée.

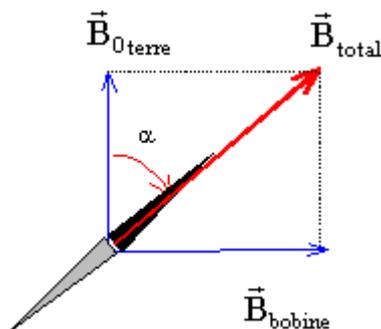
On fait passer un courant d'intensité constante $I = 0,25$ A dans le solénoïde ($n = 100$ spires / mètre).

- Déterminer le champ créé par le solénoïde.
- Déterminer l'angle α dont tourne l'aiguille aimantée. (composante horizontale du champ terrestre $2 \cdot 10^{-5}$ T)
- Déterminer l'angle β , dont il faut faire tourner la bobine pour que l'aiguille aimantée tourne de 90° .

corrigé :



l'aiguille aimantée s'oriente suivant la somme vectorielle des champs magnétiques.



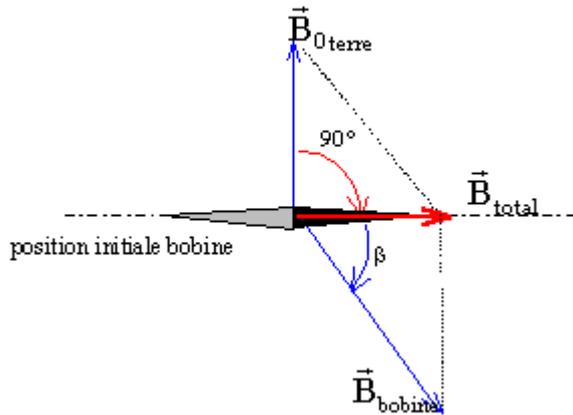
vecteur champ créé par la bobine en son centre :

direction : colinéaire à l'axe du solénoïde

sens : donné par la règle de l'observateur d'Ampère

norme : $4 \pi \cdot 10^{-7} nI = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 0,25 = \underline{3,14 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$.

$\tan \alpha = 3,14 \cdot 10^{-5} / 2 \cdot 10^{-5} = 3,14 / 2 = 1,57$ d'où $\alpha = \underline{57,5^\circ}$.



$$\sin \beta = 2 \cdot 10^{-5} / 3,14 \cdot 10^{-5} = 2 / 3,14 = 0,637$$

$$\beta = 39,5^\circ.$$

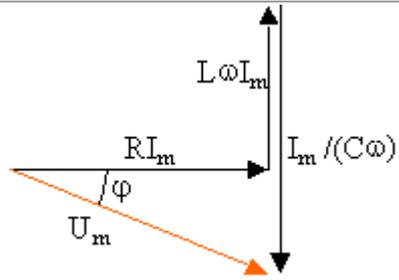
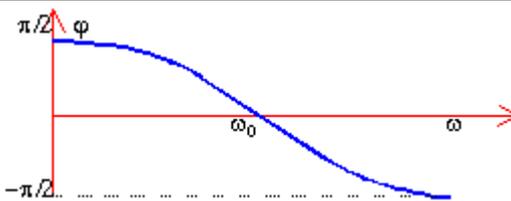
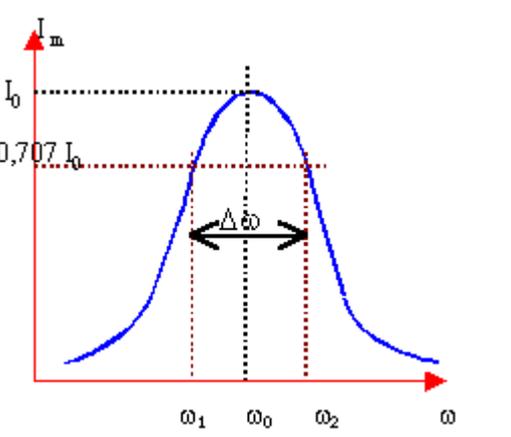
Rappels

en régime sinusoïdal

grandeur physique	nombre complexe associé	quelques règles
intensité $I_m \cos(\omega t)$	I_m	Aux impédances complexes les lois du courant continu s'appliquent.
tension $U_m \cos(\omega t + \varphi)$	$U_m e^{j\varphi}$	
impédance (inductance)	$jL\omega$	en série elles s'ajoutent en dérivation les admittances (inverse d'une impédance) s'ajoutent
impédance (capacité)	$-j / (C\omega)$	
impédance (résistance)	R	
loi d'ohm	$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ <i>toute lettre soulignée est un nombre complexe</i>	impédance réelle = module de l'impédance complexe. $\arg \underline{u} = \arg \underline{Z} + \arg \underline{i}$
dériver c'est multiplier par $j\omega$		
intégrer c'est diviser par $j\omega$		

circuit RLC série en régime forcé

impédance complexe $R + j(L\omega - 1/(C\omega))$	représentation vectorielle
---	----------------------------

$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ <p>impédance réelle</p> <p>$L\omega - 1/C\omega$: réactance</p>	
<p>la phase de i est l'origine des phases</p> $\tan(\varphi) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$	
<p><u>résonance d'intensité</u> : l'intensité passe par une valeur maximale si l'impédance Z est minimale égale à R</p> <p>$LC\omega_0^2 = 1$</p> <p>facteur de qualité ou de surtension</p> <p>$Q = L\omega_0 / R$</p> <p>bande passante</p> <p>$\Delta\omega = \omega_0 / Q$</p>	

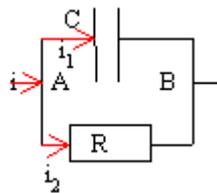
—

Exercice36

circuits équivalents à un condensateur réel

U_{AB} efficace = 200 V ; $C = 20\text{nF}$; le courant est en avance sur la tension de $\varphi = 85^\circ$. ($\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$)

1. Le condensateur présente une résistance de fuite R que l'on demande de calculer.
2. Expliciter l'intensité i du courant dans le circuit.
3. On veut remplacer le groupement précédent par un condensateur C' en série avec R' . Calculer C' et R'



..

corrigé

impédance complexe z équivalente : $1/z = 1/R + jC\omega$; $z = R / (1 + (RC\omega)^2)(1 - jRC\omega)$

impédance réelle $Z=R/\text{rac carrée}(1+R^2C^2\omega^2)$

phase φ : $\tan\varphi= -RC\omega$ en prenant la phase de i comme origine : tension en retard sur i

applications numériques : $R= \tan(85) / (2 \cdot 10^{-8} \cdot 500)= 1,14 \text{ M}\Omega$

$Z=10^5 \Omega$; $I_{\text{eff}}= U_{\text{eff}} / Z = 200/10^5 = 2 \text{ mA}$

$i=2,8 \sin(500 t +1,42)$; $85^\circ=1,42 \text{ rad}$

méthode : égaliser les impédances complexes.

égaliser parties réelles et parties imaginaires

$C'=(1+R^2C^2\omega^2)/(R^2C^2\omega^2) * C = 20,1 \text{ nF}$

$R'=R/(1+R^2C^2\omega^2)= 8,7 \text{ k}\Omega$

Exercice 37 *condensateur et bobine en dérivation*

On maintient une tension alternative $U_{\text{eff}}=1 \text{ V}$, de pulsation $\omega=15000 \text{ rads}^{-1}$ aux bornes d'une self pure de valeur $L=1 \text{ mH}$.

1. Quelle capacité C_0 faut-il monter en dérivation aux bornes de la self pour que l'intensité soit nulle dans le circuit principal ?

corrigé

impédance complexe z équivalente : $1/z = 1/(jL\omega) + jC\omega$; $z=jL\omega/(1-LC\omega^2)$

impédance réelle $Z=L\omega/(1-LC\omega^2)$

phase φ : $\varphi= \pi/2$ car z complexe pur

L'intensité est nulle lorsque Z tend vers l'infini soit $LC\omega^2=1$

application numérique : $C_0=4,44 \mu\text{F}$

Exercice 38 *self pure et résistance en dérivation*

On maintient une tension alternative $U_{\text{eff}}=200 \text{ V}$, de pulsation $\omega=500 \text{ rads}^{-1}$ aux bornes d'une self pure de valeur $L=1 \text{ mH}$ shuntée par une résistance R . La réactance de ce circuit est alors la moitié de ce qu'elle serait si la self était seule.

1. Calculer R et l'intensité du courant principal.

corrigé

impédance complexe z équivalente : $1/z = 1/(jL\omega) + 1/R$;

$$z = RL\omega / (R^2 + L^2\omega^2) * (L\omega + jR)$$

réactance du circuit $R^2L\omega / (R^2 + L^2\omega^2)$ partie imaginaire

réactance d'une self pure $L\omega$

$$0,5 L\omega = R^2L\omega / (R^2 + L^2\omega^2) \text{ d'où } R = L\omega = 500\Omega. \text{ intensité principale (remplacer } R \text{ par } L\omega)$$

l'impédance complexe z devient : $0,5L\omega(1+j)$

$$\text{impédance réelle } Z = 353,5\Omega$$

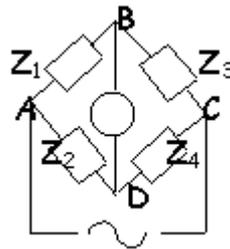
phase ϕ : $\phi = \pi/4$ en prenant la phase de i comme origine : tension en avance sur i

$$I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} / Z = 200 / 353,5 = 0,56 \text{ A}$$

Exercice 39

condition d'équilibre d'un pont de Wheatstone

On considère le pont en alternatif; entre B et D se trouve un détecteur de zéro (oscilloscope). Etablir la condition d'équilibre du pont.



.

corrigé

$$U_{AB} = Z_1 i_1 ; U_{AD} = Z_2 i_2 ; U_{BC} = Z_3 i_3 ; U_{DC} = Z_4 i_4 \text{ grandeurs complexes}$$

Lorsque le pont est équilibré $U_{BD} = 0$

$$\text{donc } U_{AB} = U_{AD} \text{ et } U_{BC} = U_{DC}$$

$$i_1 = i_3 \text{ et } i_2 = i_4$$

$$\text{la condition d'équilibre s'écrit : } Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

elle correspond à deux conditions entre nombres réels

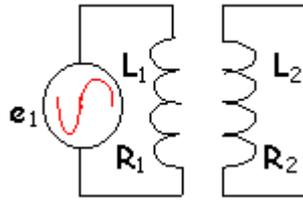
Exercice 40

circuits couplés

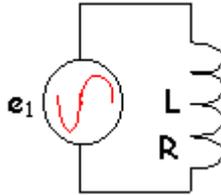
M est l'inductance mutuelle.

le générateur délivre une tension

$$e_1 = E_1 \cos(\omega t).$$



Montrer que l'on peut remplacer ces circuit par le circuit unique dont on déterminera l'inductance L et la résistance R .



corrigé

i₁ et i₂ intensités instantanée dans les circuits

$$e_1 = L_1 i_1' + M i_2' + R_1 i_1 \quad \text{et} \quad 0 = L_2 i_2' + M i_1' + R_2 i_2$$

en notation complexe

$$e_1 = L_1 j\omega i_1 + M j\omega i_2 + R_1 i_1$$

$$0 = L_2 j\omega i_2 + M j\omega i_1 + R_2 i_2$$

éliminer i₂

regrouper partie réelle et partie imaginaire

$$R = R_1 + \frac{M^2 \omega^2 R_2}{R_2^2 + (L_2 \omega)^2}$$

$$L = L_1 + \frac{M^2 \omega^2 L_2}{R_2^2 + (L_2 \omega)^2}$$

exercice 41 puissance active

- Aux bornes d'un générateur sinusoïdal délivrant la tension $e = E_m \cos(\omega t)$ d'impédance interne $z = r + jx$, on branche une impédance $Z = R + jX$. Déterminer Z pour que la puissance dissipée dans Z soit maximale .

..

corrigé

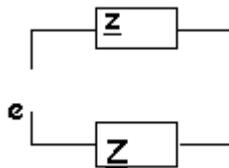
loi d'Ohm entre grandeurs complexes i

$$i = e / (z + Z)$$

puissance active dissipée dans Z :

$$P = R I_{\text{eff}}^2$$

$$I_{\text{eff}}^2 = E^2 / ((R+r)^2 + (X+x)^2)$$



La puissance est maximale lorsque les

dérivées partielles de P par rapport à R et X sont nulles.

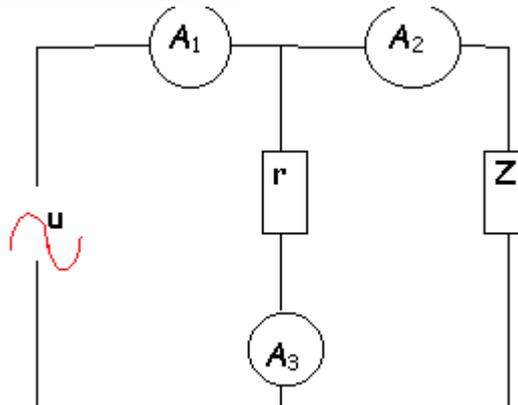
on en déduit : $X=-x$ et $R=r$ ou $Z = z^*$

$$P_{\max} = E^2 / (4r)$$

Exercice 42

mesure de puissance , méthode des 3 ampèremètres

r est une résistance morte. Les résistances des ampèremètres sont négligeables. Exprimer la puissance dissipée dans Z en fonction de r et des intensités efficaces I_1, I_2, I_3 mesurées.



corrigé

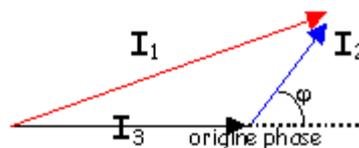
U tension efficace aux bornes de Z

$\cos \varphi$ facteur de puissance de Z

$$P = UI_2 \cos \varphi.$$

or $U = rI_3$ et u et i_3 sont en phase donc

$$P = rI_3 I_2 \cos \varphi.$$



$$I_1^2 = I_2^2 + I_3^2 - 2I_2 I_3 \cos(\pi - \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = (I_1^2 - I_2^2 - I_3^2) / (2I_2 I_3)$$

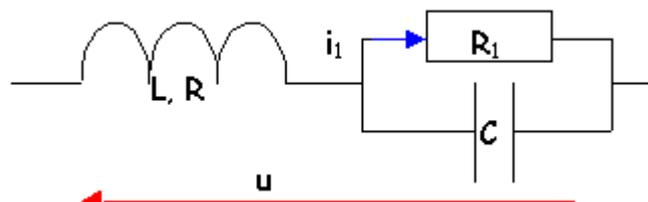
$$P = 0,5 r(I_1^2 - I_2^2 - I_3^2)$$

..

Exercice 43

association mixte bobine condensateur résistor

1. $C=125 \mu\text{F}$; R_1 variable;
 $\omega=400\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.



1. Exprimer l'impédance complexe du circuit.
2. Exprimer l'intensité complexe i_1 .

3. Quelles conditions doivent satisfaire les données pour que i_1 soit indépendant de R_1 .

∴

corrigé

impédance complexe

bobine : $jL\omega + R$

C et R_1 en dérivation : $R / (1+jC\omega)$

circuit : $jL\omega + R + R_1 / (1+jC\omega)$

intensité i_1 complexe

intensité principale : $i = u / [jL\omega + R + R_1 / (1+jC\omega)]$

$i_1 R_1 = i_2 / (jC\omega)$ et $i = i_1 + i_2$

$i_1 = i / [(1+jC\omega)] = u / [(jL\omega + R)(1+jC\omega) + R_1]$

l'intensité dans R_1 est indépendante de R_1 si le coefficient de R_1 est nul soit:

$1-LC\omega^2+jRC\omega=0$

le terme réel doit être nul : $LC\omega^2 = 1$

le terme imaginaire doit être nul : $RC\omega=0$ ou $R=0$ pratiquement $R=0,1\Omega$.

Puissance moyenne consommée par un dipôle

Soit $u = U 2^{1/2} \cos(\omega t)$ la tension instantanée à la date t aux bornes d'un dipôle électrique ; U est la tension efficace, ω est la pulsation de la tension. L'intensité du courant qui le traverse est $i = I 2^{1/2} \cos(\omega t + \varphi)$; I est l'intensité efficace, φ le déphasage.

1. Exprimer la puissance instantanée p consommée par le dipôle.
2. Exprimer la puissance moyenne P en fonction des paramètres U , I et φ .
3. Application au relèvement d'un facteur de puissance : Dans cette partie les grandeurs complexes sont soulignées et on utilise le nombre complexe j telle que $j^2 = -1$.

Un moteur de puissance totale $P=10$ kW est alimenté sous une tension sinusoïdale de valeur efficace $U=220$ V et de fréquence 50 Hz. Le facteur de puissance est : $\cos \varphi = 0,7$.

- Calculer l'intensité efficace I d'alimentation du moteur.
- L'admittance complexe Y du moteur s'écrit : $Y = |Y| e^{-j\varphi}$. Exprimer simplement l'admittance réelle $|Y|$ en fonction de I et de U .
- On place un condensateur de capacité C , telle que l'association {condensateur+moteur} soit purement résistive. Comment faut-il le placer pour que le moteur continue à fonctionner normalement ?
- Exprimer l'admittance complexe Y_1 de l'association en fonction de C, ω et Y . En déduire la valeur de C .

- Quelle est la propriété de la puissance moyenne consommée par le condensateur ? En déduire simplement la valeur de l'intensité efficace I_t d'alimentation de l'association.

corrigé

puissance instantanée p consommée par le dipôle : $p = u i = 2UI \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$

$p = UI (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi)$

$$P = \frac{UI}{T} \left(\underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt}_{\text{nulle sur une période}} + \int_0^T \cos(\varphi) dt \right) = UI \cos \varphi$$

puissance moyenne P :

$P = UI \cos \varphi$ soit $I = P / (U \cos \varphi) = 10^4 / (220 * 0,7) = 64,9 \text{ A}$.

admittance = inverse d'une impédance ; $|Y| = I/U = 64,9 / 220 = 0,295 \text{ S}$.

condensateur et moteur sont montés en dérivation : les admittances du moteur et du condensateur ($jC\omega$) s'ajoutent.

$Y_t = Y + jC\omega = |Y| e^{-j\varphi} + jC\omega$.

l'association {condensateur+moteur} étant purement résistive, Y_t est un nombre réel ; sa partie imaginaire est donc nulle.

$Y_t = |Y| \cos \varphi - j|Y| \sin \varphi + jC\omega$; $-j|Y| \sin \varphi + jC\omega = 0$; $C = |Y| \sin \varphi / \omega$.

avec $\omega = 2 \pi f = 2 * 3,14 * 50 = 314 \text{ rad/s}$; $\sin \varphi = 0,714$; $|Y| = 0,295 \text{ S}$

$C = 0,295 * 0,714 / 314 = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ F}$.

la puissance moyenne consommée par le condensateur est nulle.

$P_{\text{active totale}} = P_{\text{active moteur}} = 10 \text{ kW}$

$Q_{\text{réactive totale}} = Q_{\text{réactive condensateur}} = -C\omega U^2 = -6,7 \cdot 10^{-4} * 314 * 220^2 = -10,2 \text{ var}$

$S^2 = P^2 + Q^2 = 10^2 + 10,2^2 = 204,1$; $S = 14,3 \text{ VA}$

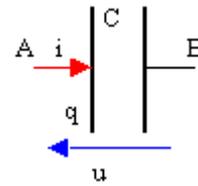
Or $S = UI$ soit $I = 14,3 \cdot 10^3 / 220 = 65 \text{ A}$.

EXERCICE 44 : condensateur

Rappel de cours :

cours 1

définitions et formules



Ensemble de 2 conducteurs dont l'un entoure complètement l'autre.

- $q=Cu$; charge (coulomb) ; capacité C (farad F) ; u en volt
- énergie emmagasinée (J) = $0,5 Cu^2 = 0,5 q^2/C$
- $E=u/e$; champ électrique entre les armatures(Vm^{-1}) ; e : distance des armatures(m)

capacité dun condensateur plan $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e}$

S: surface armature (m²) ; e: épaisseur isolant (m)

ϵ_r : permittivité relative isolant ; ϵ_0 : permittivité relative du vide ($8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$);

association de condensateurs

En dérivation les capacités s'ajoutent.

En série $\frac{1}{C_{\text{équi}}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$

localisation de l'énergie

Dans toute région de l'espace où existe un champ électrique, l'énergie est localisée dans le vide avec une densité volumique $0,5\epsilon_0 E^2$

Exercice a

trois condensateurs en dérivation

Trois condensateurs de capacité $C_1=1\mu\text{F}$, $C_2=3,3\mu\text{F}$, $C_3=4,7\mu\text{F}$ sont associés en parallèle. La charge totale du groupement est $q=0,216 \text{ mC}$. Calculer :

1. la capacité équivalente
2. la tension aux bornes
3. l'énergie stockée par l'ensemble

4. Que devient cette énergie si la tension diminue d'un tiers.

corrigé

Les condensateurs étant montés en dérivation, la capacité du condensateur unique équivalent à l'ensemble est $C=4,7 + 1 + 3,3 = 9\mu\text{F}$.

tension aux bornes $u=q/C=2,16 \cdot 10^{-4} / 9 \cdot 10^{-6} = 24\text{V}$.

énergie stockée : $0,5 C u^2=0,5 * 9 \cdot 10^{-6} * 24^2= 2,59 \text{ mJ}$.

la nouvelle tension vaut 16 V et $E= 1,15 \text{ mJ}$.

Exercice b

associer un condensateur chargé à un condensateur non chargé

Les caractéristiques d'un condensateur sont : $C=0,12 \mu\text{F}$; $e=0,2\text{mm}$; $\epsilon_r=5$; $u =100\text{V}$. Calculer

1. la surface des armatures , la charge et l'énergie emmagasinée.
2. Ce condensateur est associé en parallèle avec un condensateur $C'=0,15 \mu\text{F}$ initialement déchargé. Calculer
 - la tension commune aux bornes
 - l'énergie emmagasinée par le montage.

corrigé

surface = $C e /(\epsilon_0 \epsilon_r)=1,2 \cdot 10^{-7} * 2 \cdot 10^{-4} / (8,84 \cdot 10^{-12} * 5)= 0,544 \text{ m}^2$.

charge $q=Cu=1,2 \cdot 10^{-7} * 100= 12\mu\text{C}$

énergie stockée : $0,5 C u^2=0,5 * 1,2 \cdot 10^{-7} * 10^4= 0,6 \text{ mJ}$.

La charge totale n'a pas changée.

capacité équivalente à l'ensemble : $0,12 + 0,15 = 0,17 \mu \text{ F}$.

$$\text{tension} = q/C = 12 \cdot 10^{-6} / 0,27 \cdot 10^{-6} = 44,4 \text{ V.}$$

$$\text{énergie} = 0,5 * 0,27 \cdot 10^{-6} * 44,4^2 = 0,266 \text{ mJ.}$$

perte d'énergie par rayonnement électromagnétique et par effet joule dans les conducteurs lors de l'association.

Exercice c

capacité d'un condensateur sphérique

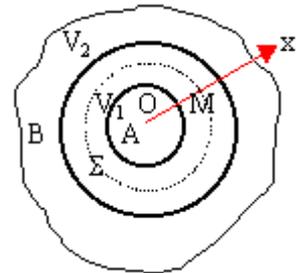
Calculer la capacité d'un condensateur dont l'armature interne est une sphère de centre O et de rayon R_1 . La surface interne de l'armature externe est une sphère de centre O et de rayon R_2 . Examiner le cas où les rayons sont peu différents $R_2 = R_1 + e$

corrigé

V_1 : potentiel de l'armature interne

V_2 : potentiel de l'armature externe

Q : charge de l'armature A



Les lignes de champ sont radiales, les surfaces équipotentiels sont des sphères de centre O.

EXERCICVE 45 :Th. de gauss: calcul du champ puis du potentiel

flux du champ à travers la sphère Σ de rayon x : $E \cdot 4\pi x^2 = Q/\epsilon_0$.

$$E = Q/(4\pi\epsilon_0 x^2)$$

$E = -dV/dx$, puisque E ne dépend que de x

$dV = Q/((4\pi\epsilon_0) * dx/x^2)$ intégrer entre R_1 et R_2 .

$$V_2 - V_1 = Q/((4\pi\epsilon_0) [1/R_2 - 1/R_1])$$

$$\text{capacité} = Q/(V_2 - V_1)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$$

$$R_2 = R_1 + e ; e \ll R_1.$$

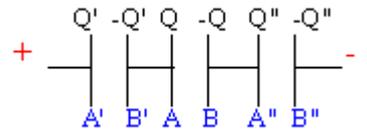
C voisin de $4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / e$ et $4\pi R_1 R_2$ surface d' une sphère

C voisin de $\epsilon_0 S/e$

EXERCICE 46

association série 3 condensateurs

Un condensateur C est chargé sous une tension V_0 . On appelle A l'armature interne et B l'armature externe . C est placé en série entre 2 condensateurs C' et C'' initialement non chargés. Déterminer Q, Q', Q''.



corrigé

charges

initialement l'armature A prend la charge $Q_0=CV_0$.

Le conducteur AB' isolé garde la même charge : $-Q'+Q=Q_0$.

de même B et A'' : $-Q+Q''=-Q_0$.

soit $Q'=Q'' =Q-Q_0$.

potentiel

$$V=V_A-V_{B''}=Q'/C' + Q/C + Q''/C''$$

$$V=(Q-Q_0) (1/C'+1/C'') +Q/C$$

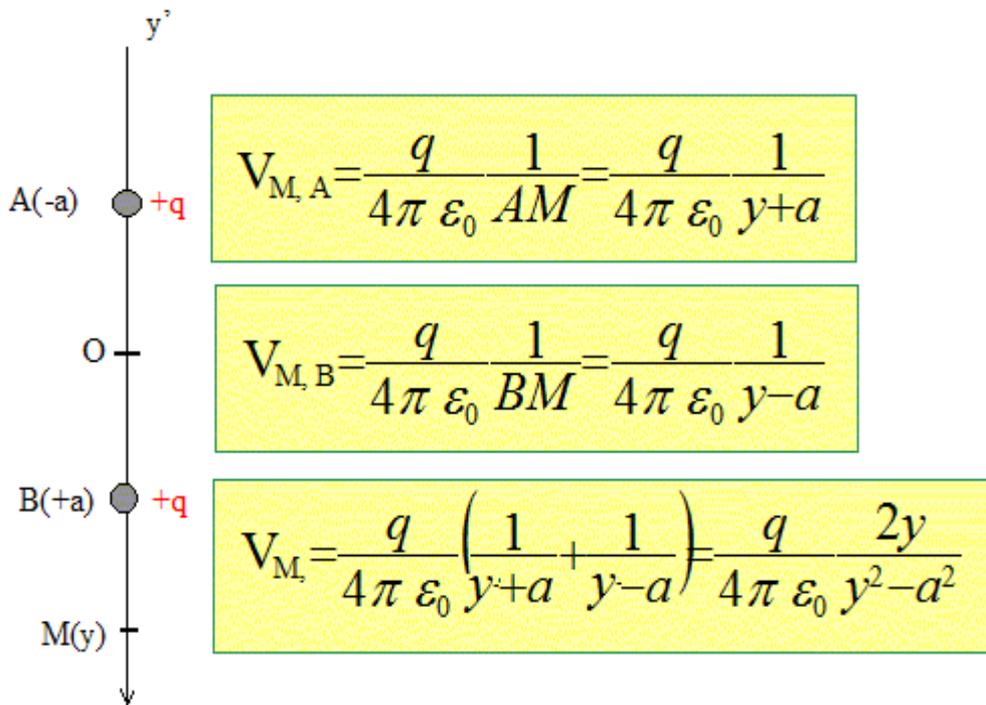
$$V=Q(1/C'+1/C+1/C'')-Q_0(1/C'+1/C'')$$

$$Q= [V+CV_0(1/C'+1/C'')] / (1/C'+1/C+1/C'')$$

Exercice 47 : électrostatique : potentiel et champ créés par deux charges sur un axe.

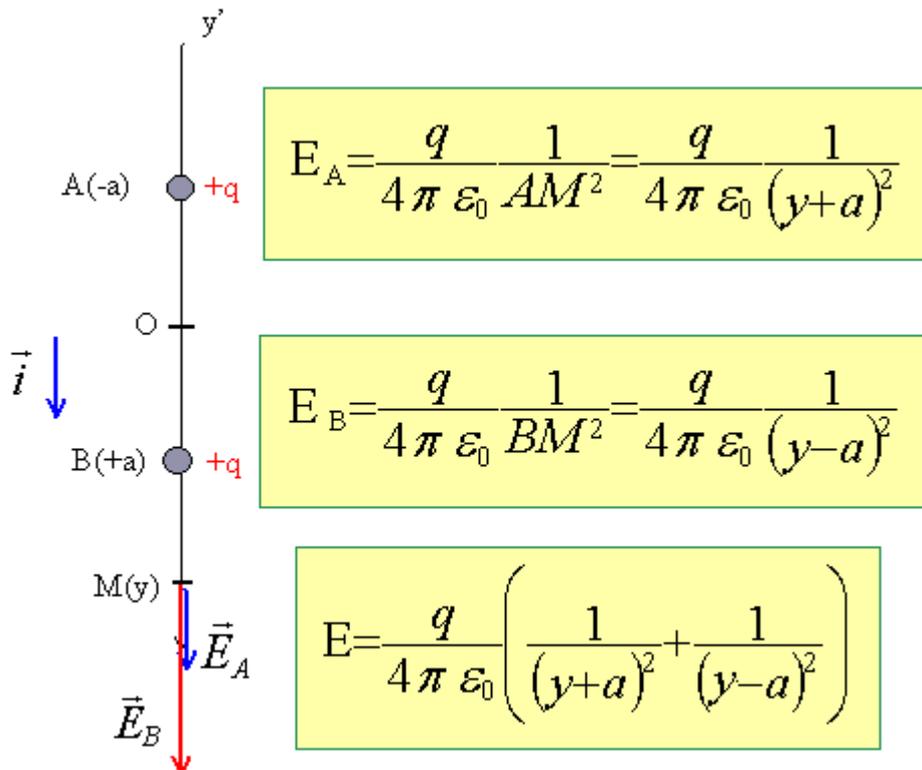
Deux charges ponctuelles positives q sont placées sur un axe y'Oy aux ordonnées -a et +a .

Déterminer le potentiel V(y) et le champ électrique E (y) en tout point de l'axe y'Oy.

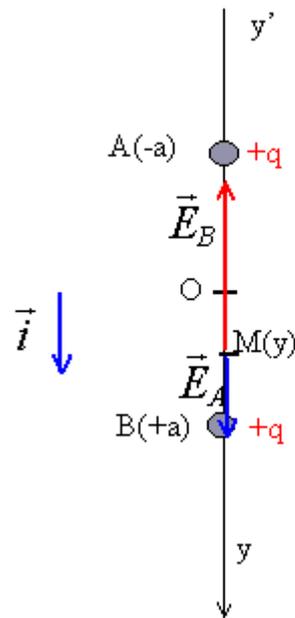


Pour le champ électrique, il faut distinguer deux cas :

- le point M est en dehors du segment AB : les champs électriques s'ajoutent.

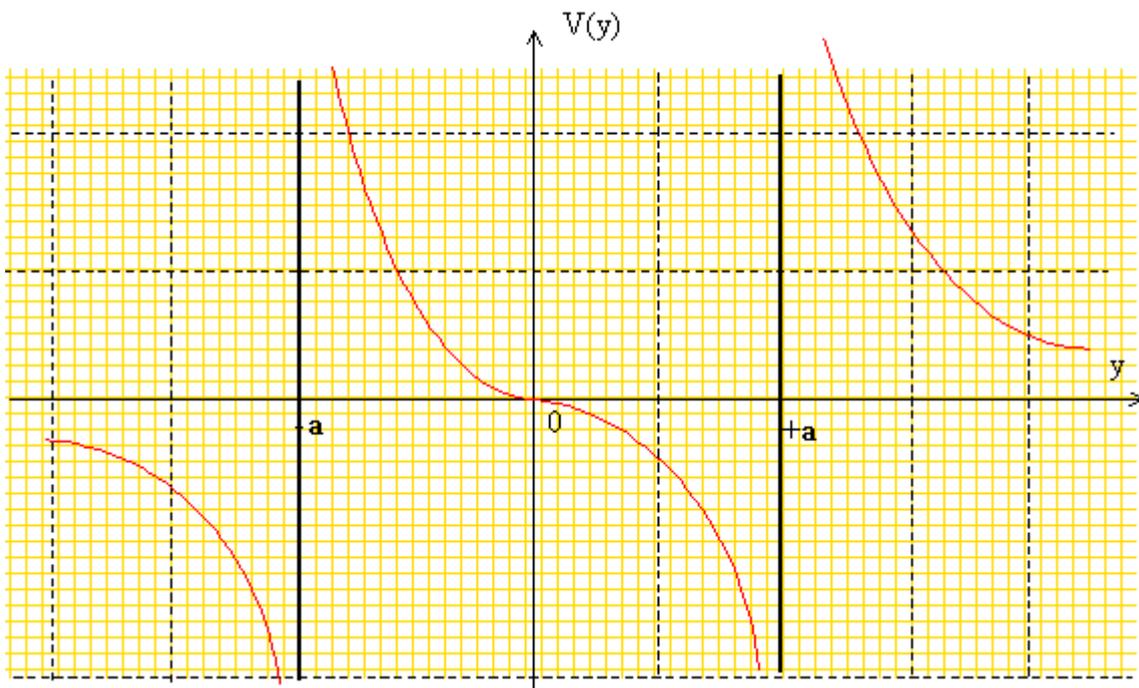


- le point M est situé sur le segment AB : les champs électriques se retranchent.

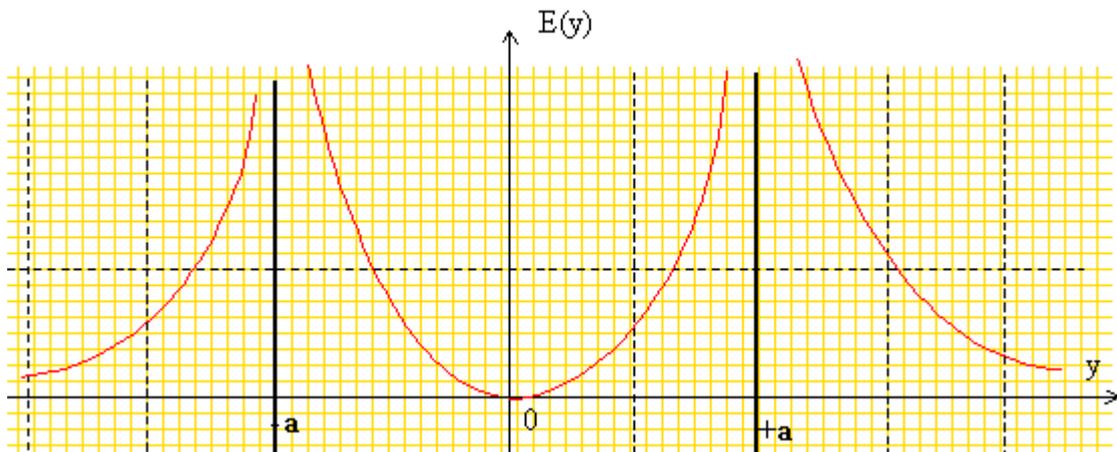


$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{1}{(y-a)^2} - \frac{1}{(y+a)^2} \right|$$

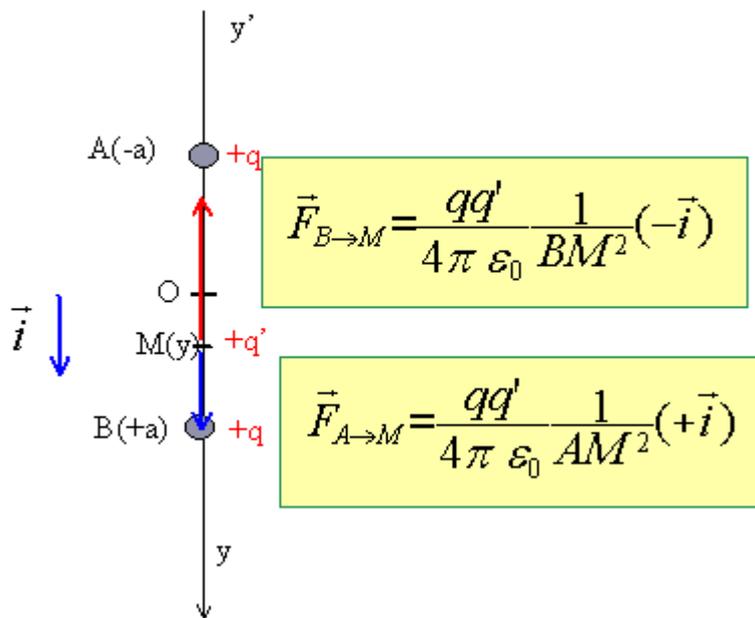
Construire le graphe $V(y)$.



Construire le graphe $E(y)$.

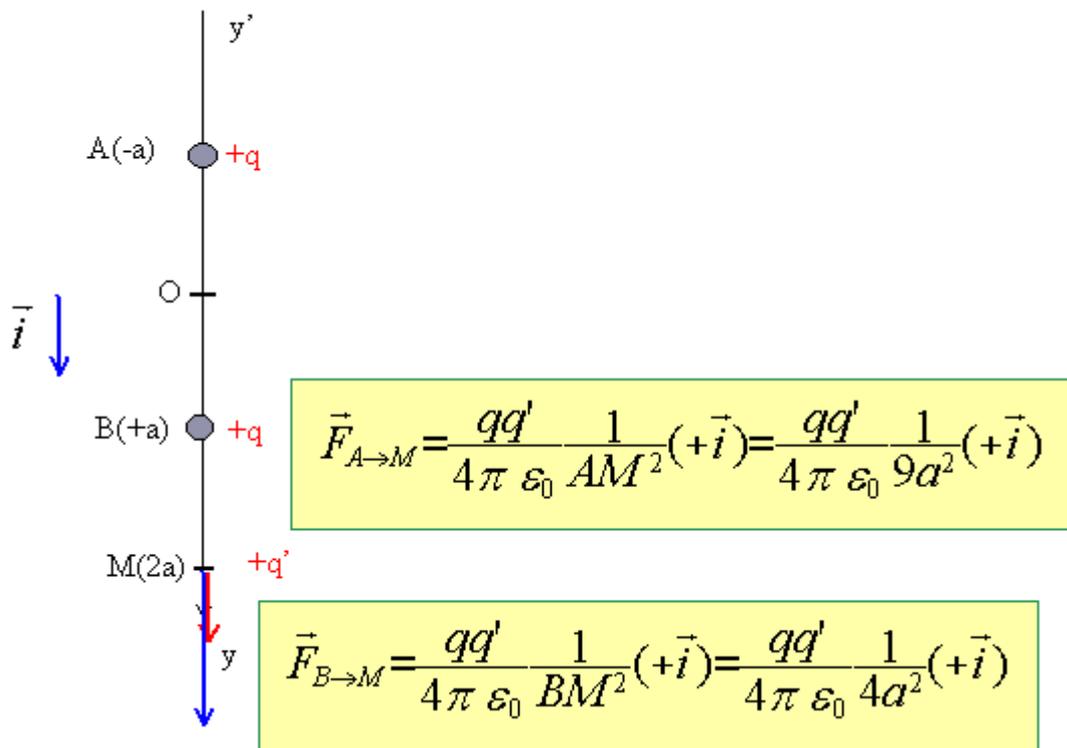


Qu'arriverait-il à une charge q' positive légèrement déplacée de $y=0$ selon Oy ?



La charge q' se déplace vers $y=0$ où le champ électrique est nul.

Qu'arriverait-il à une charge q' positive abandonnée en $y=2a$, sans vitesse initiale.



La charge q' s'éloigne à l'infini.

EXERCICE 48 spire plane dans un champ magnétique uniforme

préalable :

On admet le résultat qui suit :

En partant de la force de Lorentz f subie par une particule de charge q , de vitesse v , placée en M où existe un champ magnétique B, on peut aboutir à la loi suivante:

Une portion de courant rectiligne MN, parcourue par un courant d'intensité I, mesuré dans le sens M vers N, placé dans un champ magnétique uniforme B, est soumis à une force F, appliquée en son milieu Q.

Force de Lorentz : $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$



$$\vec{F} = I \overline{MN} \wedge \vec{B}$$

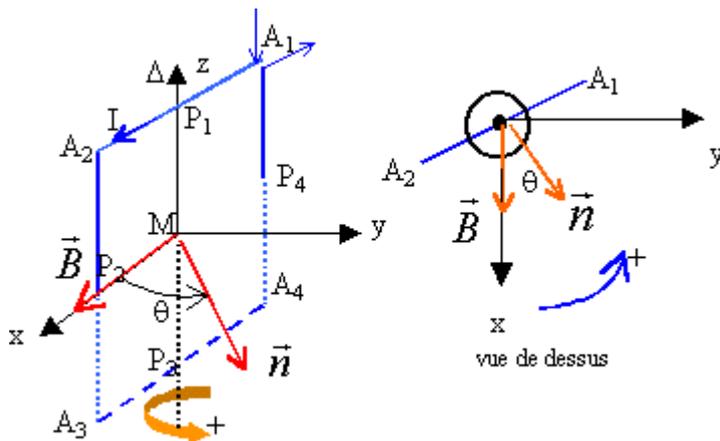
Quelle est le nom donné à cette force?

spire plane dans un champ magnétique uniforme :

Une spire rigide de côté a, d'arie S est parcourue par un courant d'intensité I imposée par le

générateur. On défini son moment magnétique : $\vec{M} = I S \vec{n}$ où n est un vecteur unitaire normale au plan de la spire.

La spire de centre M, mobile sans frottement autour d'un axe $\Delta=Mz$ est placée dans un champ magnétique uniforme B, ayant la direction et le sens de l'axe Mz. Sa position est repèrée par l'angle θ .

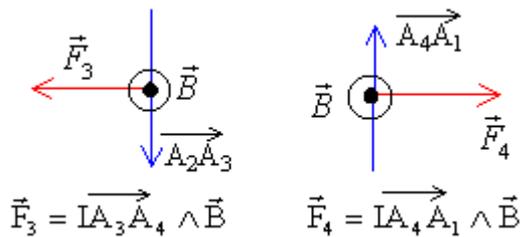
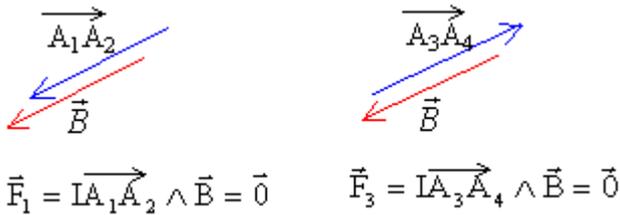


1. On note F_1 et F_3 les forces subies respectivement par les côtés perpendiculaires à Mz de milieu P_1 et P_3 , F_2 et F_4 les forces subies respectivement par les côtés parallèles à Mz de milieux P_2 et P_4 . Déterminer la somme des forces exercées sur la spire.
2. Montrer que ces forces constituent un couple dont on exprimera le moment par rapport à Δ , en fonction de M,B et θ .
3. Montrer que l'énergie potentielle de cette spire dans la position repèrée par θ peut s'écrire :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$
4. Quelle est la position d'équilibre stable de la spire dans le champ? Justifier.
5. A partir de considérations microscopiques simples, expliquer pourquoi une aiguille aimantée placée dans un champ uniforme s'oriente et indique la direction et le sens du champ, alors que les grains de limaille de fer s'orientent et indiquent seulement la direction du champ.

corrigé

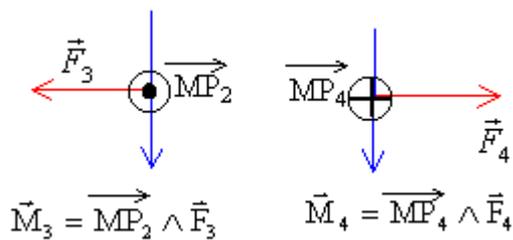
Il s'agit des forces de Laplace.



la somme des forces est donc nulle.

les deux forces F_3 et F_4 constituent un couple de forces dont l'effet est la rotation de la spire.

Le moment de ces forces par rapport à l'axe Δ , est égal à la projection sur cet axe, du moment de ces forces par rapport à un point de cet axe.(le point M par exemple)



le moment des forces est dirigé en sens contraire de l'axe Oz

sa valeur est (a^2 représente la surface S de la spire)

$M_\Delta = -Ia^2 B \sin \theta = -I S B \sin \theta$.

énergie potentielle:

La spire tourne d'un angle $d\theta$ autour de Mz, l'intensité restant constante.

le travail élémentaire du couple de forces est :

$$\delta W = M_{\Delta} d\theta = -IS B \sin\theta d\theta = -d [-IS B \cos\theta]$$

on définit une énergie potentielle $d E_p = - \delta W = -d [IS B \cos\theta]$

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

énergie potentielle magnétique d'interaction d'un dipôle avec un champ magnétique.

La position d'équilibre stable correspond à un minimum de l'énergie potentielle :

$$dE_p / d\theta = M B \sin \theta = 0$$

soit $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

ces deux positions d'équilibres sont-elles stables ?

recherchons le signe de la dérivée seconde :

$$d^2E_p / d\theta^2 = M B \cos \theta$$

la dérivée seconde est positive pour $\theta=0$, cet équilibre est [stable](#).

la dérivée seconde est négative pour $\theta=\pi$, cet équilibre est instable.

Dans la position correspondant à l'équilibre stable, on retrouve la règle du flux maximal :

un circuit non déformable, parcouru par un courant d'intensité constante, se déplace spontanément de telle manière que le flux du champ magnétique soit maximal (sous réserve que les contraintes mécaniques imposées au circuit le permettent)

Dans une aiguille aimantée, le moment magnétique résultant des électrons n'est pas nul et son sens détermine les pôles. En présence d'un champ magnétique uniforme, l'aiguille s'oriente et indique le sens du champ.

Un grain de limaille de fer placé dans ce même champ magnétique acquiert un moment magnétique et s'oriente dans la direction du champ.

EXERCICE 49 : Norton, Thevenin, diviseur de tension et de courant

Générateurs : passage entre modèles équivalents de Thevenin et de Norton.

On peut remplacer le générateur de courant [courant electromoteur (c.e.m.) η et résistance r en parallèle], modélisé à la figure 1, par un générateur de tension équivalent [force électromotrice (f.e.m.) E et résistance R en série], modélisé à la figure 2.

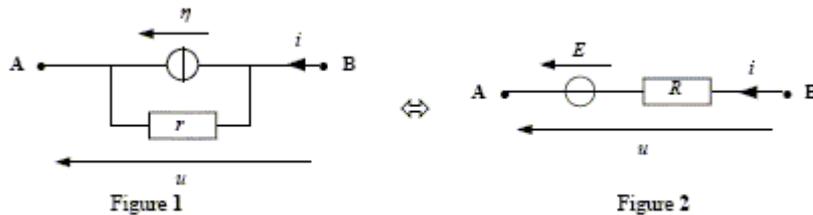


figure 1 : on note i_1 le courant dans r ; $i = \eta + i_1$; de plus $u = - r i_1$ soit $i_1 = -u/r$.

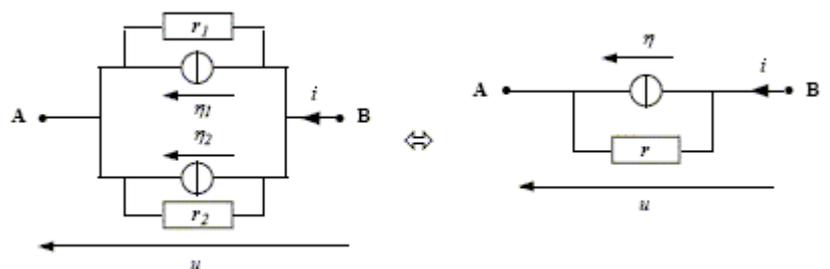
Par suite : $i = \eta - u/r$; $u = \eta r - r i$.

figure 2 : $u = E - R i$.

On identifie : $R = r$ et $\eta = E/r$.

Association de générateurs :

On associe maintenant, en parallèle, deux générateurs définis par leurs c.e.m. et résistance en parallèle, respectivement (η_1, r_1) et (η_2, r_2) (figure 3, à gauche).



Exprimer le c.e.m. η et la résistance en parallèle r du générateur équivalent (figure 4, à droite), en fonction des données de la figure 3.

figure 3 : on note i_1 le courant dans r_1 ; on note i_2 le courant dans r_2 ; $i = \eta_1 + i_1 + \eta_2 + i_2$.

de plus $u = - r_1 i_1$ soit $i_1 = -u/r_1$; $u = - r_2 i_2$ soit $i_2 = -u/r_2$;

Par suite : $i = \eta_1 + \eta_2 - u [1/r_1 + 1/r_2]$.

figure 4 : on note i_1 le courant dans r ; $i = \eta + i_1$; de plus $u = - r i_1$ soit $i_1 = -u/r$.

Par suite : $i = \eta - u/r$.

On identifie : $1/r = 1/r_1 + 1/r_2$ et $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

Exercice 50 : Montage diviseur de tension et montage diviseur de courant :

Un dipôle AB est constitué de deux résistors (résistances respectives R_1 et R_2).

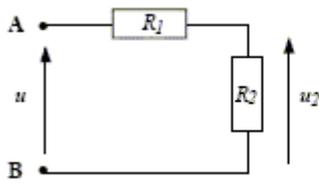


Figure 5

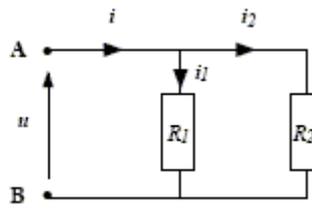


Figure 6

Les deux résistors sont montés en série et l'ensemble est soumis à une tension u (figure 5).

Exprimer la tension u_2 , aux bornes du résistor de résistance R_2 , en fonction de u , R_1 et R_2 .

figure 5 : on note i l'intensité du courant dans R_1 et R_2 .

$$u = (R_1 + R_2) i ; u_2 = R_2 i .$$

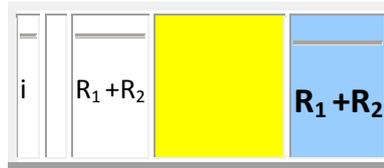
u_2	R_2	d'où $u_2 = u$	R_2
u	$R_1 + R_2$		$R_1 + R_2$

Dans le second montage, les deux résistors sont montés en parallèle (figure 6). Un courant d'intensité i circule dans le dipôle AB.

Exprimer l'intensité i_2 du courant qui circule dans le résistor de résistance R_2 , en fonction de i , R_1 et R_2 .

$$i = i_1 + i_2 ; u = R_1 i_1 ; u = R_2 i_2 ; i = u (1/R_1 + 1/R_2) = u(R_1 + R_2) / (R_1 R_2)$$

i_2	$= R_1$	d'où $i_2 = i R_1$	R_1
-------	---------	--------------------	-------



Exercice 51 : Intensité i du courant qui circule dans une branche d'un circuit.

La méthode de résolution est laissée au choix de l'étudiant.

Soit un circuit linéaire dont les résistances des conducteurs ohmiques, les f.é.m. des sources de tension et les c.é.m. des sources de courant sont indiqués sur la figure 7.

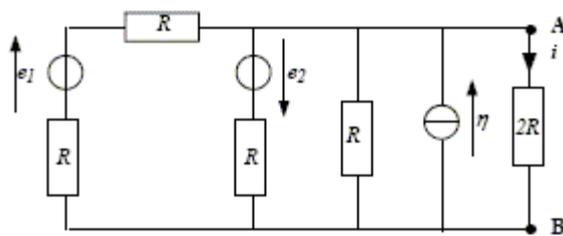
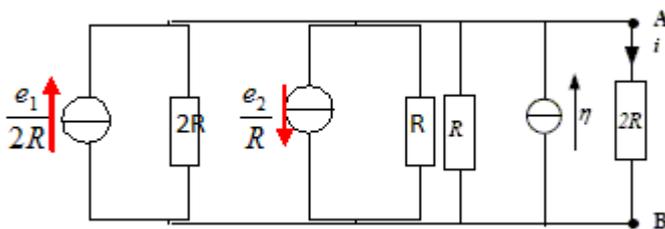


Figure 7

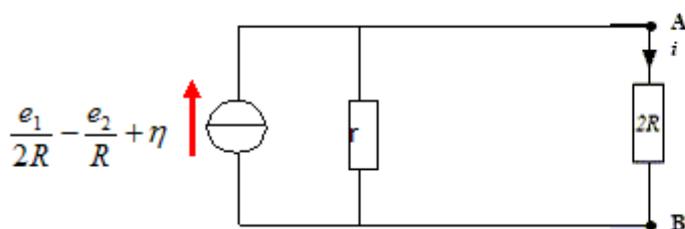
Déterminer, en fonction de e_1 , e_2 , η et R , l'intensité i du courant qui circule dans le dipole AB, de résistance $2R$.

Application numérique. $e_1 = 20V$; $e_2 = 5,0V$; $\eta = 2,0 \cdot 10^{-2} A$; $R = 50 \text{ ohms}$. Calculer i .

Remplacer les générateurs de Thevenin par les générateurs équivalents de Norton :



Remplacer 3 générateurs de Norton en dérivation par un générateur de Norton unique :



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \Rightarrow r = 0,4R$$

$$\frac{e_1}{2R} - \frac{e_2}{R} + \eta = \frac{0,5e_1 - e_2 + \eta R}{R}$$

Passer au modèle équivalent de Thévenin :

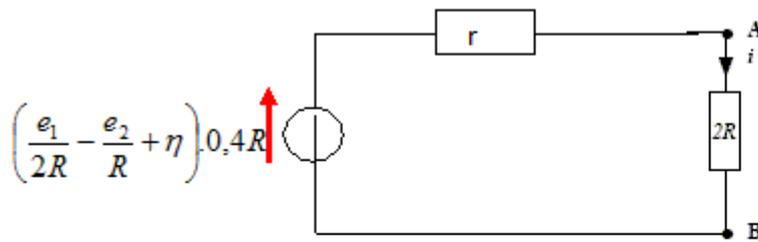


Figure 7

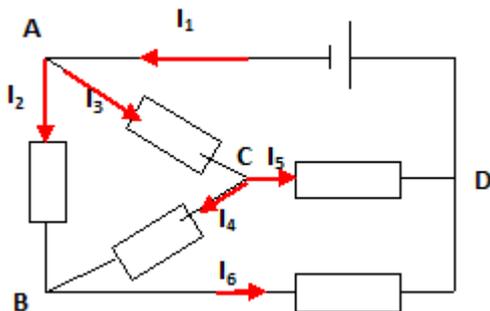
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \Rightarrow r = 0,4R$$

$$\frac{0,5e_1 - e_2 + \eta R}{R} \cdot 0,4R = 0,2e_1 - 0,4e_2 + \eta R$$

$$i = \frac{0,2e_1 - 0,4e_2 + 0,4\eta R}{2,4R} = \frac{0,2 * 20 - 0,4 * 5 + 0,4 * 0,02 * 50}{2,4 * 50} = \underline{0,02 \text{ A}}$$

EXERCICE 52 : Lois du courant continu

BREF RAPPEL : Additivité des intensités à un noeud :



On donne : $I_1 = 0,05 \text{ A}$; $I_4 = 0,01 \text{ A}$ et $I_5 = 0,02 \text{ A}$.

Au noeud C, additivité des intensités : $I_3 = I_4 + I_5 = 0,01 + 0,02$; **$I_3 = 0,03 \text{ A}$** .

Au noeud A, additivité des intensités : $I_1 = I_2 + I_3$; $I_2 = I_1 - I_3 = 0,05 - 0,03$; **$I_2 = 0,02 \text{ A}$** .

Au noeud B, additivité des intensités : $I_6 = I_2 + I_4 = 0,02 + 0,01$; **$I_6 = 0,03 \text{ A}$** .

On vérifie bien qu'au noeud D, $I_1 = I_5 + I_6$.

Nombre d'électrons quittant le générateur chaque seconde.

Quantité d'électricité $Q = I_1 t = 0,05 * 1 = 0,05 \text{ C}$.

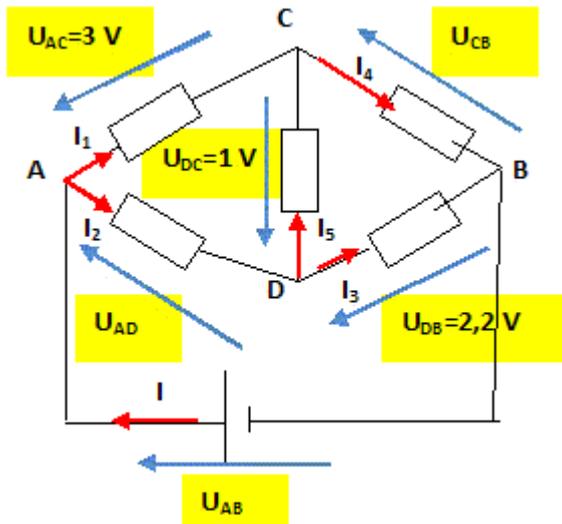
La charge, en valeur absolue, d'une mole d'électrons vaut 96500 C.

Quantité de matière d'électrons $n = 0,05/96500 = 5,18 \cdot 10^{-7}$ mol.

Dans une mole d'électrons il y a $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ électrons.

Par suite $5,18 \cdot 10^{-7} * 6,02 \cdot 10^{23} = 3,1 \cdot 10^{17}$ électrons quitte le générateur chaque seconde.

BREF RAPPEL : tensions et circuits dérivés



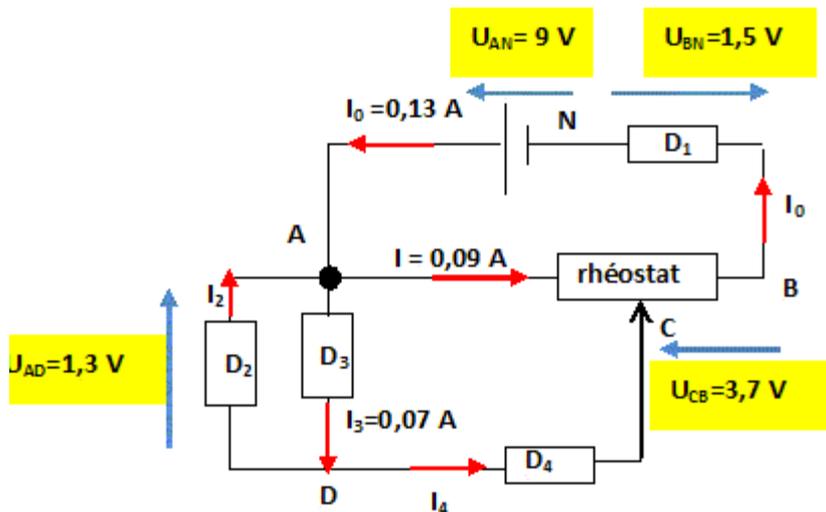
Additivité des tensions : $U_{AC} = U_{AD} + U_{DC}$; $U_{AD} = U_{AC} - U_{DC} = 3 - 1$; $U_{AD} = 2\text{ V}$.

$U_{DB} = U_{DC} + U_{CB}$; $U_{CB} = U_{DB} - U_{DC} = 2,2 - 1$; $U_{CB} = 1,2\text{ V}$.

$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = 3 + 1,2$; $U_{AB} = 4,2\text{ V}$.

On donne : $I_2 = 0,02\text{ A}$; $I_3 = 0,015\text{ A}$; $I_4 = 0,03\text{ A}$.

Je calcule I : au noeud B, additivité des intensités, $I = I_4 + I_3 = 0,015 + 0,03$; $I = 0,045\text{ A}$.



Additivité des tensions : $U_{AC} = U_{AN} + U_{NB} + U_{BC} = 9 - 1,5 - 3,7$; $U_{AC} = 3,8 \text{ V}$.

$U_{DC} = U_{DA} + U_{AC} = -1,3 + 3,8$; $U_{DC} = 2,5 \text{ V}$.

D_2 est un dipôle actif (générateur) : la flèche symbolisant l'intensité I_2 et la flèche symbolisant la tension U_{AD} ont le même sens.

D_3 est un dipôle récepteur : la flèche symbolisant l'intensité I_3 et la flèche symbolisant la tension U_{AD} sont de sens contraire.

D_4 est un dipôle récepteur : la flèche symbolisant l'intensité I_4 et la flèche symbolisant la tension U_{AC} sont de sens contraire.

D_1 est un dipôle récepteur : la flèche symbolisant l'intensité I_0 et la flèche symbolisant la tension U_{BN} sont de sens contraire.

Toutes les tensions ci-dessus sont calculées en prenant le point N comme origine des potentiels : $V_N = 0$

Potentiels des points N, A, B, C et D en prenant le point C comme origine des potentiels :

$V_C = 0$; $U_{AC} = V_A - V_C = 3,8 \text{ V}$ d'où $V_A = 3,8 \text{ V}$.

$U_{AD} = V_A - V_D = 1,3 \text{ V}$ d'où $V_D = 3,8 - 1,3$; $V_D = 2,5 \text{ V}$.

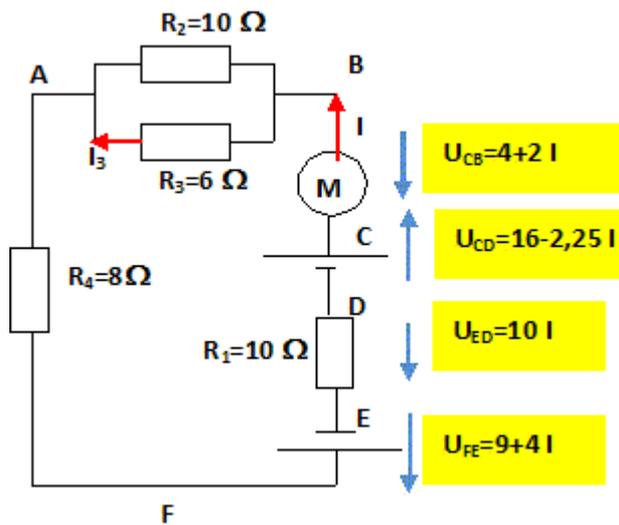
$U_{CB} = V_C - V_B = 3,7 \text{ V}$ d'où $V_B = -3,7 \text{ V}$.

$U_{BN} = V_B - V_N = 1,5 \text{ V}$ d'où $V_N = -3,7 - 1,5$; $V_N = -5,2 \text{ V}$.

Intensités :

Au noeud A, additivité des intensités : $I_0 + I_2 = I + I_3$; $I_2 = I + I_3 - I_0 = 0,09 + 0,07 - 0,13$; $I_2 = 0,03 \text{ A}$.

Au noeud D, additivité des intensités : $I_3 = I_2 + I_4$; $I_4 = 0,07 - 0,03$; $I_4 = 0,04 \text{ A}$.



Résistance équivalente à R_2 et R_3 en dérivation :

$$R = \frac{6 \cdot 10}{10 + 6} = 3,75 \text{ ohms.}$$

Le moteur tourne :

Calcul de l'intensité I :

Additivité des tensions : $U_{CD} = U_{CB} + U_{BA} + U_{AF} + U_{FE} + U_{ED}$.

$$16 - 2,25 I = 4 + 2I + 3,75 I + 8I + 9 + 4I + 10I$$

$$I = \frac{(16 - 4 - 9)}{(2 + 2,25 + 3,75 + 8 + 4 + 10)} ; I = 3 / 30 ; \mathbf{I = 0,1 A.}$$

Calcul de l'intensité I_3 : $U_{BA} = 3,75 \cdot 0,1 = 0,375 \text{ V}$;

$$U_{BA} = R_3 I_3 \text{ d'où } I_3 = 0,375 / 6 ; \mathbf{I_3 = 0,0625 A.}$$

Le moteur est bloqué : $U_{CB} = 2I$

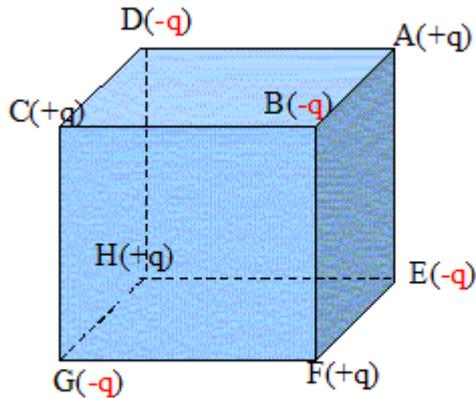
Calcul de la nouvelle intensité I :

Additivité des tensions : $U_{CD} = U_{CB} + U_{BA} + U_{AF} + U_{FE} + U_{ED}$.

$$16 - 2,25 I = 2I + 3,75 I + 8I + 9 + 4I + 10I$$

$$I = \frac{(16 - 9)}{(2 + 2,25 + 3,75 + 8 + 4 + 10)} ; I = 7 / 30 ; \mathbf{I = 0,23 A.}$$

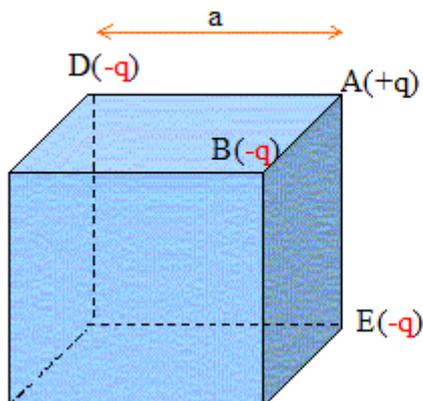
EXERCICE 53 : Energie électrostatique d'une distribution discrète de charges



Potential crée en A par la charge -q placée en B :

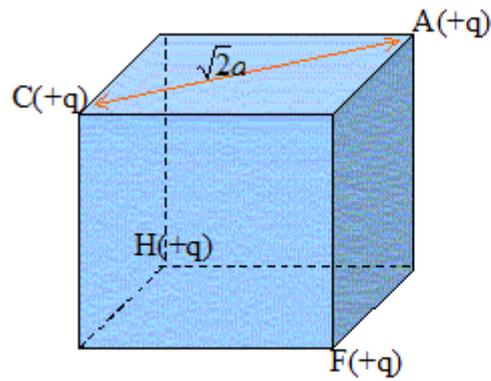
$V_B = 1 / (4\pi\epsilon_0) \cdot (-q)/a$ avec $a =$ coté du cube.

Potential crée en A par les charges placées en B, D et E :



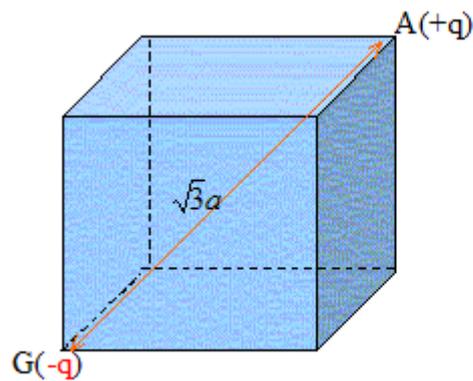
$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-3q)}{a}$$

Potential crée en A par les charges placées en C, F et H :



$$V_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(+3q)}{\sqrt{2}a}$$

Potential crée en A par la charge placée en G :



$$V_3 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-q)}{\sqrt{3}a}$$

Potential crée en A par les 7 autres charges :

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-3}{a} + \frac{3}{\sqrt{2}a} - \frac{1}{\sqrt{3}a} \right]$$

Potential crée en B par les 7 autres charges :

Un calcul identique au précédent conduit à :

Energie électrostatique de la charge +q placée en A dans le potentiel V_A créé par les autres charges :

$$E_A = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-3}{a} + \frac{3}{\sqrt{2}a} - \frac{1}{\sqrt{3}a} \right]$$

Energie électrostatique des 4 charges positives placées dans le potentiel V_A créé par les autres charges : $4 E_A$.

Energie électrostatique de la charge $-q$ placée en B dans le potentiel V_B créé par les autres charges :

$$E_B = \frac{-q^2}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{3}{a} - \frac{3}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{\sqrt{3}a} \right]$$

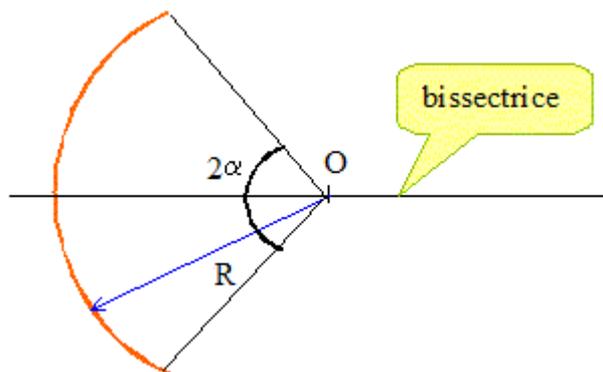
Energie électrostatique des 4 charges négatives placées dans le potentiel V_B créé par les autres charges : $4 E_B$.

Energie électrostatique totale :

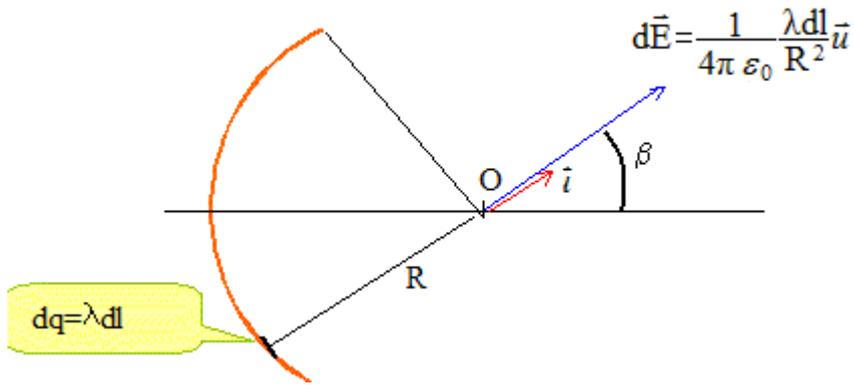
On fait la demi-somme : le terme 0,5 vient du fait que le terme $q_i q_j / (4\pi \epsilon_0 r_{ij})$ est compté deux fois (en se plaçant du côté de i et du côté de j).

EXERCICE 54 : champ et potentiel électrique crée en son centre par un arc de cercle ; crée en un point M par un cylindre uniformément chargé en surface.

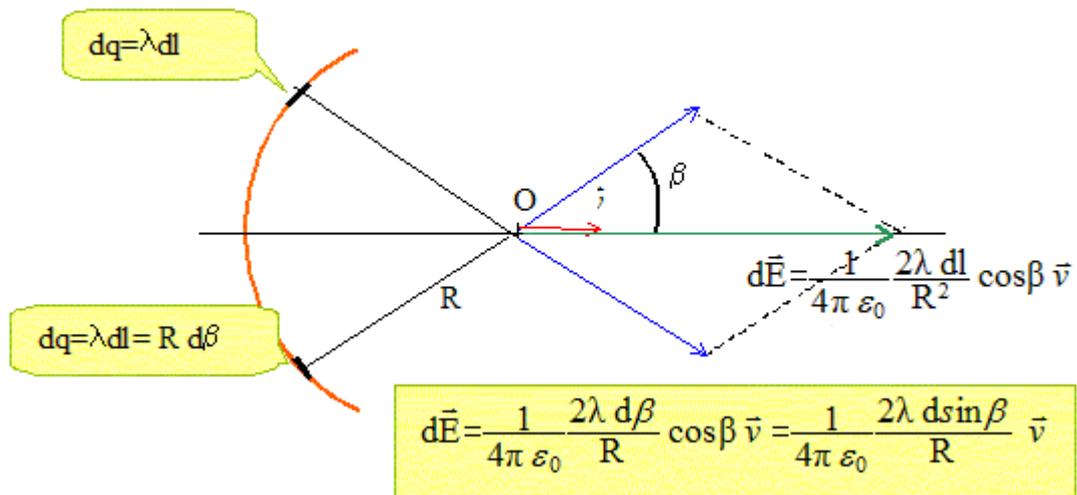
L'arc porte une densité de charge linéique λ constante.



Champ crée en O par un élément de longueur dl portant la charge $dq = \lambda dl$.



Champ crée en O par deux éléments de longueur dl portant la charge $dq = \lambda dl$, symétrique par rapport à la bissectrice.



Le champ résultant est porté par la bissectrice de l'angle.

Intégrer entre 0 et α :

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^\alpha \frac{2\lambda dsin\beta}{R} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\lambda sin\alpha}{R}$$

Potentiel crée en O par la charge ponctuelle $dq = \lambda dl$:

$$dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \lambda d\beta$$

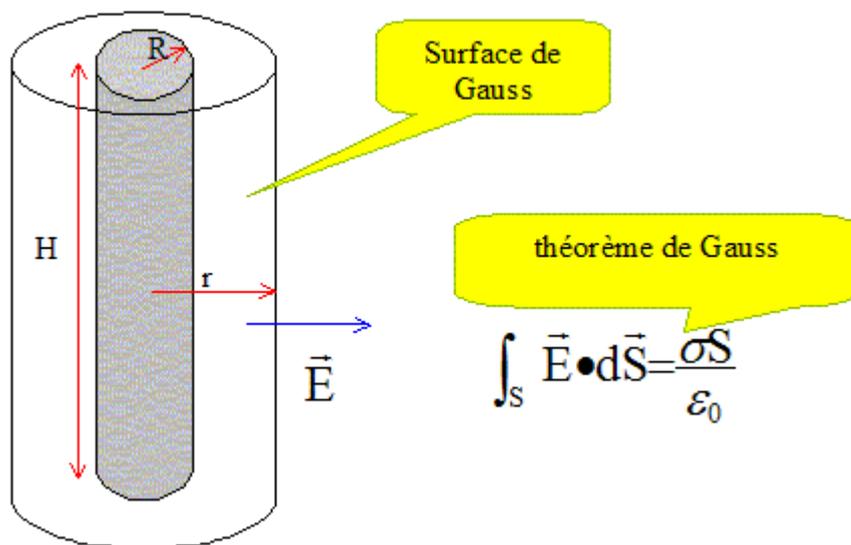
Intégrer entre 0 et 2α :

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \lambda \int_0^{2\alpha} d\beta = V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \lambda 2\alpha = \frac{\lambda \alpha}{2\pi \epsilon_0}$$

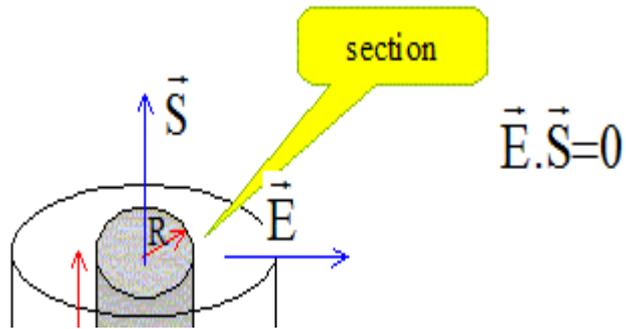
EXERCICE 55 : Champ électrique crée par un cylindre infini portant la charge surfacique σ .

Le champ électrique, en un point M d'un plan de symétrie du système de charges, appartient à ce même plan de symétrie.

Tout plan contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie et tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est également plan de symétrie (cylindre infini) donc le champ est radial.



Le flux du champ électrique à travers les deux sections est nul (champ perpendiculaire à la surface).



Flux du champ électrique à travers la surface latérale : $S_{\text{lat}} = 2\pi r H$

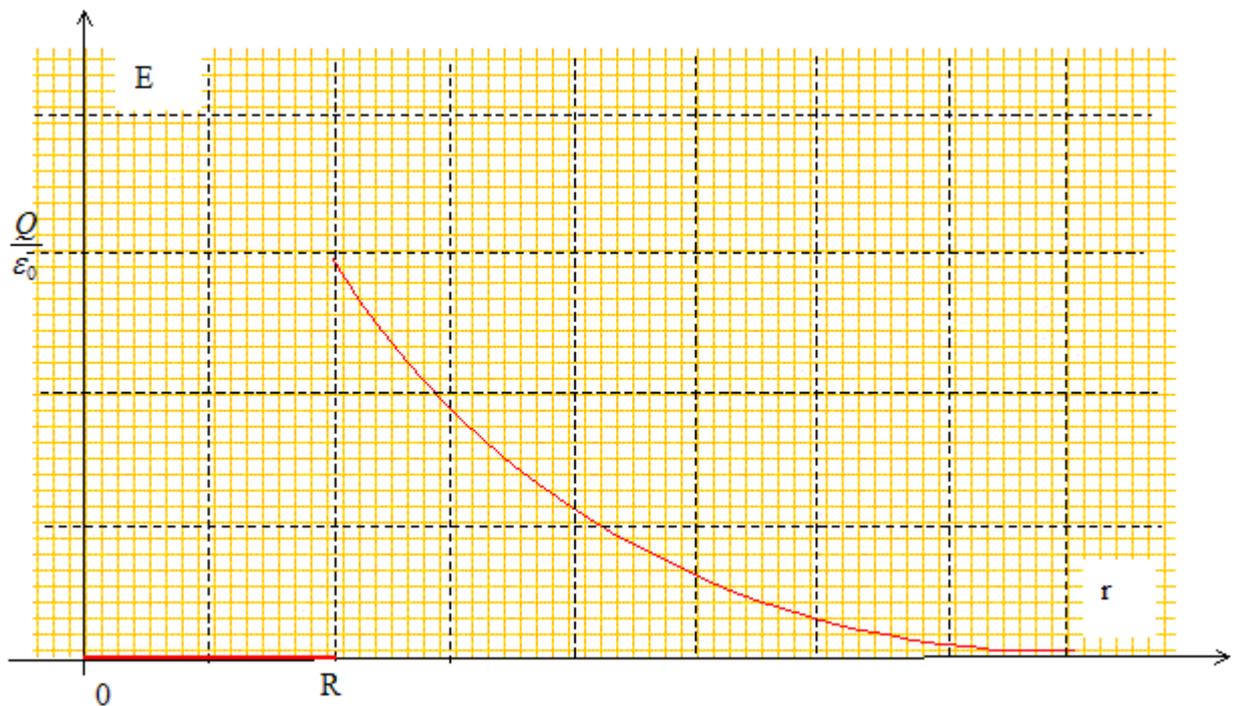
Charge totale contenue dans cette surface : $Q = \sigma 2\pi R H$.

Appliquer le théorème de Gauss :

$r > R$: $E 2\pi r H = \sigma 2\pi R H / \epsilon_0$.

$E = \sigma R / (r\epsilon_0)$.

$r < R$: $E 2\pi r H = 0$; **$E=0$.**



Potentiel :

On considère que le potentiel V est égal à V_0 sur l'axe du cylindre.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \Rightarrow V = -\int_0^r E dr$$

$r < R$: $E=0$; $V=V_0$.

$r > R$, $E = \sigma R / (r\epsilon_0)$; $V = -\sigma R / \epsilon_0 \ln r + Cte$

Comment trouver la constante d'intégration ?

Lors de la traversée de la surface du cylindre de rayon R , V est continu.

$V(r=R) = V_0 = -\sigma R / \epsilon_0 \ln R + Cte$

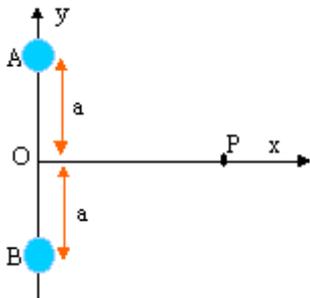
d'où $Cte = V_0 + \sigma R / \epsilon_0 \ln R$

$V = V_0 - \sigma R / \epsilon_0 \ln(r/R)$.

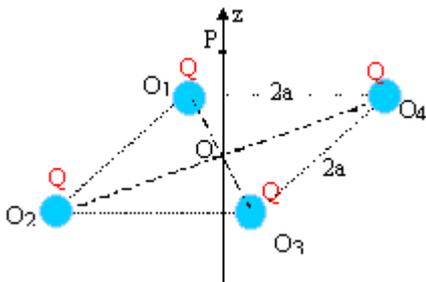


EXERCICE 56 : électrostatique

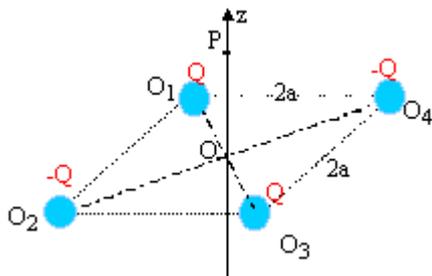
1. Une sphère de rayon b porte une charge positive Q répartie uniformément sur sa surface. En s'aidant du théorème de Gauss, calculer le potentiel V créée par la charge Q à l'intérieur de la sphère. L'origine des potentiels est prise à l'infini.
2. Deux sphères identiques du type précédent portent chacune la charge positive Q répartie uniformément sur leur surface. Leurs centres A et B distants de $2a$ ($a > b$) sont disposées sur l'axe Oy symétriquement par rapport à l'origine O . Une troisième charge $-2Q$ qui peut être considérée comme ponctuelle se trouve en O . Donner l'expression du vecteur champ électrostatique $\mathbf{E}(P)$ créée par les trois charges au point P de l'axe Ox d'abscisse x positive.



3. Quatre sphères identiques du type précédent portant la même charge positive Q sont placées aux sommets O_1, O_2, O_3, O_4 d'un carré de côté $2a$ ($a > b$). Donner l'expression du vecteur champ électrostatique $\mathbf{E}'(P)$ créée par les quatre charges au point P de l'axe Oz d'abscisse z .



4. Deux sphères identiques du type précédent centrées en O_1 et O_2 portent la charge positive Q ; deux autres sphères analogues centrées en O_3 et O_4 portent la charge négative $-Q$. Donner l'expression du vecteur champ électrostatique $\mathbf{E}''(P)$ créée par les quatre charges au point P de l'axe Oz d'abscisse z .



corrigé

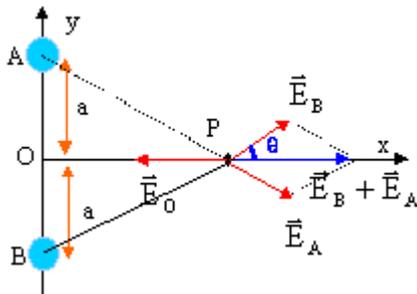
La distribution de charge a la symétrie sphérique : en conséquence le champ électrique \mathbf{E} est radial et sa valeur au point P ne dépend que de la distance OP. A l'extérieur de la sphère le potentiel et le champ électrique se calculent comme si toute la charge Q était placée au centre de la sphère.

le champ est nul à l'intérieur (absence de charge) ; il n'est pas défini à la surface de la sphère ; il subit une discontinuité à la traversée de cette surface chargée.

par contre, le potentiel est défini en tout point, y compris à la surface de la sphère : étant nul à l'infini, sa valeur sur la surface de la sphère est : $V = Q/(4\pi\epsilon_0) b^{-1}$.

point P extérieur aux sphères chargées: le champ électrique E est identique à celui créé par 3 charges ponctuelles.

Par symétrie le champ électrique total $\mathbf{E}(P)$ en P est porté par l'axe Ox.



$$OP=x ; AP=BP=(a^2+x^2)^{1/2} ;$$

$$\mathbf{E}_0(P) = -2Q/(4\pi\epsilon_0) x^{-2} \mathbf{u}_x ; \mathbf{E}_A(P) + \mathbf{E}_B(P) = 2Q/(4\pi\epsilon_0) (a^2+x^2)^{-2} \cos \theta \mathbf{u}_x ;$$

$$\text{avec } \cos \theta = x / (a^2+x^2)^{1/2} ;$$

$$\mathbf{E}_A(P) + \mathbf{E}_B(P) = 2Q x / (4\pi\epsilon_0) (a^2+x^2)^{-3/2} \mathbf{u}_x ;$$

$$\mathbf{E}(P) = 2Q / (4\pi\epsilon_0) [x (a^2+x^2)^{-3/2} - x^{-2}] \mathbf{u}_x ;$$

par symétrie le champ $\mathbf{E}'(P)$ est dirigé suivant Oz.

$$OO_1^2 = 2a^2 ; O_1P^2 = OO_1^2 + OP^2 = 2a^2 + z^2 ;$$

$$\text{champ créé par une charge en P (projection sur Oz) : } \mathbf{E}_1(P) = Q/(4\pi\epsilon_0) (2a^2 + z^2)^{-2} \cos \theta \mathbf{u}_z ;$$

$$\text{avec } \cos \theta = z / (2a^2+z^2)^{1/2} ; \theta \text{ angle formé entre OP et } O_1P$$

$$\mathbf{E}_1(P) = Q z / (4\pi\epsilon_0) (2a^2 + z^2)^{-3/2} \mathbf{u}_z ;$$

champ total en P : $\mathbf{E}'(P) = 4Q z / (4\pi\epsilon_0)(2a^2 + z^2)^{3/2} \mathbf{u}_z$;

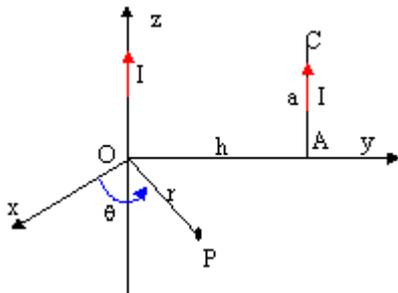
Le champ $\mathbf{E}_{13}(P)$ créé en P par les charges Q placées en O_1 et en O_3 est dirigé suivant Oz

Le champ $\mathbf{E}_{24}(P)$ créé en P par les charges Q placées en O_2 et en O_4 est dirigé en sens contraire de Oz.

ces deux champs ont même valeur, sont colinéaires et de sens contraire : le champ total $\mathbf{E}''(P)$ est nul

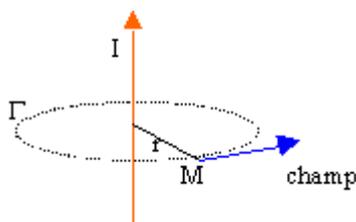
EXERCICE 57 :magnétostatique

1. Un fil rectiligne de longueur infinie et de section négligeable est disposé suivant l'axe Oz du repère. Il est parcouru par un courant continu d'intensité I qui circule dans le sens de z positifs. Déterminer le vecteur champ magnétique $\mathbf{B}(P)$ créée au point P du plan (xOy) repéré par ses coordonnées polaires r et θ . \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ sont les vecteurs de la base polaire de P.



2. Un second fil rectiligne de longueur a et de section négligeable est disposé dans le plan (xOy) selon le segment AC parallèle à Oz, à la distance h de cet axe. Il est parcouru par un courant continu d'intensité I.
 - Définir la résultante \mathbf{F} des forces de Laplace qui s'exercent sur le fil AC.
3. Déterminer le moment $\mathbf{M}(O)$ en O des forces de Laplace qui s'exercent sur le fil AC.
4. Déterminer dans ces conditions la distance b qui sépare le point A du point K de AC, point où la force unique \mathbf{F} peut être considérée comme appliquée à AC.

corrigé



le champ créé en M par le fil infini est orthoradial ; sa valeur ne dépend que de la distance OM.

On applique le [théorème d'Ampère](#) sur un contour circulaire, d'axe Oz, passant par M.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \text{th. d'Ampère} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Chaque élément de courant $I d\vec{l}$ du conducteur AC est soumis à la [force de Laplace](#) $d\vec{f}$:

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M) = Idz \vec{e}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi h} (-\vec{e}_x) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} dz \vec{e}_y$$

$$\vec{f} = \int_0^a d\vec{f} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \int_0^a dz \vec{e}_y = -\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi h} \vec{e}_y$$

Le moment en O de la force élémentaire $d\vec{f}$ est :

$$d\vec{M}(O) = O\vec{P} \wedge d\vec{f} = -(h\vec{e}_y + z\vec{e}_x) \wedge \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} dz \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} z dz \vec{e}_x$$

$$\vec{M}(O) = \int_0^a d\vec{M}(O) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \int_0^a z dz \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{4\pi h} \vec{e}_x$$

Le point K est tel que :

$$\vec{M}(O) = O\vec{K} \wedge \vec{f} \Rightarrow \frac{\mu_0 I^2 a^2}{4\pi h} \vec{e}_x = -b \vec{e}_x \wedge \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi h} \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I^2 ab}{2\pi h} \vec{e}_x \Rightarrow b = \frac{a}{2}$$

EXERCICE 58 : Moteur asynchrone

La plaque signalétique du moteur asynchrone entraînant le compresseur porte les indications suivantes : 400 V / 690 V ; 2,6 kW ; $\cos \varphi = 0,79$; 50 Hz ; 6A / 3,5 A ; 940 tr/min

Ce moteur est étudié en régime de fonctionnement nominal.

- Le moteur est alimenté par un réseau 230 V / 400 V. Quelle est la tension nominale aux bornes d'un enroulement du stator ?
 - Comment sont alors couplés les enroulements du stator ? Justifier.
 - L'intensité du courant en ligne vaut 6 A. Calculer l'intensité efficace du courant traversant un enroulement.
- Quelle est la vitesse de synchronisme de ce moteur ? Déterminer son nombre de paires de pôles et son glissement.
- Calculer la puissance absorbée par ce moteur.

4. Les pertes dans le fer et les pertes par effet Joule au stator valent respectivement : $P_{fs}= 200$ W et $P_{js}=190$ W. En déduire la puissance transmise au rotor et le moment du couple électromagnétique.
5. Vérifier que les pertes par effet Joule au rotor valent 175 W (environ).
6. On néglige les pertes dans le fer au rotor. En déduire les pertes mécaniques.
7. Quels sont le rendement et le moment du couple utile de ce moteur

corrigé

tension nominale aux bornes d'un enroulement du stator : 400 V

couplage les enroulements du stator : dans le couplage étoile, la tension aux bornes de chaque enroulement est égal à la tension simple 400 V alors que dans un couplage triangle, la tension aux bornes de chaque bobine serait 690 V; ce qui n'est pas prévu par le constructeur.

intensité efficace du courant traversant un enroulement : dans le couplage étoile, l'intensité efficace dans chaque enroulement est égale à l'intensité en ligne soit 6,0 A.

vitesse de synchronisme de ce moteur : $n_s =$ vitesse de rotation (tr/s) / nombre de paires de pôles avec $f = 50$ Hz

$$n_s = 50 / p \text{ tr/s ou } 50 \cdot 60 / p = 3000 / p \text{ tr/min}$$

Or la vitesse de rotation du moteur (940 tr/min) est très proche de la vitesse de synchronisme : d'où $n_s = 1000$ tr/min et $p = 3$.

glissement $g = (n_s - n) / n_s = (1000 - 940) / 1000 = 0,06$ (6%).

puissance absorbée par ce moteur : $P_{abs} = 3^{1/2} U I \cos\phi = 3^{1/2} \cdot 400 \cdot 6 \cdot 0,79 = 3,28$ kW.

puissance transmise au rotor : $P_{tr} = P_{abs} - P_{fs} - P_{js} = 3280 - 200 - 190 = 2,89$ kW.

moment du couple électromagnétique :

puissance électromagnétique $P_{ém} = (1 - g) P_{tr} = 0,94 \cdot 2,89 = 2,72$ kW

moment du couple $T = P_{ém} / (2\pi n)$ avec $n = 940 / 60 = 15,67$ tr/s ; $T = 2720 / (6,28 \cdot 15,67) = 27,6$ N m.

pertes par effet Joule au rotor : $g P_{tr} = 0,06 \cdot 2890 = 173$ W

pertes mécaniques : $P_m = P_{ém} - P_{utile}$ (P_{utile} est indiquée sur la plaque signalétique du constructeur)

$$P_m = 2720 - 2600 = 120 \text{ W}$$

rendement de ce moteur : $P_{utile} / P_{abs} = 2,6 / 3,28 = 0,79$ ou 79%

couple utile de ce moteur : $P_{utile} / (2\pi n)$ avec $n = 940 / 60 = 15,67$ tr/s ; $T = 2600 / (6,28 \cdot 15,67) = 26,4$ N m.

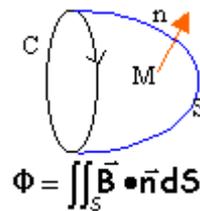
—

EXERCICE 59 : travail des forces magnétiques – inductances

Rappel de cours

expression du flux magnétique

cours 1



Soit un circuit (C), parcouru par un courant I, et placé dans un champ magnétique B. Soit une surface (S) s'appuyant sur (C).

La valeur du flux ne dépend pas de (S) mais seulement du contour (C)

son unité : le flux s'exprime en webers (Wb)

flux coupé:

Si le circuit précédent se déplace d'une position (1) où le flux est Φ_1 à une position (2) où le flux est Φ_2 .

flux coupé : $\Phi_2 - \Phi_1$

travail des forces de Laplace

Soit un circuit filiforme parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique B. Le circuit est soumis à une force de Laplace. Sous l'action de cette force, le circuit se déplace. Le travail de cette force est :

$I (\Phi_2 - \Phi_1)$.

Au cours d'un déplacement spontané, le circuit prend une position telle que le flux de B qui le traverse soit maximum

cours 2

inductance mutuelle de 2 solénoïdes

Une bobine comptant N_2 spires de section S_2 est centrée sur l'axe d'un solénoïde infiniment long comptant n_1 spires par mètre. Son axe fait un angle θ avec celui du solénoïde. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits.

Le champ magnétique B crée par le solénoïde parcouru par un courant I est :

$$B = \mu_0 n_1 I$$

Le flux traversant la bobine est alors :

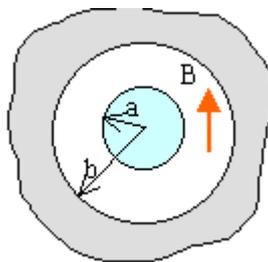
$$\Phi = N_2 B S_2 \cos(\theta)$$

$$\Phi = N_2 \mu_0 n_1 S_2 \cos(\theta) I$$

L'inductance mutuelle est : $N_2 \mu_0 n_1 S_2 \cos(\theta)$

inductance propre d'un cable coaxial

cours 3



Calculer l'inductance propre d'une longueur h d'un cable coaxial de longueur infinie de rayons a et b .

Supposons que le conducteur interne soit parcouru par un courant I, dirigé vers l'avant et que le conducteur externe soit parcouru par un courant I dirigé vers l'arrière.

Champ créé en un point distant de r de l'axe (d'après le th d'Ampère)

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \text{ d'où } B = \mu_0 I / (2\pi r)$$

flux de B à travers une section droite de largeur dr et de hauteur h

$$d\Phi = B h dr = \mu_0 I h dr / (2\pi r)$$

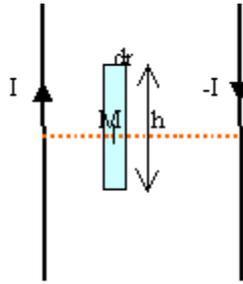
$$d\Phi = \mu_0 I h / (2\pi) d \ln(r)$$

$$\Phi = \mu_0 h / (2\pi) \ln(b/a) I$$

$$\text{inductance } L = \mu_0 h / (2\pi) \ln(b/a)$$

cours 4

inductance propre de 2 fils



On considère 2 conducteurs identiques parallèles, de longueur infinie de rayon a dont les axes sont distants de $b \gg a$. Calculer l'inductance propre de ce système.

champ créé par les 2 conducteurs en M:

$$B = \mu_0 I / (2\pi r) + \mu_0 I / (2\pi(b-r))$$

flux de B à travers une bande de largeur dr et de hauteur h parallèle aux fils :

$$d\Phi = B h dr = \mu_0 I h / (2\pi) [dr/r + dr/(b-r)]$$

en intégrant entre a et $b-a$

$$\Phi = \mu_0 h / (2\pi) \ln(b-a)/a I$$

$$\text{inductance } L = \mu_0 h / (2\pi) \ln(b-a)/a$$

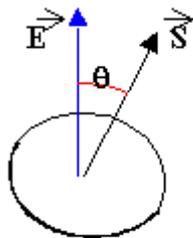
—

EXERCICE 60 : champ et potentiel électrique

Rappel de cours

cours 1

flux de vecteur - th. de Gauss



le vecteur surface S est perpendiculaire à la surface.

le flux Φ s'exprime en Vm

E en Vm^{-1} et S en m^2

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E S \cos(\theta)$$

th. de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_i + 0,5 \sum q_s)$$

qi charges intérieures à S

qs charges superficielles portées par S

ϵ_0 permittivité du vide = $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$. charges (coulomb)

potentiel électrique

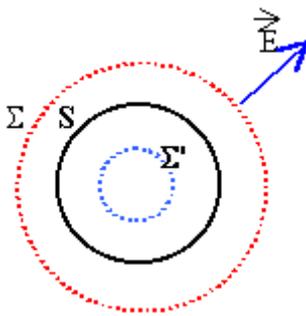
$$\vec{E} = - \text{grad } V$$

gradient d'un scalaire V: c'est un **vecteur** dont les composantes sont les dérivées partielles de V par rapport à x,y,z.

potentiel V en **volt**

application 1

Champ et potentiel électrique d'une sphère chargée en volume



La sphère S de rayon R porte la charge volumique uniforme ρ .

par raison de symétrie le champ est **radial**

champ électrique :(point extérieur)

flux envoyé à travers la sphère Σ de rayon r.

définition du flux : $\Phi = 4\pi r^2 E$

th. de gauss : charge intérieure à $\Sigma =$ charge de S = $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho$.

$$\Phi = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3 \rho$$

$$E = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

potentiel électrique :

$$E = -\frac{dV}{dr} \text{ ou } V = -\int \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + Cte$$

Q=charge de S ; la constante est nulle (potentiel nul si r tend vers l'infini)

tout ce passe comme si la charge était concentrée au centre de la sphère

point intérieur : même calcul

$E = \rho r / (3\epsilon_0)$; potentiel : $\rho / (2\epsilon_0)(-r^2/3 + R^2)$

application 2

champ et potentiel crée par un cylindre infini

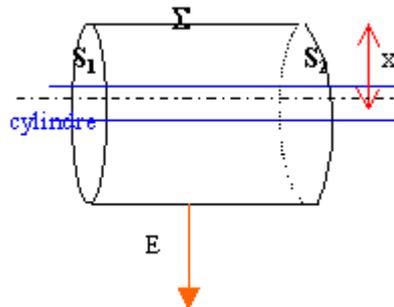
Calculer le champ et le potentiel créés par un cylindre infini, de rayon R, portant une densité volumique de charge ρ constante.

corrigé

flux de E à travers Σ .

En tout point de la surface latérale Σ , par raison de symétrie, le champ est radial et a même module. Le flux de ce vecteur à travers la surface latérale de longueur h est $E 2\pi x h$.

En tout point de S_1 ou S_2 le vecteur E est normale au vecteur surface : le flux de E est nul à travers les 2 bases.



charge

intérieure au cylindre Σ de rayon x :

$x < r : Q = \pi x^2 h \rho$.

$x \geq r : Q = \pi r^2 h \rho$.

th de Gauss :

$E 2\pi r h = Q / \epsilon_0$.

$x < r : E = x \rho / (2\epsilon_0)$

$x \geq r : E = r^2 \rho / (2\epsilon_0 x)$

Application 3

Le disque est uniformément chargé en surface , σ densité surfacique. Déterminer le champ et le potentiel crée en un point de l'axe du côté des charges.

corrigé

origine des potentiels, l'axe du cylindre

potentiel électrique

$E = -\frac{dV}{dx}$ ou $V = -\int \frac{\rho x}{2\epsilon_0} dx = \frac{-\rho x^2}{4\epsilon_0}$ si $x < r$

si $x > r : V = -r^2 \rho / (2\epsilon_0) \ln(x) + Cte$.

Comment trouver la constante d'intégration ?

lors de la traversée de la surface du cylindre de rayon r, V est continu.

$V = -r^2 \rho / (4\epsilon_0) (1 + 2\ln(x/r))$

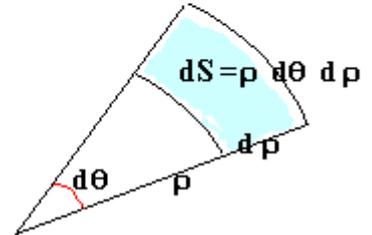
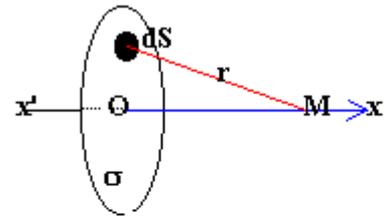
champ et potentiel crée par un disque

L'élément de surface dS du disque porte la charge $dq = \sigma dS$ et crée en M (OM=x) le potentiel dV

$$dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}$$

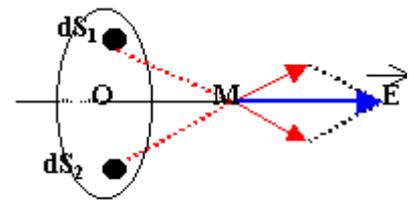
$$V = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2})$$



champ

$$E = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$



le champ résultant est dirigé vers le disque si la charge est négative.

dS_1 et dS_2 sont symétriques

application 4

Un petit disque au dessus d'une sphère

1. Calculer la charge totale Q et la densité superficielle σ d'une sphère conductrice S de rayon $R=50$ cm, portée au potentiel $V=100$ kV.
2. Un petit disque métallique ($r=1$ cm, $m=0,1$ g épaisseur négligeable) est placé au sommet de la sphère. A quel potentiel faut-il porter la sphère pour que le disque se soulève ?
3. La sphère est portée au potentiel $V_1=510$ kV. Le disque atteint une position d'équilibre à une hauteur z au dessus de la sphère. Calculer z .
4. Le disque est maintenu dans la position précédente. calculer les densités superficielles des 2 faces du disque.

corrigé

charge (coulomb) = surface sphère (m^2) fois densité superficielle (Cm^{-2})

$$Q=4\pi R^2\sigma.$$

$$\text{potentiel } V = Q / (4\pi\epsilon_0 R) = R\sigma / \epsilon_0$$

$$\text{d'où } \sigma = 10^5 * 8,85 \cdot 10^{-12} / 0,5 = 1,77 \cdot 10^{-6} Cm^{-2} \text{ et } Q = 5,56 \cdot 10^{-6} C$$

champ électrique et force

A l'intérieur d'un conducteur en équilibre le champ est nul.

A la surface d'un conducteur en équilibre le champ vaut σ/ϵ_0 .

Au voisinage, à l'extérieur de la surface d'un conducteur , le champ E est normale à la surface, a pour valeur σ/ϵ_0 . Il est dirigé vers la surface si les charges sont négatives et vers l'extérieur si elles sont positives.

Le disque prend une charge de densité σ (charge disque $q = \sigma \pi r^2$) au contact de la sphère. Ce disque est soumis à une force F colinéaire au champ et de même sens,

de valeur $qE = \sigma^2 \pi r^2 / (2\epsilon_0)$ avec $\sigma = V\epsilon_0 / R$

$$F = \epsilon_0 \pi r^2 V^2 / (2R^2)$$

Le disque se soulève dès que cette force est supérieure au poids du disque(mg).

d'où la valeur limite de V : $V^2 = 2mgR^2 / (\epsilon_0 \pi r^2)$

$$V = 425 \text{ kV}$$

Le disque se soulève d'une hauteur h au dessus de la sphère emportant la charge $\sigma \pi r^2$.

Compte tenu des dimensions du disque la charge de la sphère n'est guère modifiée. La sphère crée à cette hauteur h un champ E de valeur

$$E = 1 / (4\pi\epsilon_0) Q / (R+z)^2 = RV_1 / (R+z)^2$$

Le disque atteint une position d'équilibre lorsque la force électrique $\sigma \pi r^2 E$ est égal au poids du disque

$$\sigma \pi r^2 RV_1 / (R+z)^2 = mg \text{ avec } \sigma = V_1 \epsilon_0 / R$$

$$(R+z)^2 = \pi \epsilon_0 V_1^2 r^2 / (mg) \text{ d'où } z = 0,35 \text{ m}$$

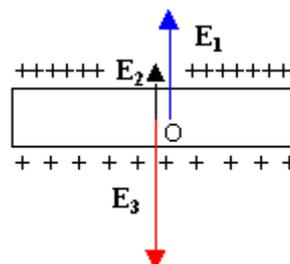
les charges

σ' : densité surfacique face supérieure

σ'' : densité surfacique face inférieure

$$\sigma' s + \sigma'' s = \sigma s$$

$$\sigma' + \sigma'' = \sigma = V_1 \epsilon_0 / R \quad (1)$$



les champs en O

E1 : du aux charges inférieures du disque mince : $\sigma' / (2\epsilon_0)$

E2 : du aux charges de la sphère : $RV_1 / (R+z)^2$

E3 : du aux charges supérieures du disque mince : $\sigma'' / (2\epsilon_0)$

à l'intérieur du disque , le champ est nul:

$$(-\sigma'' + \sigma') / (2\epsilon_0) + RV_1 / (R+z)^2 = 0 \quad (2)$$

résoudre le système de deux équations.

$$\sigma'' = 7,44 \mu\text{Cm}^{-2}.$$

$$\sigma' = 1,58 \mu\text{Cm}^{-2}.$$

Exercice 61 :le phénomène d'induction électromagnétique

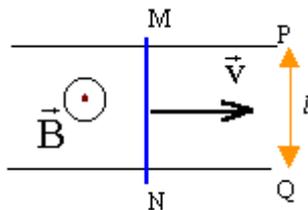
étude générale

perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ SI

1. Définir le flux du champ magnétique à travers un circuit électrique. Qu'appelle t-on flux coupé ?
2. Donner les expressions du champ électromoteur d'induction et de la fem induite. Préciser dans quelles conditions le phénomène d'induction électromagnétique peut se produire.

Manifestations de la fem d'induction :

On considère le circuit suivant :



Deux conducteurs parallèles fixes distants de l sont plongés dans un champ magnétique stationnaire uniforme B , vertical. Les deux rails sont horizontaux. La barre métallique MN , de résistance R , de masse m peut se déplacer sans frottements sur les rails. On lui impose un mouvement de translation uniforme, de vitesse v , parallèle aux rails.

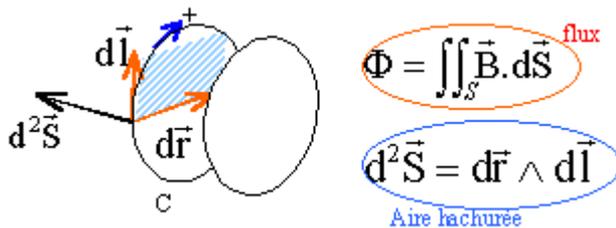
1. Déterminer le courant électrique parcourant MN dans les deux cas suivants:
 - les extrémités P et Q des rails sont mises en court circuit.
 - ces extrémités sont reliées par l'intermédiaire d'une source idéale de tension de fem $E > 0$

- ($E=V_P-V_Q$); dans les deux cas on assimile la résistance totale du circuit à R.
- Que se passe t-il lorsque le circuit est ouvert entre P et Q ?
2. Quelle force doit exercer l'opérateur sur la barre pour maintenir son mouvement uniforme dans les trois cas envisagés ci dessus ?
 3. Dans les deux premiers cas ci-dessus, effectuer un bilan énergétique où devront figurer :
 - la puissance fournie par l'opérateur pour déplacer la bare à la vitesse v;
 - la puissance électrique éventuellement fournie par la source de tension
 - la puissance dissipée par effet joule dans le circuit.
 4. Dans le second cas envisagé (présence de la source de tension) on suppose maintenant que l'opérateur n'agit plus sur la barre. Celle ci est immobile à l'instant $t=0$. Déterminer l'évolution de sa vitesse au cours du temps. Tracer la courbe correspondante.

corrigé

le vecteur surface est orienté d'après le sens de parcours choisi sur le contour C.

Soit une surface s'appuyant sur le contour C. Le flux du champ magnétique est conservatif et ne dépend pas du choix de la surface; ce flux dépend du contour C.



un petit élément noté dl d'un circuit se déplaçant de dr, balaie la surface hachurée ci dessous. Le flux coupé par l'élément de circuit au cours du déplacement s'exprime par :

$$\delta^2 \Phi_c = \vec{B} \cdot d^2 \vec{S}$$

Le champ électromoteur est composé de deux termes :

- le champ électromoteur de Neuman : *"il y a apparition d'un courant induit dans un circuit fermé indéformable, immobile plongé dans un champ magnétique variable"*.
- le champ électromoteur de Lorentz : *"il y a apparition d'un courant induit dans un circuit fermé déformé ou déplacé plongé dans un champ magnétique constant"*.

La fem induite e associé au champ électromoteur est égale à la circulation du champ électromoteur sur le circuit C.

$$\vec{E}_m = \underbrace{-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Neuman}} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{Lorentz}} \quad e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

deux cas à étudier:

- Neumann (circuit fixe et champ variable)

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

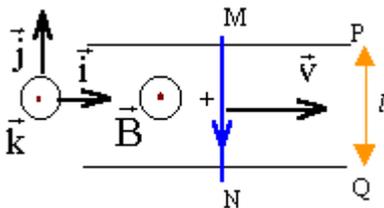
Loi de Faraday

- Lorentz (circuit mobile et champ magnétique constant)

$$e = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} = \frac{\oint_C (d\vec{r} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}}{dt} = - \frac{\oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{r} \wedge d\vec{l})}{dt} = - \frac{\delta\Phi_c}{dt}$$

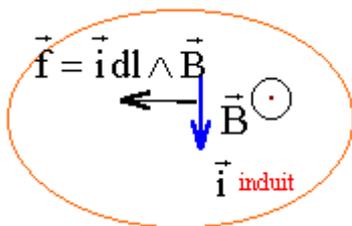
Flux coupé

fem induite:



$$e_{MN} = - \frac{\delta\Phi_c}{dt} = \int_M^N (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = lBv$$

Le sens du courant induit est tel que par ces effets électromagnétiques il s'oppose au déplacement de la barre. La force de Laplace induite est colinéaire à la vitesse mais de sens contraire : d'où le sens du courant induit i (sens positif choisi)



P et Q en court circuit : écrire la loi d'Ohm $i = e/R = Blv / R$.

entre P et Q un générateur de fem E : écrire la loi de Pouillet $i = (e+E) / R = (Blv + E) / R$

P et Q ouvert : intensité nulle , il apparaît entre les points P et Q la fem induite e

force exercée par l'opérateur :

le principe d'inertie indique que la barre est pseudo isolée (somme des forces nulles), le mouvement de MN étant rectiligne uniforme, le référentiel terrestre d'étude étant galiléen.

Le poids de la barre est opposé à l'action des rails sur de la barre MN.

La barre MN est soumise à la force de Laplace et à la force exercée par l'opérateur : ces deux forces sont opposées.

la force exercée par l'opérateur est colinéaire au vecteur vitesse et à le sens de la vitesse.

$$F = Bil.$$

P et Q en court circuit : $F = B(Blv/R)l = B^2l^2v/R$

entre P et Q un générateur de fem E : $F = B((Blv + E) / R)l = B^2l^2v/R + BEl/R$

P et Q ouvert : $F=0$ car l'intensité est nulle.

bilan énergétique :

P et Q en court circuit :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Puissance (W) N m/s

puissance fournie par l'opérateur : $P_o = (Blv)^2 / R$

puissance dissipée par effet Joule : $P_J = Ri^2 = (Blv)^2 / R$

ces deux puissances sont égales : donc l'énergie est conservée

entre P et Q un générateur de fem E :

puissance fournie par l'opérateur : $P_o = (Blv)^2 / R + EBlv/R$

puissance dissipée par effet Joule : $P_J = Ri^2 = (E+Blv)^2 / R$

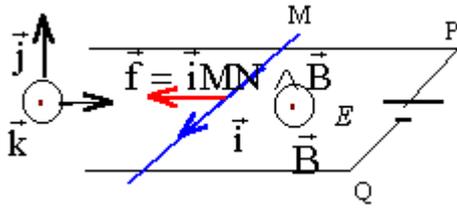
puissance délivrée par la source : $P = Ei = E (E+Blv)/R$

$P_o + P = P_J$; conservation de l'énergie

EXERCICE 62 : barre livrée à elle même :

appliquer le théorème du centre d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

la barre est soumise à son poids, à l'action des rails opposées au poids tant qu'il y a contact et à la force de Laplace.



Projection sur l'axe Ox : $m \frac{dv}{dt} = - (EBl + B^2 l^2 v) / R$

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{R} v = - EBl / R$$

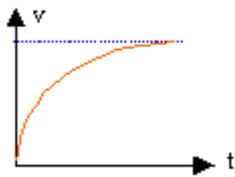
la vitesse limite est une solution particulière de cette équation : $v_{lim} = E / (Bl)$.

solution générale de l'équation sans second membre : $v = A \exp (-B^2 l^2 / (mR) t)$

solution générale : $v = A \exp (-B^2 l^2 / (mR) t) + E / (Bl)$.

à $t=0$, la vitesse est nulle d'où $A = -E / (Bl)$

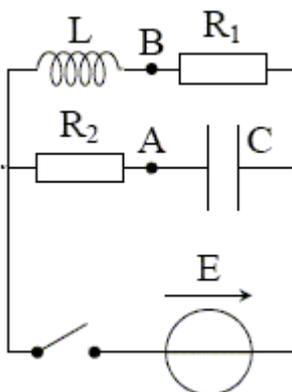
$$v = E / (Bl) (1 - \exp (-B^2 l^2 / (mR) t)).$$



EXERCICE 63 : Dipôle RLC, montage en parallèle

On considère le montage ci-dessous.

Au début de l'expérience, on laisse le circuit assez longtemps avec l'interrupteur ouvert. A $t=0$, on ferme l'interrupteur.



Que peut-on dire de l'état du circuit (bobine et condensateur) juste avant la fermeture de l'interrupteur. Justifier.

Le condensateur est déchargé (tension nulle à ces bornes).

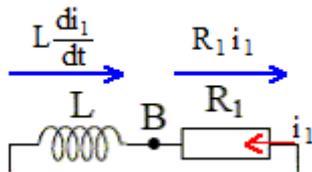
La bobine ne stocke aucune énergie : l'intensité du courant est nulle.

Lors des échanges d'énergie entre condensateur et bobine, l'énergie stockée par le condensateur et la bobine est dissipée par effet joule dans les résistors R_1 et R_2 .

Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant qui traverse le générateur.

On note avec l'indice 1 l'intensité qui traverse la branche contenant la bobine, avec l'indice 2 celle qui traverse la branche contenant le condensateur, i celle traversant le générateur.

Additivité des intensités : $i = i_1 + i_2$.



additivité des tensions : $E = L di_1/dt + R_1 i_1$.

$di_1/dt + R_1/L i_1 = E/L$; on pose $\tau_1 = L/R_1$.

$di_1/dt + 1/\tau_1 i_1 = E/L$. (1)

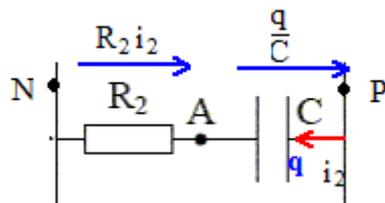
solution de cette équation différentielle sans second membre : $i_1 = A \exp(-t/\tau_1)$

solution particulière de (1), régime permanent : $I_1 = E/R_1$.

solution générale de (1) : $i_1 = A \exp(-t/\tau_1) + E/R_1$.

Condition initiale $i_1 = 0$ d'où : $0 = A + E/R_1$; $A = -E/R_1$.

$i_1 = E/R_1 (1 - \exp(-t/\tau_1))$.



$i_2 = dq/dt$.

additivité des tensions : $E = q/C + R_2 i_2$.

$E = q/C + R_2 dq/dt$.

$q/(R_2 C) + dq/dt = E/ R_2$; on pose $\tau_2 = R_2 C$

$$q/\tau_2 + dq/dt = E/R_2 \quad (2)$$

solution de cette équation différentielle sans second membre : $q = B \exp(-t/\tau_2)$

solution particulière de (2), régime permanent, condensateur chargé : $Q = CE$.

solution générale de (21) : $q = B \exp(-t/\tau_2) + CE$.

Condition initiale $q = 0$ d'où : $0 = B + CE$; $B = -CE$.

$$q = CE (1 - \exp(-t/\tau_2)).$$

Or $i_2 = dq/dt$ d'où $i_2 = CE/\tau_2 \exp(-t/\tau_2)$

$$i_2 = E/R_2 \exp(-t/\tau_2).$$

$$i = i_1 + i_2 = E/R_1 (1 - \exp(-t/\tau_1)) + E/R_2 \exp(-t/\tau_2).$$

A quelle condition cette intensité est-elle indépendante du temps ?

En régime permanent l'intensité est indépendante du temps et vaut $I = E/R_1$.

En régime transitoire :

$$E/R_1 \exp(-t/\tau_1) = E/R_2 \exp(-t/\tau_2)$$

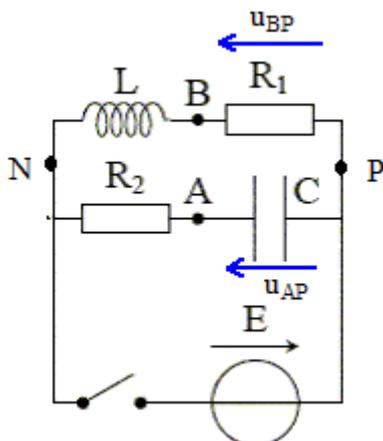
$$R_2/R_1 = \exp(-t/\tau_2) \exp(t/\tau_1)$$

$$\ln(R_2/R_1) = -t/\tau_2 + t/\tau_1 = t(1/\tau_1 - 1/\tau_2)$$

soit à la date $t = \ln(R_2/R_1) / (1/\tau_1 - 1/\tau_2)$

A quelle condition la tension $u(t) = V_A(t) - V_B(t)$ est-elle nulle en permanence ?

$$u(t) = u_{AB} = u_{AP} + u_{PB}.$$



$$u(t) = -q/C + R_1 i_1 = 0$$

$$q/C = R_1 i_1$$

$$R_1 i_1 = E (1-\exp(-t/\tau_1)) ; q /C=E (1-\exp(-t/\tau_2)).$$

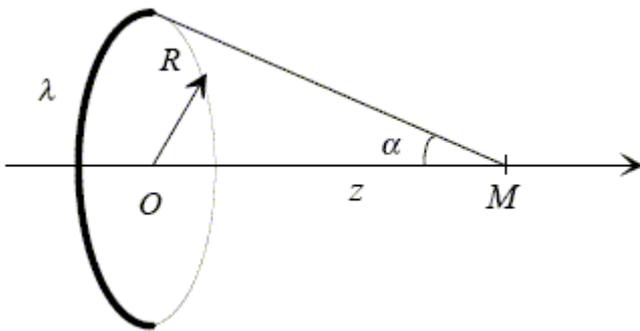
$$1-\exp(-t/\tau_1) = 1-\exp(-t/\tau_2) ; \exp(-t/\tau_2) ; t/\tau_1 = t/\tau_2.$$

$$\tau_1 = \tau_2 ; L/R_1 = R_2 C.$$

EXERCICE 64 : Champ et potentiel électrostatiques.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On considère une **spire circulaire** de centre O, de rayon R et d'axe dirigé par $\mathbf{u}_z = \mathbf{k}$ portant la densité linéique de charge $\lambda > 0$.



Montrer qu'en tout point de l'axe, défini par $OM = z$ ($z > 0$), le champ \mathbf{E} s'écrit :

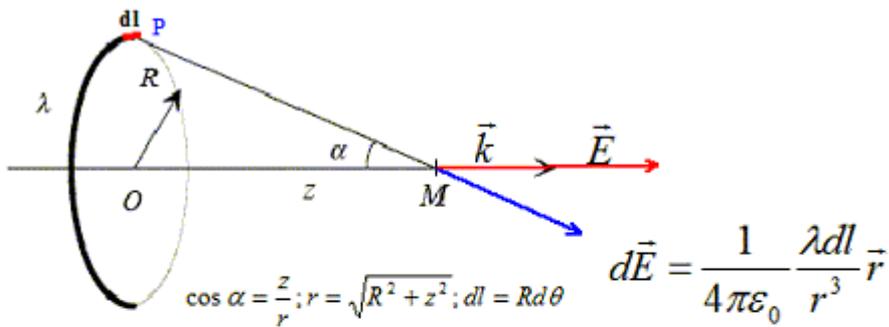
$$\mathbf{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x$$

\mathbf{k} est un vecteur unitaire porte par l'axe Oz.

Tout plan défini par le point M et un diamètre de la spire ne modifie pas la distribution de la charge :

\mathbf{E} appartient à l'intersection de tous ces plans, c'est à dire que \mathbf{E} est porté par l'axe Oz.

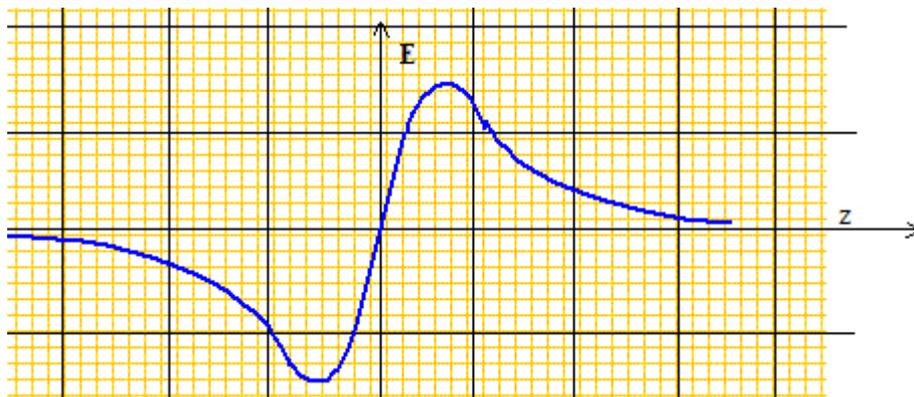
Dans une symétrie par rapport au plan contenant la spire, z devient -z : donc $E(-z) = -E(z)$.



$$\vec{E} \cdot \vec{k} = \int_{\text{spire}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{k} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{r^2} \cos\alpha = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{r^2} \cos\alpha$$

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{r^2} \cos\alpha = \frac{z}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{r^3} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Représenter sur un dessin les vecteurs $E(x)$ et $E(-x)$. Ces deux vecteurs sont de sens contraire.



Etablir l'expression du potentiel $V(M)$ pour $x > 0$.

Rechercher une primitive de E ($E = -\text{grad } V$) : on pose $u = R^2 + z^2$: $du = 2z dz$.

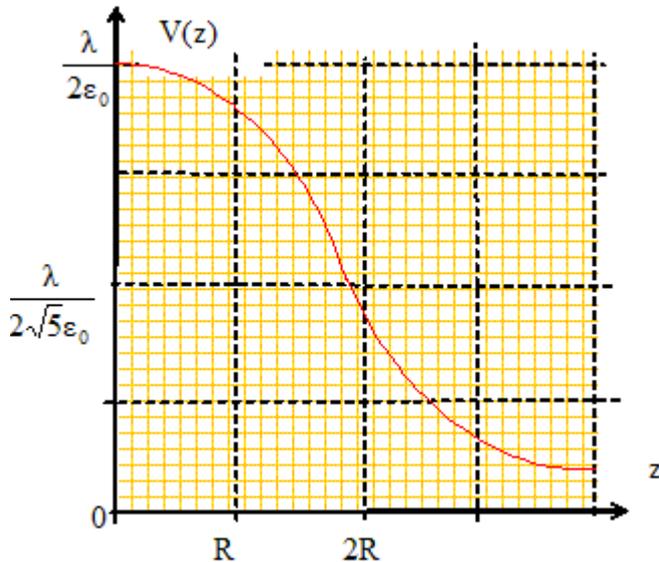
$$\frac{z dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{0,5 du}{u^{3/2}} ; \text{ primitive : } -u^{-0,5} = \frac{-1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Intégrer entre $x=0$ et l'infini ; la constante d'intégration est telle que le potentiel soit nul à l'infini.

$$V(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

Tracer $E(z)$ et $V(z)$ quel que soit x réel. $E(z)$ et $V(z)$ sont-elles des fonctions continues en O ? Justifier.

$V(z)$ est toujours une fonction continue ; $E(z)$ est également continue : pas de traversée de surface chargée.



Disque portant une charge surfacique .

O : centre du disque ; R : rayon du disque ; $\sigma > 0$: charge surfacique..

Montrer qu'en tout point de l'axe, défini par OM =x (x >0) , le champ E s'écrit :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_x$$

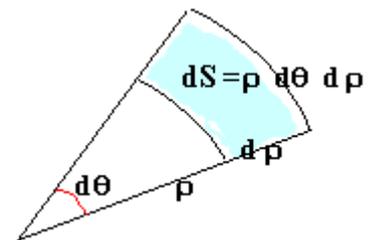
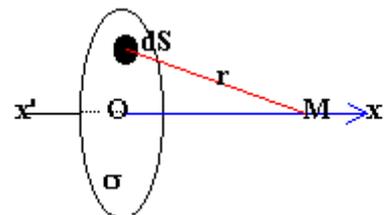
Etablir l'expression du potentiel V(M) pour x>0.

L'élément de surface dS du disque porte la charge dq = σ dS et crée en M (OM=x) le potentiel dV

$$dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}$$

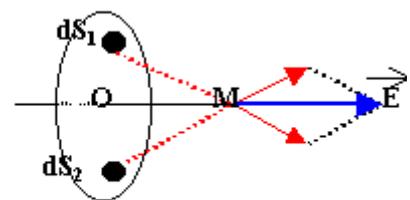
$$V = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2} \right)$$



champ

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$



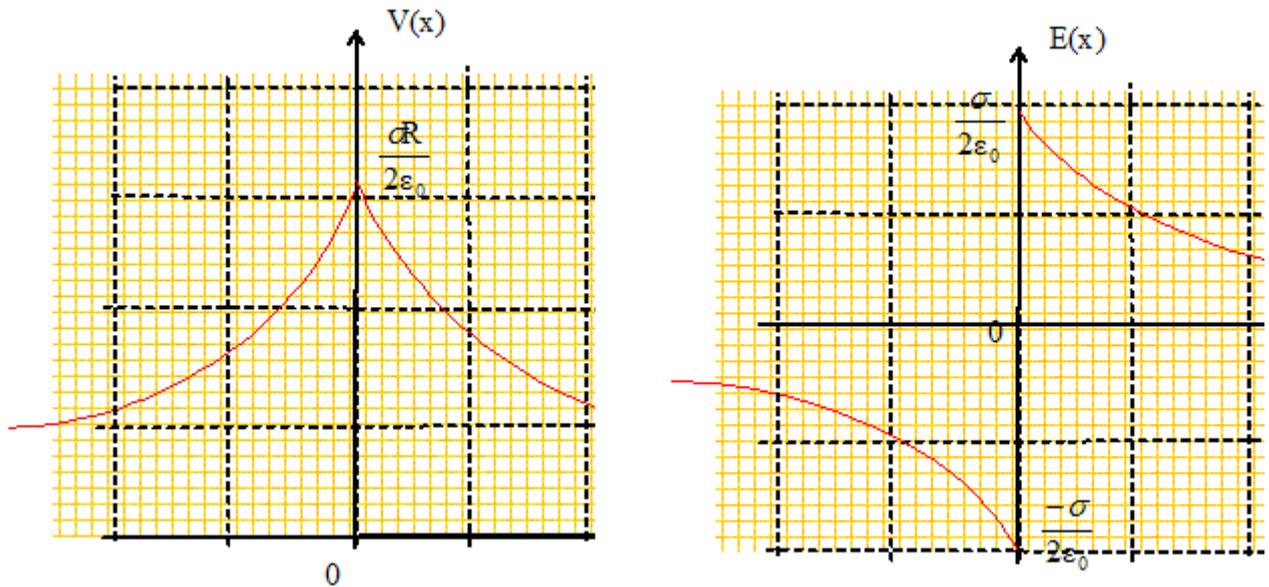
dS_1 et dS_2 sont symétriques

le champ résultant est dirigé vers le disque si la charge

est négative.

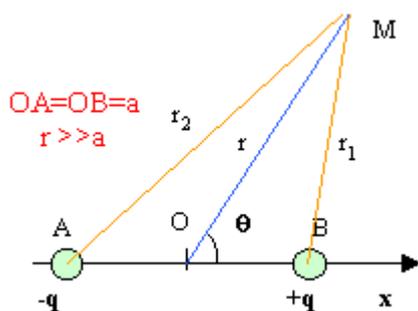
Tracer $E(x)$ et $V(x)$ quel que soit x réel. $E(x)$ et $V(x)$ sont-elles des fonctions continues en O ? Justifier.

La composante normale du champ subit une discontinuité à la traversée du disque chargé ; le potentiel est une fonction continue.



On considère deux disques D_1 et D_2 , de même rayon R , chargés en surface. D_1 est centré en O_1 tel que $x_{O_1} = -\frac{1}{2}a$ et porte la densité $-\sigma$. D_2 est centré en O_2 tel que $x_{O_2} = +\frac{1}{2}a$ et porte la densité $+\sigma$.

Montrer que pour $x \gg a$ et $x \gg R$, la distribution est équivalente à un dipôle électrostatique placé en O .



Le potentiel crée par le dipole en M est :

$$V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

utiliser le théorème d'Al Kashi dans les triangles OBM et OAM en remarquant que $\cos \theta = -\cos$

$$(\pi - \theta)$$

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta$$

mettre r^2 en facteur commun

et effectuer un développement limité au premier ordre

$$r_1^{-1} = r^{-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-0.5} \approx r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$r_2^{-1} = r^{-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 + 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-0.5} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2a \cos \theta$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

expression du gradient en coordonnées polaires

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

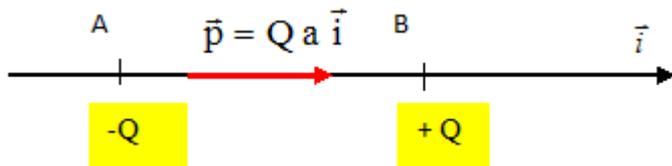
$$E_r = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2 \cos \theta \text{ et } E_\theta = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta$$

Montrer que le moment dipolaire de la distribution formée par les deux disques vaut :

$$\mathbf{p} = \pi R^2 \sigma a \mathbf{u}_x.$$

On appelle dipôle électrostatique l'ensemble de deux charges ponctuelles opposées situées à une distance "a" l'une de l'autre. La distance "a" reste petite par rapport à la distance où l'on étudie les effets des deux charges.

On appelle moment dipolaire, le vecteur \mathbf{p} . dans ce cas $Q = \pi R^2 \sigma$.



Exprimer $E(z)$ pour un point M de l'axe dans le cas de cette approximation dipolaire.

dans les expressions ci-dessus remplacer l'angle θ par la valeur zéro.

Retrouver cette expression à partir d'un développement limité.

EXERCICE 65/Plan infini portant une charge surfacique .

$\sigma > 0$: charge surfacique.

Montrer qu'en tout point de l'axe, défini par $OM = x$ ($x > 0$), le champ E s'écrit :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x$$

La distribution de charge est **invariante par translation** suivant Ox : le champ ne dépend pas de la variable x.

La distribution de charge est **invariante par translation** suivant Oy : le champ ne dépend pas de la variable y.

La distribution de charge est **invariante par translation** suivant Oz : le champ ne dépend pas de la variable z.

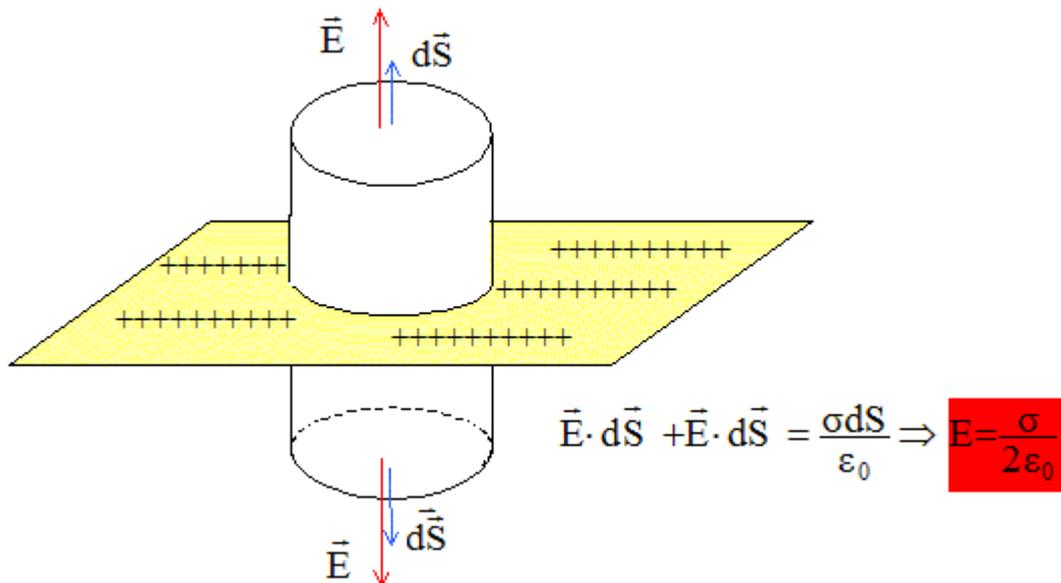
La distribution de charge est **invariante par rotation** de l'axe Oz : le champ ne dépend pas de l'angle θ .

Le champ électrostatique ne dépend pas des variables x, y et z.

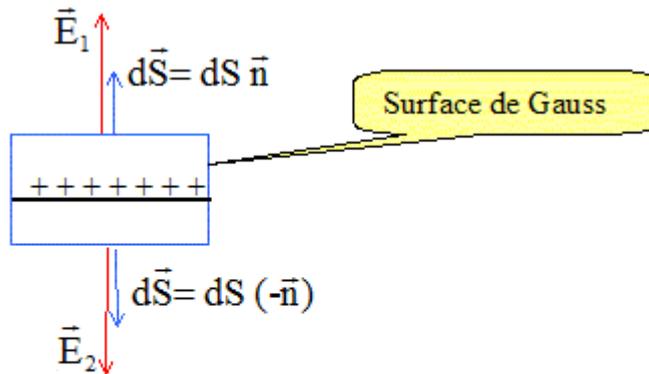
Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de charge : le champ électrostatique est donc porté par l'axe Oz.

Appliquer le théorème de Gauss : la surface de Gauss est un cylindre de section dS .

Le flux du champ est nul à travers la surface latérale du cylindre, celle-ci étant perpendiculaire au champ.



Que valent $E(0)$ et $E(x < 0)$.



$$\vec{E}_1 \cdot dS \vec{n} + \vec{E}_2 \cdot dS (-\vec{n}) = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

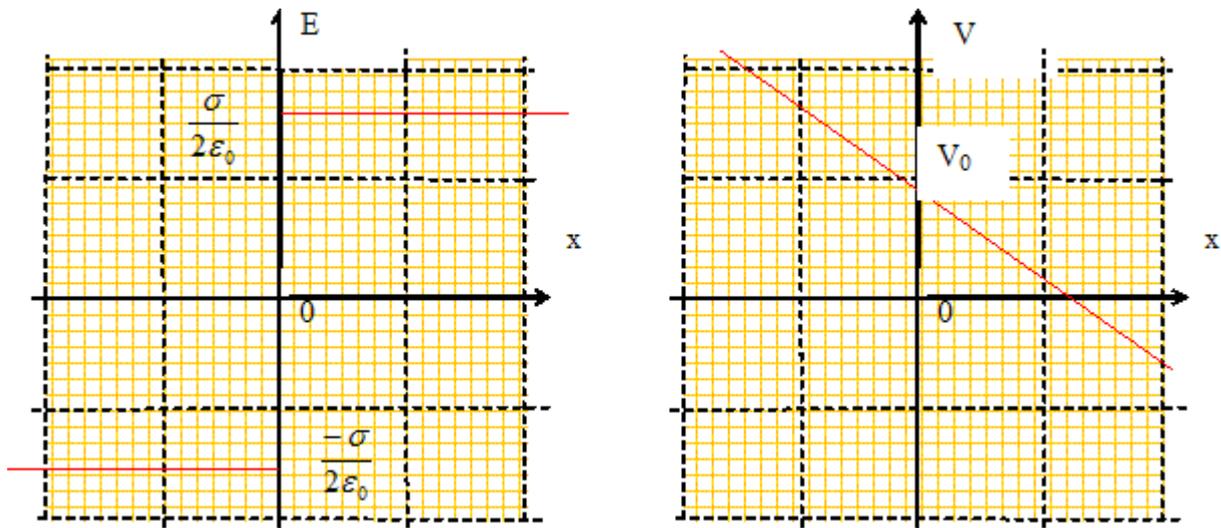
Le champ subit une discontinuité à la traversée du plan.

Etablir l'expression du potentiel $V(x)$.

Rechercher une primitive de E ($E = -\text{grad } V$) : on note V_0 le potentiel du plan.

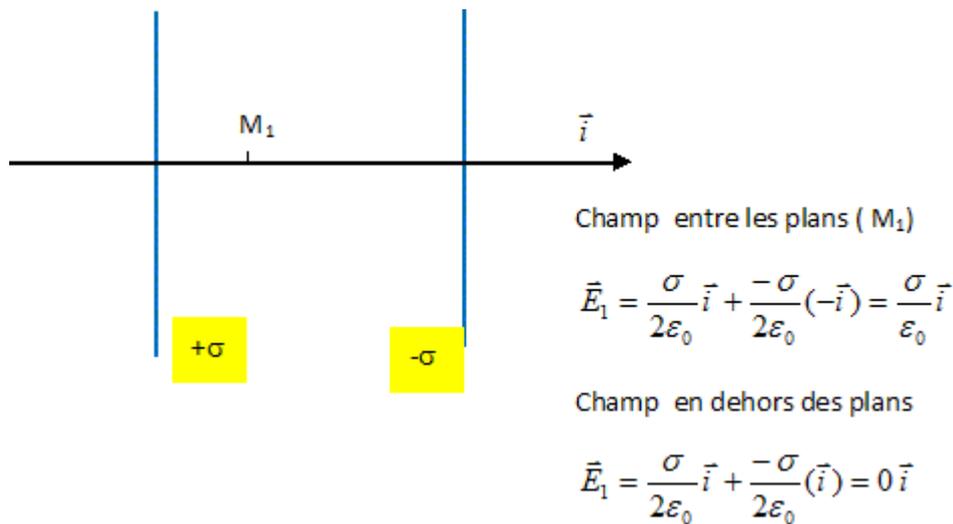
$$V = V_0 - \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}$$

Tracer $E(x)$ et $V(x)$ quel que soit x réel.



On étudie à présent la distribution constituée de deux plans infinis parallèles perpendiculaires à l'axe x. L'un portant la charge surfacique $-\sigma$, placé en O_1 , l'autre portant la charge surfacique $+\sigma$, placé en O_2 . Cet ensemble définit un condensateur plan, dont les plans sont les armatures.

Calculer $U = V(O_2) - V(O_1)$.



On déduit le potentiel par intégration ($\mathbf{E} = -\text{grad } V$).

$$V(O_2) = V_0 - \frac{\sigma x(O_2)}{\epsilon_0} ; V(O_1) = V_0 - \frac{\sigma x(O_1)}{\epsilon_0} ; U = V(O_2) - V(O_1) = \frac{\sigma [x(O_1) - x(O_2)]}{\epsilon_0}$$

Sachant que « $Q = CU$ », calculer C , la capacité du condensateur par unité de surface des armatures, en fonction de a et de ϵ_0 .

$a = x(O_1) - x(O_2)$; $Q = \sigma$, charge par unité de surface.

$$C = Q = \sigma \epsilon_0 ; C = \epsilon_0$$



L'unité du Système international pour ϵ_0 est le « Farad. mètre⁻¹. ». **Commenter.**

La capacité par unité de surface est d'autant plus grande que les plaques sont plus proches (a plus petit).

Mais en rapprochant les plaques, il ne faut pas trop augmenter U, car il y a un risque de "claquage" du condensateur.

Cette distribution peut-elle être assimilée à un dipôle électrostatique? Justifier.

Non : un dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges ponctuelles opposées, situées à une distance **a** l'une de l'autre.

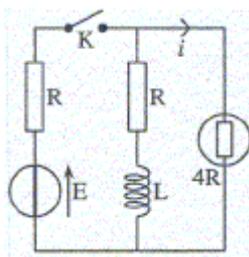
Un plan infini chargé ne peut pas être assimilé à une charge ponctuelle.

Les condensateurs réels ont des dimensions finies.

En quoi l'hypothèse «plan infini» simplifie-t-elle le calcul ?

On peut utiliser les symétries (voir ci-dessus).

EXERCICE 66 RLC



La résistance de la lampe est $4R$.

Avant que l'on ne ferme l'interrupteur K, le circuit est "abandonné" pendant suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint. A $t=0$, on ferme K.

Décrire l'état du circuit à $t=0^-$, juste avant la fermeture de K.

L'intensité est nulle dans tous les dipôles.

La tension aux bornes de l'interrupteur K est égale à la tension E aux bornes du générateur.

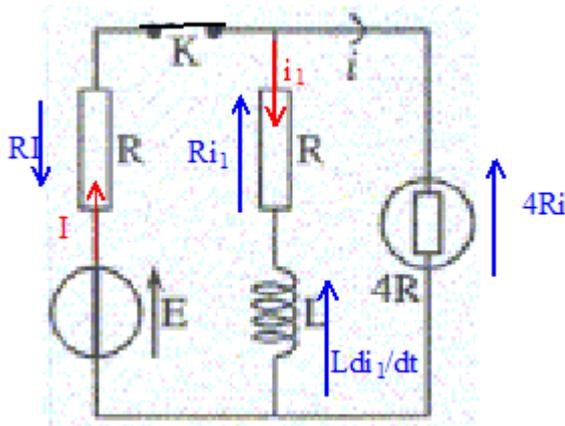
Déterminer l'intensité $i(0^+)$ qui circule dans la lampe juste après la fermeture de K.

La branche contenant la bobine d'inductance L n'est traversée par aucun courant . Cette bobine introduit un retard à l'établissement du courant dans cette branche.

Le générateur est en série avec un conducteur ohmique de résistance 5 R.

L'intensité qui traverse la lampe vaut $i(0^+) = E/(5R)$.

Calculer l'intensité du courant $i(t)$ dans la lampe pendant le régime transitoire ($t > 0$)



Loi des noeuds : $I = i + i_1$.

additivité des tensions : $E - RI = 4Ri = Ri_1 + L di_1/dt$.

or $i_1 = I - i$ d'où $di_1/dt = dI/dt - di/dt$.

$E - RI = 4Ri$ donne $dI/dt = -4di/dt$

par suite $di_1/dt = -5L di/dt$.

$4Ri = Ri_1 + L di_1/dt$ s'écrit : $4Ri = R(I - i) - 5L di/dt$.

$E - RI = 4Ri$ donne $I = E/R - 4i$ d'où : $4Ri = R(E/R - 5i) - 5L di/dt$.

$9R i + 5L di/dt = E$; $di/dt + 9R/(5L) i = E/(5L)$. (1)

On pose $\tau = L/(4R)$

solution générale de cette équation sans second membre : $i = A \exp(-t/\tau)$

solution particulière de (1) : $i = E/(9R)$

solution générale de (1) : $i = E/(9R) + A \exp(-t/\tau)$

à $t=0^+$, $i = E/(5R)$ d'où $E/(5R) = E/(9R) + A$; $A = 4E/(45R)$

$i = E/(9R) + 4E/(45R) \exp(-t/\tau)$

$$i = E/(9R) (1+ 4/5\exp(-t/\tau)).$$

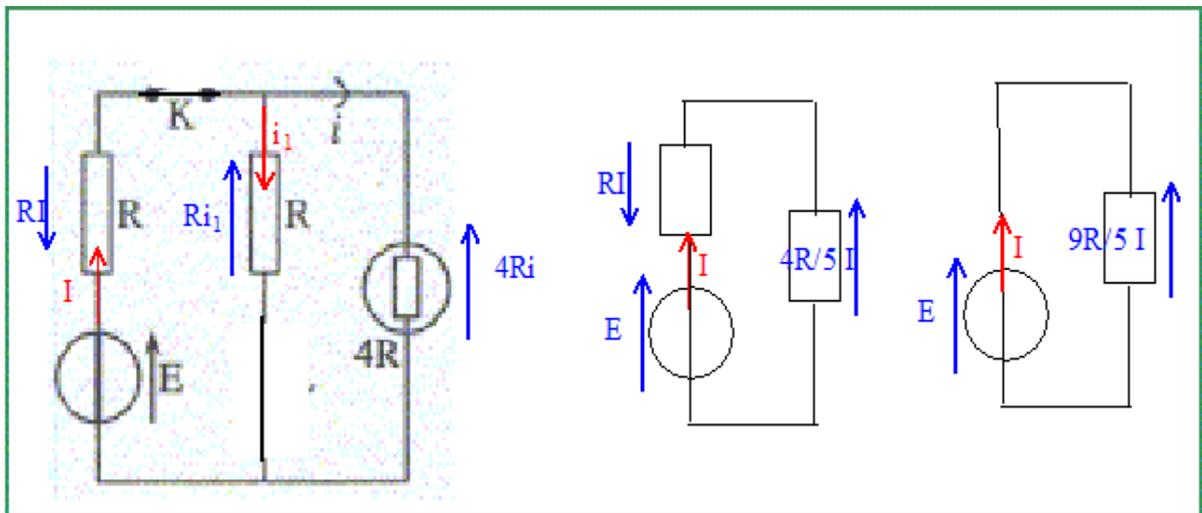
En déduire l'intensité du courant dans la lampe lorsque le nouveau régime permanent est atteint.

$\exp(-t/\tau)$ tend vers zéro au bout de $t = 5 \tau$

$$i = E/(9R)$$

Autre méthode.

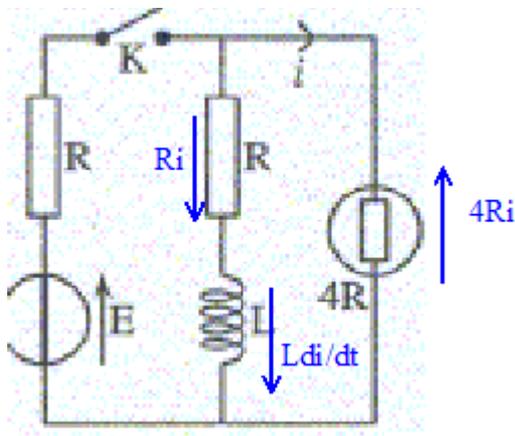
En régime permanent le terme Ldi_1/dt est nul et le circuit est équivalent à :



Une fois ce nouveau régime permanent atteint, on ouvre à nouveau K. On prendra cet instant de réouverture de l'interrupteur comme nouvelle origine des temps $t=0$.

Calculer $i(t)$ en prenant soin de définir la condition initiale $i(0^+)$.

$$i(0^+) = E/(9R).$$



$$Ri + Ldi/dt + 4Ri = 0$$

$$di/dt + 5R/L i = 0 ; \text{ on pose } \tau_1 = L/(5R)$$

$$i = B \exp(-t/ \tau_1)$$

$$\text{Or } i(0^+) = E/(9R) \text{ d'où } B = E/(9R)$$

$$i(t) = E/(9R) \exp(-t/ \tau_1).$$

Sachant que la lampe ne s'allume que pour $i > E/(8R)$, quel peut bien être son rôle ?

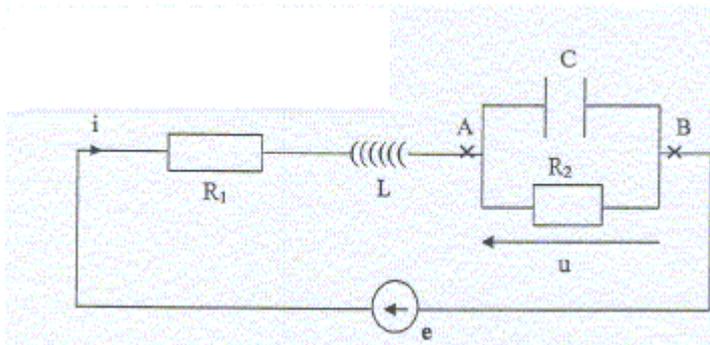
L'intensité i n'atteint jamais la valeur $E/(8R)$: la lampe ne s'allume pas.

La dissipation de l'énergie électromagnétique stockée dans la bobine inductive à travers la lampe sous forme de chaleur (effet Joule) évite une étincelle de rupture aux bornes de l'interrupteur lors de l'ouverture de celui-ci.

Exercice 68 RLC

Le générateur e est une source idéale de tension qui délivre un signal $e(t)$ dont la forme est précisée au fil des questions.

On se propose d'étudier la tension u aux bornes du dipôle AB : «résistance R_2 en parallèle avec la capacité C »

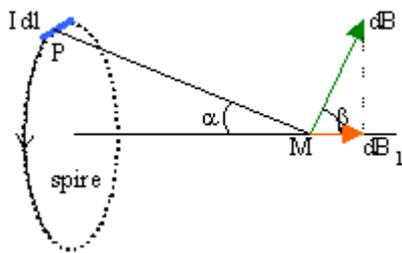


EXERCICE 69/Champ magnétique crée par une spire circulaire : dipole magnétique

On considère une spire circulaire de centre O , de rayon r et d'axe z/z' , parcourue par un courant

permanent I

Champ magnétique B en tout point de l'axe z'z en un point M :



L'élément de courant Idl crée en M , le champ élémentaire dB, perpendiculaire à PM, de module :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\theta)}{PM^2}$$

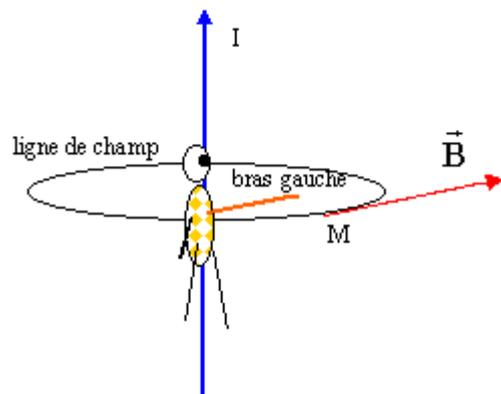
Idl et PM étant perpendiculaire $\sin(\theta)=1$

Par raison de symétrie le champ résultant sera porté par l'axe horizontal. La composante utile sera $dB \cos(\beta) = dB \sin(\alpha)$

Pour tous les éléments Idl, l'angle α et PM sont les mêmes. L'intégration de dB sur toute la spire donne le module du champ résultant ($\sin \alpha = \text{rayon } r / PM$)

$$B = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin(\alpha)}{PM^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3(\alpha)$$

Le sens du champ magnétique est donné par la règle de l'observateur d'Ampère : le sens du champ est de la gauche vers la droite.



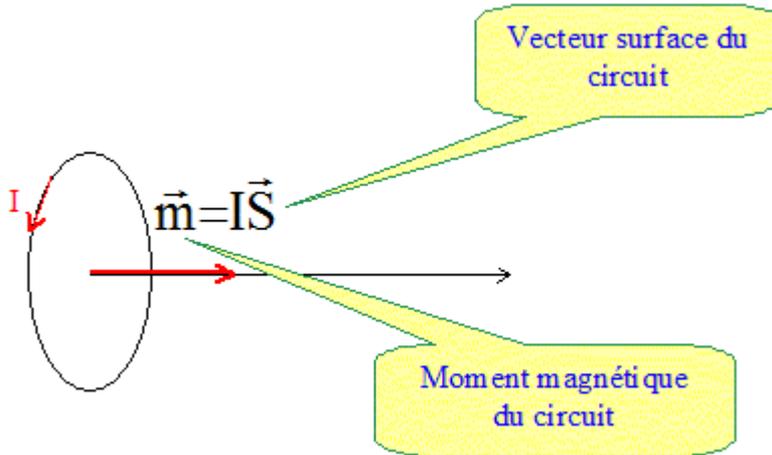
Que devient l'expression précédente lorsque $r \ll z$?

$r/z \ll 1$ et on peut confondre l'angle α , exprimé en radian, et $\sin \alpha$: $\sin \alpha$ voisin de r/z

$$B = \mu_0 I / (2r) * r^3 / z^3 = \mu_0 I / 2 * r^2 / z^3$$

$$B = \mu_0 I / (2\pi) * \pi r^2 / z^3 ; S = \pi r^2, \text{ aire de la spire.}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 / (2\pi) \mathbf{m} / z^3 \text{ avec } \mathbf{m} = IS, \text{ moment magnétique du circuit.}$$

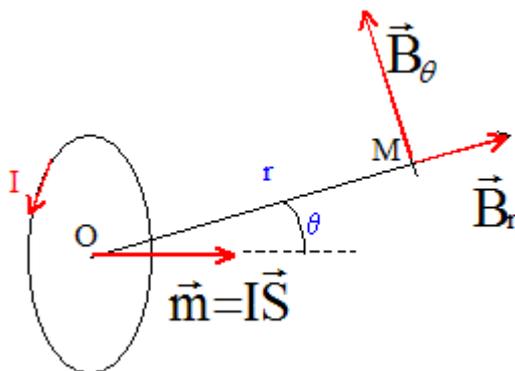


Expression du champ créé par un dipôle magnétique :

Un dipôle magnétique est une distribution de courants localisés, de moment magnétique non nul ; les dimensions de la distribution de courant sont petites par rapport à de la distance à laquelle on étudie le champ ainsi créé.

Sachant que, en coordonnées sphériques, $B_r = (\mu_0 / (4\pi)) 2 \cos \theta m / r^3$

et $B_\theta = (\mu_0 / (4\pi)) \sin \theta m / r^3$.

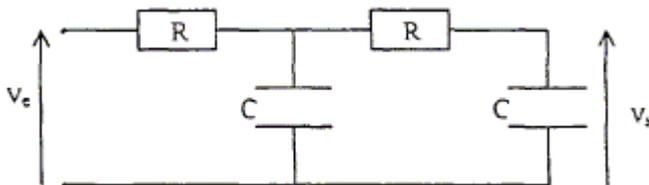


si $\theta = 0 : z=r ; \sin \theta = 0$ donc $B_\theta = 0 ; \cos \theta = 1$ donc $\mathbf{B}_r = \mu_0 / (2\pi) \mathbf{m} / z^3$.

On retrouve l'expression $\mathbf{B} = \mu_0 / (2\pi) \mathbf{m} / z^3$ du champ créé par une spire circulaire sur son axe, en un point éloigné.

Exercice 70 :Electrocinétique : fonction de transfert, diagramme de Bode

On étudie en régime sinusoïdal, le circuit ci-dessous constitué de deux résistor identiques $R= 10$ kilohms et de deux condensateurs de même capacité $C= 10$ nF.



La tension d'entrée est fournie par un générateur basse fréquence et s'écrit $v_e(t)=E_m \cos(\omega t)$; la tension de sortie est notée $v_s(t)=V_m \cos(\omega t+\Phi)$.

L'étude du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe $\underline{v}_e=Em e(j\omega t)$ et $\underline{v}_s=Em e(j\omega t+\Phi)$ avec $j^2=-1$.

Déterminer, de manière qualitative et sans calculs, en utilisant la notion d'impédance, la nature du filtre étudié.

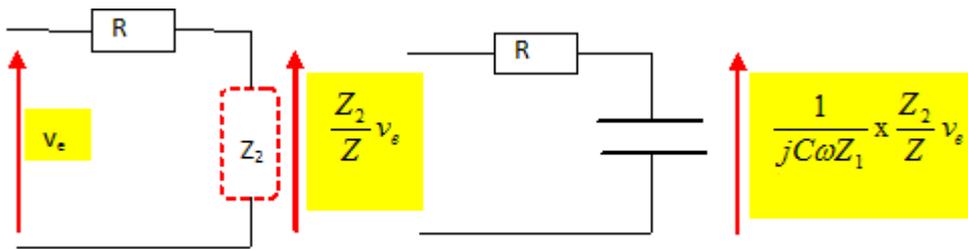
A très basse fréquence le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (impédance infinie). V_s diffère de zéro.

A haute fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé (impédance nulle). V_s est nulle.

Donc filtre passe bas.

Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \underline{v}_s / \underline{v}_e$. On mettra H sous la forme :

$$H = \frac{1}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} - [\frac{\omega}{\omega_0}]^2}$$



$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} = \frac{1}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

$$RC = \frac{1}{\omega_0}$$

1,5

$\omega_0 =$	$\frac{1}{RC}$	$=$	$\frac{1}{10^4 * 10 * 10^{-9}}$	$= 10^4 \text{ rad/s.}$
--------------	----------------	-----	---------------------------------	-------------------------

On pose $H = G \exp(j\Phi)$ et $x = \omega / \omega_0$.

Exprimer le gain $G(x)$ puis le gain en décibels noté $G_{dB} = 20 \log G$.

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + 3jx - x^2} = \frac{(1-x^2) - 3jx}{(1-x^2)^2 + 9x^2}$$

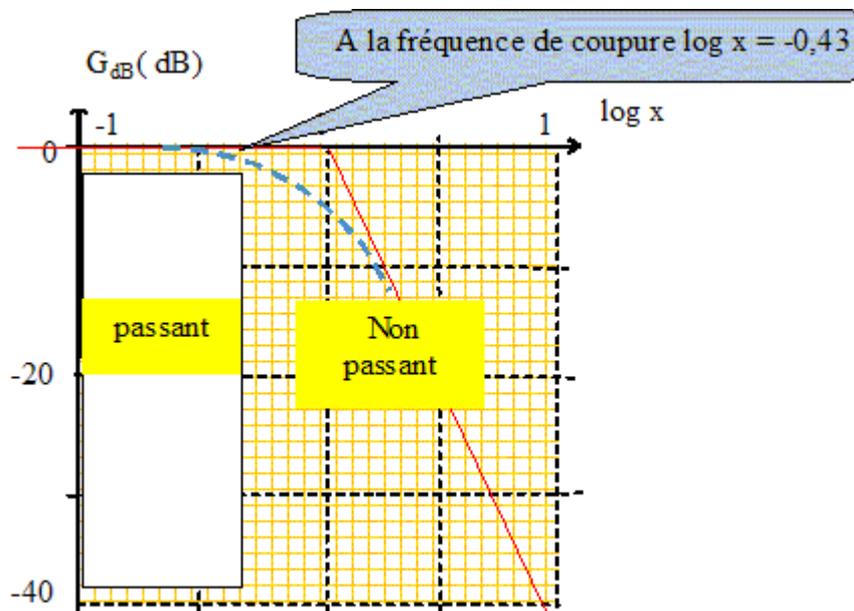
$G(x) =$	$\frac{1}{[(1-x^2)^2 + 9x^2]^{1/2}}$	$;$	$G_{dB} = -10 \log [(1-x^2)^2 + 9x^2]$
----------	--------------------------------------	-----	--

Déterminer le comportement asymptotique de G_{dB} , c'est à dire l'expression simplifiée de G_{dB} pour $x \ll 1$ (basse fréquence) et pour $x \gg 1$ (haute fréquence).

$$x \ll 1 : G_{dB} \sim -10 \log 1 \sim 0.$$

$$x \gg 1 : G_{dB} \sim -10 \log x^4 \sim -40 \log x.$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique en portant G_{dB} en ordonnée et $\log x$ en abscisse.



Quelle est la nature du filtre ? Passe bas.

$$G_{dB}=0 ; \Phi \sim 0 : \text{passant} ; G_{dB}= -40 \log x ; \Phi \sim 90 : \text{filtré.}$$

Calculer la fréquence de coupure f_c à -3 dB.

$$-3 = -10 \log [(1-x^2)^2 + 9x^2] ; 10^{0,3} = 2 = (1-x^2)^2 + 9x^2$$

$$\text{Changement de variable } X = x^2 \text{ d'où en effectuant : } X^2 + 7X - 1 = 0$$

$$\text{Résoudre (retenir la valeur positive) : } X = 0,14 \text{ et } x = 0,374 \text{ (} \log x = -0,43 \text{)}$$

$$\text{Par suite la pulsation de coupure } \omega_c \text{ vaut : } 0,374 \omega_0 = 3,74 \cdot 10^3 \text{ rad /s.}$$

$$f_c = \omega_c / (2\pi) = 3,74 \cdot 10^3 / 6,28 = 596 \text{ Hz.}$$

Calculer le gain en décibels puis la valeur de G pour une tension d'entrée de fréquence 5 kHz.

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 5000 = 31400 \text{ rad/s} ; x = \omega / \omega_0 = 3,14 ;$$

$$G(x) = \frac{1}{[(1-3,14^2)^2 + 9 \cdot 3,14^2]^{1/2}} = 7,7 \cdot 10^{-2}$$

$$G_{dB} = -10 \log [(1-3,14^2)^2 + 9 \cdot 3,14^2] = -22 \text{ dB}$$

Donner l'expression de $\tan \Phi$ où Φ est le déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée ainsi que son intervalle de variation lorsque x varie.

$$\tan \Phi = \frac{-3x}{1-x^2}$$

x	0	0,25	0,374	0,5	1
$\log x$	xxxxxx	-0,60	-0,43	-0,3	0
$\tan \Phi$	0	-0,8	-1,3	-2	tend vers moins l'infini
$\Phi (^{\circ})$	0	-38	-52	-63	-90

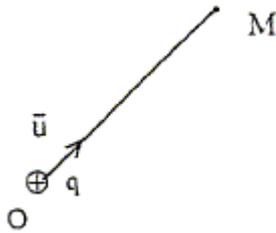
Tracer l'allure du graphe de Φ en fonction de $\log x$.

Exercice 71 : Electrostatique : dipôle dans un champ extérieur uniforme

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On étudie deux distributions de charges électriques et leurs interactions avec un champ électrique extérieur. On note ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.

La distribution D_1 est une charge ponctuelle q située en O . Soit un point M situé à la distance r de O et \mathbf{u} un vecteur unitaire porté par OM et dirigé de O vers M .



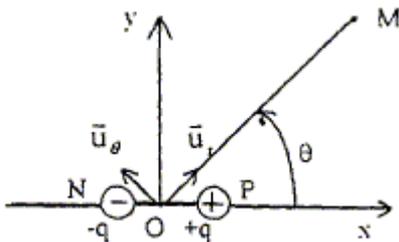
Donner le champ électrique $\mathbf{E}(M)$ et le potentiel électrique $V(M)$ créés en M par cette charge.

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}$$

Si q est positif $\mathbf{E}(M)$ et \mathbf{u} ont le même sens. Si q est négatif $\mathbf{E}(M)$ et \mathbf{u} sont de sens contraire

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{Constante}$$

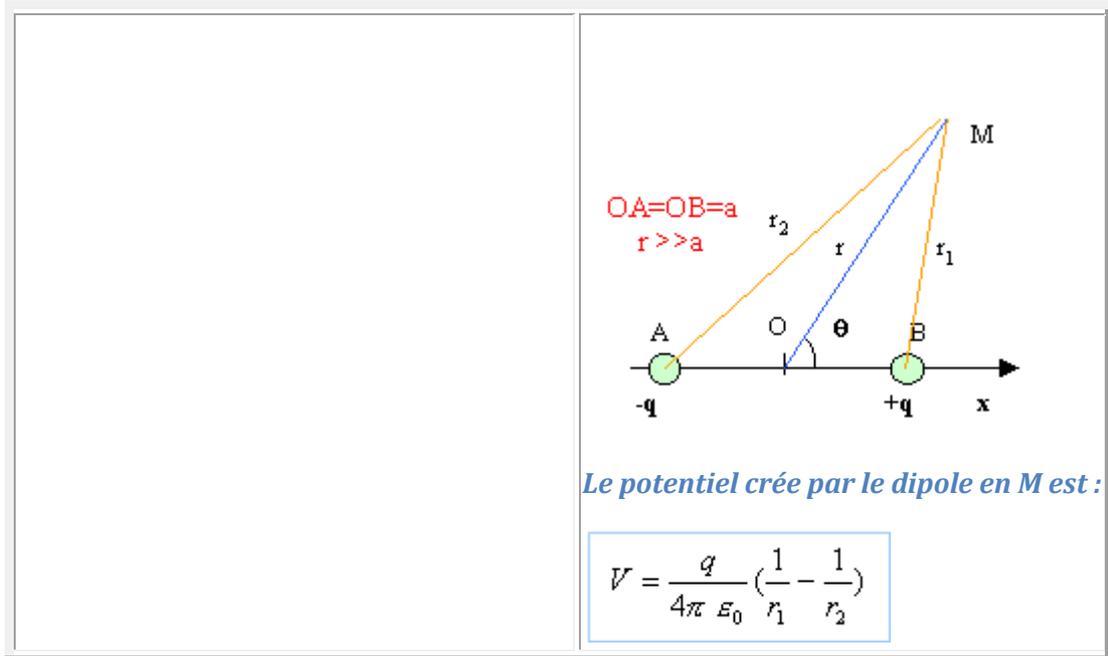
La distribution D_2 est un dipôle électrique rigide constitué de deux charges ponctuelles $+q$ située en P (avec $q > 0$) et $-q$ située en N . Les points P et N sont situés sur l'axe Ox , symétriquement par rapport au point O , avec $OP=ON=a$.



Soit $\mathbf{p} = q \mathbf{NP}$ le moment dipolaire du dipôle, de norme p .

Un point M appartenant au plan xOy est repéré par ces coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = (\mathbf{p}, \mathbf{OM})$. Soit $(\mathbf{u}_r$ et $\mathbf{u}_\theta)$ la base associée aux coordonnées polaires. On se place dans le cas ou $r \gg a$.

Déterminer le potentiel électrique $V(M) = V(r, \theta)$ créée en M par le dipôle en fonction de ϵ_0 , r , p et θ en se limitant au terme en $1/r^2$.



Le potentiel crée par le dipole en M est :

$$V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

utiliser le théorème d'Al Kashi dans les triangles OBM et OAM en remarquant que $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta$$

mettre r^2 en facteur commun

et effectuer un développement limité au premier ordre

$$r_1^{-1} = r^{-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-0.5} \approx r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$r_2^{-1} = r^{-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 + 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-0.5} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} 2a \cos \theta$$

avec $p = 2a q$.

En déduire les composantes radiale E_r et orthoradiale E_θ du champ électrique créée en M par le dipôle.

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

expression du gradient en coordonnées polaires

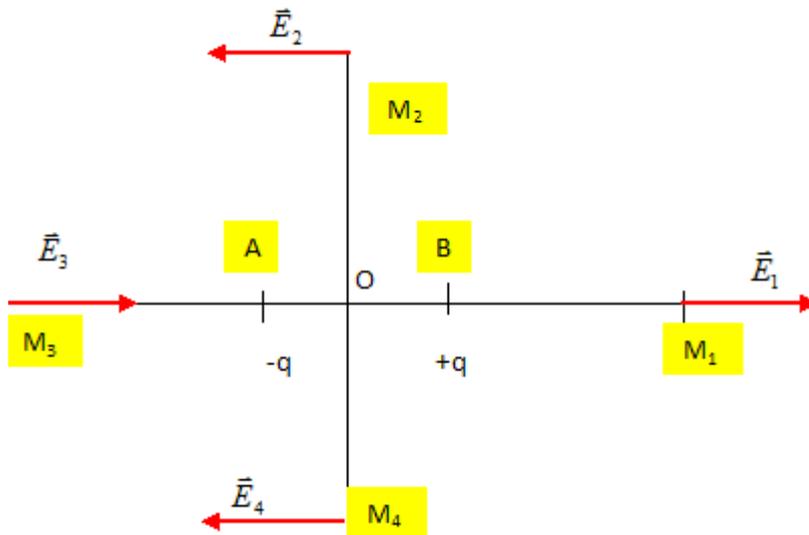
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_r = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2 \cos\theta \text{ et } E_\theta = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta$$

Quelle remarque peut-on faire en comparant les champs créés par D_1 et D_2 ?

Le champ créé par D_1 est proportionnelle à $1/r^2$; celui créé par D_2 est proportionnel à $1/r^3$. Préciser sur un schéma la direction du champ électrique pour quelques points particuliers M_1, M_2, M_3 et M_4 situés à égale distance de O et d'angles polaires respectifs égaux à $0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ et $3\pi/2$.

	angle polaire	E_r	E_θ	direction du champ
M_1	0	$\frac{4aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	0	radiale
M_2	90°	0	$\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	orthoradiale
M_3	180°	$-\frac{4aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	0	radiale, dirigé vers O
M_4	270	0	$-\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	orthoradiale



Dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E}_0 on place D_1 ou D^2 et on étudie l'interaction de ces distributions avec ce champ extérieur.

Le champ \vec{E}_0 est créé par un condensateur plan formé par deux plaques parallèles planes A et B. Les plaques sont assimilables à des plans infinis, d'équations $x=-a$ et $x= a$, chargés uniformément en surface avec des densités surfaciques de charge σ (σ positif pour A et $-\sigma$ pour B).

Montrer que le champ créé entre les deux plaques est uniforme et calculer sa valeur en fonction de a et ϵ_0 .

La distribution de charge est **invariante par translation** suivant Ox : le champ ne dépend pas de la variable x .

La distribution de charge est **invariante par translation** suivant Oy : le champ ne dépend pas de la variable y .

La distribution de charge est **invariante par translation** suivant Oz : le champ ne dépend pas de la variable z .

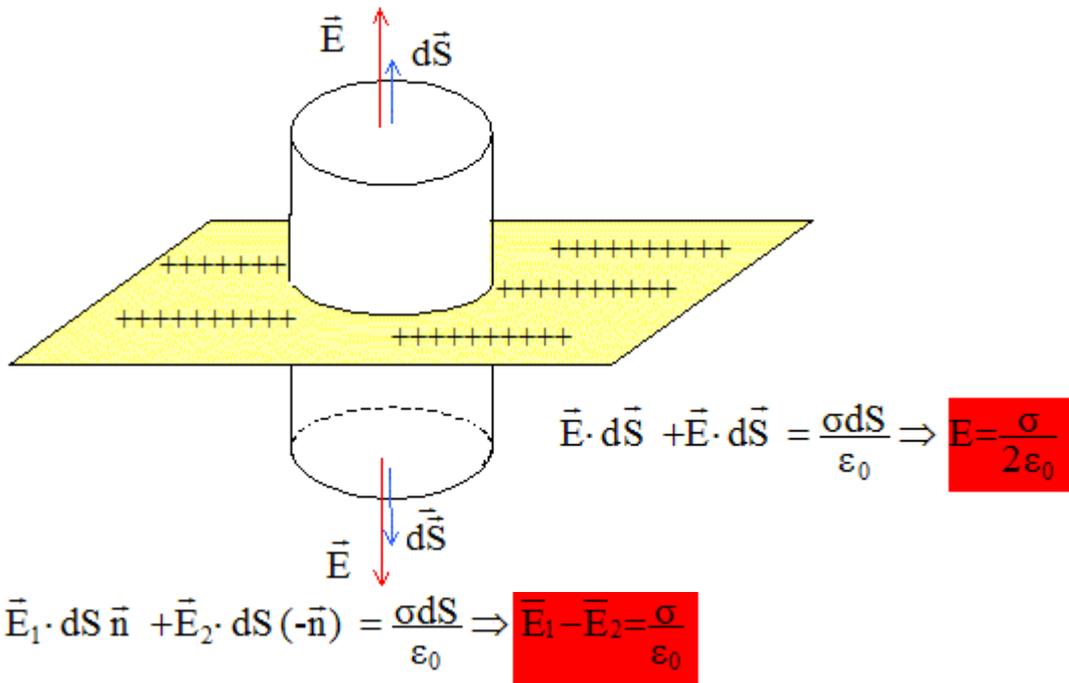
La distribution de charge est **invariante par rotation** de l'axe Oz : le champ ne dépend pas de l'angle θ .

Le champ électrostatique ne dépend pas des variables x, y et z .

Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de charge : le champ électrostatique est donc porté par l'axe Oz .

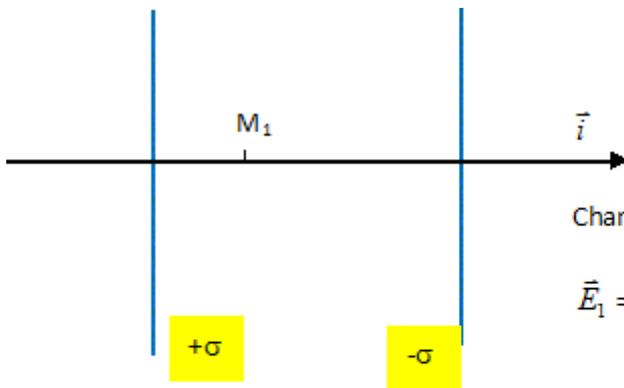
Appliquer le théorème de Gauss : la surface de Gauss est un cylindre de section dS .

Le flux du champ est nul à travers la surface latérale du cylindre, celle-ci étant perpendiculaire au champ.



Le champ subit une discontinuité à la traversée du plan.

$$E(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x$$



Champ entre les plans (M_1)

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

Champ en dehors des plans

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (\vec{i}) = 0 \vec{i}$$

On place D_1 au point O .

Quelle est l'action subie par la charge q placée en O ? Quel mouvement en résulte-t-il ?

Cette charge q est soumise à la force $F = qE_0$.

Sous l'action de cette force, la charge est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré jusqu'à la plaque négative (si $q>0$).

Le potentiel électrique au point O est égal à V_0 . Exprimer l'énergie potentielle U d'interaction de q dans le champ électrique.

$$U = q V_0.$$

On place D_2 au point O . Le dipôle rigide de moment dipolaire \mathbf{p} fait un angle α avec \mathbf{E}_0 .

Quelle est l'action subie par le dipôle ? Quel mouvement en résulte t-il ? Quelles sont les valeurs de α qui correspondent à des positions d'équilibre du dipôle ? Préciser la stabilité de ces positions.

Le dipôle est soumis à un couple de forces de moment $\mathbf{C} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_0$.

Sous l'action de ce couple de forces, le dipôle tourne et s'aligne avec le champ extérieur.

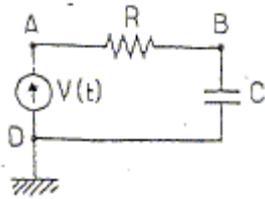
Les positions d'équilibre du dipôle correspondent à la valeur zéro du moment du couple :

équilibre stable : $\alpha=0$, \mathbf{p} colinéaire et de même sens que \mathbf{E}_0 .

équilibre instable : $\alpha=180^\circ$, \mathbf{p} colinéaire et de sens contraire à \mathbf{E}_0 .

Exercice 72 : régimes transitoires dans un circuit RC

On considère le circuit ci-dessous comprenant un condensateur de capacité C , une résistance R et un générateur de tension.



On pose $V_A - V_D = V(t)$, $V_B - V_D = u(t)$. La tension aux bornes du générateur est $v(t)$, fonction du temps à priori quelconque.

Etablir l'équation différentielle reliant $u(t)$ à $v(t)$.

Additivité des tensions : $V(t) = R i + u(t)$ avec $i = dq/dt$ et $q = C u(t)$ soit $i = C du(t)/dt$.

$$V(t) = RC du(t)/dt + u(t).$$

On pose $\tau = RC$ d'où : $du(t)/dt + 1/\tau u(t) = V(t) / \tau$ (1)

On cherche la solution de cette équation sous la forme : $u(t) = \lambda(t) \exp(-t/\tau)$.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\lambda(t)$?

$$du(t) / dt = d\lambda(t)/dt \exp(-t/\tau) - \lambda(t) / \tau \exp(-t/\tau)$$

Repport dans (1) :

$$d\lambda(t)/dt \exp(-t/\tau) - \lambda(t) / \tau \exp(-t/\tau) + \lambda(t) / \tau \exp(-t/\tau) = V(t) / \tau$$

$$d\lambda(t)/dt \exp(-t/\tau) = V(t) / \tau$$

Comment choisir τ pour que $\lambda(t)$ n'y intervienne plus que par sa dérivée $d\lambda/dt$?

On pose $\tau = RC$.

A.N : $R = 1 \text{ M}\Omega$; $C = 1 \text{ nF}$.

Calculer τ

$$1 \text{ M}\Omega = 10^6 \text{ }\Omega \quad C = 1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F} ; \quad RC = 10^{-3} \text{ s.}$$

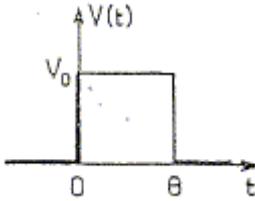
Sachant qu'à $t=0$ on avait $u(t) = u_0$, exprimer $\lambda(t)$ à l'aide d'une intégrale définie.

$$d\lambda(t)/dt = V(t) / \tau \exp(t/\tau)$$

$$u(t) = \lambda(t) \exp(-t/\tau) ; \quad u(0) = \lambda_0.$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\tau} \int V(t) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) dt - \frac{\lambda_0}{\tau}$$

On s'intéresse à une tension d'excitation $V(t)$ en créneau.



A l'instant $t=0$ la charge du condensateur est nulle. Calculer $u(t)$.

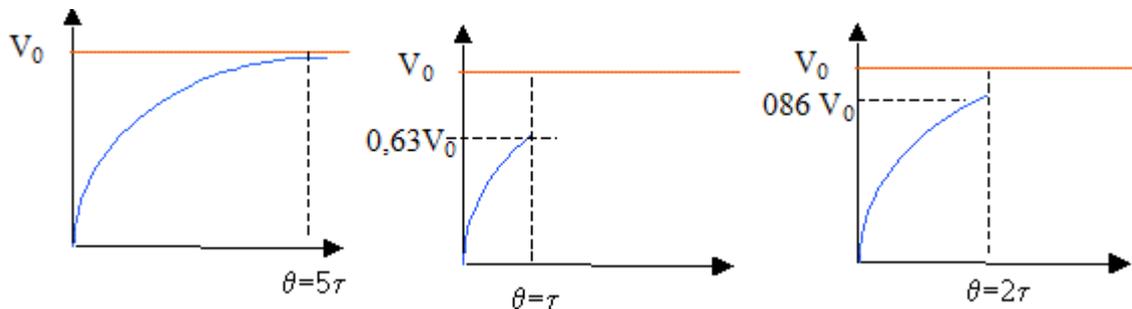
$$\lambda(t) = \frac{V_0}{\tau} \int_0^t \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = V_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) - V_0$$

$$u(t) = V_0 - V_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) = V_0 \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

Donner l'allure de $u(t)$ suivant la valeur du rapport θ/τ en particulier dans les cas limites $\theta/\tau < 1$ et $\theta/\tau \gg 1$.

$\theta/\tau < 1$: $u(t) = 0$, le condensateur n'a pas le temps de se charger.

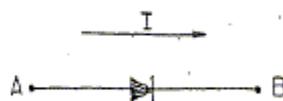
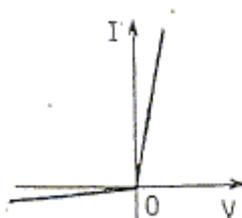
$\theta/\tau \gg 1$: le condensateur a le temps de se charger, après un régime transitoire, $u(t) = V_0$.



Introduction d'une diode.

On assimile la caractéristique d'une diode à deux demi-droites qui, dans le plan (V, I) ont pour équations : $I = V/R_i$ pour $V \leq 0$ et $I = V/R_d$ pour $V > 0$

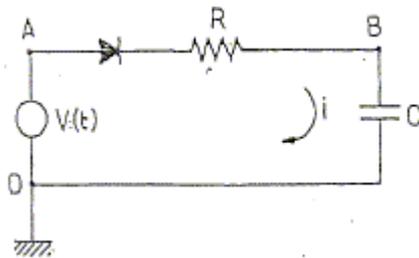
où V est la différence de potentiel $V_A - V_B$ et où I est compté positivement de A vers B.



Sauf avis contraire, on passera, après calculs avec R_i et R_d finies, aux limites R_i infinie et R_d nulle : le courant est très faible lorsque la diode est polarisée en inverse ($V < 0$) ; lorsque la diode est polarisée en direct ($V > 0$) elle se comporte comme une résistance négligeable par rapport aux autres résistances du circuit.

On considère le montage suivant et on s'intéresse au cas de l'excitation en créneau. On note $u(t) = V_B - V_D$.

A l'instant $t=0$, $u(0) = 0$.



Etude de la charge :

Entre $t=0$ et $t= \theta$, comment la diode est-elle polarisée ? Quelle est la valeur de $u(\theta)$?

A.N : $R= 10 \text{ k}\Omega$; $C= 1 \text{ }\mu\text{F}$; $\theta= 1 \text{ s}$; $V_0= 30 \text{ V}$

La diode est passante. $RC = 10^4 * 10^{-6} = 10^{-2} \text{ s}$.

La constante de temps étant très inférieure à θ , le condensateur a le temps de se charger complètement : $u(\theta) = V_0 = 30 \text{ V}$.

Etude de la décharge :

Calculer $u(t)$ à R_i finie. Que se passe-t-il si R_i est infinie ?

Le courant de décharge est de sens contraire au courant de charge (discontinuité de l'intensité).

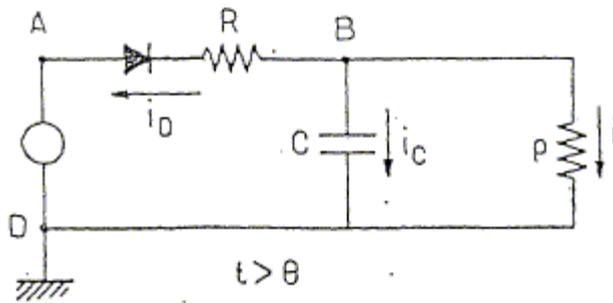
à $t > \theta$: $V(t) = 0$; additivité des tensions : $u(t) - (R_i + R) i = 0$ avec $i = - dq/dt = -Cdu(t)/dt$

d'où : $u(t) + (R_i + R)C du(t)/dt = 0$

On pose $\tau = (R_i + R)C$; $u(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$.

Si R_i est infinie, la diode est non passante : le condensateur ne se décharge pas et $u(t) = V_0$.

Pour $t > 0$ on branche en parallèle sur le condensateur une résistance de valeur ρ .



On veut calculer la dépendance temporelle du courant $i(t)$ circulant dans cette résistance.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

admittance complexe de l'ensemble R, ρ : $Y_1 = jC\omega + 1/\rho = (jC\rho\omega + 1)/\rho$

impédance complexe correspondante : $Z_1 = \rho / (jC\rho\omega + 1)$.

impédance complexe de l'ensemble : $Z = R + R_d + \rho / (jC\rho\omega + 1)$.

$Z = [(R + R_d)(jC\rho\omega + 1) + \rho] / (jC\rho\omega + 1)$.

Les grandeurs soulignées sont des nombres complexes

$\underline{V}(t) = \underline{Z} \underline{i}_d$; $\underline{u}(t) = \underline{Z}_1 \underline{i}_d$ d'où : $\underline{V}(t) \underline{Z}_1 = \underline{u}(t) \underline{Z}$.

$\underline{V}(t) \rho = \underline{u}(t) [(R + R_d)(jC\rho\omega + 1) + \rho]$.

$\underline{V}(t) \rho = \underline{u}(t) [(R + R_d + \rho) + C\rho j\omega(R + R_d)]$.

Or multiplier par $j\omega$ correspond à la dérivation d/dt .

d'où : $V(t) \rho = (R + R_d + \rho) u(t) + C\rho(R + R_d) du(t)/dt$

On pose : $\tau' = C\rho(R + R_d) / (R + R_d + \rho)$

$du(t)/dt + 1/\tau' u(t) = V(t) / [C(R + R_d)]$. (2)

Calculer $u(t)$.

solution particulière de (2) en régime permanent : $u(t) = V(t) \rho / (R + R_d + \rho)$

solution générale de : $du(t)/dt + 1/\tau' u(t) = 0$: $u(t) = A \exp(-t/\tau')$

solution générale de (2) : $u(t) = A \exp(-t/\tau') + V(t) \rho / (R + R_d + \rho)$

A l'instant initial, $u(0) = 0$ d'où $A = -V(t) \rho / (R + R_d + \rho)$

$u(t) = V(t) \rho / (R + R_d + \rho) [1 - \exp(-t/\tau')]$

Dans le cas du signal créneau et de $R_d = 0$: $u(t) = V_0 \rho / (R + \rho) [1 - \exp(-t/\tau')]$.

Quelle est la nouvelle valeur de la constante de temps τ' intervenant dans le circuit ?

$\tau' = C\rho(R + R_d) / (R + R_d + \rho)$

En déduire la dépendance temporelle des courants i et i_d .

$$i(t) = u(t) / \rho; (R_d + R)i_d(t) + u(t) = V_0.$$

$$i_d(t) = (V_0 - u(t)) / (R_d + R)$$

Exercice 73 :Electricité

Un dispositif d'éclairage urbain comprend 6 projecteurs d'une puissance de 1150 W chacun sous une tension nominale de 230 V.

A. Alimentation en monophasé :

Dessiner le schéma électrique correspondant au dispositif branché en monophasé (en faisant figurer les six projecteurs). Placer un interrupteur simple pour commander la mise sous tension de l'ensemble

Calculer l'intensité du courant qui traverse l'interrupteur si on considère que les projecteurs sont uniquement résistifs.

Les projecteurs sont en fait modélisables par un ensemble série de résistance R , d'inductance L et de facteur de puissance $\cos\phi = 0,8$. Calculer la valeur de la capacité C du condensateur qu'il aura fallu placer en parallèle avec chaque projecteur pour que l'ensemble se comporte comme une résistance pure. Calculer alors l'intensité du courant dans l'ensemble projecteur-condensateur ainsi que celle du courant dans le condensateur.

Si on n'avait pas mis de condensateurs, quelle aurait été l'intensité du courant dans l'interrupteur ? Quel serait le déphasage de ce courant par rapport à la tension ?

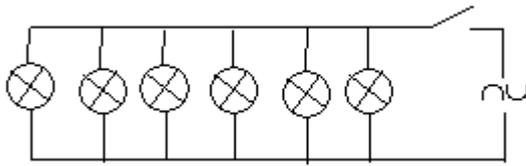
A. Alimentation en triphasé :230 - 400 V - 50 Hz

Dessiner le schéma électrique pour que le montage soit équilibré.

Calculer l'intensité du courant dans les fils de ligne et dans le neutre (chaque projecteur étant équipé du condensateur précédent).

L'un des projecteur grille dans la phase 1, calculer l'intensité dans les fils de ligne et le neutre.

corrigé



intensité du courant qui traverse l'interrupteur si on considère que les projecteurs sont uniquement résistifs :

$I = P/U = 1150/230 = 5 \text{ A}$ dans chaque branche dérivée

Les courants dérivés s'ajoutent : $6 \cdot 5 = 30 \text{ A}$ traversent l'interrupteur.

<p>$Z = \sqrt{R^2 + L\omega^2}$</p> <p>$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$</p>	<p>équivalent à</p> <p>$\frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R'}$</p>
<p>$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$;</p> <p>$\cos \varphi = 0,8$ d'où $\tan \varphi = 0,75$</p> <p>$L\omega = R \tan \varphi$ avec $R = U/I = 230/5 = 46 \Omega$</p> <p>soit $L\omega = 46 \cdot 0,75 = 34,5 \Omega$; $L = 34,5 / 314 = 0,11 \text{ H}$</p> <p>$Z = [46^2 + 34,5^2]^{1/2} = 57,5 \Omega$</p>	<p>faire les produits en croix : $R'(1 - LC\omega^2) + jR'RC\omega = R + jL\omega$</p> <p>identifier parties réelle et imaginaire : $R'(1 - LC\omega^2) = R$ et $L = R'RC$</p> <p>d'où $R' = L/(RC)$ et $C = L/(R^2 + (L\omega)^2) = 0,11 / 57,5^2 = 3,32 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 33,2 \mu\text{F}$.</p> <p>$R' = 0,11 / (46 \cdot 3,32 \cdot 10^{-5}) = 72 \Omega$</p>

L'ensemble projecteur- condensateur est équivalent à une résistance pure R' .

L'intensité du courant dans l'ensemble projecteur- condensateur vaut : $230 / 72 = 3,2 \text{ A}$ soit $6 \cdot 3,2 = 19,2 \text{ A}$.

Intensité du courant dans le condensateur : $I_2 = I \tan \varphi = 3,2 \cdot 0,75 = 2,4 \text{ A}$.

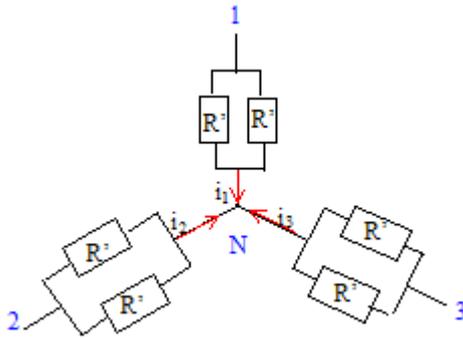
Si on n'avait pas mis de condensateurs, l'intensité du courant dans l'interrupteur serait :

impédance de la bobine : $Z = [46^2 + 34,5^2]^{1/2} = 57,5 \Omega$; $I = U/Z = 230 / 57,5 = 4 \text{ A}$ dans chaque projecteur ; soit $4 \cdot 6 = 24 \text{ A}$ dans l'interrupteur.

déphasage de ce courant par rapport à la tension : $\tan \varphi = 34,5 / 46 = 0,75$; $\varphi = 0,64 \text{ rad}$

courant en retard sur la tension de **-0,64 rad**.

Dans le montage étoile, la tension aux bornes de chaque système projecteur- condensateur vaut 230 V.



intensité du courant dans les fils de ligne et dans le neutre :

Deux ensembles projecteur-condensateur en dérivation sont équivalents à un dipôle d'impédance $\frac{1}{2}R' = 36 \Omega$ d'où l'intensité en ligne : $I = 230 / 36 = 6,39 \text{ A}$.

Dans le fil neutre, l'intensité est nulle, le système étant équilibré.

L'un des projecteur grille dans la phase 1, l'intensité dans les fils de ligne et le neutre vaut :

dans la phase 2 et dans la phase 3 : $I = 6,39 \text{ A}$

dans la phase 1, l'impédance double donc l'intensité est divisée par 2 : $I_1 = 3,2 \text{ A}$

Le montage est déséquilibré : dans le neutre l'intensité vaut : 3,2

Exercice 74 :Relever le facteur de puissance d'un moteur

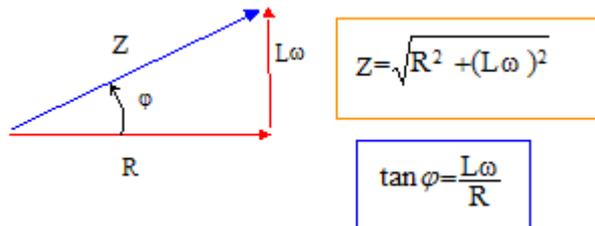
Un récepteur d'impédance $Z = 20 \Omega$ introduit un déphasage φ entre une tension et l'intensité tel que $\cos \varphi = 0,8$. La tension d'alimentation (400 V - 50 Hz) est en avance sur l'intensité. Calculer la valeur de l'inductance L et de la résistance R du dipôle équivalent à ce récepteur.

On réalise un moteur triphasé équilibré en montant en triangle trois enroulements identiques à celui décrit ci-dessus sur une installation 230 / 400 V - 50 Hz. Calculer l'intensité du courant dans chaque enroulement puis dans les fils de ligne.

- Quelle est la puissance active de ce moteur ?

Sur l'installation précédente on ajoute au moteur trois condensateurs de capacité identique $C= 290 \mu\text{F}$ montés en étoile. Calculer l'intensité en ligne pour l'ensemble obtenu. Comparer à celle trouvée ci-dessus et conclure.

corrigé

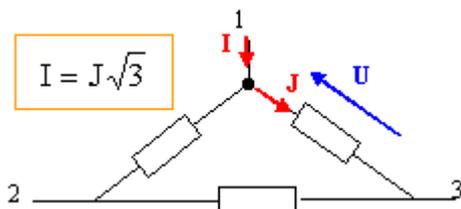


$\cos \varphi = R/Z$ d'où : $R= Z \cos \varphi = 20*0,8 = 16 \Omega$

pulsation $\omega = 2\pi f = 2*3,14*50 = 314 \text{ rad/s}$; $\tan \varphi = 0,75$

$L=R \tan \varphi / \omega = 16*0,75/314 = 0,038 \text{ H}$.

intensité du courant dans chaque enroulement : couplage triangle :



chaque impédance est alimentée sous une tension composée $U= 400 \text{ V}$

$U= Z J$ soit $J= U/Z = 400/20 = 20 \text{ A}$.

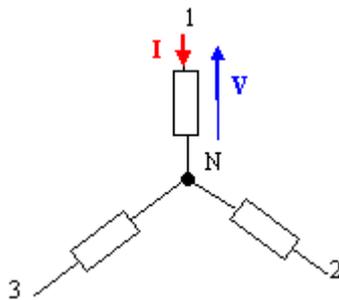
l'intensité du courant dans un fil de ligne I diffère de l'intensité du courant J dans une impédance : $I = 20 * 3^{1/2} = 34,6 \text{ A}$.

puissances (quel que soit le couplage)

$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$	$\left\{ \begin{array}{l} P : \text{puissance active (W)} \\ Q : \text{puissance réactive (var)} \\ S : \text{puissance apparente (VA)} \\ I : \text{intensité efficace en ligne} \\ U : \text{valeur efficace tension composée} \\ \varphi : \text{déphasage du courant par rapport à la tension aux bornes d'une impédance} \end{array} \right.$
$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$	
$S = \sqrt{3}UI$	

Puissance active : $P= 3^{1/2}*400*34,6*0,8 = 19,2 \text{ kW}$.

couplage étoile :



chaque impédance est alimentée sous une tension simple ;

l'intensité du courant dans un fil de ligne est égale à l'intensité du courant dans une impédance.

puissance réactive des condensateurs : $Q_2 = -3 C \omega V^2 = -3 * 290 \cdot 10^{-6} * 314 * 220^2 = -13200 \text{ var}$

les condensateurs ne consomment pas de puissance active $P_2=0$

	P (watt)	S (VA) = $(P^2 + Q^2)^{1/2}$	$ Q $ (var)
moteur	19200	$P/\cos\varphi=19200/0,8=24000$	$S \sin\varphi= 14400$
condensateur	0	13200	-13200
total installation	19200	$(19200^2+1200^2)^{1/2}=19220$	1200

intensité du courant dans la ligne : $I = S / (3^{1/2} U) = 19220 / (1,732 * 400) = \mathbf{27,7 A}$.

l'intensité diminue ; le facteur de puissance de l'installation est relevé : $\cos\varphi' = 19200/19220$ voisin de 1.

Exercice 75 :Electricité

Une installation fonctionnant sous 220 v - 50 Hz monophasé comprend :

- Un appareillage de puissance utile 29440 W, de rendement $\eta=0,8$ et de facteur de puissance $\cos\varphi=0,75$
- Un ensemble de 200 lampes de 100 W chacune.

La ligne qui alimente cette installation est équivalente au dipole série de caractéristiques :

$R_{li}=0,05 \Omega$; $L_{li}= 0,001 \text{ H}$ et $C_{li} = 12500 \mu\text{F}$. On demande :

L'intensité du courant dans la ligne.

Le facteur de puissance de l'installation.

Les pertes par effet joule dans la ligne.

La puissance apparente au départ de la ligne.

La tension au départ de la ligne.

Le facteur de puissance au départ de la ligne.

corrigé

On note U : valeur efficace de la tension ; I : intensité efficace du courant ; $P=UI \cos \varphi$ (watt)
puissance active

$S= UI$, puissance apparente (VA) et $Q = UI \sin \varphi$ (var) puissance réactive

La puissance consommée par l'appareillage vaut : $P_{\text{utile}} / \text{rendement} = 29440 / 0,8 = 36800 \text{ W} = 36,8 \text{ kW}$

Q est positif si l'appareillage est inductif ; négatif si l'appareillage est capacitif

	P (watt)	S (VA)	$ Q $ (var)
appareillage	36800	$P/\cos\varphi=36800/0,75 = 49067$	$S \sin\varphi= 32455$
lampes	20000	20000	0
total installation	56800	$(56800^2+32455^2)^{\frac{1}{2}}=65416$	32455

intensité du courant dans la ligne : $I= S/U = 65416/220 = \underline{297 \text{ A}}$.

facteur de puissance de l'installation : $\cos\varphi= P/S = 56800/65416 = \underline{0,87}$.

pertes par effet joule dans la ligne : $rI^2 = 0,05*297^2 = \underline{4410 \text{ W}}$.

fréquence : $f = 50 \text{ Hz}$; pulsation $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$

réactance de la ligne $X = L\omega - 1/(C\omega) = 0,001*314 - 1/(0,0125*314) = 0,314 - 0,255 = 0,059 \Omega$

Puissance réactive de la ligne $Q_{li} = XI^2 = 0,059*297^2 = 5204 \text{ var}$.

Puissance réactive totale : $Q = Q_{li} + Q_{inst} = 5204 + 32455 = 37660 \text{ var}$

Puissance active totale : $P = P_{li} + P_{inst} = 4410 + 56800 = 61210 \text{ W}$

Puissance apparente au départ de la ligne : $S = (P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} = (37660^2 + 61210^2)^{\frac{1}{2}} = \underline{71867 \text{ VA}}$.

tension au départ de la ligne : $U = S/I = 71867/297 = \underline{242 \text{ V}}$.

facteur de puissance au départ de la ligne : $P/S = 61210/71867 = \underline{0,85}$.

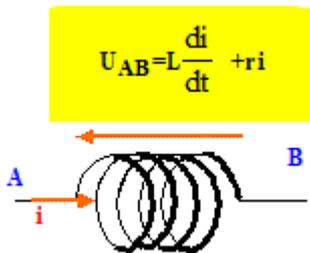
Exercice 76 : Etude de quelques montages inductifs, filtre passe haut, diagramme de Bode

Une bobine réelle est un dipôle constitué par enroulement cylindrique d'un fil électrique. Elle est caractérisée par son autoinductance L et sa résistance interne r .

La bobine est dite parfaite si sa résistance interne est négligeable.

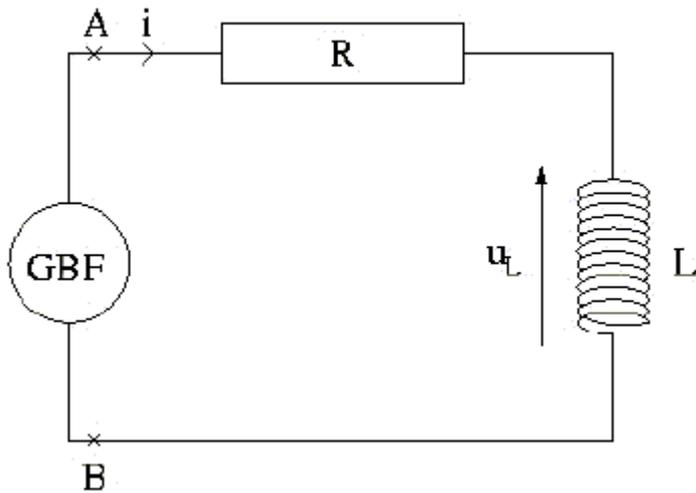
Donner la relation entre le courant i qui traverse une bobine parfaite et la tension u_L à ses bornes

(on précisera à l'aide d'un schéma les conventions d'orientation adoptées pour i et u_L).

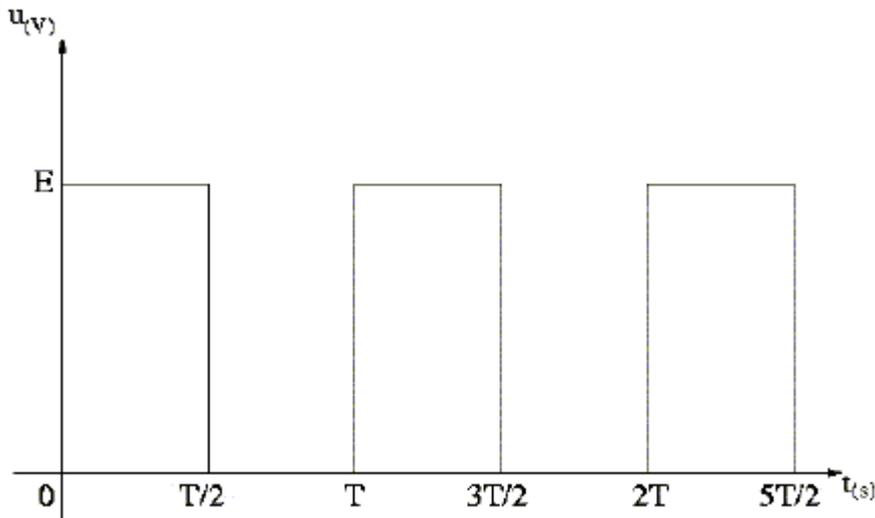


Les valeurs usuelles des inductances rencontrées s'échelonnent de quelques henrys à quelques millihenrys.

On se propose d'étudier la réponse d'un circuit (RL) à une tension en créneaux délivrée par un générateur basse fréquence (G.B.F.).



Le circuit représenté sur la figure comporte une bobine parfaite d'inductance L , une résistance R et un G.B.F délivrant une tension en créneaux u représentée.



On définit la constante de temps τ , exprimée en secondes, du circuit (RL) par une relation du type $\tau = L^\alpha \cdot R^\beta$ ou α et β sont deux constantes réelles.

Par analyse dimensionnelle rapide, déterminer la valeur des exposants α et β (on raisonnera à partir des caractéristiques entre u et i).

$$E = \frac{1}{2} Li^2 ; L : \text{énergie} / \text{intensité}^2 ;$$

$$E_{\text{joule}} = RI^2t ; R : \text{énergie} / (\text{intensité}^2 \cdot \text{temps})$$

τ : temps.

L/R a la dimension d'un temps.

$$\tau = L/R ; \alpha = 1 ; \beta = -1.$$

Pour $0 < t < \frac{1}{2}T$, établir l'équation différentielle régissant les variations de l'intensité i dans le circuit.

L'intégrer en justifiant soigneusement la détermination de la (des) constante(s) d'intégration.

$$u_L + Ri = E ; L \frac{di}{dt} + Ri = E. (1)$$

solution générale de l'équation sans second membre : $i(t) = A \exp(-t/\tau)$.

solution particulière de (1), régime permanent : $i = E/R$.

solution générale de (1) : $i(t) = A \exp(-t/\tau) + E/R$.

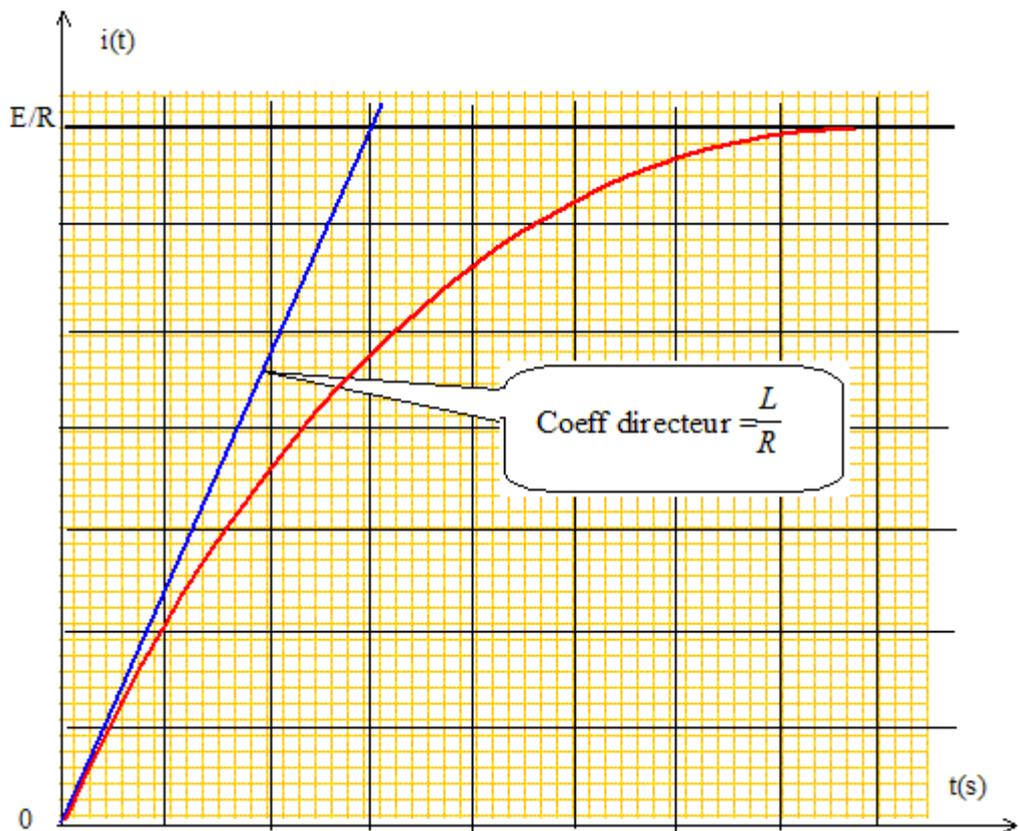
à $t=0$, l'intensité est nulle : $0 = A + E/R$; $A = -E/R$.

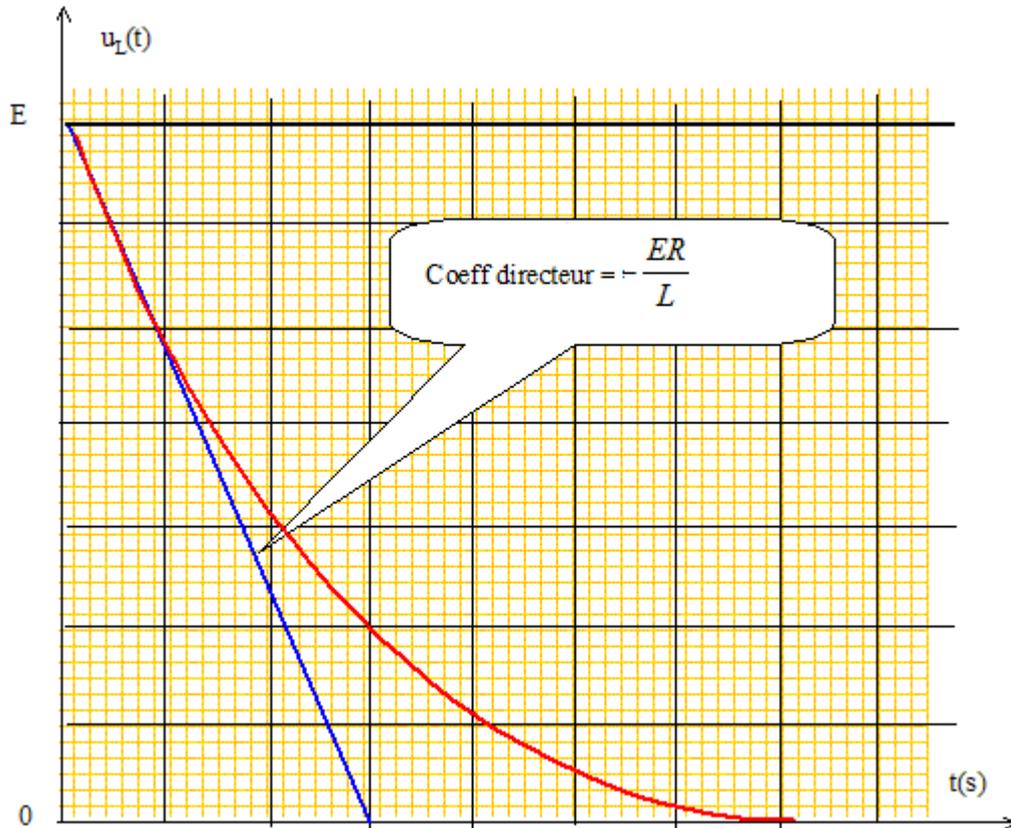
$$i(t) = E/R [1 - \exp(-t/\tau)].$$

En déduire l'expression de $u_L(t)$.

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LE/(R\tau) \exp(-t/\tau) ; u_L = E \exp(-t/\tau).$$

Tracer l'allure des courbes représentatives de $i(t)$ et de $u_L(t)$ en précisant les valeurs vers lesquelles ces fonctions tendent en régime permanent, ainsi que les pentes des tangentes à l'origine.





Déterminer complètement l'expression de $i(t)$ et de $u_L(t)$ pour $\frac{1}{2}T < t < T$.

$$u_L + Ri = 0 ; Ldi/dt + Ri = 0. (2)$$

solution générale de l'équation différentielle : $i(t) = A \exp(-t/\tau)$.

continuité de l'intensité ; à $t = \frac{1}{2}T$:

$$A \exp(-\frac{1}{2}T/\tau) = E/R - E/R \exp(-\frac{1}{2}T/\tau) ; A = E/R \exp(\frac{1}{2}T/\tau) - E/R = E/R [\exp(\frac{1}{2}T/\tau) - 1].$$

$$i(t) = E/R [\exp(\frac{1}{2}T/\tau) - 1] \exp(-t/\tau).$$

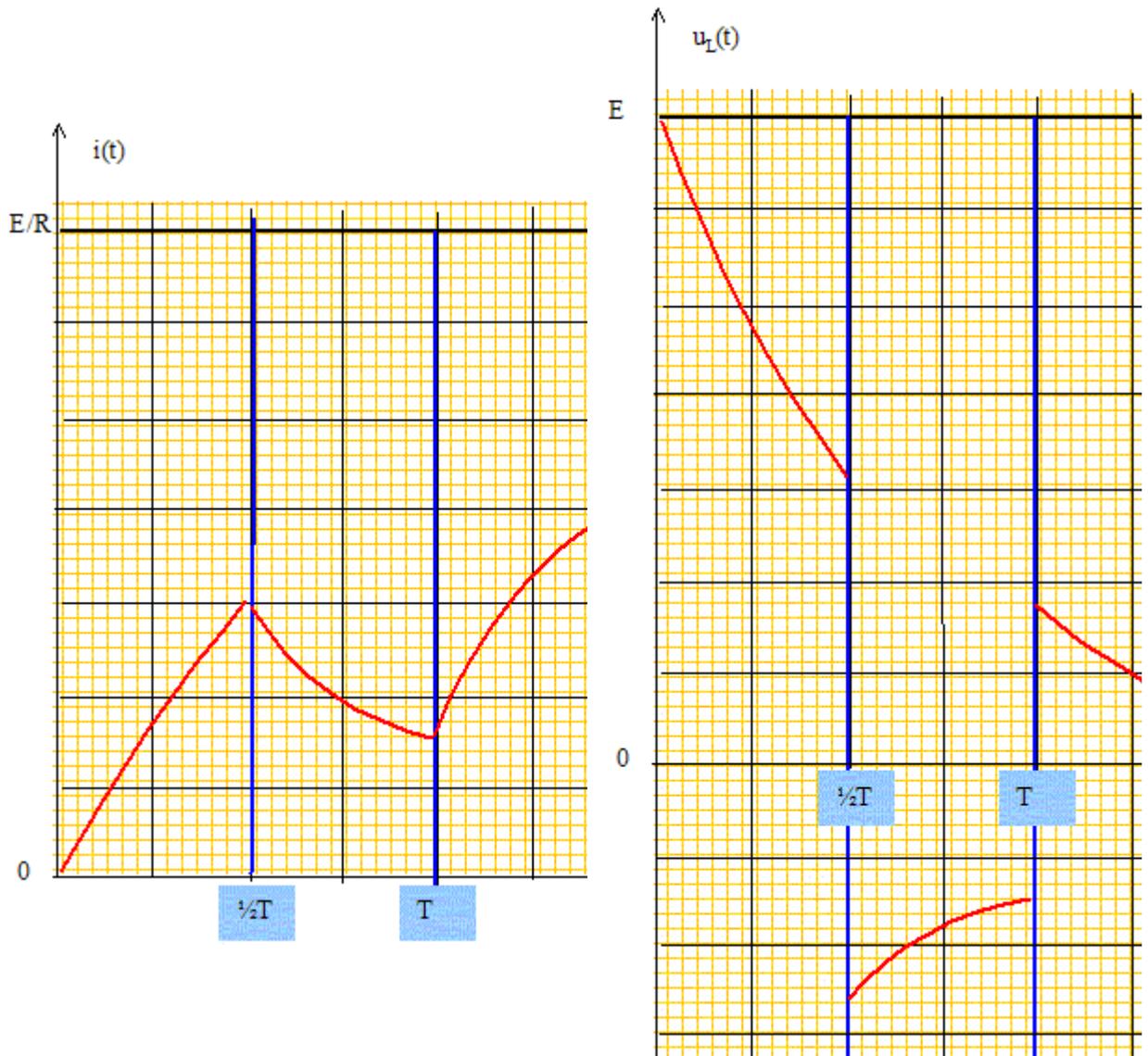
$$u_L = L di/dt = LE/(R\tau) [\exp(\frac{1}{2}T/\tau) - 1] \exp(-t/\tau) ; u_L = E [\exp(\frac{1}{2}T/\tau) - 1] \exp(-t/\tau).$$

Le G.B.F. est réglé sur la fréquence $f = 1,0 \text{ kHz}$, la bobine a pour inductance $L = 1,0 \text{ H}$ et $R = 1,0 \cdot 10^3 \Omega$

Comparer la période T de la tension délivrée par le G.B.F. et la constante de temps τ du circuit.

$$T = 1/f = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms} ; \tau = L/R = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}.$$

Tracer qualitativement l'évolution des graphes de $i(t)$ et $u_L(t)$ sur quelques périodes.



Dans le circuit ci-dessus, le G.B.F. est à présent en mode sinusoïdal.

En utilisant les analogies transitoire-alternatif écrire, à partir de l'équation différentielle établie, la loi

d'Ohm complexe liant les amplitudes complexes \underline{U} et \underline{I} respectivement de la tension aux bornes du dipôle AB et de l'intensité du courant le traversant.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_{AB} \quad (1)$$

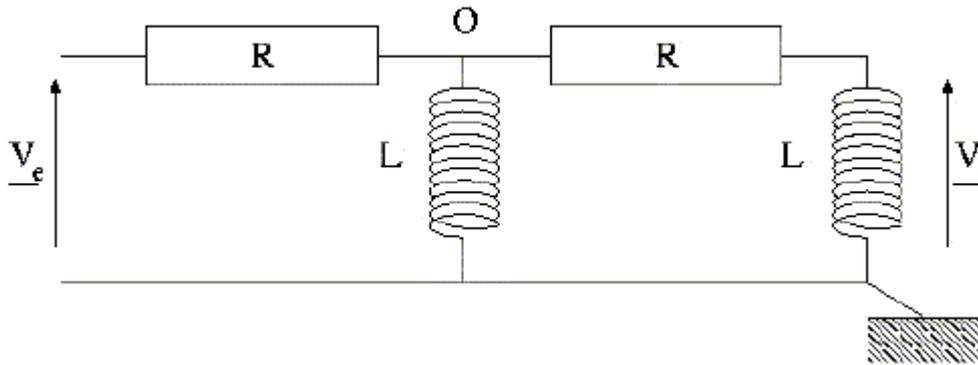
à la dérivée d/dt correspond $j\omega$ d'où : $j\omega L \underline{I} + R \underline{I} = \underline{U}$; $(j\omega L + R) \underline{I} = \underline{U}$.

En déduire l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle AB.

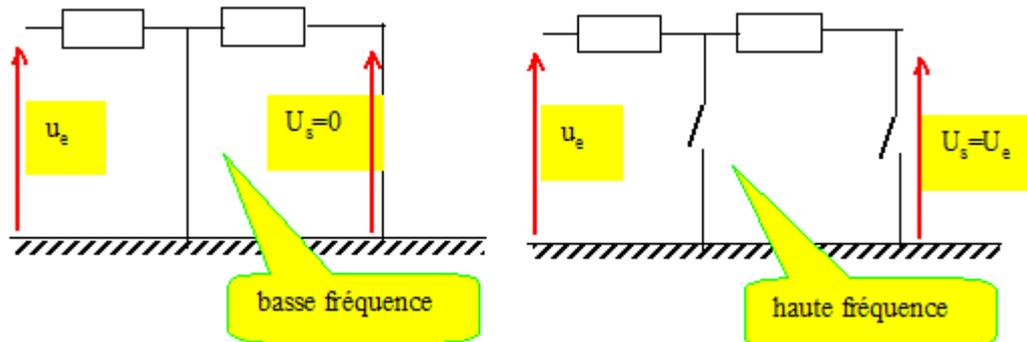
$$\underline{Z} = (j\omega L + R)$$

On s'intéresse au quadripôle ci-dessus, constitué de deux cellules (RL) enchainées, alimenté

par une tension sinusoidale de pulsation ω



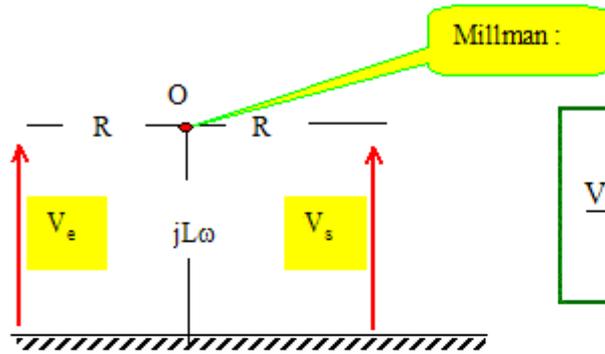
En étudiant le comportement asymptotique du quadripôle aux hautes et basses fréquences, préciser la nature du filtre ainsi constitué.



Filtre passe haut.

Déterminer la fonction de transfert $H(jx)$ de ce quadripôle en fonction de $x = L\omega/R$, après avoir précisé la dimension de x .

$L\omega$ et R sont des impédances en ohm ; $L\omega/R$ est sans dimension.



Millman :

$$\underline{V}_O = \frac{\frac{V_e}{R} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{V_e + V_s}{2 + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{V_e + V_s}{2}$$

$$\underline{V}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{V}_O = \frac{jx}{1 + jx} \left(\frac{(V_e + V_s)jx}{1 + 2jx} \right) = \frac{-x^2(V_e + V_s)}{1 - 2x^2 + 3jx}; (1 - x^2 + 3jx) \underline{V}_s = -x^2 \underline{V}_e \Rightarrow \underline{H} :$$

$$\underline{H} = \frac{-x^2(1 - x^2 - 3jx)}{(1 - x^2)^2 + 9x^2} \Rightarrow H = \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}}; \arg \underline{H} = \arg(-x^2) + \arg(1 - x^2 - 3jx) ;$$

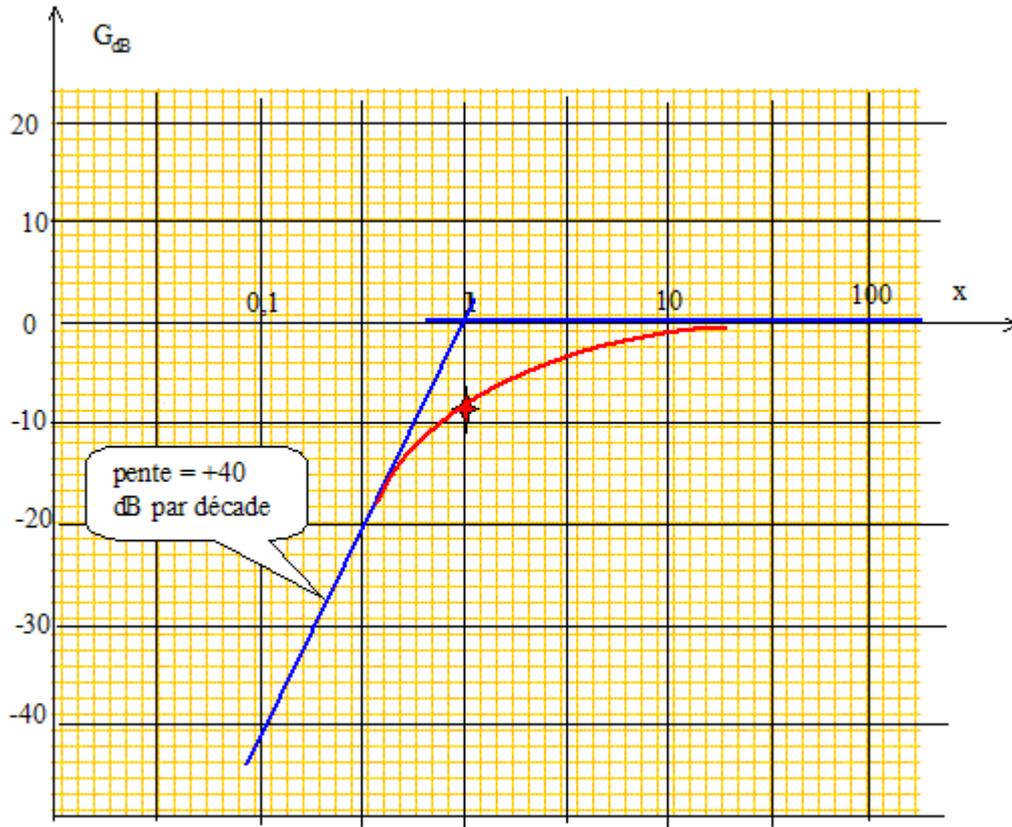
Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre, en le justifiant.

$$g_{dB} = 20 \log H = 40 \log x - 10 \log((1-x^2)^2 + 9x^2)$$

Si x tend vers 0, g_{dB} est équivalent à : $40 \log x$ drpote de pente 40 dB par décade.

Si $x = 1$; $g_{dB} = -10 \log 9 = -9,5 \text{ dB}$.

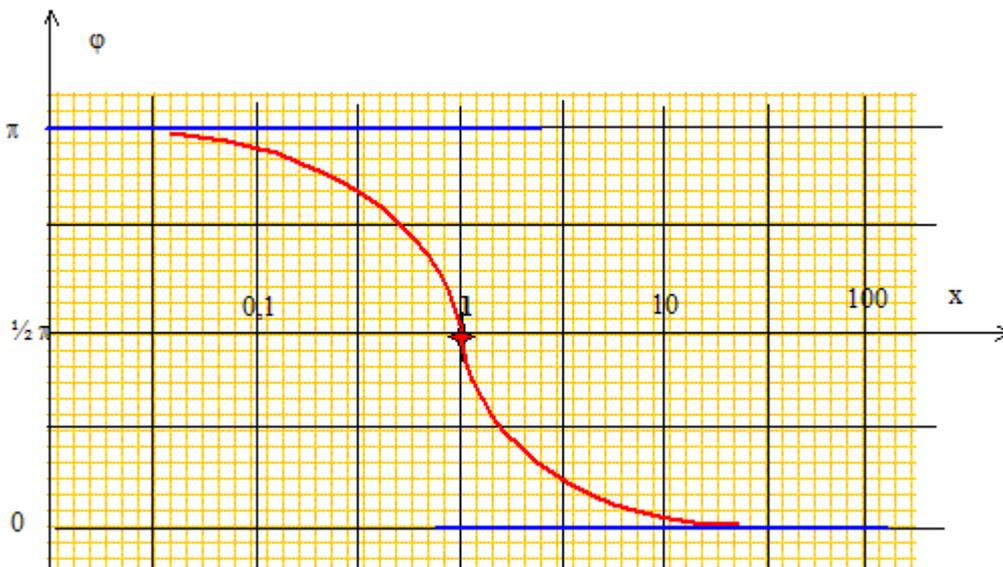
Si x tend vers l'infini, H tend vers 1 et g_{dB} tend vers 0, asymptote horizontale.



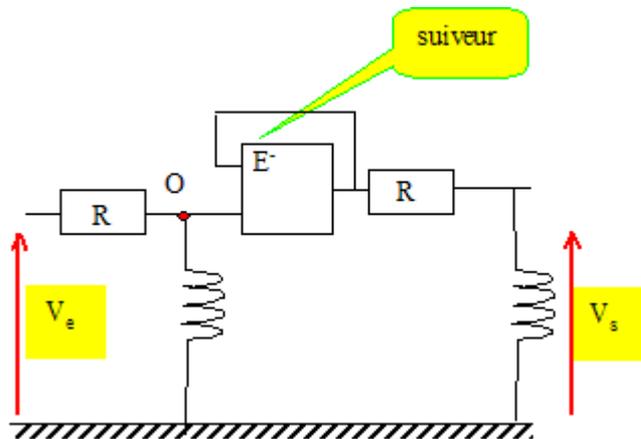
Tracer ensuite, sur les mêmes graphes, l'allure des courbes réelles $g_{dB} = f(\log x)$, où g_{dB} désigne le gain en décibel, et $\varphi = f(\log x)$ où φ désigne l'argument de la fonction de transfert.

$$\varphi = \pi \arctan [3x / (1-x^2)].$$

si x tend vers zéro, φ tend vers π ; si x tend vers 1, φ tend vers $\frac{1}{2}\pi$; si x tend vers l'infini, φ tend vers 0.



Comment modifier le montage pour obtenir un filtre dont la fonction de transfert s'écrirait comme le carré de la fonction de transfert d'un filtre (RL) ?



Exercice 77 :la spectrométrie de masse

Soit un spectromètre de masse.

Une substance organique est introduite dans la chambre d'ionisation où elle donne les fragments F_1^+ , F_2^+ , F_3^+ et F_4^+ de masse m_1 , m_2 , m_3 et m_4 respectivement.

Ces ions sont supposés arriver en A (à l'entrée de l'accélérateur) avec une vitesse négligeable. La tension accélératrice U_{AS} est de 4 000 V (S est à la sortie de l'accélérateur).

- Quel est le signe de U_{AS} ? Justifier.
- Etablir l'expression de la vitesse v d'un ion à la sortie de l'accélérateur en fonction de sa charge q , de sa masse m et de U_{AS} .

A la sortie de l'accélérateur, les ions pénètrent dans un tube de rayon de courbure moyen R placé dans un champ magnétique uniforme B perpendiculaire au plan contenant le tube.

- Quel sens doit avoir B si le collecteur est vers le bas ?
- Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule.
- Montrer que son mouvement est uniforme.
- Montrer que la trajectoire est plane et circulaire. Déterminer son rayon de courbure en fonction de m , q , B et v .
- Montrer que pour qu'une particule de masse m de charge q puisse sortir à l'autre extrémité du tube, il faut que: $B = \text{racine carrée}(2mU_{AS}/(qR^2))$
- Application numérique : F_1^+ est sorti pour $B_1 = 0,177$ T. Calculer m_1 puis M_1 la masse molaire des fragments F_1 . Données: constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ rayon : $R = 0,2$ m ; charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Les ions sont recueillis à la sortie du tube par un collecteur C. On mesure la charge reçue par le

collecteur pendant un même intervalle de temps Δt pour les différentes valeurs B_1, B_2, B_3 et B_4 de B permettant la sortie de F_1^+, F_2^+, F_3^+ et F_4^+ respectivement. pour $B_1, Q_1 = 5,60 \cdot 10^{-14} \text{ C}$; pour $B_2, Q_2 = 20,0 \cdot 10^{-14} \text{ C}$; pour $B_3, Q_3 = 33,6 \cdot 10^{-14} \text{ C}$ pour $B_4, Q_4 = 20,8 \cdot 10^{-14} \text{ C}$
 - Déterminer la composition du mélange (pourcentage molaire).

- Tracer le spectre de masse obtenu. En ordonnée : pourcentage En abscisse : masse molaire
 Données : $M_2 = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ $M_3 = 31 \text{ g.mol}^{-1}$ $M_4 = 32 \text{ g.mol}^{-1}$.

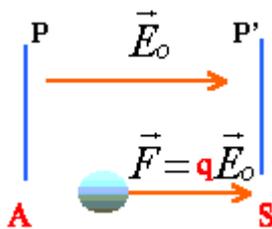
corrigé

le travail de la force électrique doit être positif, car la particule chargée doit être accélérée entre A et S.

travail de cette force = qU_{AS}

la charge étant positive, le potentiel de S doit être plus petit que celui de A. (U_{AS} positive)

Le champ électrique est dirigé vers les plus petits potentiels.



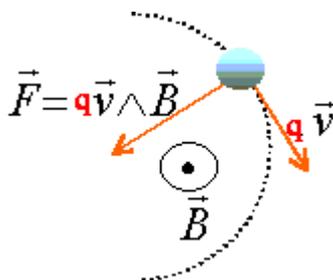
La variation d'énergie cinétique entre A et S est égale au travail de la force électrique.

L'énergie cinétique initiale est voisine de zéro.

$$0,5mv^2 = qU_{AS}$$

de même pour l'ion de masse m_i : $0,5m_i v_i^2 = qU_{AS}$

$$v^2 = 2qU_{AS}/m$$



La force magnétique est constamment perpendiculaire à la vitesse : en conséquence cette force ne travaille pas. L'énergie cinétique ne varie pas et la norme de la vitesse est constante : mouvement uniforme.

la trajectoire est contenue dans le plan défini par la vitesse et la force. La force est centripète.

Ecrire la seconde loi de Newton dans la base de Frenet suivant la normale :

$$qvB = mv^2 / R \text{ soit } R = mv / (qB) ; B = mv / (qR)$$

$$\text{or } v = (2qU_{AS}/m)^{1/2} \text{ d'où } B = (2mU_{AS}/(qR^2))^{1/2}.$$

$$\text{Calcul de } m_1 \text{ si } B_1 = 0,177 \text{ T} : B^2 = 2mU_{AS}/(qR^2) :$$

$$m_1 = q_1 R_1^2 B_1^2 / (2U_{AS})$$

$$q_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; R_1 = 0,2 \text{ m} ; B_1 = 0,177 \text{ T} ; U_{AS} = 4 \text{ 000 V}$$

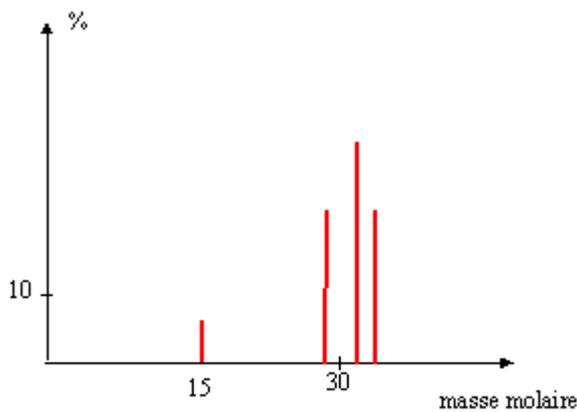
$$m_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} * 0,2^2 * 0,177^2 / 8000 = 2,5 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

$$\text{masse molaire} = m_1 N_A = 2,5 \cdot 10^{-26} * 6,02 \cdot 10^{23} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol} = 15 \text{ g/mol.}$$

composition molaire du mélange :

Chaque fragment porte une charge élémentaire : en divisant la charge collectée durant la durée Δt par la charge élémentaire on trouve le nombre de chaque fragment collecté.

	F_1^+	F_2^+	F_3^+	F_4^+	
$Q_i / 1,6 \cdot 10^{-19}$	$3,5 \cdot 10^5$	$1,25 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$	$1,3 \cdot 10^6$	total = $5 \cdot 10^6$
%	7	25	42	26	



EXERCICE 78 a :d'après concours interne d'ingénieur territorial 2005

électricité : pertes en ligne

Electricité

Une installation fonctionnant sous 220 v - 50 Hz monophasé comprend :

- *Un appareillage de puissance utile 29440 W, de rendement $\eta=0,8$ et de facteur de puissance $\cos\varphi=0,75$*
- *Un ensemble de 200 lampes de 100 W chacune.*

La ligne qui alimente cette installation est équivalente au dipole série de caractéristiques : $R_{li}=0,05 \Omega$; $L_{li} = 0,001 H$ et $C_{li} = 12500 \mu F$. On demande :

L'intensité du courant dans la ligne.

Le facteur de puissance de l'installation.

Les pertes par effet joule dans la ligne.

La puissance apparente au départ de la ligne.

La tension au départ de la ligne.

Le facteur de puissance au départ de la ligne.

corrigé

*On note U : valeur efficace de la tension ; I : intensité efficace du courant ; $P=UI \cos \varphi$ (watt)
puissance active*

$S= UI$, puissance apparente (VA) et $Q = UI \sin \varphi$ (var) puissance réactive

La puissance consommée par l'appareillage vaut : $P_{utile} / \text{rendement} = 29440 / 0,8 = 36800 W = 36,8 kW$

Q est positif si l'appareillage est inductif ; négatif si l'appareillage est capacitif

	P (watt)	S (VA)	$ Q $ (var)
<i>appareillage</i>	<i>36800</i>	<i>$P/\cos\varphi=36800/0,75 = 49067$</i>	<i>$S \sin\varphi= 32455$</i>
<i>lampes</i>	<i>20000</i>	<i>20000</i>	<i>0</i>
<i>total installation</i>	<i>56800</i>	<i>69067</i>	<i>32455</i>

intensité du courant dans la ligne : $I = S/U = 69067/220 = 314 \text{ A}$.

facteur de puissance de l'installation : $\cos\phi = P/S = 56800/69067 = 0,82$.

pertes par effet joule dans la ligne : $rI^2 = 0,05 \cdot 314^2 = 4930 \text{ W}$.

fréquence : $f = 50 \text{ Hz}$; pulsation $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$

réactance de la ligne $X = L\omega - 1/(C\omega) = 0,001 \cdot 314 - 1/(0,0125 \cdot 314) = 0,314 - 0,255 = 0,059 \Omega$

Puissance réactive de la ligne $Q_{li} = XI^2 = 0,059 \cdot 314^2 = 5817 \text{ var}$.

Puissance réactive totale : $Q = Q_{li} + Q_{inst} = 5817 + 32455 = 38272 \text{ var}$

Puissance active totale : $P = P_{li} + P_{inst} = 4930 + 56800 = 61730 \text{ W}$

Puissance apparente au départ de la ligne : $S = (P^2 + Q^2)^{1/2} = (38272^2 + 61730^2)^{1/2} = 72630 \text{ VA}$.

tension au départ de la ligne : $U = S/I = 72630/314 = 231 \text{ V}$.

facteur de puissance au départ de la ligne : $P/S = 61730/72630 = 0,85$.

exercice 78b :écoulement laminaire et perte de charge

résistance hydraulique et perte de charge

viscosité

viscosité d'un liquide

débit du sang

résistance hydraulique et perte de charge :

On se placera dans les conditions d'application de la loi de Poiseuille.

Calculer la résistance hydraulique d'un tuyau de cuivre de 12 mm de diamètre intérieur et de longueur 15m, pour de l'eau chaude de viscosité $0,8 \cdot 10^{-3}$ pascal .

vingt tuyaux identiques sont disposés en parallèle. Quel est la résistance hydraulique de l'ensemble des cinq tuyaux ?

Calculer la perte de charge dans l'installation pour un débit total de $180 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$.

Exprimer cette perte de charge par la hauteur d'une colonne d'eau.

Corrigé

perte de charge (Pa) = résistance hydraulique fois débit (m³/s)

loi de Poiseuille (écoulement laminaire)

$$\Delta p = 8\eta L / (\pi r^4) Q_v.$$

résistance hydraulique $8\eta L / (\pi r^4)$: L et r exprimés en mètres

$$R_h = 8 * 0,8 \cdot 10^{-3} * 15 / (3,14 * 64 \cdot 10^{-12}) = 2,36 \cdot 10^7 \text{ Pa m}^{-3} \text{ s.}$$

5 tuyaux en parallèle : les débits s'ajoutent soit $Q_v = 5\Delta p / R_h$.

$$\Delta p = Q_v R_h / 5 .$$

résistance hydraulique de l'ensemble : $2,36 \cdot 10^7 / 5 = 4,72 \cdot 10^6 \text{ Pa m}^{-3} \text{ s.}$

débit : $180 \text{ L/min} = 0,18 / 60 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$

pertes de charge : $\Delta p = 4,72 \cdot 10^6 * 3 \cdot 10^{-3} = 4,416 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$

hauteur d'eau correspondante : diviser par $\rho_{\text{eau}} g$ soit :

$$4,416 \cdot 10^4 / (9,8 \cdot 10^3) = 1,45 \text{ m.}$$

Perfusion :

On veut perfuser en 60 min un patient avec un flacon de 500 ml de plasma de densité 1,03 et de viscosité $1,4 \cdot 10^{-3}$ pascal. L'aiguille utilisée à une longueur de 3 cm et un diamètre intérieur de 0,4 mm. On négligera la résistance hydraulique des tubulures, et on supposera le régime d'écoulement permanent laminaire.

Quel est le débit d'écoulement du plasma ?

Calculer la résistance hydraulique de l'aiguille et en déduire la perte de charge.

La pression veineuse du patient étant de 4 mm de mercure, à quelle hauteur minimale doit-on installer le flacon ?

Données : $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$; Masse volumique du mercure : $\mu (\text{Hg}) = 13 \cdot 600 \text{ kg. m}^{-3}$.

corrigé

débit volumique : $0,5 \cdot 10^{-3} / 3600 = 1,39 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 / \text{s.}$

résistance hydraulique aiguille : $L = 0,03 \text{ m}$ et $r = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$$8\eta L / (\pi r^4) = 8 * 1,4 \cdot 10^{-3} * 0,03 / (3,14 * 16 \cdot 10^{-16}) = 6,69 \cdot 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s.}$$

perte de charge : résistance fois débit

$$6,69 \cdot 10^{10} * 1,39 \cdot 10^{-7} = 9,28 \cdot 10^3 \text{ Pa.}$$

correspondance en hauteur d'eau : diviser par $9,8 \cdot 10^3$ donne 0,94 m.

pression veineuse en hauteur d'eau :

760 mm Hg correspond à $0,76 \cdot 9,8 \cdot 13600 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa ou 10,3 m d'eau

quand à 4 mm de mercure : $0,004 \cdot 10,3 / 0,760 = 0,0544$ m

hauteur totale minimale : faire la somme soit 0,994 m d'eau

puis diviser par la densité du plasma : 0,965 m de plasma.

Viscosité d'un liquide :

Une huile de densité $d = 0,86$, est contenue dans un large réservoir dont le niveau est supposé constant à 30 cm du fond. Pour déterminer sa viscosité, on fait s'écouler par le fond du récipient, à travers un tube cylindrique horizontal de diamètre intérieur 4 mm et de longueur 15 cm. On supposera l'écoulement laminaire.

Exprimer la perte de charge dans le tube de verre.

Sachant qu'en une minute, le volume d'huile écoulé est de 53 mL, calculer la résistance hydraulique du tube.

Calculer la viscosité de l'huile.

corrigé

vitesse à l'entrée du petit tube $V_1 = \text{racine carrée}(2gh) = \text{racine carrée}(2 \cdot 9,8 \cdot 0,3) = 2,42$ m/s

vitesse à la sortie de ce tube : débit réel ($\text{m}^3/\text{s} / \text{section} (\text{m}^2) = (53 \cdot 10^{-6} / 60) / (3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-6}) = 0,07$ m/s

relation de Bernoulli appliquée aux deux extrémités de ce tube horizontal :

à l'entrée du tube : $\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 + p_1$

à la sortie du tube : $\frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + p_2$ avec $z_1 = z_2$.

$\Delta p = \frac{1}{2}\rho (V_1^2 - V_2^2) = 0,5 \cdot 860 (2,42^2 - 0,07^2) = 2516$ Pa

[si la densité est 0,86 la masse volumique est 860 kg/m³]

la loi de Poiseuille donne également les pertes de charge :

$\Delta p = 8\eta L / (\pi^4) Q_v$

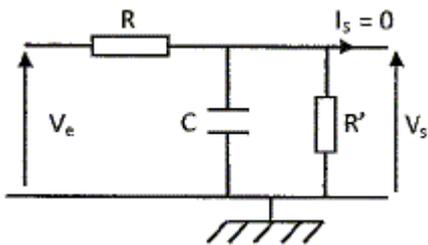
résistance hydraulique : $\Delta p / Q_v = 2516 / (53 \cdot 10^{-6} / 60) = 2,8 \cdot 10^9$ Pa m⁻³ s

$8\eta L / (\pi^4) = 8 \eta \cdot 0,15 / (3,14 \cdot 2^4 \cdot 10^{-12}) = 2,4 \cdot 10^{10} \eta$.

$2,4 \cdot 10^{10} \eta = 2,8 \cdot 10^9$ d'où la viscosité : $1,15 \cdot 10^{-1} \text{ Pa}$.

Exercice 79 :électronique : fonction de transfert

Déterminer la fonction de transfert $H = V_s/V_e$ du circuit ci-dessous.



On note Y_1 l'admittance complexe de la portion comprenant le condensateur et R' en dérivation :

$$Y_1 = 1/R' + jC\omega = (1 + jR'C\omega) / R'; \text{ impédance complexe } Z_1 = R' / (1 + jR'C\omega).$$

On note i l'intensité complexe qui travers R et Z_1 . $V_e = (R + Z_1) i$; $V_s = Z_1 i$;

$$H = Z_1 / (R + Z_1) \text{ avec } R + Z_1 = [R(1 + jR'C\omega) + R'] / (1 + jR'C\omega)$$

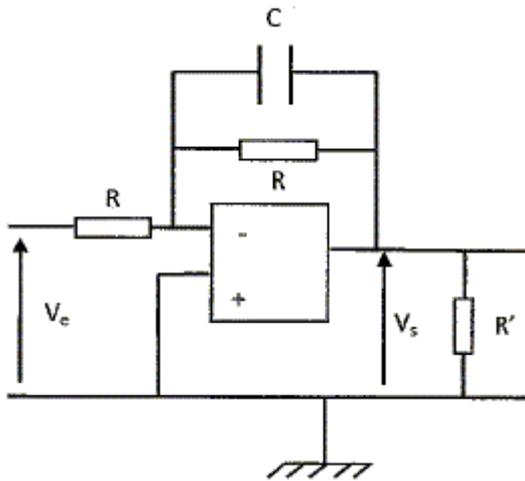
$$H = R' / (R + R' + jR'RC\omega) = 1 / (R/R' + 1 + jRC\omega).$$

On note $RC\omega = \alpha$; $H = 1 / (R/R' + 1 + j\alpha)$.

Déterminer H pour R' infini. $H = 1 / (1 + j\alpha)$.

Déterminer H pour $R' = R$. $H = 1 / (2 + j\alpha)$.

Soit le montage ci-dessous dans lequel l'A.O est idéal.



Déterminer la fonction de transfert $H = \underline{V}_s / \underline{V}_e$.

On note \underline{Z}_1 l'impédance complexe de la portion comprenant le condensateur et R en dérivation : $\underline{Z}_1 = R / (1 + jRC\omega)$.

L'entrée non inverseuse est reliée à la masse : l'entrée inverseuse est une masse virtuelle.

\underline{Z}_1 et R sont traversée par la même intensité i. $\underline{V}_s = \underline{Z}_1 i$; $\underline{V}_e = -R i$; $\underline{H} = -\underline{Z}_1 / R$

$\underline{H} = -1 / (1 + jRC\omega)$. $\underline{H} = -1 / (1 + j\alpha)$.

Avantage de ce montage par rapport au précédent : la fonction de transfert est indépendante de la charge R' .

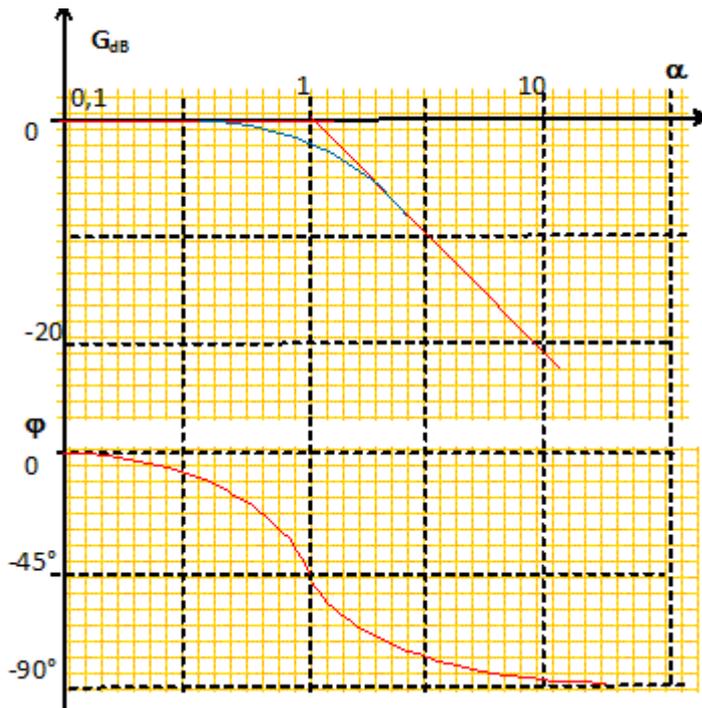
Diagrammes de Bode :

Module de \underline{H} : $|\underline{H}| = (1 - j\alpha) / (1 + \alpha^2) = (1 + \alpha^2)^{-1/2}$.

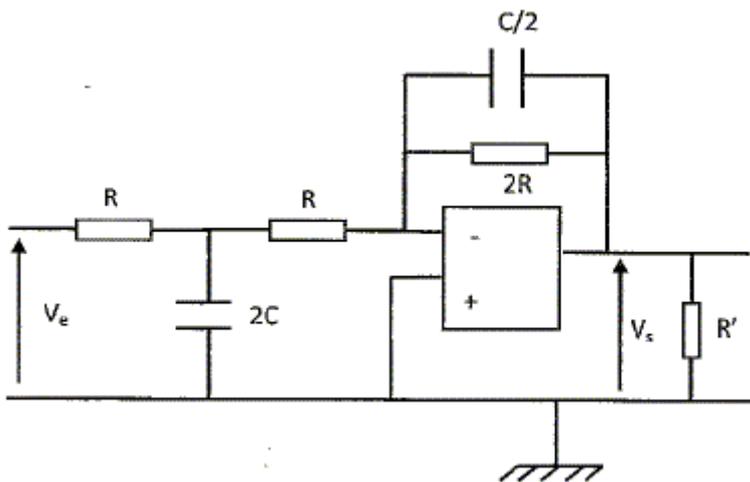
Gain en décibel : $G = 20 \log |\underline{H}| = -10 \log (1 + \alpha^2)$

Si α^2 est petit devant 1, $G \sim -10 \log 1 = 0$; Si α^2 est grand devant 1, $G \sim -20 \log \alpha$

$\tan \varphi = -\alpha$;



Déterminer la fonction de transfert $H = V_s/V_e$.



La fonction de transfert concernant la partie de droite (A.O, R, 2R et $\frac{1}{2}C$) a été déterminée ci-dessus (second calcul).

On remplace dans Z_1 : $\frac{1}{2}C * 2R = CR$, donc $RC\omega = \alpha$ ne change pas.

Un calcul comparable conduit à : $H_1 = -1/(1,5+j\alpha)$.

La fonction de transfert concernant la partie de gauche (R, 2C) a été déterminée ci-dessus (premier calcul avec R' infini).

$RC\omega = \alpha$ devient $2RC\omega = 2\alpha$ $H_2 = 1/(1+j2\alpha)$.

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2 = -1 / [(1,5+j\alpha)(1+j2\alpha)]$$

$$\underline{H} = -(1-2\alpha^2 -3,5j\alpha) / [(1,5-2\alpha^2)^2 +12,25\alpha^2]$$

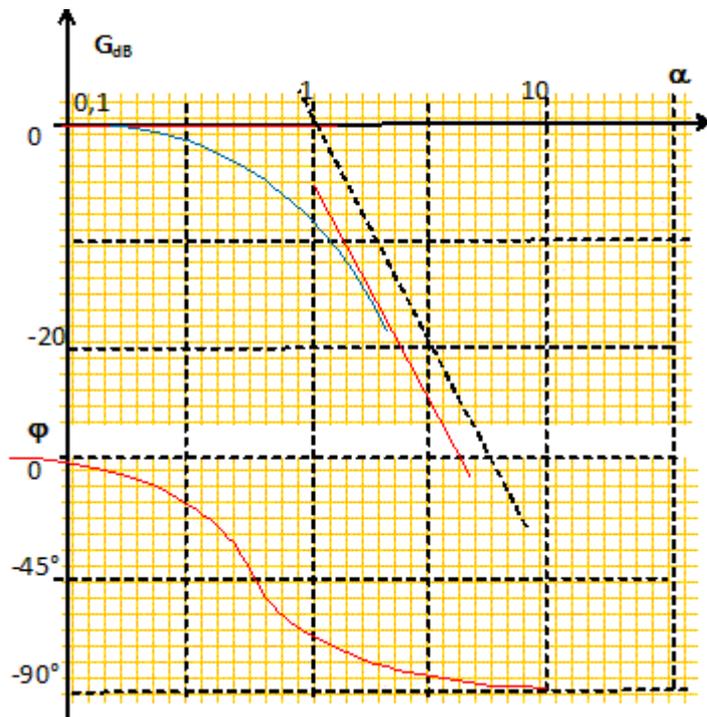
Diagrammes de Bode :

$$\text{Module de } \underline{H} : |\underline{H}| = [(1,5-2\alpha^2)^2 +12,25\alpha^2]^{-1/2}$$

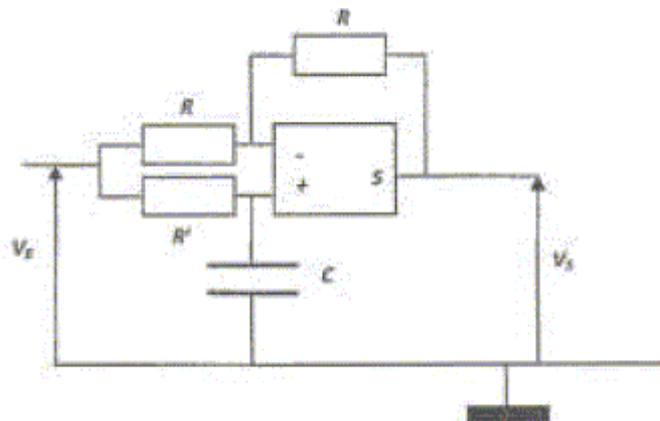
$$\text{Gain en décibel : } G = 20 \log |\underline{H}| = -10 \log [(1,5-2\alpha^2)^2 +9\alpha^2]$$

Si α^2 est petit devant 1, $G \sim -10 \log 1 = 0$; Si α^2 est grand devant 1, $G \sim -10 \log 4\alpha^4 = -6 -40 \log \alpha$

$$\tan \varphi = -3,5\alpha / (1,5-2\alpha^2) ;$$



On considère le circuit ci-dessous comprenant un amplificateur opérationnel supposé parfait et fonctionnant en régime linéaire.



Rappeler les propriétés d'un amplificateur opérationnel parfait. on précisera les résistances d'entrée et de sortie dans ce cas.

L'impédance d'entrée est infinie, celle de sortie est nulle.

Les intensités des courants d'entrée sont nulles.

Les potentiels des deux entrées sont identiques

Quels sont les ordres de grandeurs des résistances d'entrée et de sortie d'un amplificateur opérationnel réel ?

Impédance d'entrée supérieure à $10\text{ M}\Omega$; impédance de sortie inférieure à $200\ \Omega$

Déterminer la fonction de transfert $H = V_s / V_e$ en régime sinusoïdal.

Exprimer les potentiels des deux entrées E^+ et E^- à partir du théorème de Millman :

$$\begin{aligned} V^- &= \frac{\frac{V_s + V_e}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \Rightarrow V^- = \frac{1}{2}(V_s + V_e) \\ V^+ &= \frac{\frac{V_e}{\frac{1}{R'} + jC\omega}}{\frac{1}{R'} + jC\omega} \Rightarrow V^+ = \frac{V_e}{1 + jCR'\omega} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} V^- &= \dots \\ V^+ &= \dots \end{aligned}} \right\} V^+ = V^- \Rightarrow \frac{V_e}{1 + jCR'\omega} = \frac{1}{2}(V_s + V_e)$$

$$2V_e = (V_s + V_e)(1 + jCR'\omega)$$

$$V_e(1 - jCR'\omega) = V_s(1 + jCR'\omega)$$

$$V_s / V_e = (1 - jCR'\omega) / (1 + jCR'\omega) = (1 - jCR'\omega)^2 / [1 + (CR'\omega)^2]$$

$$H = (1 - jCR'\omega)^2 / [1 + (CR'\omega)^2].$$

Déterminer le module de H et en déduire la fonction de ce montage.

$$\underline{H} = (1 - jCR'\omega)^2 / [1 + (CR'\omega)^2] = (1 - (CR'\omega)^2 - 2jCR'\omega) / [1 + (CR'\omega)^2]$$

$$|\underline{H}| = \frac{[(1 - (CR'\omega)^2)^2 + (2CR'\omega)^2]^{1/2}}{[1 + (CR'\omega)^2]}$$

$$|\underline{H}| = \frac{[(1 + (CR'\omega)^4 - 2(CR'\omega)^2 + 4(CR'\omega)^2)]^{1/2}}{[1 + (CR'\omega)^2]}$$

$$|\underline{H}| = \frac{[(1 + (CR'\omega)^4 + 2(CR'\omega)^2)]^{1/2}}{[1 + (CR'\omega)^2]}$$

$$|\underline{H}| = \frac{[(1 + (CR'\omega)^2)^2]^{1/2}}{[1 + (CR'\omega)^2]}; |\underline{H}| = 1.$$

La tension de sortie est identique à la tension d'entrée.

On suppose maintenant que $V_E=0$ pour $t<0$ et $V_E=E_0$ pour $t>0$.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par V_s .

$$V_e (1 - CR'j\omega) = V_s (1 + CR'j\omega)$$

Or la multiplication par $j\omega$ correspond à la dérivation d/dt :

$$V_e + CR' dV_e/dt = V_s + R'C dV_s/dt$$

Or $V_e = E_0$ d'où $dV_e/dt = 0$ et par suite : $V_e = V_s + R'C dV_s/dt$

$$dV_s/dt + 1/(R'C) V_s = E_0/(R'C) \quad (1)$$

En déduire l'expression de V_s . Tracer $V_s(t)$.

On pose : $\tau = R'C$.

Solution particulière de (1) (régime permanent) : $V_s = E_0$.

solution générale de l'équation sans second membre : $V_s = A \exp(-t/\tau)$.

Solution générale de (1) : $V_s = A \exp(-t/\tau) + E_0$.

condition initiale : $V_s=0$ d'où $A = -E_0$.

$$V_s = E_0(1 - \exp(-t/\tau)).$$

Avant de mourir, il faut avoir fait un enfant,
écrit un livre et planté un arbre.

Proverbe chinois.

TABLE DES MATIERES

PREFACE	1
EXERCICE1 : champ électromagnétique dans le vide.....	1
Exercice 2 : champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant.....	1
Exercice 3 : <i>rayonnement de l'électron dans le modèle de Thomson</i>	1
Exercice 4 : courant alternatif sinusoïdal	1
EXERCICE 5.Rappel de cours.....	1
puissance active watt, réactive var, apparente VA	1
Exercice 7.....	1
<i>Exercice 8 :études graphiques -facteur de puissance</i>	1
EXERCICE 9. application du théorème d'Ampère.....	1
EXERCICE 10 : Caractéristiques d'une bobine réelle	2
Exercice 11 : Spire chargée en rotation.....	2
Exercice 12 : Sphère chargée en rotation	2
EXERCICE 13 : étude magnétique du stator du moteur asynchrone.....	2
EXERCICE 14 : Etude électrique du rotor du moteur asynchrone	2
Exercice 15 :Oscillations électriques entretenues	3
Exercice 16 :Fonctionnement de la génératrice.....	3
Exercice 17 :Etude d'un onduleur,	3
Exercice 18. utiliser l'énergie électrostatique	4
EXERCICE 19.....	4
Exercice 20 : Origine du champ magnétique.....	4
EXERCICE 22 : Spectrographe de masse.....	4
EXERCICE 23 : bobine	5
EXERCICE :24 champ magnétique	6
<i>Exercice 25. expérience d'OErsted</i>	6
EXERCICE 26 bobines de Helmholtz	6
Exercice 27 bobine longue ou solénoïde.....	6
Exercice 28 : Champ du solénoïde.....	6
Exercice 29 :bobinage torique à section carrée.	7
EXERCICE 30 :champ et potentiel créés à grande distance par un dipole	7
Exercice 31 : application du théorème de Gauss	7

Exercice 33/bobines de Helmholtz- champ magnétique uniforme	7'
Exercice 34 :APPROXIMATIONS.....	7'
Exercice 35 :	8'
Exercice 37.....	8'
<i>condensateur et bobine en dérivation.....</i>	8'
Exercice 38.....	8'
<i>self pure et résistance en dérivation</i>	8'
Exercice 39.....	8'
<i>condition d'équilibre d'un pont de Wheatstone</i>	8'
Exercice 40.....	8'
<i>circuits couplés</i>	8'
exercice 41.....	8'
puissance active	8'
Exercice42	8'
<i>mesure de puissance , méthode des 3 ampèremètres</i>	8'
EXERCICE 44 : <i>condensateur.....</i>	8'
EXERCICE 45 :Th. de gauss: calcul du champ puis du potentiel	9'
EXERCICE 46.....	9'
<i>association série 3 condensateurs.....</i>	9'
Exercice 47 : électrostatique : potentiel et champ créés par deux charges sur un axe	9'
EXERCICE 48 spire plane dans un champ magnétique uniforme	9'
<i>EXERCICE 49 : Norton, Thevenin, diviseur de tension et de</i>	9'
Exercice 50 : Montage diviseur de tension et montage diviseur de courant :	10'
EXERCICE 52 : Lois du courant continu.....	10'
EXERCICE 53 : Energie électrostatique d'une distribution discrète de charges	10'
EXERCICE 54 :champ et potentiel électrique crée en son centre par un arc de cercle ; crée en un point M par un cylindre uniformément chargé en surface.....	10'
EXERCICE 55 : Champ électrique crée par un cylindre infini portant la charge surfacique σ	11'
EXERCICE 56 : électrostatique	11'
EXERCICE 57 :magnétostatique	11'
EXERCICE 58 :Moteur asynchrone.....	11'
EXERCICE 59 : travail des forces magnétiques – inductances	11'
EXERCICE 60 :champ et potentiel électrique	12'
Exercice 61 :le phénomène d'induction électromagnétique	12'
<i>EXERCICE 62 : barre livrée à elle même :</i>	12'

EXERCICE 63 :Dipôle RLC, montage en parallèle	13!
EXERCICE 64 : Champ et potentiel électrostatiques.	13:
EXERCICE 65/Plan infini portant une charge surfacique	13:
EXERCICE 66 RLC.....	14:
Exercice 68 RLC.....	14:
EXERCICE 69/Champ magnétique crée par une spire circulaire : dipole magnétique.....	14:
Exercice 70 :Electrocinétique : fonction de transfert, diagramme de Bode	14:
Exercice 71 : Electrostatique : dipôle dans un champ extérieur uniforme	15!
Exercice 72 :régimes transitoires dans un circuit RC.....	15!
Exercice 73 :Electricité.....	16:
Exercice 74 :Relever le facteur de puissance d'un moteur	16:
<i>Exercice 76 :Etude de quelques montages inductifs, filtre passe haut, diagramme de Bode</i>	<i>16:</i>
Exercice 77 :la spectrométrie de masse.....	17!
EXERCICE 78 a :d'après concours interne d'ingénieur territorial 2005.....	17:
Exercice 78b :écoulement laminaire et perte de charge	17!
Exercice 79 :électronique : fonction de transfert.....	18:

